



视频

第 5 章

CHAPTER 5

直流动态电路的分析

本章主要内容：电路中常用的元件除了电阻元件之外，还有电容元件和电感元件。这两种元件为动态元件，含有动态元件的电路称为动态电路。在动态电路中，描述激励-响应关系的数学方程是微分方程。

本章首先介绍电容元件、电感元件，然后应用微分方程理论，从微分方程出发对一阶电路和二阶电路过渡过程进行分析。主要内容有一阶 RC 、 RL 电路的零输入响应、零状态响应、完全响应，二阶 RLC 串联电路的零输入响应，二阶 RLC 串联电路和 GCL 并联电路的完全响应。

5.1 动态元件

在电路分析中通常将电路中的独立源称为激励，在激励或元件内部储能作用下所产生的电压或电流称为响应。习惯上，电阻元件和直流电源构成的电路称为电阻电路。电阻电路在任意时刻 t 的响应只与同一时刻的激励有关，与过去的激励无关，因此电阻电路是“无记忆”功能的，或者说是“即时”的。电容元件和电感元件的伏安特性是微分或积分关系，称为动态元件。电路模型中出现动态元件的原因：一是在实际电路中为了能够实现某种功能，有意接入电容器、电感器等器件；二是当信号变化很快时，一些实际器件已不能再用电阻模型来表示。



知识点

5.1.1 电容元件

电容元件简称电容，是电路的基本元件，是实际电容器的理想化模型，表征电容器的主要物理特性。

电容器种类很多，构成原理基本相同，是由两个金属极板间隔以不同介质所组成的。按介质材料分有瓷片电容器、云母电容器、电解电容器等；按极板形状分有平板电容器、圆柱形电容器等。当两个极板与电源两端相连，电容器的两个极板分别存储等量的异性电荷，电子充满极板间的介质，形成电场，储存有电场能量，当电源移去后，绝缘介质不能中和电荷，能量能够继续保存，所以电容器为储能元件，广泛应用于电力、电子、通信等领域，起滤波、隔直、去噪等作用。

在任意时刻 t ，电容元件的电荷 $q(t)$ 和电压 $u_C(t)$ 之间的关系可以用 $q-u_C$ 平面上的一

条曲线来确定, $q(t)$ 和 $u_C(t)$ 分别为电荷和电压的瞬时值, 如果 $q-u_C$ 平面上的特性曲线是一条过原点的直线, 且不随时间而变化, 此电容元件称为线性时不变电容元件。

线性时不变电容元件的电路符号如图 5-1 所示。两极板之间的电压与极板上储存的电荷之间满足线性关系:

$$q(t) = Cu_C(t) \quad \text{或} \quad C = \frac{q(t)}{u_C(t)} \quad (5-1)$$

式中: C 为正值, 它是用来度量特性曲线斜率的, 表示电容元件的参数, 称为电容(量), 表征电容元件储存电荷的能力。在国际单位制中, 电容 C 的单位为法拉(简称法), 用 F 表示。当电容两端充上 $1V$ 的电压时, 极板上若储存了 $1C$ 的电量, 则该电容的值为 $1F$ 。在实际应用中, 电容的单位法拉太大, 常用微法(μF)和皮法(pF), 其换算关系是 $1\mu F = 10^{-6}F$, $1pF = 10^{-12}F$ 。

当 C 为常数时, 称为线性电容; 当 C 不为常数时, 称为非线性电容。 C 随时间变化, 称为时变电容; 否则, 称为时不变电容。如无特别说明, 本书讨论的均为线性时不变电容。

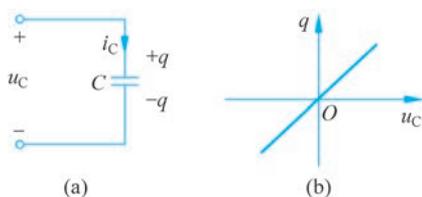


图 5-1 电容元件符号

1. 电容元件的伏安关系

当电容元件两端的电压随时间变化时, 极板上存储的电荷量随之变化, 和极板相接的导线中就有电流。对于线性时不变电容, 若 u_C 、 i_C 的参考方向是如图 5-1(a) 所示的关联参考方向时, 则电容的伏安关系式为

$$i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dCu_C(t)}{dt} = C \frac{du_C(t)}{dt} \quad (5-2a)$$

对该式积分有

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau \quad (5-2b)$$

若 u_C 、 i_C 的参考方向是非关联参考方向, 则有

$$i_C(t) = -C \frac{du_C(t)}{dt}$$

式(5-2)表明: 在某一时刻, 电容的电流取决于该时刻电容电压的变化率。电容元件的电压与电流具有动态关系, 是动态元件。

(1) 当电容上的电压发生剧变时, 将会有非常大的电流流过电容。在实际电路中, 通过电容的电流总为有限值, 这意味着 $\frac{du_C}{dt}$ 必须为有限值, 也就是说, 电容两端电压 u_C 必定是时间 t 的连续函数而不能跃变。

(2) 在直流电路中, 由于电压不随时间变化, 电容元件的电流为零, 故电容元件相当于开路。电容元件有隔断直流的作用。

由式(5-2)可得电容上的电压为

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_C(\tau) d\tau = u_C(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_C(\tau) d\tau \quad (5-3)$$

式中: $u_C(t_0)$ 为在 $t=t_0$ 时电容上的电压。

式(5-3)表明: 在某一时刻 t , 电容电压的数值不仅取决于该时刻的电流值, 而且取决于

从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电流值,也就是说与电流的“全部过去历史”有关,因此说电容电压有“记忆”电流的性质,电容是一种“记忆元件”。通常研究问题总有一个起点,对此之前电容电流的情况不必了解,所以只需知道某一初始时刻 t_0 电容的初始电压值 $u_C(t_0)$ 及 t_0 后电容的电流情况,即可确定 t_0 后电容的电压。

电容电压具有连续性,即若电容电流 $i_C(t)$ 在闭区间 $[t_a, t_b]$ 内为有界的,则电容电压 $u_C(t)$ 在开区间 (t_a, t_b) 内为连续的。对任意时间 t ,且 $t_a < t < t_b$,有

$$u_C(t_+) = u_C(t_-) \quad (5-4)$$

式(5-4)表明:任何时刻 t ,电容电压都不能跃变,在动态电路分析中经常要用到这一结论。但需注意应用的前提条件,当电容电流为无界时就不能使用。

2. 电容元件的储能

在关联参考方向下,电容的瞬时功率是电容电压和电容电流的乘积,即

$$p_C(t) = u_C(t)i_C(t) \quad (5-5)$$

若 $p_C(t)$ 为正值,则表明该元件消耗或吸收功率;若 $p_C(t)$ 为负值,则表明该元件产生或释放功率。

在 $t_1 \sim t_2$ 期间对电容 C 充电,在此期间供给电容的能量为

$$\begin{aligned} w_C(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} p_C(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} u_C(\tau) i_C(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_2} u_C(\tau) C \frac{du_C(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} C [u_C^2(t_2) - u_C^2(t_1)] \end{aligned} \quad (5-6)$$

式(5-6)表明:在 $t_1 \sim t_2$ 期间供给电容的能量只与时间端点的电压值 $u_C(t_1)$ 和 $u_C(t_2)$ 有关,与此期间的其他电压值无关。 $\frac{1}{2} C u_C^2(t_1)$ 表示 t_1 时刻电容的储能,即 $w_C(t_1) = \frac{1}{2} C u_C^2(t_1)$, $\frac{1}{2} C u_C^2(t_2)$ 表示 t_2 时刻电容的储能,即 $w_C(t_2) = \frac{1}{2} C u_C^2(t_2)$ 。

电容 C 在某一时刻 t 的储能为

$$w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) \quad (5-7)$$

式(5-7)表明:电容元件在某一时刻的储能只取决于该时刻的电压值,而与电压的过去变化进程无关。电容是一个储能元件,在 $t_1 \sim t_2$ 时间内,当 $w_C(t_2) > w_C(t_1)$ 时,电容吸收能量,即电容充电;当 $w_C(t_2) < w_C(t_1)$ 时,电容释放能量,即电容放电。电容与电路其他部分之间可实现能量的相互转换。理想电容元件在这种转换过程中其本身并不消耗能量。

例 5-1 如图 5-2(a)所示电路中的 $u_S(t)$ 波形如图 5-2(b)所示,已知电容 $C = 1\text{F}$,求电流 $i_C(t)$ 、功率 $p_C(t)$ 和储能 $w_C(t)$,并画出它们的波形。

解: 由图 5-2(a)可以得出 $u_C(t) = u_S(t)$,由图 5-2(b) $u_S(t)$ 波形可以写出 $u_C(t)$ 的表达式为

$$u_C(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -2(t-2), & 1 < t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

由式(5-2),可以得出电容电流的表达式为

$$i_C(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2, & 0 \leq t < 1 \\ -2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

电容电流的波形如图 5-2(c)所示。

根据式(5-5),可求得电容元件的瞬时功率为

$$p_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 4t, & 0 \leq t < 1 \\ 4(t-2), & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

电容元件的功率波形如图 5-2(d)所示。 $p_C(t) > 0$ 表示电容吸收功率, $p_C(t) < 0$ 表示电容发出功率,两部分面积相等,说明电容元件不消耗功率,只与电源进行能量交换。

根据式(5-7)可求得电容元件的储能表达式为

$$w_C(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 2t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 2(t-2)^2, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$$

电容元件储能的波形如图 5-2(e)所示。

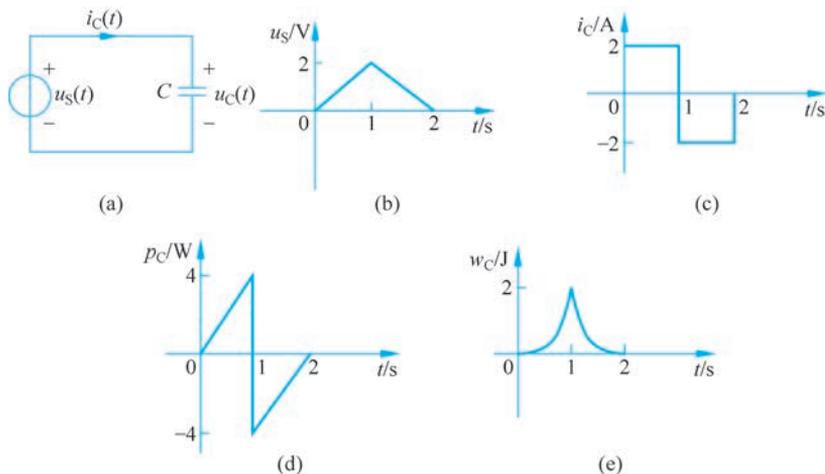


图 5-2 例 5-1 电路及波形

3. 电容元件的连接

使用电容不仅要看电容量是否符合需要,而且必须注意它的额定工作电压是多少。额定工作电压称为耐压。如果电容的实际电压超过额定电压太多,其介质会被击穿而导电,电容也就失去容纳电荷的功能。当电容的大小或耐压不符合要求时,可以把两个或两个以上的电容以适当的方式连接起来,得到电容和耐压符合要求的等效电容。

1) 电容元件的串联

图 5-3(a)为两个电容元件串联的电路。电容串联时,各电容的电流相等。根据电容元件的伏安关系,有



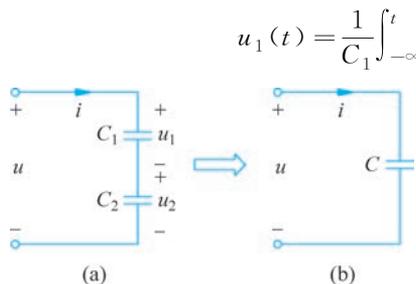


图 5-3 电容元件的串联

图 5-3(b)中,根据电容元件的伏安关系式,有

$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \quad (5-9)$$

若图 5-3(a)与图 5-3(b)所示电路等效,则两电路端口的伏安关系式对应相等,由式(5-8)和式(5-9)可得出

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \text{或} \quad C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (5-10)$$

同理可推得,若有 n 个电容 $C_k (k=1, 2, \dots, n)$ 相串联,则其等效电容为

$$\frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \quad (5-11)$$

式(5-11)表明, n 个电容串联的电路,其等效电容的倒数等于各串联电容的倒数之和。

由 $u_1(t)$ 、 $u_2(t)$ 和 $u(t)$ 表达式可得各电容电压与端口电压的关系为

$$u_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} u, \quad u_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} u \quad (5-12)$$

即在两个电容串联的电路中,每个电容分配到的电压是总电压的一部分。

2) 电容元件的并联

图 5-4(a)为两个电容元件并联的电路。电容并联时,各电容的电压相等。根据电容元件的伏安关系,有

$$i_1(t) = C_1 \frac{du(t)}{dt}, \quad i_2(t) = C_2 \frac{du(t)}{dt}$$

根据 KCL,有

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = C_1 \frac{du(t)}{dt} + C_2 \frac{du(t)}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{du(t)}{dt} \quad (5-13)$$

图 5-4(b)中,根据电容元件的伏安关系式,有

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \quad (5-14)$$

若图 5-4(a)与图 5-4(b)所示电路等效,则两电路端口的伏安关系式对应相等,由式(5-13)和式(5-14)可得

$$C = C_1 + C_2 \quad (5-15)$$



知识点

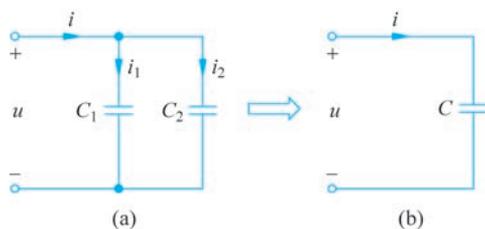


图 5-4 电容元件的并联

同理可推得,若有 n 个电容 $C_k (k=1,2,\dots,n)$ 并联时,其等效电容为

$$C = \sum_{k=1}^n C_k \quad (5-16)$$

式(5-16)表明, n 个电容并联的电路,其等效电容等于各并联电容之和。由 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 和 $i(t)$ 表达式可得电容电流与端口电流的关系为

$$i_1 = \frac{C_1}{C} i = \frac{C_1}{C_1 + C_2} i, \quad i_2 = \frac{C_2}{C} i = \frac{C_2}{C_1 + C_2} i \quad (5-17)$$

即:两个电容并联的电路,每个电容可分得一部分电流。

例 5-2 电容 $C_1 = 200\mu\text{F}$, 耐压 $U_{M1} = 100\text{V}$, 电容 $C_2 = 50\mu\text{F}$, 耐压 $U_{M2} = 500\text{V}$ 。(1)若将两电容串联使用,其等效电容和耐压各是多少?(2)若将两电容并联使用,其等效电容和耐压各是多少?

