

“十四五”时期国家重点出版物出版专项规划·重大出版工程规划项目



变革性光科学与技术丛书

Polarized Light and Optical Systems (II)

偏振光和光学系统 (第二卷)

[美] 罗素·奇普曼 (Russell A. Chipman)

[美] 慧梓—蒂凡尼·林 (Wai-Sze Tiffany Lam) 著

[美] 嘉兰·杨 (Garam Young)

侯俊峰 张旭升 王东光 译

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是有关偏振光学及光学系统偏振设计和分析方面的一本系统性论著,讨论了偏振光基本理论和测量方法、偏振光线追迹和偏振像差理论,以及偏振像差理论在常用偏振元件和系统中的应用。全书共 27 章,分为两卷,其中第一卷为第 1~13 章,介绍光的偏振特性及其表征方法、偏振光干涉、琼斯矩阵、米勒矩阵、偏振测量术、菲涅耳公式、偏振光线追迹、光学光线追迹、琼斯光瞳和局部坐标系、菲涅耳像差、薄膜等内容;第二卷为第 14~27 章,介绍基于泡利矩阵的琼斯矩阵解析、近轴偏振像差、偏振像差对成像的影响、平移和延迟计算、倾斜像差、双折射光线追迹、基于偏振光线追迹矩阵的光束组合、单轴材料和元件、晶体偏振器、衍射光学元件、液晶盒、应力双折射、多阶延迟器及其延迟的不连续性等。本书内容非常丰富、翔实,特别是关于光学系统的偏振光线追迹、偏振像差分析及应用泡利矩阵进行偏振特性解析等部分内容,是作者对于偏振光学研究的最新成果。

本书可供从事光学工程、天文观测、空间遥感、材料科学、微纳结构科学、生物医学等领域的科研和工程技术人员参考阅读,也可作为相关专业的高年级本科生、研究生的教学参考书。

北京市版权局著作权合同登记号 图字:01-2022-0604

Polarized Light and Optical Systems/by Russell A. Chipman, Wai-Sze Tiffany Lam, Garam Young / ISBN: 978-1-4987-0056-6

Copyright© 2019 by CRC Press, Taylor & Francis Group

Authorized translation from English language edition published Routledge, a member of the Taylor & Francis Group. ; All rights reserved. 本书原版由 Taylor & Francis 出版集团旗下, Routledge 出版公司出版,并经其授权翻译出版。版权所有,侵权必究。

本书封面贴有 Taylor & Francis 公司防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

偏振光和光学系统. 第二卷/(美)罗