解: 对于电容量一定的电容,当工作电压等于其耐压 U_M 时,它所带的电量 $q = Q_M = CU_M$ 即为其电量的限额。只要电量不超过此限额,电容的工作电压也就不会超过其耐压。

(1) 两电容串联的等效电容为

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{200 \times 50}{200 + 50} = 40(\mu\text{F})$$

由式(5-1)可得电容 C_1 和 C_2 存储的最大电荷为

$$Q_{M1} = C_1 U_{M1} = 200 \times 10^{-6} \times 100 = 20 \times 10^{-3} (\text{C})$$

$$Q_{M2} = C_2 U_{M2} = 50 \times 10^{-6} \times 500 = 25 \times 10^{-3} (\text{C})$$

由于 $Q_{M1} < Q_{M2}$, 所以串联后的电量限额 $Q_M = 20 \times 10^{-3} \text{C}$ 。

串联后电路的耐压为

$$U_M = \frac{Q_M}{C} = \frac{20 \times 10^{-3}}{40 \times 10^{-6}} = 500(\text{V})$$

(2) 两电容并联的等效电容为

$$C = C_1 + C_2 = 200 + 50 = 250(\mu\text{F})$$

并联后电路的耐压为

$$U_M = 100\text{V}$$

当几个电容串联时,各电容所带的电量相等,此时应根据各个电容与其耐压的乘积的最小值确定电量的限额,然后确定等效电容的耐压。

当几个电容并联时,工作电压不得超过它们中的最低额定电压。

5.1.2 电感元件

电感元件(简称电感)是电路的一种基本元件,是实际电感器的理想化模型,表征电感器的主要物理特性。实际常遇到的电感器是导线绕制成的电感线圈。电感线圈是一种能够储存磁场能量的器件。当电流流过线圈时,有磁通穿过线圈,周围有磁场产生,如图 5-5 所示。设线圈匝数为 N , 每匝线圈产生的磁通为 Φ , N 匝线圈产生的总磁通称为磁链,用 Ψ 表示, $\Psi = N\Phi$ 。由流过线圈本身电流所产生的磁链,称为自感磁链。

在任意时刻 t , 电感元件的电流 $i(t)$ 和它的磁链 $\Psi(t)$ 之间的关系可以用 Ψ - i 平面上的



一条曲线来确定,若 Ψ - i 平面上的特性曲线是一条过原点的直线,且不随时间而变化,则此电感元件称为线性时不变电感元件。线性电感元件的电路符号如图 5-6 所示。

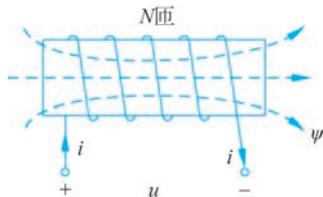


图 5-5 电感线圈及其磁链

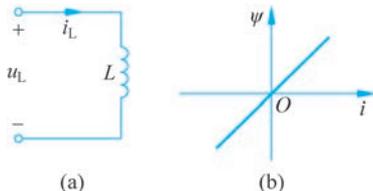


图 5-6 电感元件符号

电感元件是一种电流与磁链相约束的器件,磁链 $\Psi(t)$ 与电流 $i(t)$ 成正比,即

$$\Psi(t) = Li(t) \quad (5-18)$$

式中, L 为常数,称为线圈的电感或自感,电感的单位是亨(H),有时还采用毫亨(mH)和微亨(μ H);电流的单位是安(A);磁链的单位是韦(Wb)。

实际的电感器除了具备上述的存储磁能的主要性质外,还有一些能量损耗(由于构成电感器的导线有电阻)。一个实际的电感线圈,除了标明它的电感量外,还应标明它的额定工作电流。电流过大,会使线圈过热或使线圈受到过大的电磁力的作用而发生机械形变,甚至烧坏线圈。

只要线圈附近不存在铁磁材料,电感就是与电流大小无关的常量,这种电感称为线性电感。如果线圈绕在铁磁材料上,电感电流与磁链就不成正比关系,这种电感称为非线性电感。以后无特殊说明,本书讨论的均为线性时不变电感。

1. 电感元件的伏安关系

当变化的电流 $i(t)$ 通过电感线圈时,穿过线圈的磁链 $\Psi(t)$ 随之发生变化。磁链随时间变化时,在线圈的两端将产生感应电压,线圈本身产生的感应电压称为自感电压。根据电磁感应定律,如果自感电压 u_L 的参考方向与磁链 $\Psi(t)$ 成右螺旋关系,即电感元件 i_L 、 u_L 的方向如图 5-6 所示即关联参考方向时,

$$u_L(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = \frac{dLi_L(t)}{dt} = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad (5-19a)$$

电流表示为电压的函数形式为

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau \quad (5-19b)$$

当 $i_L(t)$ 与 $u_L(t)$ 为非关联参考方向,式(5-19a、b)前面需要加“ $-$ ”号。

式(5-19a)表明:在某一时刻,电感的电压取决于该时刻电感电流的变化率。电感元件的电压与电流具有动态关系,是动态元件。

(1) 当电感中电流发生剧变时, $\frac{di_L}{dt}$ 很大,则电感两端会出现高电压。

(2) 如果电流不随时间变化,即 $\frac{di_L}{dt} = 0$,电感元件的端电压为零,所以电感元件对直流

来说相当于短路。电感元件具有通直流的作用。

由式(5-19b)可得电感上的电流为

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau \quad (5-20)$$

式中： $i_L(t_0)$ 为在 $t=t_0$ 时电感的初始电流。

式(5-20)表明,在某一时刻 t ,电感电流的数值取决于从 $-\infty$ 到 t 所有时刻的电压值,也就是说与电压的“全部过去历史”有关,因此,电感电流有“记忆”电压的性质,电感也是一种“记忆元件”。

电感电流具有连续性,即若电感电压 $u(t)$ 在闭区间 $[t_a, t_b]$ 内为有界的,则电感电流 $i_L(t)$ 在开区间 (t_a, t_b) 内为连续的。所以对任意时间 t ,且 $t_a < t < t_b$,有

$$i_L(t_+) = i_L(t_-) \quad (5-21)$$

式(5-21)表明:任何时刻,电感电流都不能跃变,在动态电路分析问题中经常要用到这一结论,但需注意应用的前提条件。

2. 电感元件的储能

在关联参考方向下,电感的瞬时功率是电感电压和电感电流的乘积,即

$$p_L(t) = u_L(t) i_L(t) \quad (5-22)$$

则在 t_1 到 t_2 期间内供给电感的能量为

$$\begin{aligned} w_L(t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} p_L(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_2} u_L(\tau) i_L(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_0}^t i_L(\tau) L \frac{di_L(\tau)}{d\tau} d\tau = \frac{1}{2} L [i_L^2(t_2) - i_L^2(t_1)] \end{aligned} \quad (5-23)$$

由此可知,电感 L 在某一时刻 t 的储能为

$$w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t) \quad (5-24)$$

式(5-24)表明:电感元件是一个储能元件,在某一时刻的储能只取决于该时刻的电流值,而与电流的过去变化进程无关。

例 5-3 如图 5-7(a)所示电路,一个无储能电感 $L=0.05\text{H}$,在 $t=0$ 时接入如图 5-7(b)所示波形的电压 $u_S(t)$ 。求(1) $t>0$ 时的 $i_L(t)$,并绘出波形图。(2) $t=2.5\text{s}$ 时,电感储存的能量是多少?

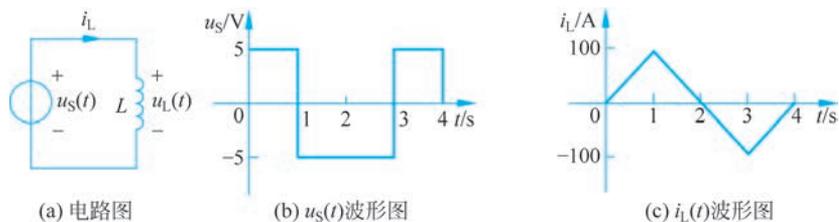


图 5-7 例 5-3 电路及波形

解: (1) 由 $u_S(t)$ 波形可以写出函数的表达式:

$$u_S(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 1 \\ -5, & 1 \leq t < 3 \\ 5, & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

根据图 5-7(a)可得

$$u_L(t) = u_S(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u_L(\tau) d\tau = i_L(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u_L(\tau) d\tau$$

分段计算电流:

当 $0 \leq t < 1$ 时, 因电感无储能, $i_L(0) = 0 \text{ A}$, 所以

$$i_L(t) = \frac{1}{0.05} \int_0^t 5 d\tau = 100t \text{ (A)}$$

当 $t = 1$ 时, 有

$$i_L(t) = 100 \text{ A}$$

当 $1 < t < 3$ 时, 有

$$i_L(t) = 100 + \frac{1}{0.05} \int_1^t (-5) d\tau = 200 - 100t \text{ (A)}$$

当 $t = 3 \text{ s}$ 时, 有

$$i_L(t) = -100 \text{ A}$$

当 $3 < t < 4$ 时, 有

$$i_L(t) = -100 + \frac{1}{0.05} \int_3^t 5 d\tau = -400 + 100t \text{ (A)}$$

当 $t = 4$ 时, 有

$$i_L(t) = 0 \text{ A}$$

按以上计算结果绘出 $i_L(t)$ 波形, 如图 5-7(c) 所示。

(2) 当 $t = 2.5 \text{ s}$ 时, 有

$$i_L(t) = 200 - 100 \times 2.5 = -50 \text{ (A)}$$

由式(5-24)可得

$$w_L = \frac{1}{2} L i_L^2(t) = \frac{1}{2} \times 0.05 \times (-50)^2 = 62.5 \text{ (J)}$$

3. 电感元件的连接

1) 电感元件的串联

图 5-8(a) 为两个电感元件串联的电路。电感串联时, 流经各电感的电流相同, 根据电感元件的伏安关系式, 有

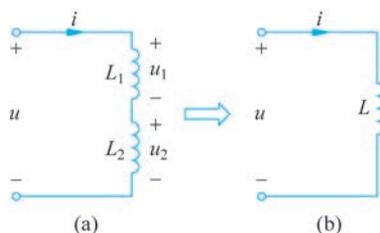


图 5-8 电感元件的串联

$$u_1(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt}, \quad u_2(t) = L_2 \frac{di(t)}{dt}$$

根据 KVL, 串联电路的总电压等于两个电感电压之和, 有

$$\begin{aligned} u(t) &= u_1(t) + u_2(t) = L_1 \frac{di(t)}{dt} + L_2 \frac{di(t)}{dt} \\ &= (L_1 + L_2) \frac{di(t)}{dt} \end{aligned} \quad (5-25)$$

图 5-8(b) 中根据电感元件的伏安关系式, 有

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (5-26)$$

若图 5-8(a)与图 5-8(b)所示电路等效,则两电路的伏安关系式对应相等,由式(5-25)和式(5-26)可得

$$L = L_1 + L_2 \quad (5-27)$$

同理可推得,若有 n 个电感 $L_k (k=1, 2, \dots, n)$ 相串联,则其等效电感为

$$L = \sum_{k=1}^n L_k \quad (5-28)$$

由 $u_1(t), u_2(t)$ 及 $u(t)$ 表达式可得各电感电压与端口电压的关系为

$$u_1 = \frac{L_1}{L} u = \frac{L_1}{L_1 + L_2} u, \quad u_2 = \frac{L_2}{L} u = \frac{L_2}{L_1 + L_2} u \quad (5-29)$$

2) 电感元件的并联

图 5-9(a)为两个电感元件并联的电路。电感并联时,各电感两端电压相等。根据电感元件的伏安关系式,有

$$i_1(t) = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

$$i_2(t) = \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

根据 KCL,有

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{1}{L_1} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau + \frac{1}{L_2} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau = \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (5-30)$$

图 5-9(b)中,根据电感元件的伏安关系式,有

$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau \quad (5-31)$$

若图 5-9(b)与图 5-9(a)所示电路等效,则两电路的伏安关系式对应相等,由式(5-30)和式(5-31)可得出

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad \text{或} \quad L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (5-32)$$

同理可推得,若有 n 个电感 $L_k (k=1, 2, \dots, n)$ 相并联,则其等效电感为

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k} \quad (5-33)$$

式(5-33)表明: n 个电感并联的电路,其等效电感的倒数等于各并联电感的倒数之和。由 $i_1(t), i_2(t)$ 及 $i(t)$ 表达式可得各电感电流与端口电流的关系为

$$i_1 = \frac{L}{L_1} i = \frac{L_2}{L_1 + L_2} i, \quad i_2 = \frac{L}{L_2} i = \frac{L_1}{L_1 + L_2} i \quad (5-34)$$

5.2 微分方程的求解

在前面 4 章讨论的直流电路中,所有响应恒定不变,电路的这种工作状态称为稳定状态,简称稳态。在电路的稳态分析中,所有元件的伏安特性均为代数方程,因此,在求解电路

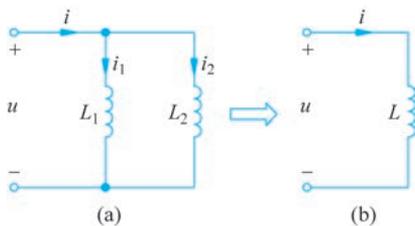


图 5-9 电感元件的并联

的电压和电流时所得到的电路方程也为一组线性代数方程。如果电路的工作条件发生变化,可能使电路由原来的稳定状态转变到另一个稳定状态,这种改变通常需要经历一定时间,这一过程称为电路的过渡过程或暂态过程(也称为动态过程)。在过渡过程分析中,由于电容元件和电感元件的伏安特性是微分或积分关系,所以这时所得到的电路方程是以电压、电流为变量的微分方程。当电路的无源元件都是线性和时不变时,电路的方程是线性常系数微分方程。

过渡过程的分析方法有两种:一种是直接求解微分方程的方法,称为经典法。因为它是以时间 t 作为自变量的,所以又称为时域分析(time domain analysis);另一种是采用某种积分变换求解微分方程的方法,比较普遍的是将自变量转换成复频率变量,故称为复频域分析。有关动态电路的复频域分析法将在第 12 章中介绍。凡含有未知函数导数的方程称为微分方程。若未知函数是一元函数,则称为常微分方程。在一个微分方程中所出现的未知函数导数的最高阶数称为微分方程的阶。若在微分方程的解中含有任意常数,且相互独立的任意常数的个数与微分方程的阶数相同,则这个解为微分方程的通解。

1. 一阶微分方程的求解

形如

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = \omega(t), \quad A \text{ 为常数, } \omega(t) \text{ 为已知连续函数} \quad (5-35)$$

的微分方程称为一阶线性非齐次微分方程。

式(5-35)中 $\omega(t) = 0$ 时形如

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = 0 \quad (5-36)$$

的微分方程称为方程(5-35)对应的一阶线性齐次微分方程(简称齐次方程)。

一阶线性非齐次微分方程的通解由两部分组成:一部分是对应的齐次方程的通解;另一部分是非齐次方程的一个特解,即

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5-37)$$

式中: $x_h(t)$ 为齐次方程(5-36)的通解; $x_p(t)$ 为非齐次方程(5-35)的一个特解。

(1) 齐次方程通解 $x_h(t)$ 的求解方法:

设齐次方程(5-36)的通解为

$$x_h(t) = K e^{st} \quad (5-38)$$

代入齐次方程(5-36),可得

$$K s e^{st} + A K e^{st} = 0$$

每项都除以 $K e^{st}$, 可得

$$s + A = 0 \quad (5-39)$$

所以 $x_h(t) = K e^{st} = K e^{-At}$, 其中 K 为任意常数,它由初始条件确定。

式(5-39)称为特征方程,其解 $s = -A$ 称为微分方程的特征根或固有频率。

(2) 非齐次方程特解 $x_p(t)$ 的求解方法:

非齐次方程特解 $x_p(t)$ 的形式应根据 $\omega(t)$ 的形式而定,可以先按表 5-1 假设,然后把假设的特解 $x_p(t)$ 代入原方程。用待定系数法,确定特解中的常数 Q 等。



视频

表 5-1 非齐次微分方程的特解的形式

输入函数 $\omega(t)$ 的形式	特解 $x_p(t)$ 的形式
P	Q
Pt	$Q_0 + Q_1 t$
$P_0 + P_1 t$	$Q_0 + Q_1 t$
$P \sin bt$	$Q \sin(bt + \theta)$
$P \cos bt$	$Q \cos(bt + \theta)$

(3) $x_h(t)$ 中常数 K 的确定:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = K e^{st} + x_p(t) \quad (5-40)$$

若已知初始条件 $x(t_0) = X_0$, 则由式(5-40)得

$$x(t_0) = K e^{st_0} + x_p(t_0) = X_0$$

由此可以确定常数 K , 从而求得非齐次方程(5-35)的通解。

2. 二阶微分方程的求解

形如

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = \omega(t) \quad (5-41)$$

的微分方程称为二阶常系数线性非齐次微分方程。其中, p, q 为常数, $\omega(t)$ 为已知连续函数。

对应的二阶常系数线性齐次微分方程为

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + p \frac{dx}{dt} + qx = 0 \quad (5-42)$$

式(5-41)的通解为

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) \quad (5-43)$$

式中: $x_h(t)$ 为齐次方程(5-42)的通解; $x_p(t)$ 为非齐次方程(5-41)的一个特解。

(1) 齐次方程通解 $x_h(t)$ 的求解方法。

设 $x_h(t) = k e^{st}$, 代入方程(5-42)得到对应的特征方程为

$$s^2 + ps + q = 0 \quad (5-44)$$

两个特征根为

$$s_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

下面根据特征根的不同情形, 分别讨论微分方程(5-42)的通解形式。

① 当 $p^2 - 4q > 0$ 时, 特征方程(5-44)有两个不相等的实根:

齐次方程(5-42)的通解为

$$x_h(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

② 当 $p^2 - 4q = 0$ 时, 特征方程(5-44)有两个相等的实根:

$$s_1 = s_2 = -\frac{p}{2}$$

齐次方程(5-42)的通解为

$$x_h(t) = (K_1 + K_2 t) e^{s_1 t}$$



视频

③ 当 $p^2 - 4q < 0$ 时, 特征方程(5-44)有一对共轭复根:

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d, \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

式中:

$$\alpha = \frac{p}{2}, \quad \omega_d = \frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2} > 0$$

齐次方程(5-42)的通解为

$$x_h(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t)$$

(2) 非齐次方程特解 $x_p(t)$ 的求解方法。

非齐次微分方程(5-41)的特解 x_p 应根据 $\omega(t)$ 的形式确定, 可参考表 5-1 假设。把特解 x_p 代入方程(5-41), 用待定系数法确定特解 x_p 中的常数(如表 5-1 中的 Q 等)。

(3) $x_h(t)$ 中常数 K 的确定。

将初始条件代入式(5-43)中可以确定 $x_h(t)$ 中常数 K , 从而求得二阶常系数线性非齐次微分方程(5-41)的通解。

5.3 直流一阶电路的分析

当电路中含有电容或电感时, 由于这些元件的电压和电流的约束关系是以微分或积分形式来表示的, 因此描述电路特性的方程是以电压或电流为变量的微分方程, 这类电路称为动态电路。当电路中只含一个动态元件时, 相应的方程是一阶微分方程, 对应的电路为一阶电路。电阻电路是以代数方程来描述的, 如果没有激励的作用, 电路就不会出现响应。而动态电路则不同, 没有激励时, 如果动态元件上有储能, 在能量释放时就会引起电路的响应。

动态电路在激励或内部储能作用下, 会从一个稳定状态变化到另一个稳定状态, 这个变化的过程称为过渡过程。电路产生过渡过程必须具备两个条件: 一是电路中必须有储能元件(电感或电容), 并且当电路工作条件改变时, 它们的储能状态发生变化; 二是电路工作条件发生变化, 统称为“换路”。工作条件发生变化包括: 电路的连接方式改变(电路中开关的接通、断开), 电路参数的突然变化等。通常为了叙述方便, 将换路的瞬间定义为 $t=0$ (当然也可将它定义为 $t=t_0$), 把换路前的最终瞬间记为 $t=0_-$, 把换路后的最初瞬间记为 $t=0_+$, 换路经历的瞬间为 0_- 到 0_+ 。在一阶电路中, 换路瞬间, 根据电容电压(电感电流)的连续性, 在电容电流(电感电压)有界的情况下, 有 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

如图 5-10(a)所示的电路中只有一个独立的电容, 设电容初始电压 $u_C(0_-) = U_0$, U_S 为直流激励。由 KVL 得 $u_R + u_C = U_S$, 因为

$$u_R = iR, \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

所以

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (5-45a)$$

即

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C = \frac{U_S}{RC} \quad (5-45b)$$

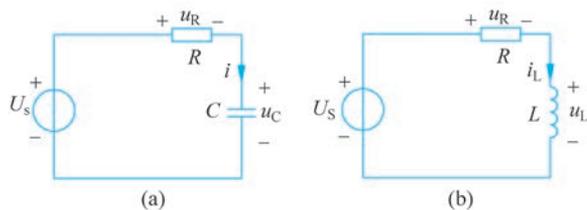


图 5-10 一阶 RC 电路

式(5-45)对应的齐次方程为

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (5-46a)$$

或

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = 0 \quad (5-46b)$$

设齐次方程的通解为 $x_{ch}(t) = K e^{st}$, 代入式(5-46), 可得

$$K s e^{st} + \frac{1}{RC} K e^{st} = 0$$

即

$$s + \frac{1}{RC} = 0 \quad (5-47)$$

式(5-47)是式(5-46)的特征方程。由式(5-47)可得 $s = -\frac{1}{RC}$, 有 $u_{ch} = K e^{-\frac{t}{RC}}$, 其中 K 为任意常数, 由初始条件确定。

U_S 为直流激励, 根据表 5-1, 式(5-45)的特解为常数, 设特解 $u_{Cp} = Q$, 代入式(5-45), 可得 $u_{Cp} = U_S$ 。所以式(5-45)的通解为

$$u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}} + U_S \quad (5-48)$$

根据电容电压的初始值 $u_C(0) = U_0$, 可求得常数 $K = U_0 - U_S$ 。将 K 值代入式(5-48)中, 可得到电容电压的通解, 即

$$u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5-49)$$

对于包含电感元件的一阶电路, 如图 5-10(b)所示, 电路中只有一个独立的电感, 设电感电流初始值 $i_L(0) = I_0$, 电源为直流电源 U_S , 由 KVL 得 $u_R + u_L = U_S$, 因为 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $u_R = i_L R$, 所以有

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = U_S \quad (5-50a)$$

即

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L/R} i_L = \frac{U_S/R}{L/R} \quad (5-50b)$$

对应齐次方程为

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = 0 \quad (5-51a)$$

即

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L/R}i_L = 0 \quad (5-51b)$$

同理,式(5-50a)的通解为

$$i_L(t) = Ke^{-\frac{t}{L/R}} + \frac{U_S}{R} \quad (5-52a)$$

将电感电流的初始值 $i_L(0) = I_0$ 代入式(5-52a),可求得常数 $K = I_0 - \frac{U_S}{R}$,得到电感电流的通解

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R} + \left(I_0 - \frac{U_S}{R}\right)e^{-\frac{t}{L/R}} \quad (5-52b)$$

在图 5-10 中, U_S 为直流激励, U_0 (I_0) 为电容(电感)的初始储能。若 $U_S = 0$, 且 $U_0 \neq 0$ (或 $I_0 \neq 0$), 即电路无外加激励, 电路的响应由动态元件的初始储能产生, 称为一阶电路零输入响应。若 $U_S \neq 0$, 且 $U_0 = 0$ (或 $I_0 = 0$), 即动态元件的初始储能为零, 电路的响应由外加激励产生, 称为一阶电路零状态响应。若 $U_S \neq 0$, 且 $U_0 \neq 0$ (或 $I_0 \neq 0$), 即电路有外加激励, 动态元件也有初始储能, 此时电路的响应称为一阶电路完全响应。

由图 5-10 可以看出, 如果电路中的储能元件只有一个独立的电感或一个独立的电容, 则相应的电路方程是一阶微分方程, 若激励为直流激励, 则这样的电路称为直流一阶电路。求解复杂的一阶电路时, 可将复杂电路看作一个动态元件与线性含源电阻网络相连的两个二端网络, 可先借助戴维南(或诺顿)定理将线性含源的电阻网络等效为电压源串联电阻支路(或根据诺顿定理等效为电流源并联电阻支路), 再利用本节介绍的方法分析求解。含电容元件的复杂电路分解过程如图 5-11 所示。

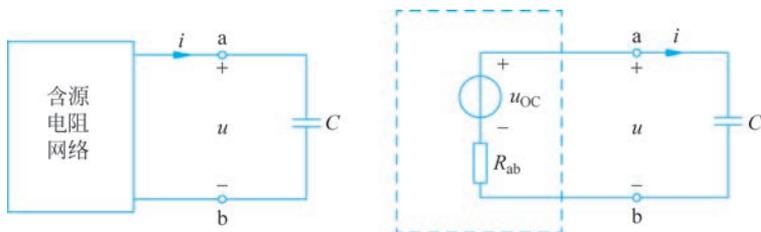


图 5-11 一阶动态电路的分解

5.3.1 一阶电路的零输入响应

1. 一阶 RC 电路的零输入响应

如图 5-12(a)所示 RC 电路, $t < 0$ 时电路已处于稳态, 即 $t = 0_-$ 时电容充电完毕, 电容相当于开路, 如图 5-12(b)所示, $u_C(0_-) = U_S = U_0$, 其初始储能为 $\frac{1}{2}CU_0^2$ 。在 $t = 0$ 时开关 S 由 1 合向 2。 $t > 0$ 后无激励, 即 $U_S = 0$ 且 $U_0 \neq 0$, 故为 RC 电路的零输入响应。

对换路后的电路, 由 KVL 得 $u_R + u_C = 0$ 。因为

$$u_R = Ri, \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

有

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (5-53)$$

式(5-53)与式(5-46a)相同,同理可求得 $t \geq 0$ 电路的响应为 $u_C(t) = K e^{-\frac{t}{RC}}$, 其中 K 为常数, 据 $u_C(0_+) = U_0$, 得

$$k = u_C(0_+) = U_0$$

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-54a)$$

故得

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C(0_+)}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = -\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-54b)$$

$$u_R(t) = iR = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}} = -U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-54c)$$

式中: $\tau = RC$, 具有时间的量纲, 称为 RC 电路的时间常数。当 R 单位为欧, C 单位为法时, τ 的单位为秒。可见 τ 决定了 $u_C(t)$ 、 $i(t)$ 及 $u_R(t)$ 衰减的速度。

式(5-54b)和式(5-54c)中的“ $-$ ”表明: 电流 $i(t)$ 及电阻上电压 $u_R(t)$ 的参考方向均与实际方向相反。 u_C 、 u_R 和 i 随时间的变化曲线如图 5-13 所示。由上可知, 在 $t < 0$ 时电路已处于稳态。在 $t = 0$ 时开关 S 将 RC 电路短接。 $t > 0$ 时电路进入电容 C 通过 R 放电的过渡过程。随着时间 t 的增加, RC 电路中的电流、电压由初始值开始按指数规律衰减, 电路工作在过渡过程中, 直到 $t \rightarrow \infty$, 过渡过程结束, 电路达到新的稳态。

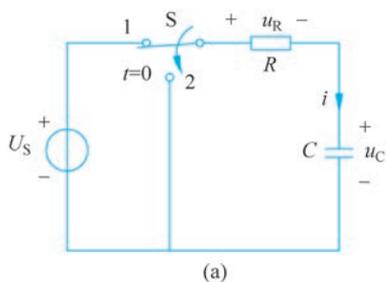


图 5-12 RC 电路的零输入响应

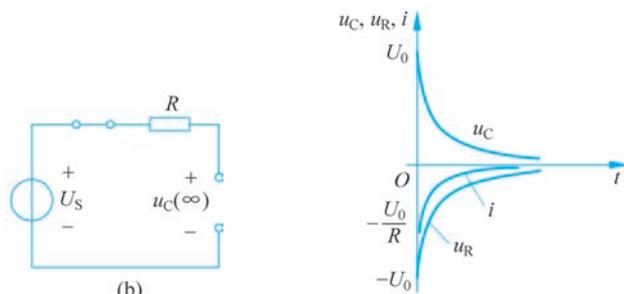


图 5-13 u_C 、 u_R 和 i 随时间的变化曲线

从理论上讲, 只有当 $t \rightarrow \infty$ 时, 电容电压才能达到稳态值。但是, 指数函数开始变化较快, 而后逐渐变慢, 如表 5-2 所示。

表 5-2 $e^{-\frac{t}{\tau}}$ 随时间变化的数值

t	τ	2τ	3τ	4τ	5τ	...	∞
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	0.3679	0.1353	0.04979	0.01832	0.006738	...	0
u_C	$0.3679U_0$	$0.1353U_0$	$0.04979U_0$	$0.01832U_0$	$0.006738U_0$...	0

从表 5-2 中明显看出, 当 $t = (3 \sim 5)\tau$ 时, u_C 与稳态值仅差 $5\% \sim 0.7\%$, 在工程实际中通常认为经过 $(3 \sim 5)\tau$ 后, 电路的过渡过程已经结束, 电路进入稳定状态。

确定时间常数 τ 的三种常用方法:

(1) 由电路参数进行计算。 RC 电路中的时间常数 $\tau = RC$ 。适当调节参数 R 和 C , 就可控制 RC 电路过渡过程的快慢。

(2) 由电路的响应曲线求得。如已知 u_C 的曲线, 且初始值为 U_0 , 由于 $u_C(\tau) =$

$u_C(0_+)e^{-1}=0.368U_0$, 所以当 u_C 衰减到初始值的 36.8% 时, 对应的时间坐标即为时间常数 τ 。另外, 也可以选任意时刻 t_0 的电压 $u_C(t_0)$ 作为基准, 当数值下降为 $u_C(t_0)$ 的 36.8% 时, 所需要的时间也正好是一个时间常数 τ , 说明如下:

$$u_C(t_0 + \tau) = U_0 e^{-\frac{t_0 + \tau}{\tau}} = 0.368U_0 e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 0.368u_C(t_0)$$

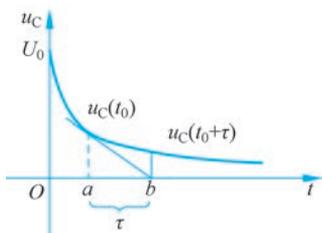


图 5-14 从 u_C 的曲线上估算 τ

(3) 对零输入响应曲线画切线确定时间常数。在工程上可以用示波器来观察 RC 电路 u_C 的变化曲线。可以证明, u_C 的指数曲线上任意点的次切距长度 ab 乘以时间轴的比例尺均等于时间常数 τ , 如图 5-14 所示。

从能量关系上讲, RC 电路的零输入响应实际上是电容的电场能量转换为电阻上的热能的过程。整个放电过程中电阻 R 消耗的电能为

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(-\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{1}{2} C U_0^2 = W_C \quad (5-55)$$

与电容的初始储能 $\frac{1}{2} C U_0^2$ 相等。

例 5-4 某高压电路中有一组 $C=40\mu\text{F}$ 的电容器, 断开时电容器的电压为 5.77kV , 断开后电容器经它本身的漏电阻放电。如电容器的漏电阻 $R=100\text{M}\Omega$, 试问断开后经多长时间电容器的电压衰减为 1kV ? 若电路需要检修, 应采取什么安全措施?

解: 该题为 RC 电路的零输入响应。电路的时间常数为

$$\tau = RC = 100 \times 10^6 \times 40 \times 10^{-6} = 4000(\text{s})$$

由式(5-54a)可得

$$u_C(t) = u_C(0_+) e^{-\frac{t}{RC}} = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

可得

$$u_C(t) = 5.77 e^{-\frac{t}{4000}} (\text{kV})$$

把 $u_C=1\text{kV}$ 代入上式, 可得

$$1 = 5.77 e^{-\frac{t}{4000}}$$

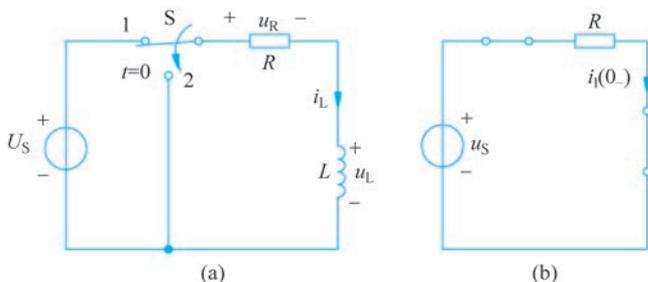
由上式解得

$$t = 4000 \ln 5.77 = 7011(\text{s})$$

由于 R 和 C 的数值较大, 所以电容器从电路断开后经过大约 2h, 仍然有 1kV 的高电压。为安全起见, 须待电容器充分放电后才能进行线路检修。为缩短电容器的放电时间, 可以用一个阻值较小的电阻并联于电容器两端以加速放电过程。

2. 一阶 RL 电路的零输入响应

如图 5-15(a) 所示一阶 RL 电路, $t < 0$ 时电路处于稳态, 即 $t = 0_-$ 时电感充电完毕, 此时电感可用短路线代替, 如图 5-15(b), $i_L(0_-) = \frac{U_S}{R} = I_0$, 其初始储能为 $\frac{1}{2} L I_0^2$ 。在 $t = 0$ 时开关 S 由 1 切换至 2, 在换路瞬时, 电感端电压为有限值, 所以电感电流连续, 即 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。 $t > 0$ 时无激励, 故为 RL 电路的零输入响应。

图 5-15 RL 电路的零输入响应

对换路后的电路,由 KVL 得 $u_R + u_L = 0$, 因为

$$u_R = Ri_L, \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

所以有

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0 \quad (5-56)$$

式(5-56)与(5-51a)相同,可求得 $t \geq 0$ 时电路的响应为 $i_L(t) = Ke^{-\frac{t}{L/R}}$, 其中 K 为常数。据 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{U_S}{R} = I_0$, $K = I_0$ 得

$$i_L(t) = i_L(0_+)e^{-\frac{t}{L/R}} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-57a)$$

$$u_R(t) = i_L R = I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-57b)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-57c)$$

i_L 、 u_R 和 u_L 的变化曲线如图 5-16 所示。式(5-57)中 $\tau = L/R$, 具有时间的量纲,称为 RL 电路的时间常数,当 L 的单位为 H、 R 的单位为 Ω 时, L/R 的单位为 s。 RL 电路的时间常数决定电感电流、电阻电压及电感电压衰减的快慢。

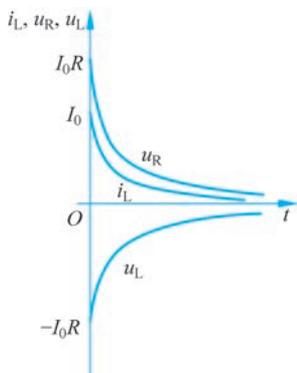
注意: RL 电路的时间常数 τ 与电感 L 成正比,而与电阻 R 成反比;但在 RC 电路中,时间常数 τ 是与电容 C 和电阻 R 成正比的。

RL 电路的零输入响应和 RC 电路的零输入响应相似,当 $t = (3 \sim 5)\tau$ 时, i_L 与稳态值仅差 5%~0.7%,从能量关系上讲, RL 电路的零输入响应实际上是把电感中原先储存的能量转换为电阻上的热能的过程。

从式(5-54)和式(5-57)可以看出:若初始状态增大 K 倍,则零输入响应也增大 K 倍。这种初始状态和零输入响应的正比关系称为零输入比例性,是线性电路激励与响应呈线性关系的反映。

例 5-5 如图 5-17(a)所示电路中,已知 $U_S = 20V$, $L = 1H$, $R = 1k\Omega$, 电压表的内阻 $R_V = 500k\Omega$, 在 $t = 0$ 时开关 S 断开,断开前电路已处于稳态。试求开关 S 断开后电压表两端电压的变化规律。

解: 换路前,电路已处于稳态, L 相当于短路,电路如图 5-17(b)所示。

图 5-16 i_L 、 u_R 和 u_L 随时间的变化曲线

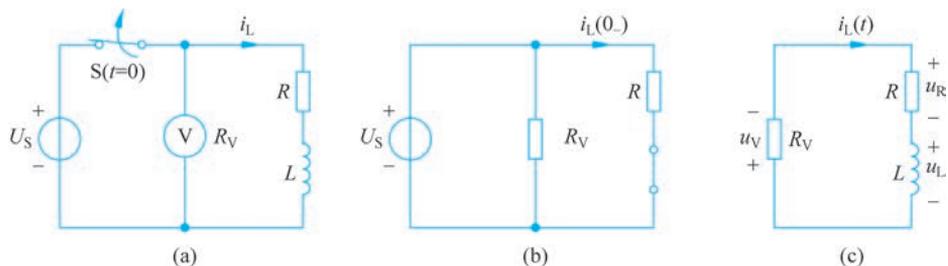


图 5-17 例 5-5 电路

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R} = \frac{20}{10^3} = 0.02(\text{A})$$

根据电感电流的连续性,有

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0.02\text{A}$$

换路后, U_S 断开, 电路如图 5-17(c) 所示, 故本题是求 RL 电路的零输入响应的问题。

列 KVL 方程: $u_R + u_L + u_V = 0$, 有 $i_L = L \frac{di_L}{dt}$, $u_R = Ri_L$, $u_V = R_V i_L$

代入得

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{(R + R_V)}{L} i_L = 0$$

换路后电路的时间常数为

$$\tau = \frac{L}{R + R_V} = \frac{1}{(1 + 500) \times 10^3} = \frac{1}{5.01 \times 10^5} (\text{s})$$

换路后电感电流为

$$i_L(t) = i_L(0_+) e^{-\frac{t}{\tau}} = 0.02 e^{-5.01 \times 10^5 t} (\text{A})$$

所以, 开关断开后电压表两端电压按下面的指数规律衰减:

$$u_V(t) = i_L(t) R_V = 0.02 e^{-5.01 \times 10^5 t} \times 500 \times 10^3 = 10000 e^{-5.01 \times 10^5 t} (\text{V})$$

以上计算可以看出, 在换路的瞬间, 电压表两端出现了 10000V 的高电压, 尽管时间常数很小 (μs 级), 过渡过程的时间很短, 也可能使电压表击穿或把电压表的表针打弯。所以在有电感线圈的电路中要特别注意过电压现象, 以免损坏电气设备。就测量电压而言, 一般应该先移开电压表, 再断开电源开关。

5.3.2 一阶电路的零状态响应

1. 一阶 RC 电路的零状态响应

如图 5-18 所示 RC 电路, 当 $t < 0$ 时, 开关 S 闭合前电容未充电, 无初始储能, 即 $u_C(0_-) = 0$ 。在 $t = 0$ 时, 合上开关 S , S 闭合瞬间, 流过电容的电流为有限值, 电容电压连续, 即 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ 。在 $t > 0$ 后, 电路有外加直流激励 U_S , 故为 RC 电路的零状态响应。

对换路后的电路, 由 KVL 得 $u_R + u_C = U_S$, 因为

$$u_R = Ri, \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

所以有

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (5-58)$$

式(5-58)与式(5-45a)相同,通解为 $u_C(t) = Ke^{-\frac{t}{RC}} + U_S$, 并将电容电压是初始值 $u_C(0_+) = 0$ 代入,可得常数 $K = -U_S$,于是可求得 $t \geq 0$ 时电路的响应为

$$\text{故} \quad u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5-59a)$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-59b)$$

$$u_R(t) = Ri = U_S e^{-\frac{t}{RC}} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-59c)$$

其中, $\tau = RC$, 与一阶 RC 电路零输入 τ 相同。 u_C 、 u_R 和 i 的变化曲线如图 5-19 所示,按指数规律上升或衰减。可见,开关 S 闭合瞬间 C 相当于短路,电阻电压最大为 U_S ,充电电流最大为 U_S/R 。工程上,经过 $t = (3 \sim 5)\tau$ 时间后,充电过程结束,电路进入新的稳态,此时电容相当于开路,电容电流 $i(\infty) = 0$,电容电压 $u_C(\infty) = U_S$,电阻电压 $u_R(\infty) = 0$ 。

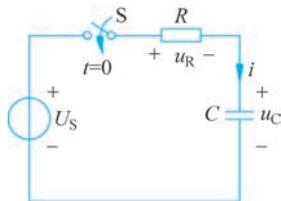
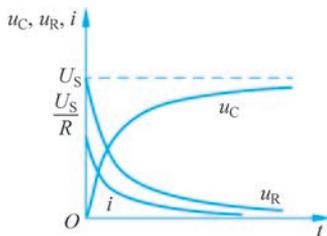


图 5-18 RC 电路的零状态响应

图 5-19 u_C 、 u_R 和 i 随时间的变化曲线

在整个充电过程中 R 消耗的电能为

$$W_R = \int_0^{\infty} i^2 R dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2 R dt = \frac{U_S^2}{R} \left(-\frac{RC}{2} \right) e^{-\frac{2t}{RC}} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2} C U_S^2 = W_C \quad (5-60)$$

整个充电过程中 R 消耗的电等于充电结束后电容的储能,因此充电效率为 50%,充电效率并不高。

例 5-6 在图 5-18 电路中,电容原先未充电。已知 $U_S = 100\text{V}$, $R = 500\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$,在 $t = 0$ 时将开关 S 闭合,试求:(1) u_C 和 i 随时间变化的规律;(2) 当充电时间为 8.05ms 时, u_C 达到多少伏?

解: (1) 电容原先未充电,有 $u_C(0_-) = 0\text{V}$,由电容电压的连续性知 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$ 。在 $t = 0$ 时将开关 S 闭合。本题是有关 RC 电路的零状态响应问题。

由图 5-18 电路知

$$u_R + u_C = u_S$$

换路后时间常数为

$$\tau = RC = 500 \times 10 \times 10^{-6} = 5 \times 10^{-3} (\text{s})$$

由式(5-59a)得

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

代入数值可解得

$$u_C(t) = 100(1 - e^{-200t}) (\text{V})$$

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = 0.2e^{-200t} \text{ (A)}$$

(2) 当充电时间为 8.05ms 时, 电容电压为

$$u_C(t) = 100(1 - e^{-200 \times 8.05 \times 10^{-3}}) = 100(1 - e^{-1.61}) = 80 \text{ (V)}$$

2. 一阶 RL 电路的零状态响应

如图 5-20 所示一阶 RL 电路, 在 $t < 0$ 时, 开关 S 与 1 点接通, 电感无初始储能, 即 $i_L(0_-) = 0$ 。在 $t = 0$ 时, 开关 S 由 1 切换至 2, 在闭合瞬间, 电感电压为有限值, 电感电流连续, 即 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 0$ 。在 $t > 0$ 时, 有外加激励 U_S 。故为 RL 电路的零状态响应。

对换路后的电路利用 KVL, 可得

$$u_R + u_L = U_S$$

由于

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad u_R = Ri_L$$

将它们代入上式, 可得

$$L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S \quad (5-61)$$

式(5-61)与式(5-50a)相同, 通解为 $i_L(t) = Ke^{-\frac{t}{L/R}} + \frac{U_S}{R}$, 将电感电流初始值 $i_L(0_+) = 0$ 代

入得 $K = -\frac{U_S}{R}$, 于是可求得 $t \geq 0$ 时电路的响应为

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) = \frac{U_S}{R}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5-62a)$$

$$u_L(t) = U_S e^{-\frac{t}{L/R}} = U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-62b)$$

$$u_R(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (5-62c)$$

式中, $\tau = L/R$, 与一阶 RL 电路零输入 τ 相同。 i_L 、 u_R 和 u_L 的变化曲线如图 5-21 所示。可见, 开关 S 闭合瞬间 L 相当于开路, 电感电压最大为 U_S , 电阻电压为零。随着时间 t 的增加, 充电电流按指数规律增大, 电阻电压也随之增大, 而电感电压则逐渐减小。经过 $t = (3 \sim 5)\tau$ 时间后, 充电过程结束, 电路进入新的稳态, 此时电感相当于短路, 电感电流 $i_L(\infty) = U_S/R$, 电感电压 $u_L(\infty) = 0$, 电阻电压 $u_R(\infty) = U_S$ 。

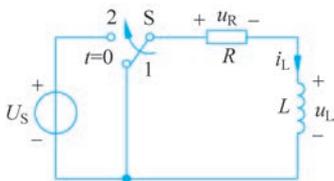


图 5-20 RL 电路的零状态响应

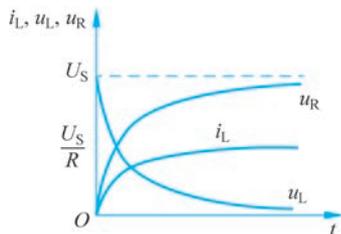


图 5-21 i_L 、 u_R 和 u_L 随时间的变化曲线

从式(5-59)和式(5-62)可以看出:若外加激励增大 K 倍,则零状态响应也增大 K 倍。这种外加激励和零状态响应的正比关系称为零状态比例性,是线性电路激励与响应呈线性关系的反映。如果有多个独立电源作用于电路,那么可以运用叠加定理求出零状态响应。

例 5-7 在图 5-22(a) 电路中,已知 $U_S = 36\text{V}$, $R_1 = 6\text{k}\Omega$, $R_2 = 3\text{k}\Omega$, $R_3 = 10\text{k}\Omega$, $L = 12\text{mH}$,求开关 S 闭合后电感中的电流和电压(设 $i_L(0_-) = 0\text{A}$)。

解: 开关 S 闭合前, $i_L(0_-) = 0\text{A}$,本题是求解 RL 电路的零状态响应问题。

$t > 0$ 时的电路如图 5-22(b) 所示,将电感与其余电阻网络分解为两个二端网络,电阻网络如图 5-22(c) 所示,该电阻网络的戴维南等效电路如图 5-22(d) 虚线左边所示,图中,

$$\begin{cases} U_{OC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S = \frac{3}{6 + 3} \times 36 = 12(\text{V}) \\ R_0 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 10 + \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 12(\text{k}\Omega) \end{cases}$$

图 5-22(d) 中, $u_{R_0} + u_L = U_{OC}$, $u_{R_0} = R_0 i_L$, $u_L = L \frac{di_L}{dt}$,有 $L \frac{di_L}{dt} + R_0 i_L = U_{OC}$,与式(5-61)相似,可解得电感中的电流为

$$i_L(t) = \frac{U_{OC}}{R_0} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}), \quad \text{其中 } \tau = L/R_0 = \frac{12 \times 10^{-3}}{12 \times 10^3} = 10^{-6}(\text{s})$$

代入数值得

$$i_L(t) = 1 - e^{-10^6 t} (\text{mA})$$

电感的电压为

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 12e^{-10^6 t} (\text{V})$$

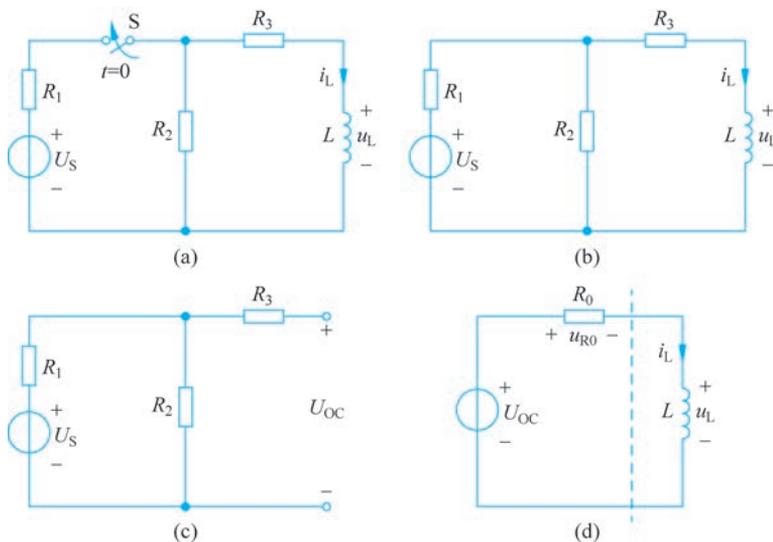


图 5-22 例 5-7 电路

5.3.3 一阶电路的完全响应

1. 一阶 RC 电路的完全响应

如图 5-23 所示 RC 电路, 开关 S 闭合前电容已充电, 即 $u_C(0_-) = U_0 \neq 0$ 。在 $t = 0$ 时, 合上开关 S。可见, 在 $t > 0$ 时有直流激励 U_S , 根据电容电压的连续性, 有 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0 \neq 0$, 为 RC 电路的完全响应。

对换路后的电路, 由 KVL 得 $u_R + u_C = U_S$, 因为

$$u_R = Ri, \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

有

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (5-63)$$

式(5-63)与式(5-45a)相同, 解方程, 同理可求得 $t \geq 0$ 时电路的响应为

$$u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{RC}} = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-64a)$$

因此, 有
$$i(t) = \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_S - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-64b)$$

$$u_R(t) = (U_S - U_0) e^{-\frac{t}{RC}} = (U_S - U_0) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-64c)$$

其中, $\tau = RC$ 。 $0 < U_0 < U_S$ 时 u_C 的变化曲线如图 5-24 所示, u_C 以 U_0 为初始值逐渐上升, 最终达到 U_S 。若 $U_0 > U_S > 0$, 或者一个为正, 一个为负, 则过渡过程中电容是充电还是放电? 读者可自行分析。

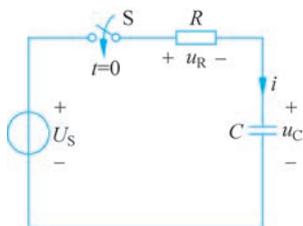


图 5-23 一阶 RC 电路的完全响应

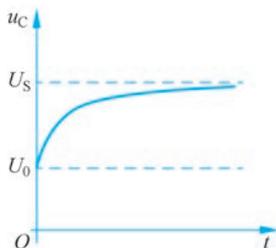


图 5-24 一阶 RC 电路的完全响应 u_C 波形

2. 一阶 RL 电路的完全响应

如图 5-25 所示一阶 RL 电路, 在 $t < 0$ 时, 已知 $i_L(0_-) = I_0 \neq 0$ 。在 $t = 0$ 时, 开关 S 由 1 切换至 2。根据电感电流的连续性, 有 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0$, 在 $t > 0$ 时电路有外加激励 U_S , 为 RL 电路的完全响应。

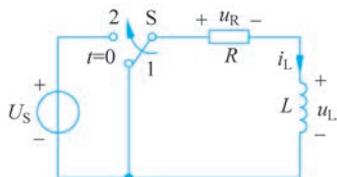


图 5-25 一阶 RL 电路的完全响应

对换路后的电路列 KVL 方程, 得 $u_R + u_L = U_S$, 因为

$$u_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad u_R = Ri_L$$

有

$$L \frac{di_L}{dt} + i_L R = U_S \quad (5-65)$$



知识点

式(5-65)与式(5-50a)相同,解方程同理可求得 $t \geq 0$ 时电路的响应为

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R} + \left(I_0 - \frac{U_S}{R}\right) e^{-\frac{t}{L/R}} = \frac{U_S}{R} + \left(I_0 - \frac{U_S}{R}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-66a)$$

因此,可得

$$u_L(t) = -I_0 R e^{-\frac{t}{L/R}} + U_S e^{-\frac{t}{L/R}} = -I_0 R e^{-\frac{t}{\tau}} + U_S e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-66b)$$

$$u_R(t) = U_S + (I_0 R - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{其中, } \tau = L/R \quad (5-66c)$$

5.3.4 一阶电路的求解方法

1. 直接解微分方程

5.3.1节~5.3.3节就是使用直接解微分方程对一阶电路进行分析。

2. 利用分解方法求解

直流一阶电路还可用以下两种分解方法求解(以 $u_C(t)$ 为例):

(1) 完全响应 = 稳态响应 + 暂态响应。

以图 5-23 所示 RC 电路为例,已求得在 $t \geq 0$ 时电容电压为式(5-64a),即

$$u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5-67)$$

式(5-67)中右边第一项为稳态响应,右边第二项为暂态响应。两个响应的变化规律不同:稳态响应只与输入 U_S 有关,如果输入的是直流量,稳态响应就是恒定不变的;如果输入的是正弦量,稳态响应就是同频率的正弦量。暂态响应随着时间 t 的增长按指数规律逐渐衰减为零,一般可以认为在 $t = (3 \sim 5)\tau$ 后消失。暂态响应既与初始状态 U_0 有关,也与输入 U_S 有关,只有当 $U_0 - U_S \neq 0$ 时,才有暂态响应。

(2) 完全响应 = 零输入响应 + 零状态响应。

式(5-67)可改写成

$$u_C(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + U_S (1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (5-68)$$

式(5-68)等号右边:第一项是一阶 RC 电路的零输入响应,见式(5-54a);第二项则是一阶 RC 电路的零状态响应,见式(5-59a)。表明一阶 RC 电路完全响应等于零输入响应和零状态响应的叠加,这是线性电路叠加性质的体现。当 $U_S = 0, U_0 \neq 0$ 时,一阶 RC 电路完全响应即为零输入响应;当 $U_S \neq 0, U_0 = 0$ 时,一阶 RC 电路完全响应即为零状态响应。

把全响应分解为零输入响应和零状态响应,能较明显地反映电路响应与激励在能量方面的因果关系,并且便于分析计算。把全响应分解为稳态响应与暂态响应,能较明显地反映电路的工作状态,便于分析过渡过程的特点。这两种分解的概念都是很重要的。

3. 利用三要素法进行求解

设 $u_C(0_+)$ 及 $u_C(\infty)$ 表示 $u_C(t)$ 的初始值和稳态值, $\tau = RC$ 为时间常数,式(5-67)可写为

$$u_C(t) = U_S + (U_0 - U_S) e^{-\frac{t}{\tau}} = u_C(\infty) + (u_C(0_+) - u_C(\infty)) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-69)$$

式(5-69)表明,电压 $u_C(t)$ 是由 $u_C(0_+)$ 、 $u_C(\infty)$ 及 τ 三个参量所确定的。即只要求得初始值、稳态值和时间常数这三个要素,就能确定 $u_C(t)$ 的解析表达式,而不用求解微分方程。

可以证明:在直流一阶 RC 电路中任何两个节点间的电压和任意支路中的电流都是按指数规律变化的,且具有与 $u_C(t)$ 相同的时间常数 τ 。对于 RL 电路中的电感电流 $i_L(t)$,也能得出类似于式(5-69)的表达式。同样可以证明:在直流一阶 RL 电路中任何两个节点间的电压和任意支路中的电流都是按指数规律变化的,且具有与 $i_L(t)$ 相同的时间常数 τ 。

因此,在直流一阶电路中,所有电压、电流均可在求得它们的初始值、稳态值和时间常数后直接写出它们的表达式,即

$$f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (5-70)$$

它们具有相同的时间常数 τ ,满足 $0 < \tau < \infty$,式(5-70)中的 $f(t)$ 泛指直流一阶电路中的任意电压或电流。这种方法称为三要素法。

利用三要素法求解过渡过程的步骤如下:

(1) 确定初始值。

首先画出换路前 $t=0_-$ 的等效电路(在 $t=0_-$ 电路中,电路达到直流稳态时,电容元件视为开路,电感元件视为短路)、求出 $u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_-)$ 。由电容电压和电感电流的连续性可得 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$ 或 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 。

其次画出换路后瞬间 $t=0_+$ 的等效电路(在 $t=0_+$ 电路中,电容元件用电压为 $u_C(0_+)$ 的电压源置换或电感元件用电流为 $i_L(0_+)$ 的电流源置换。如果 $u_C(0_+) = 0$,则电容元件视为短路。如果 $i_L(0_+) = 0$,则电感元件视为开路)。应用电路的分析方法,在 $t=0_+$ 电路中计算其他电压或电流的初始值,即 $u(0_+)$ 或 $i(0_+)$ 。

(2) 确定稳态值。

在直流电源激励条件下,换路后,当电路达到稳态时,电容元件用开路线代替,电感元件用短路线代替,画出直流稳态电路的等效电路,应用电路的分析方法求解电路中电压或电流的稳态值 $u(\infty)$ 或 $i(\infty)$ 。

(3) 计算时间常数。

将换路后电路中的储能元件(L 或 C)与其余电路分解为两个二端电路,除 L (或 C) 之外的电路是一个电阻性有源二端网络,根据戴维南定理求得该网络的等效电阻 R_0 。对于一阶 RC 电路, $\tau = R_0 C$; 对一阶 RL 电路, $\tau = L/R_0$ 。

(4) 写出电压或电流的表达式。

若 $0 < \tau < \infty$,则根据求得的三要素,依照 $f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}}$ 的形式,直接写出电压或电流的表达式。

例 5-8 如图 5-26(a)所示电路原处于稳态,已知 $U_S = 100\text{V}$, $R_1 = R_2 = 4\Omega$, $L = 0.4\text{H}$,在 $t=0$ 时将开关 S 断开,求 S 断开后电路中的电流 i_L 和电感的电压 u_L ,并绘出电流 $i_L(t)$ 、电压 $u_L(t)$ 的变化曲线。

解: 因为开关 S 断开前电路原处于稳态,电路初始条件不为零,开关 S 断开后 RL 电路有外加激励 U_S ,所以此电路为全响应问题用三要素法求解。

(1) 求 $i_L(0_+)$ 。 $t=0_-$ 时等效电路如图 5-26(b)所示,开关 S 断开前电路原处于稳态,电感相当于短路,所以

$$i_L(0_-) = \frac{U_S}{R_2} = \frac{100}{4} = 25(\text{A})$$

根据电感电流的连续性可得

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 25(\text{A})$$

(2) 求 $i_L(\infty)$ 。在 $t=0$ 时,开关 S 断开。在 $t=\infty$ 时,电路处于稳态,电感相当于短路,电路如图 5-26(c) 所示,有

$$i_L(\infty) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = \frac{100}{4 + 4} = 12.5(\text{A})$$

(3) 求 τ 。换路后,从电感两端看进去的求解戴维南等效电路等效电阻的电路如图 5-26(d) 所示,其中电压源用短路线代替,由图可见等效电阻为 $R_1 + R_2$,有

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = \frac{0.4}{8} = 0.05(\text{s})$$

(4) 求电感电流和电感电压。

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 12.5 + (25 - 12.5)e^{-20t} = 12.5 + 12.5e^{-20t}(\text{A}) \end{aligned}$$

$$\text{有 } u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0.4 \times 12.5e^{-20t} \times (-20) = -100e^{-20t}(\text{V})$$

电感电流、电感电压的波形如图 5-26(e)、图 5-26(f) 所示。

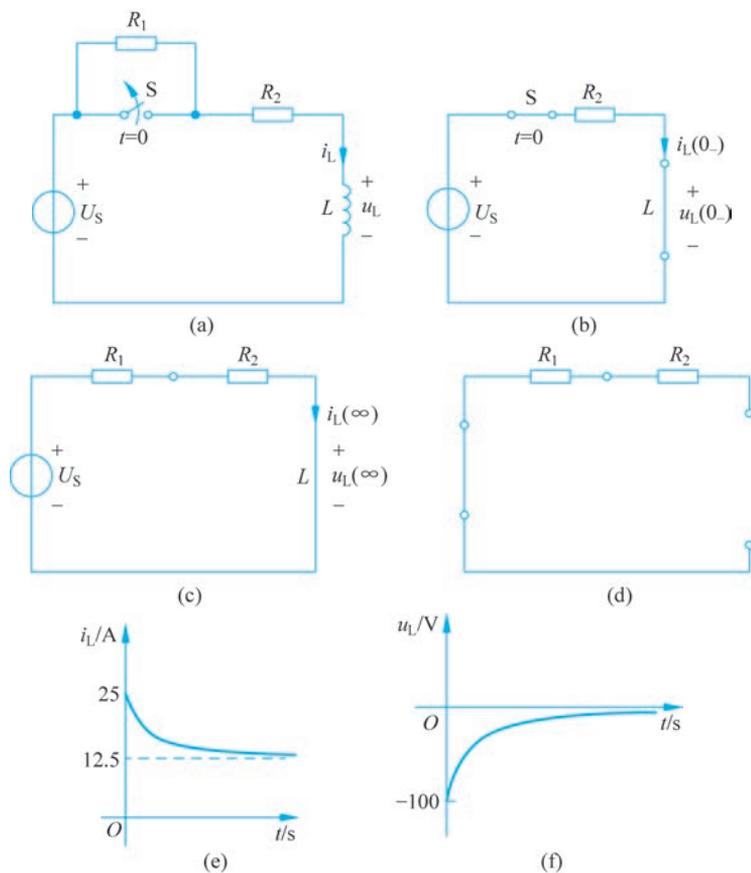


图 5-26 例 5-8 图

例 5-9 如图 5-27(a)所示电路原处于稳态,在 $t=0$ 时将开关 S 闭合,用三要素法求换路后电路中所求的电压和电流,并画出其变化曲线。

解: 电路原处于稳态,电路初始条件不为零,在 $t=0$ 时将开关 S 闭合,开关 S 闭合后有外加激励 U_S ,此电路为全响应问题。

(1) 求 $u_C(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 、 $i_1(0_+)$ 、 $i_2(0_+)$ 。

$t=0_-$ 的等效电路如图 5-27(b)所示。此时电路处于稳态,C 用开路线代替。可知 $u_C(0_-)=U_S=12\text{V}$,根据电容电压的连续性,得 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=12\text{V}$ 。

$t=0_+$ 的等效电路如图 5-27(c)所示。此时电容元件用电压值为 $u_C(0_+)=12\text{V}$ 的电压源代替。可求得 $i_C(0_+)=-1\text{mA}$ 、 $i_1(0_+)=\frac{2}{3}\text{mA}$ 、 $i_2(0_+)=\frac{5}{3}\text{mA}$ 。

(2) 求 $u_C(\infty)$ 、 $i_C(\infty)$ 、 $i_1(\infty)$ 、 $i_2(\infty)$ 。

$t=\infty$ 时等效电路如图 5-27(d)所示。此时电路处于一个新的稳态,C 用开路线代替。

$$u_C(\infty) = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_S = \frac{6}{3 + 6} \times 12 = 8(\text{V})$$

$$i_C(\infty) = 0\text{mA}, \quad i_1(\infty) = i_2(\infty) = \frac{12}{(3 + 6) \times 10^3} = \frac{4}{3}(\text{mA})$$

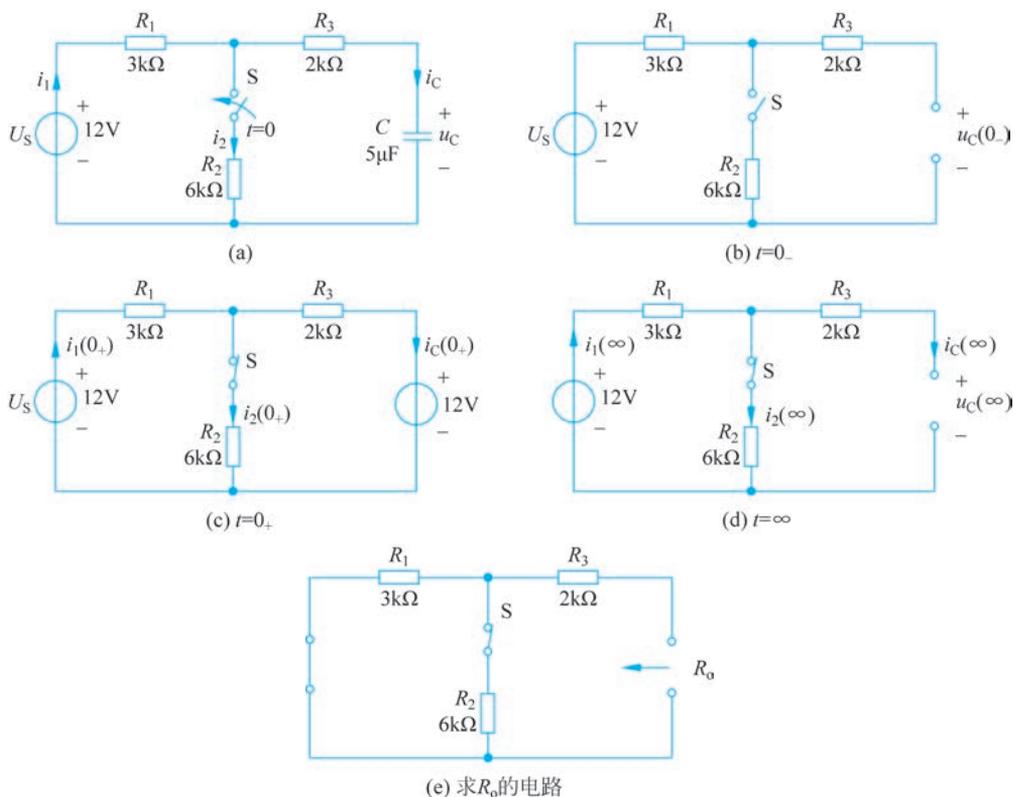


图 5-27 例 5-9 的电路

(3) 求 τ 。

换路后,从电容两端看进去的求解戴维南等效电路等效电阻的电路如图 5-27(e)所示,

其中电压源用短路线代替,由图可见

$$R_o = R_1 // R_2 + R_3 = \frac{3 \times 6}{3 + 6} + 2 = 4 (\text{k}\Omega)$$

$$\tau = R_o C = 4 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-2} (\text{s})$$

(4) 写出 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 的表达式。

$$u_C(t) = u_C(\infty) + [u_C(0_+) - u_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = 8 + 4e^{-50t} (\text{V})$$

$$i_C(t) = i_C(\infty) + [i_C(0_+) - i_C(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = -e^{-50t} (\text{mA})$$

$$i_1(t) = i_1(\infty) + [i_1(0_+) - i_1(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}e^{-50t} (\text{mA})$$

$$i_2(t) = i_2(\infty) + [i_2(0_+) - i_2(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3}e^{-50t} (\text{mA})$$

$u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 的变化曲线如图 5-28 所示。

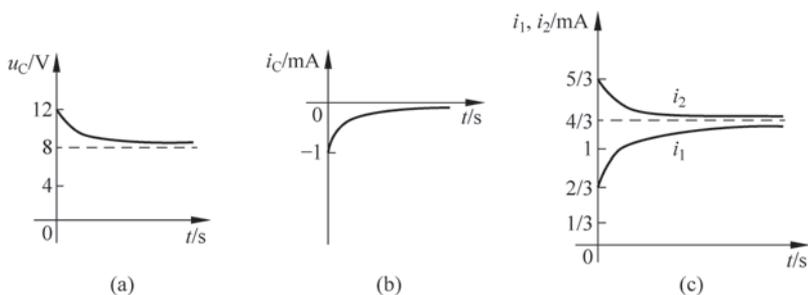


图 5-28 例 5-9 中 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 、 $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 的变化曲线

例 5-10 如图 5-29(a)所示电路,开关 S 合在 1 时电路已处于稳态。在 $t=0$ 时开关 S 由 1 切换至 2。试求 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$,并画出其变化曲线。

解: 开关 S 合在 1 时电路已处于稳态,电路初始条件不为零。 $t=0$ 时开关 S 由 1 切换至 2,有外加激励,为全响应问题。用三要素法求解如下:

(1) 求 $i_L(0_+)$ 。

$t=0_-$ 的等效电路如图 5-29(b)所示,此时电路处于稳态, L 用短路线代替。可知 $i_L(0_-) = -8/2 = -4(\text{A})$,根据电感电流的连续性得 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = -4(\text{A})$ 。

(2) 求 $i_L(\infty)$ 。

$t=0$ 时开关 S 由 1 切换至 2。 $t>0$ 后的电路如图 5-29(c)所示。去除电感后如图 5-29(d)所示。由于含有受控源,故采用开路电压/短路电流的方法求等效电阻 R_o 。

求开路电压的电路如图 5-29(d)所示, $i_{11} = 2\text{A}$, $u_{OC} = 4i_{11} + 2i_{11} = 12(\text{V})$ 。

求短路电流的电路如图 5-29(e)所示,

对右边回路,根据 KVL,有

$$4i_{SC} - 2i_{12} - 4i_{12} = 0$$

对 1 节点,根据 KCL,有

$$i_{12} + i_{SC} = 2$$

联立上面两式求解得 $i_{SC} = 1.2\text{A}$,所以

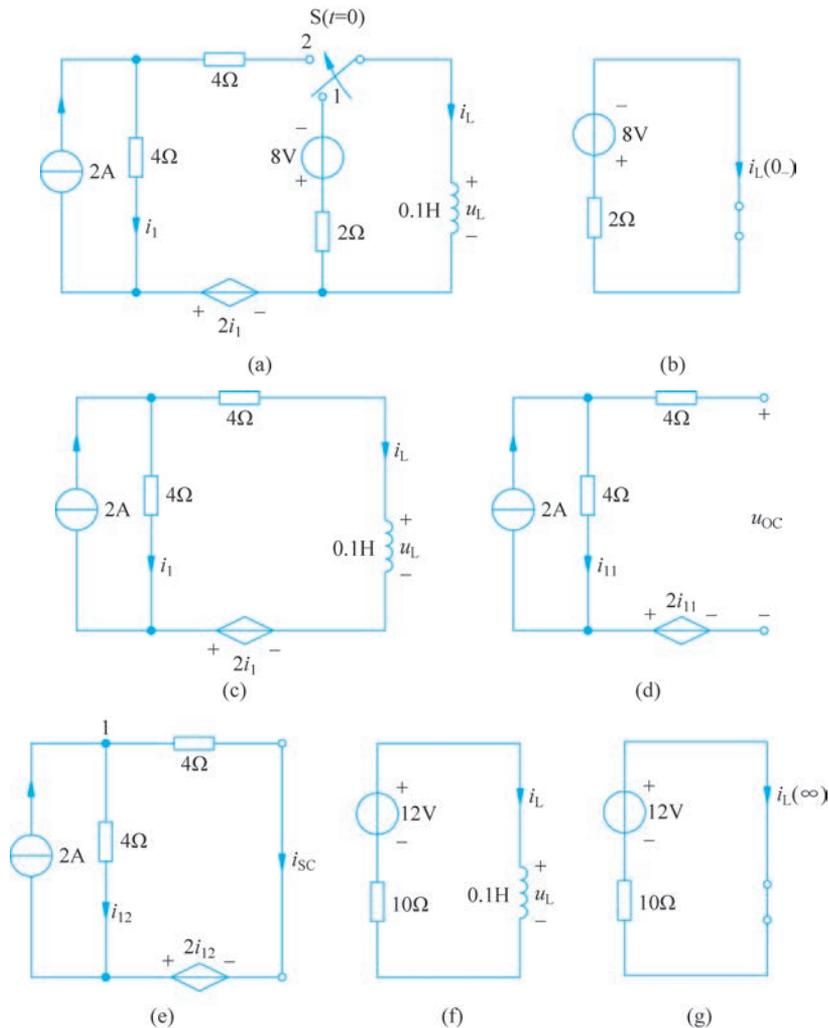


图 5-29 例 5-10 的电路

$$R_o = \frac{u_{OC}}{i_{SC}} = \frac{12}{1.2} = 10(\Omega)$$

$t \geq 0$ 时的等效电路如图 5-29(f) 所示。因 $t \rightarrow \infty$ 时电路处于新的稳态, 图 5-29(f) 中 L 用短路线代替, 如图 5-29(g) 所示, 所以

$$i_L(\infty) = \frac{12}{10} = 1.2(\text{A})$$

(3) 求 τ 。

$$\tau = \frac{L}{R_o} = \frac{0.1}{10} = 0.01(\text{s})$$

(4) 写出 $i_L(t)$ 的表达式, 并求 $u_L(t)$ 。

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)] e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 1.2 + (-4 - 1.2)e^{-\frac{t}{0.01}} = 1.2 - 5.2e^{-100t}(\text{A}) \end{aligned}$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 52e^{-100t} \text{ (V)}$$

(5) $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$ 的波形如图 5-30(a)、图 5-30(b) 所示。

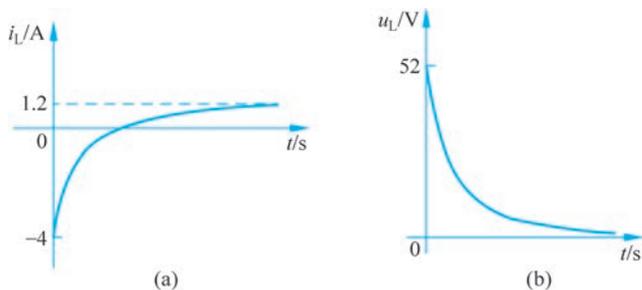


图 5-30 例 5-10 的 $i_L(t)$ 、 $u_L(t)$ 的波形

5.4 直流二阶电路的分析

凡是能用二阶线性常微分方程描述的动态电路称为二阶(线性)电路。本节将在一阶电路的基础上分析二阶电路的过渡过程。在二阶电路中,给定的初始条件有两个,它们由储能元件的初始值决定。 RLC 串联电路和 GCL 并联电路是最简单的二阶电路。

5.4.1 二阶串联电路的零输入响应

图 5-31 为 RLC 串联电路,若电容的初始电压 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$,电感中的初始电流 $i(0_+) = i(0_-) = I_0$ 。在 $t=0$ 时合上开关 S ,由于电路中无激励源,即为二阶串联电路的零输入响应。

对图 5-31 所示电路, S 闭合后按照 KVL 可写出

$$u_R + u_L + u_C = 0 \quad (5-71)$$

将

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

代入式(5-71)可得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (5-72)$$

式(5-72)是一个以 u_C 为未知量的二阶、线性、常系数、齐次微分方程。设齐次方程通解为 $x_h(t) = Ke^{st}$,将它代入式(5-72),得特征方程 $LCs^2 + RCs + 1 = 0$,其特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5-73)$$

特征根有两个值,特征根是电路的固有频率,决定零输入响应的形式。 R 、 L 、 C 参数取值不同,特征根 s_1 、 s_2 可能出现三种不同情况:

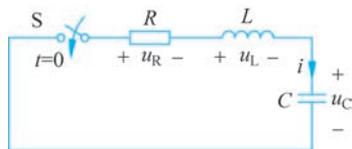


图 5-31 RLC 串联电路的零输入响应

- (1) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 > \frac{1}{LC}$ 即 $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, s_1, s_2 是两个相异负实根;
- (2) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ 即 $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, s_1, s_2 是两个相同负实根;
- (3) 当 $\left(\frac{R}{2L}\right)^2 < \frac{1}{LC}$ 即 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, s_1, s_2 是两个共轭复根, 其实部为负数。

因此, RLC 电路的零输入响应分为下面三种情况来讨论。

- (1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称为过阻尼情况。

此时特征根是两个相异实根, 而且均为负根, 特征根为

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}, \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

其通解可表示为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} \quad (5-74)$$

式中: K_1 和 K_2 为两个待定的系数, 由电路的初始条件决定。

该电路有两个储能元件, 相应的初始条件有两个, 即电容电压和电感电流的初始值:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0, \quad i(0_+) = i(0_-) = I_0$$

因 $i = C \frac{du_C}{dt}$, 所以有 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{I_0}{C}$ 。将这两个初始条件代入式(5-74), 可得

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = U_0 \\ s_1 K_1 + s_2 K_2 = \frac{I_0}{C} \end{cases} \quad (5-75)$$

以上两个方程联立求解, 可得常数 K_1 和 K_2 :

$$\begin{cases} K_1 = \frac{1}{s_2 - s_1} \left(s_2 U_0 - \frac{I_0}{C} \right) \\ K_2 = \frac{1}{s_1 - s_2} \left(s_1 U_0 - \frac{I_0}{C} \right) \end{cases} \quad (5-76)$$

将式(5-76)代入式(5-74)并整理, 可得

$$u_C(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{(s_2 - s_1)C} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t}) \quad (5-77)$$

根据 $i = C \frac{du_C}{dt}$, 并利用 $s_1 s_2 = \frac{1}{LC}$, 可得

$$i(t) = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) + \frac{I_0}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_2 t} - s_1 e^{s_1 t}) \quad (5-78)$$

根据 $u_L = L \frac{di}{dt}$ 可得

$$u_L(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) + \frac{I_0 L}{s_2 - s_1} (s_2^2 e^{s_2 t} - s_1^2 e^{s_1 t}) \quad (5-79)$$

为了方便讨论, 电压、电流的变化趋势, 假设电容有初始储能而电感无初始储能, 即

$U_0 \neq 0, I_0 = 0$, 这时电容电压、电路电流、电感电压的表达式(式(5-77)~式(5-79))可简化为

$$u_C(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \quad (5-80)$$

$$i(t) = \frac{U_0}{L(s_2 - s_1)} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \quad (5-81)$$

$$u_L(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1} (s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}) \quad (5-82)$$

u_C, u_L 和 i 随时间的变化曲线如图 5-32 所示。因为 s_1, s_2 是两个负实数, 所以电容电压由两个单调下降的指数函数组成, 其放电过程是单调的衰减过程; 至于电流 i , 因为 $s_1 > s_2$, 根据式(5-81), 放电电流始终为负。在 $t=0$ 时, $i=0$, 这是由电流的初始条件决定的。在 $t=\infty$ 时, 电容的电场能量全部为电阻消耗, 电流也是零。在中间某一时刻 $t=t_m$ 时, 电流 i 数值最大。由 $di/dt=0$ 可计算出

$$t_m = \frac{\ln(s_2/s_1)}{s_1 - s_2} \quad (5-83)$$

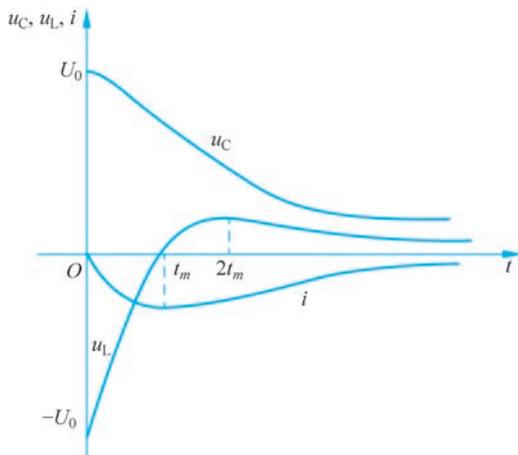


图 5-32 非振荡放电过程 u_C, u_L 和 i 随时间的变化曲线

在 $0 \sim t_m$ 期间, 电容中的电场能量一部分消耗在电阻上, 另一部分则变为电感中的磁场能量。当 $t > t_m$ 时, 电容中剩余的电场能量和电感中的磁场能量都逐渐消耗在电阻上; 当 $t=t_m$ 时, 电感电压过零点, 当 $t=2t_m$ 时, 电感电压为最大。可见, 过渡过程为非振荡过程, 即此时为过阻尼情况。

(2) $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称为临界阻尼情况。

此时特征根是两个相等的负实根。特征根为 $s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L}$, 记 $\alpha = \frac{R}{2L}$, 微分方程式(5-72)的通解为

$$u_C(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t} \quad (5-84)$$

初始条件

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0, \quad i(0_+) = i(0_-) = I_0$$

因为 $i = C \frac{du_C}{dt}$, 所以有 $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0_+} = \frac{I_0}{C}$ 。将这两个初始条件代入式(5-84), 可得

$$\begin{cases} K_1 = U_0 \\ -\alpha K_1 + K_2 = \frac{I_0}{C} \end{cases} \quad (5-85)$$

求解可得

$$K_1 = U_0, \quad K_2 = \alpha U_0 + \frac{I_0}{C} \quad (5-86)$$

把 K_1 和 K_2 代入式(5-84), 并整理, 可得电容电压为

$$u_C(t) = U_0(1 + \alpha t)e^{-\alpha t} + \frac{I_0}{C}te^{-\alpha t} \quad (5-87)$$

电路电流为

$$\begin{aligned} i(t) &= C \frac{du_C}{dt} = -U_0\alpha^2 Cte^{-\alpha t} + I_0(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} \\ &= -\frac{U_0}{L}te^{-\alpha t} + I_0(1 - \alpha t)e^{-\alpha t} \end{aligned} \quad (5-88)$$

从式(5-87)、式(5-88)可以看出, 电路的响应仍然属于非振荡性质。

(3) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称为欠阻尼情况。

此时特征根是两个共轭复根。特征根为

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d, \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d \quad (5-89)$$

式中

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

此时微分方程(5-72)的通解可表示为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) \quad (5-90)$$

式(5-90)中 K_1 和 K_2 为两个待定的系数。由电容电压和电感电流的初始值

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0, \quad i(0_+) = i(0_-) = I_0$$

可得

$$\begin{cases} K_1 = U_0 \\ -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{I_0}{C} \end{cases} \quad (5-91)$$

求解, 可得

$$K_2 = \frac{1}{\omega_d} \left(\alpha U_0 + \frac{I_0}{C} \right) \quad (5-92)$$

把 K_1 和 K_2 代入式(5-90), 便可求得电容电压为

$$u_C(t) = U_0 \frac{\omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \theta) + \frac{I_0}{\omega_d C} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t \quad (5-93)$$

电路电流为

$$i(t) = -U_0 \frac{\omega_0^2 C}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin \omega_d t + \frac{I_0 \omega_0}{\omega_d} e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (5-94)$$

为了便于反映响应的特点,式(5-90)变换为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (5-95)$$

式中

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \quad \theta = -\arctan \frac{K_2}{K_1}$$

式(5-95)表明: $u_C(t)$ 是衰减振荡,它随时间变化的曲线如图5-33所示。它的振幅 $K e^{-\alpha t}$ 是随时间按指数规律衰减的。 α 称为衰减系数, α 越大,衰减越快。 ω_d 是衰减振荡的角频率, T 为振荡的周期, ω_d 越大, T 越小。该电路的振荡频率为

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \quad (5-96)$$

振荡频率与电路参数有关,而与电源的频率无关,故称为自由振荡。

从能量关系看,在振荡放电过程中,电容中的电场能量和电感中的磁场能量反复交换,电容反复地充电放电,其两端电压和电路电流以及电感电压均周期变化,这种过程称为电磁振荡。由于电阻消耗能量,所以振荡过程中电磁能量不断减少,即电容电压和电路电流不断减少,最终全部消耗在电阻上,各电压电流都衰减到零。

当 $R=0$ 时, $\alpha=0$,则

$$\omega_d = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

电容电压和电路电流分别为

$$u_C(t) = U_0 \cos \omega_0 t + \frac{I_0}{\omega_0 C} \sin \omega_0 t \quad (5-97)$$

$$i(t) = -U_0 \omega_0 C \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t = -\frac{U_0}{\sqrt{L/C}} \sin \omega_0 t + I_0 \cos \omega_0 t \quad (5-98)$$

由式(5-97)、式(5-98)可以看出: u_C 、 i 的振幅并不衰减,这时的响应为等幅振荡,其振荡角频率为 ω_0 。当 L 、 C 为任意正值时,根据式(5-97)、式(5-98)可以得出,对所有 $t \geq 0$,总有

$$w(t) = \frac{1}{2} u_C^2(t) + \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} u_C^2(0) + \frac{1}{2} L i^2(0) = w(0) \quad (5-99)$$

式(5-99)表明,任何时刻储能总等于初始时刻的储能,能量不断往返于电场与磁场之间,永不消失。

综上所述,电路的零输入响应的性质取决于电路的固有频率 s ,固有频率可以是复数、实数或虚数,从而决定了响应为非振荡过程、衰减振荡过程或等幅振荡过程。

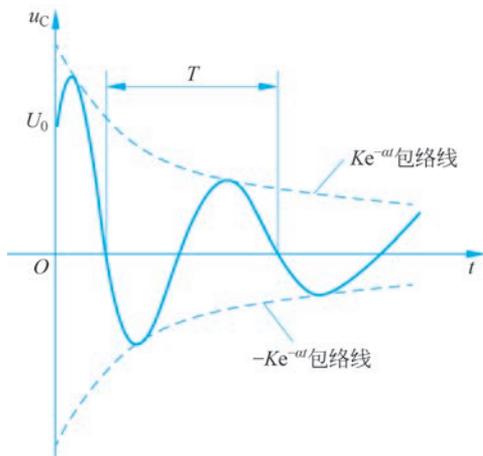


图 5-33 振荡放电过程 u_C 随时间的变化曲线

例 5-11 如图 5-34 所示电路, 已知 $U_S = 10\text{V}$, $C = 1\mu\text{F}$, $R = 4\text{k}\Omega$, $L = 1\text{H}$, 开关 S 原来闭合在 1, 在 $t = 0$ 时, 开关 S 由 1 切换至 2。试求: (1) u_C 、 u_R 、 u_L 、 i ; (2) i_{\max} 。

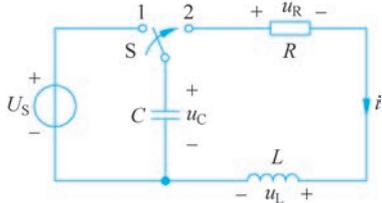


图 5-34 例 5-11 电路图

解: (1) 在 $t = 0_-$ 时, 电容用开路线代替, 可得 $u_C(0_-) = U_S = 10\text{V}$ 。

根据电容电压的连续性可得 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 10\text{V}$ 。而 $i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_0 = 0$ 。

$t > 0$ 后该电路无激励, 为零输入响应, 据 KVL 可得

$$u_R + u_L - u_C = 0$$

将

$$i = -C \frac{du_C}{dt}, \quad u_R = Ri = -RC \frac{du_C}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt} = -LC \frac{d^2u_C}{dt^2}$$

代入上式, 可得

$$LC \frac{d^2u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

由 R 、 L 、 C 参数可知

$$R = 4\text{k}\Omega > 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{1}{10^{-6}}} = 2(\text{k}\Omega)$$

为非振荡过程, 特征根为

$$s_1 = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -268, \quad s_2 = -\frac{R}{2L} - \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -3732$$

由于 $I_0 = 0$, 据式(5-80)得电容电压

$$u_C(t) = \frac{U_0}{s_2 - s_1} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) = (10.77e^{-268t} - 0.773e^{-3732t})(\text{V})$$

电路电流

$$i(t) = -C \frac{du_C}{dt} = \frac{U_0}{(s_2 - s_1)L} (e^{s_2 t} - e^{s_1 t}) = 2.89(e^{-3732t} - e^{-268t})(\text{mA})$$

电阻电压为

$$u_R = Ri = 11.56(e^{-268t} - e^{-3732t})(\text{V})$$

电感电压为

$$u_L = L \frac{di}{dt} = (10.77e^{-3732t} - 0.773e^{-268t})(\text{V})$$

(2) 电流最大值发生在 t_m 时刻, 即

$$t_m = \frac{\ln(s_2/s_1)}{s_1 - s_2} = 7.60 \times 10^{-4}(\text{s})$$

$$i_{\max} = 2.89(e^{-268 \times 7.6 \times 10^{-4}} - e^{-3732 \times 7.6 \times 10^{-4}}) = 2.19(\text{mA})$$

例 5-12 某 RLC 串联电路的 $R = 1\Omega$, 固有频率为 $-3 \pm j5$ 。电路中的 L 、 C 保持不变, 试计算: (1) 为获得临界阻尼响应所需的 R 值; (2) 为获得过阻尼响应, 且固有频率之一为 $s_1 = -10$ 时所需的 R 值。

解: (1) 固有频率

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -3 \pm j5$$

可知

$$\frac{R}{2L} = 3, \quad \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = j5$$

则有

$$L = \frac{1}{6}, \quad \frac{1}{LC} = 34$$

现电路属于临界阻尼状态, 应使

$$\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$$

则

$$R = 2L \sqrt{\frac{1}{LC}} = 2 \times \frac{1}{6} \times \sqrt{34} = 1.94(\Omega)$$

(2) 要使

$$s_1 = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -10$$

因为 $L = \frac{1}{6}, \frac{1}{LC} = 34$, 所以 $-\frac{R}{2L} = -3R$, 则

$$-3R - \sqrt{(3R)^2 - 34} = -10$$

解得

$$R = 2.23\Omega$$

5.4.2 二阶串联电路的完全响应

如图 5-35 所示的 RLC 串联电路, 若电容 C 原先已充电, 其初始电压 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 电感中的初始电流 $i(0_+) = i(0_-) = I_0$ 。在 $t=0$ 时合上开关 S 。 $t>0$ 时电路中有直流激励源。即为 RLC 串联电路完全响应。

对图 5-35 所示电路, 按照 KVL 可写出

$$u_R + u_L + u_C = U_S$$

将

$$i = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_R = Ri = RC \frac{du_C}{dt}, \quad u_L = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}$$

代入上式, 可得

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = U_S \quad (5-100)$$

式(5-100)是一个以 u_C 为未知量的二阶、线性、常系数、非齐次微分方程, 它的解由该方程的特解和对应的齐次微分方程的通解组成。特解 $u_{CP} = U_S$; 齐次方程通解设为 $u_{Ch} = K e^{st}$, 得特征方程 $LCs^2 + RCs + 1 = 0$, 其特征根为

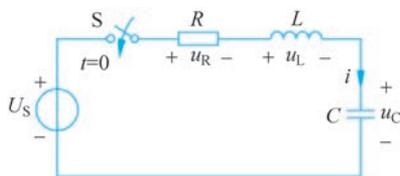


图 5-35 RLC 串联电路的完全响应

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \quad (5-101)$$

R 、 L 、 C 参数取值不同, 特征根 s_1 、 s_2 可能是两个相异实根、两个共轭复根或两个相等的实根, 所以 RLC 串联电路的全响应也分为 3 种情况:

(1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称为过阻尼情况。特征根是两个相异实根, 而且均为负根, 其通解可表示为

$$u_C(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + U_S \quad (5-102)$$

(2) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称为临界阻尼情况。特征根是两个相等的负实根, 即

$$s_1 = s_2 = -\frac{R}{2L} = -\alpha$$

其通解为

$$u_C(t) = (K_1 + K_2 t) e^{-\alpha t} + U_S \quad (5-103)$$

(3) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 称为欠阻尼情况。此时特征根是两个共轭复根, 特征根为

$$s_1 = -\alpha + j\omega_d, \quad s_2 = -\alpha - j\omega_d$$

式中

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}, \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

其通解为

$$u_C(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos\omega_d t + K_2 \sin\omega_d t) + U_S \quad (5-104)$$

式(5-102)~式(5-104)中 K_1 和 K_2 为两个待定的系数。由电容电压和电感电流的初始值 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, $i(0_+) = i(0_-) = I_0$ 决定。

例 5-13 电路如图 5-36(a) 所示, 当 $t < 0$ 时, $u_S(t) = -1V$, 在 $t = 0$ 时, $u_S(t)$ 突然增至 $1V$, 以后一直保持为此值, 如图 5-36(b) 所示。试求电容电压和电感电流。

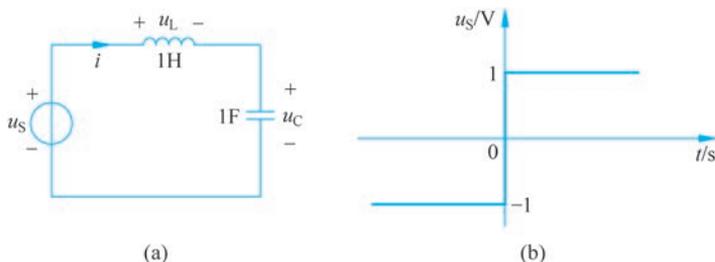


图 5-36 例 5-13 电路及输入波形

解: $t = 0_-$ 时, 电容用开路线代替, 电感用短路线代替, 可知 $u_C(0_-) = -1V$, $i(0_-) = 0A$, 根据电容电压和电感电流的连续性, 有 $u_C(0_+) = -1V$, $i(0_+) = 0A$ 。

$t > 0$ 时为全响应, 电路方程为

$$u_L + u_C = u_S, \quad u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{du_C}{dt}$$

有

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = u_S$$

因为 $R=0$, 所以

$$\alpha = 0, \quad \omega_d = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 1$$

对应的特征根为 $s_{1,2} = \pm j$, 其通解为

$$u_C(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t + 1$$

根据 $u_C(0) = -1\text{V}$, $i(0) = 0\text{A}$, 得 $K_1 = -2$, $K_2 = 0$ 。所以

$$u_C(t) = -2\cos t + 1(\text{V})$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} = 2\sin t(\text{A})$$

5.4.3 二阶并联电路的响应

图 5-37 为 GCL 并联电路, 若电容的初始电压 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = U_0$, 电感的初始电流 $i(0_+) = i(0_-) = I_0$ 。在 $t=0$ 时合上开关 S 。 $t>0$ 时电路中有直流激励, 即为 GCL 并联电路完全响应。

按照 KCL 可写出

$$i_R + i_L + i_C = I_S$$

将

$$i_G = Gu = GL \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{du}{dt} = LC \frac{d^2 i_L}{dt^2}$$

代入上式, 可得

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S \quad (5-105)$$

式(5-105)是一个以 i_L 为未知量的二阶、线性、常系数、非齐次微分方程。将式(5-105)和式(5-100)比较可以发现: 把串联电路方程中的 u_C 换成 i_L , L 换成 C , C 换成 L , R 换成 G , U_S 换成 I_S 就会得到并联电路的方程。因此, 按照对偶原理可以从已有的 RLC 串联电路的响应得到 GCL 并联电路的响应。

例 5-14 如图 5-37 所示 GCL 并联电路, 已知 $u(0) = 0\text{V}$, $i_L(0) = 0\text{A}$, $L = 1\text{H}$, $C = 1\text{F}$, $I_S = 1\text{A}(t>0)$ 。若 G 为 10S , 2S , 0.1S , 求 $t>0$ 时 $i_L(t)$ 的响应。

解: 该电路为 GCL 并联电路的零状态响应, 微分方程为

$$LC \frac{d^2 i_L}{dt^2} + GL \frac{di_L}{dt} + i_L = I_S$$

根据 RLC 串联电路和 GCL 并联电路的对偶原理, 可得特征根为

$$s_{1,2} = -\frac{G}{2C} \pm \sqrt{\left(\frac{G}{2C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$$

且特解 $i_{LP} = I_S = 1\text{A}$ 。

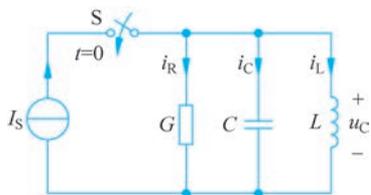


图 5-37 GCL 并联电路

(1) $G=10\text{S}$ 时, $\left(\frac{G}{2C}\right)^2 > \frac{1}{LC}$, 属于过阻尼, 特征根为

$$s_1 = -\frac{10}{2 \times 1} + \sqrt{\left(\frac{10}{2 \times 1}\right)^2 - \frac{1}{1 \times 1}} = -5 + 2\sqrt{6}, \quad s_2 = -5 - 2\sqrt{6}$$

则通解为

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + 1$$

根据

$$u(0) = 0\text{V}, \quad i_L(0) = 0\text{A}$$

可得

$$i_L(0) = K_1 + K_2 + 1 = 0, \quad i'_L(0) = s_1 K_1 + s_2 K_2 = \frac{u(0)}{L} = 0$$

由此解得

$$K_1 = \frac{s_2}{s_2 - s_1} = -\frac{5 + 2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}, \quad K_2 = \frac{s_1}{s_1 - s_2} = \frac{5 - 2\sqrt{6}}{4\sqrt{6}}$$

所以

$$i_L(t) = 1 + \frac{1}{4\sqrt{6}} \left[(5 - 2\sqrt{6}) e^{-(5+2\sqrt{6})t} - (5 + 2\sqrt{6}) e^{-(5-2\sqrt{6})t} \right] (\text{A}), \quad t \geq 0$$

(2) $G=2\text{S}$ 时, $\left(\frac{G}{2C}\right)^2 = \frac{1}{LC}$, 属于临界阻尼, 特征根为

$$s_1 = s_2 = -\frac{G}{2C} = -1$$

则通解为

$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 t e^{s_2 t} + 1$$

根据

$$u(0) = 0\text{V}, \quad i_L(0) = 0\text{A}$$

可得

$$i_L(0) = K_1 + 1 = 0, \quad i'_L(0) = s_1 K_1 + K_2 = \frac{u(0)}{L} = 0$$

由此解得

$$K_1 = -1, \quad K_2 = -1$$

所以

$$i_L(t) = 1 - (1+t)e^{-t} (\text{A}), \quad t \geq 0$$

(3) $G=0.1\text{S}$ 时, $\left(\frac{G}{2C}\right)^2 < \frac{1}{LC}$, 属于欠阻尼, 特征根为

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -\frac{0.1}{2 \times 1} \pm \sqrt{\left(\frac{0.1}{2 \times 1}\right)^2 - \frac{1}{1 \times 1}} \approx -0.05 \pm j$$

则通解为

$$i_L(t) = e^{-\alpha t} (K_1 \cos \omega_d t + K_2 \sin \omega_d t) + 1$$

根据

$$u(0) = 0\text{V}, \quad i_L(0) = 0\text{A}$$

可得 $i_L(0) = K_1 + 1 = 0, \quad i'_L(0) = -\alpha K_1 + \omega_d K_2 = \frac{u(0)}{L} = 0$

由此解得

$$K_1 = -1, \quad K_2 = -\frac{\alpha}{\omega_d} = -0.05$$

所以

$$i_L(t) = 1 - e^{-0.05t} (\cos t + 0.05 \sin \omega_d t) \approx 1 - e^{-0.05t} \cos t (\text{A}), \quad t \geq 0$$

三种情况 i_L 的波形如图 5-38 所示。

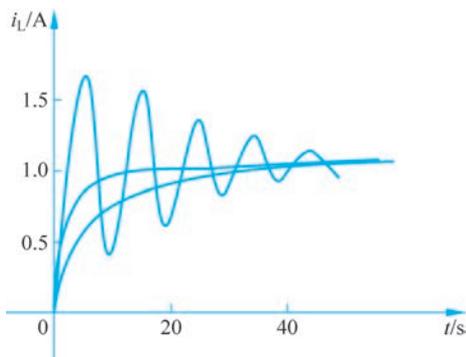


图 5-38 例 5-14 的电流波形

本章小结

1. 电容 C 、电感 L 是两种基本电路元件,属于无源二端储能元件。在某一时刻 t ,在关联参考方向下,电容 C 的伏安关系式为 $i_C = C \frac{du_C}{dt}$,储能为 $w_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t)$;电感 L 的伏安关系式为 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$,储能为 $w_L(t) = \frac{1}{2} L i_L^2(t)$ 。

2. 动态电路发生换路时,在激励或内部储能作用下,电路会从一个稳定状态变化到另一个稳定状态,这个变化的过程称为过渡过程。在有限激励作用下,储能元件的储能不能跃变,必须是连续的,若换路发生在 t_0 时刻,对于电容元件有 $u_C(t_{0+}) = u_C(t_{0-})$,对于电感元件有 $i_L(t_{0+}) = i_L(t_{0-})$ 。

3. 如果电路中的储能元件只有一个独立的电感或一个独立的电容,电路方程是一阶微分方程,这样的电路称为一阶电路,常见的一阶电路有 RC 电路和 RL 电路。若一阶电路激励为直流激励,称为直流一阶电路。求解直流一阶电路常用直接解微分方程、利用分解方法求解、利用三要素法进行求解等三种方法。

其中三要素法无须求解微分方程,响应的一般形式为 $f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$,其中, $f(t)$ 可代表任意支路电压或支路电流; $f(0_+)$ 代表该支路电压或电流的初始值, $f(\infty)$ 代表该支路电压或电流的稳态值, τ 为一阶电路的时间常数。对一阶 RC 电路 $\tau = R_0 C$,对一阶 RL 电路 $\tau = L/R_0$,其中 R_0 是换路后与动态元件两端相连的电阻网络

的戴维南电路的等效电阻。

4. 用二阶微分方程描述的动态电路称为二阶电路。在二阶动态电路中,给定的初始条件有两个,它们由储能元件的初始值决定。其中 RLC 串联电路和 GCL 并联电路是最简单的二阶电路,其响应有过阻尼、临界阻尼、欠阻尼三种情况,具体取决于 R 、 L 、 C 的参数值。以 RLC 串联电路的零输入响应为例,依电路元件参数值的不同分以下三种情况:

(1) $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,称为过阻尼情况。过渡过程为非振荡放电过程。

(2) $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,称为临界阻尼情况。过渡过程为非振荡放电过程。

(3) $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时,称为欠阻尼情况。过渡过程为振荡放电过程。

习题

一、选择题

1. 在关联参考方向下, R 、 L 、 C 三个元件的伏安关系式可分别用()表示。

A. $i_R = Gu_R, u_L = u_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t i_L(\tau) d\tau, u_C = C \frac{di_C}{dt}$

B. $u_R = Ri_R, u_L = u_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t i_L(\tau) d\tau, u_C = C \frac{di_C}{dt}$

C. $u_R = Gi_R, u_L = L \frac{di_L}{dt}, u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$

D. $u_R = Ri_R, u_L = L \frac{di_L}{dt}, u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(\tau) d\tau$

2. 一阶电路的零输入响应是指()。

A. 电容电压 $u_C(0_-) \neq 0V$ 或电感电压 $u_L(0_-) \neq 0V$, 且电路有外加激励作用

B. 电容电流 $i_C(0_-) \neq 0A$ 或电感电压 $u_L(0_-) \neq 0V$, 且电路无外加激励作用

C. 电容电流 $i_C(0_-) \neq 0A$ 或电感电流 $i_L(0_-) \neq 0A$, 且电路有外加激励作用

D. 电容电压 $u_C(0_-) \neq 0V$ 或电感电流 $i_L(0_-) \neq 0A$, 且电路无外加激励作用

3. 若 C_1 、 C_2 两电容并联, 则其等效电容 $C =$ ()。

A. $C_1 + C_2$ B. $\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ C. $\frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$ D. $C_1 C_2$

4. 已知电路如图 x5.1 所示, 电路原已稳定, 开关闭合后电容电压的初始值 $u_C(0_+)$ 等于()。

- A. $-2V$ B. $2V$
C. $6V$ D. $8V$

5. 已知 $u_C(t) = 15e^{-\frac{t}{\tau}} V$, 当 $t = 2s$ 时, $u_C = 6V$, 电路的时间常数 τ 等于()。

- A. $0.458s$ B. $2.18s$ C. $0.2s$ D. $0.1s$

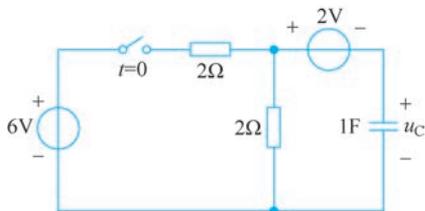


图 x5.1 选择题 4 图

6. 二阶 RLC 串联电路, 当 R _____ $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 电路为欠阻尼情况; 当 R _____ $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ 时, 电路为临界阻尼情况()。
- A. $>、=$ B. $<、=$ C. $<、>$ D. $>、<$

二、填空题

1. 若 L_1 与 L_2 两电感串联, 则其等效电感 $L =$ _____; 若这两个电感并联, 则等效电感 $L =$ _____。
2. 一般情况下, 电感的 _____ 不能跃变, 电容的 _____ 不能跃变。
3. 在一阶 RC 电路中, 若 C 不变, R 越大, 则换路后过渡过程越 _____。
4. 二阶 RLC 串联电路, 当 R _____ $2\sqrt{L/C}$ 时, 电路为振荡放电; 当 $R =$ _____ 时, 电路发生等幅振荡。

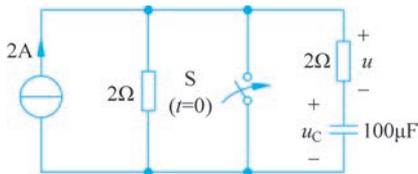


图 x5.2 填空题 5 图

5. 如图 x5.2 所示电路中, 开关闭合前电路处于稳态, $u_C(0_+) =$ _____ V, $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0+} =$ _____ V/s。

6. $R=1\Omega$ 和 $C=1F$ 的并联电路与电流源 I_S 接通。当 $I_S=2A(t \geq 0)$, 电容初始电压为 1V 时, $u_C(t) = (2 - e^{-t})(V)(t \geq 0)$, 则当激励 I_S 增大 1 倍 ($I_S=4A$), 而初始电压保持原值, $t \geq 0$ 时, $u_C(t)$ 应为 _____ V。

三、计算题

1. 电路如图 x5.3 所示, 求图 x5.3(a) 中 a-b 端的等效电容以及图 x5.3(b) 中 a-b 端的等效电感。

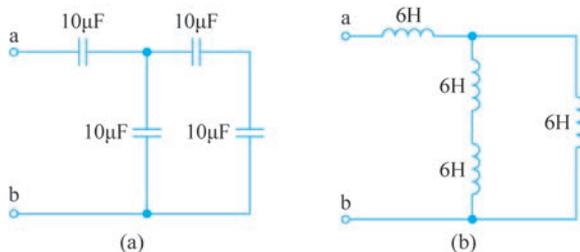


图 x5.3 计算题 1 图

2. 电路如图 x5.4(a) 所示, 电压源 u_S 波形如图 x5.4(b) 所示, 求电容电流并画出波形图, 以及电容的储能并画出电容储能随时间变化的曲线。

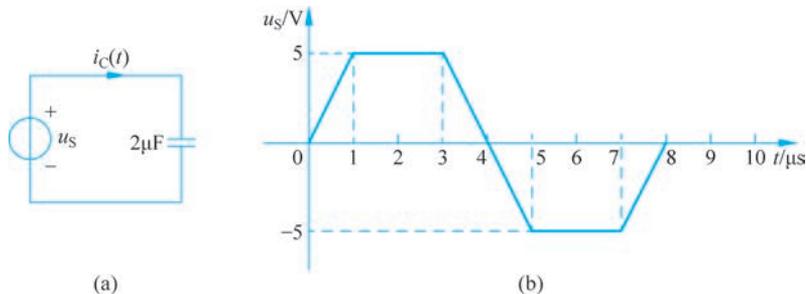


图 x5.4 计算题 2 图

3. 如图 x5.5(a)所示电路, $i_L(0) = 0\text{A}$, 电压源 u_S 的波形如图 x5.5(b)所示。求当 t 分别为 1s 、 2s 、 3s 、 4s 时的电感电流 i_L 。

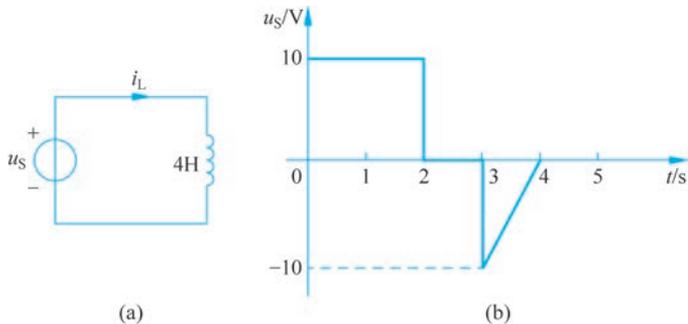


图 x5.5 计算题 3 图

4. 如图 x5.6 所示 S 在 $t=0$ 时闭合, 闭合前已达稳态, 求初始值 $u_C(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 。

5. 如图 x5.7 所示电路, S 在 $t=0$ 时闭合, 闭合前已稳定, 求闭合后 i_L 的初始值、稳态值以及电路的时间常数 τ , 如 R_1 增大, 电路的时间常数 τ 如何变化?

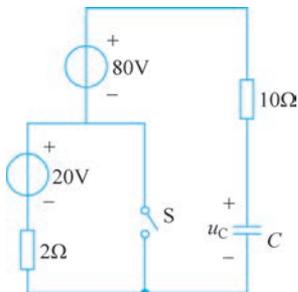


图 x5.6 计算题 4 图

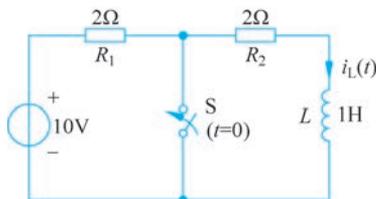


图 x5.7 计算题 5 图

6. 如图 x5.8 所示电路, 已知 $E=6\text{V}$, $R_1=5\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=1\Omega$, 开关 S 闭合前电路处于稳态, $t=0$ 时闭合开关 S, 求换路瞬间的 $u_C(0_+)$ 、 $i_C(0_+)$ 。

7. 如图 x5.9 所示电路, 已知 $I_S=5\text{A}$, $R_1=10\Omega$, $R_2=10\Omega$, $R_3=5\Omega$, $C=250\mu\text{F}$, $t=0$ 时开关 S 闭合, 求 $t \geq 0$ 时的 $u_C(t)$ 、 $i_C(t)$ 和 $i_3(t)$ 。(开关闭合前电路已处于稳态)

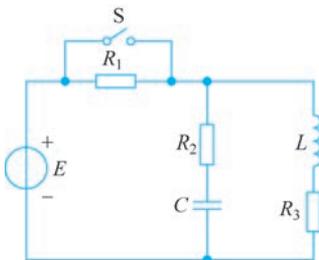


图 x5.8 计算题 6 图

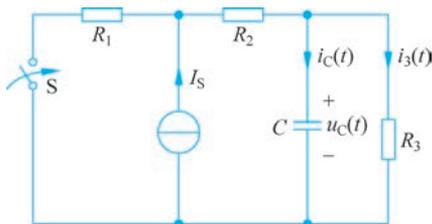


图 x5.9 计算题 7 图

8. 如图 x5.10 所示电路, $t=0$ 时开关 S_1 打开, S_2 闭合。试用三要素法求出 $t \geq 0$ 时的 $i_L(t)$ 和 $u_L(t)$ 。(注: 在开关动作前, 电路已达稳态)

9. 如图 x5.11 所示电路, 在 $t < 0$ 时已处于稳态, 在 $t=0$ 时将开关 S 由 1 切换至 2, 求换路后的电容电压 $u_C(t)$, 以及 $t=20\text{ms}$ 时的电容元件的储能。

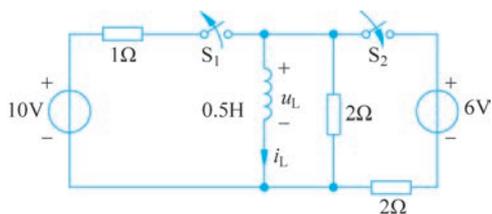


图 x5.10 计算题 8 图

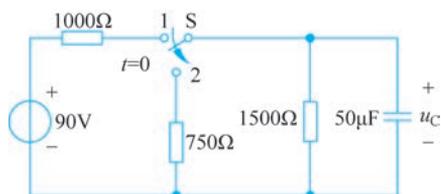


图 x5.11 计算题 9 图

10. 电路如图 x5.12 所示, 电路原处于稳态。在 $t=0$ 时, 将开关 S 由位置 1 合向位置 2, 试求 $t>0$ 时 $i_L(t)$ 和 $i(t)$, 并画出它们随时间变化的曲线。

11. 如图 x5.13 所示电路, 已知 $U_S=10\text{V}$, $L=1\text{H}$, $C=1\mu\text{F}$, 开关 S 原来合在触点 1 处, 在 $t=0$ 时, 开关由触点 1 合到触点 2 处。求 R 分别为 2000Ω 、 4000Ω 和 5000Ω 时的 u_C 、 u_R 、 u_L 和 i 。

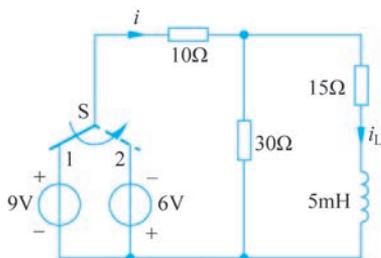


图 x5.12 计算题 10 图

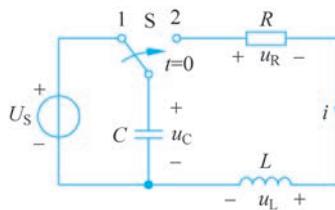


图 x5.13 计算题 11 图

12. 如图 x5.14 所示电路, 在开关 S 闭合前已达稳态, $t=0$ 时, S 由 1 切换至 2, 已知 $U_{S1}=4\text{V}$, $U_{S2}=6\text{V}$, $R=2\Omega$, $L=1\text{H}$, $C=0.2\text{F}$, 求 $t>0$ 时的 $i(t)$ 。

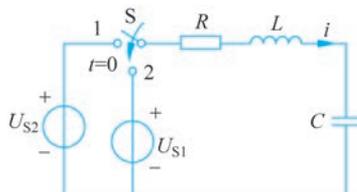


图 x5.14 计算题 12 图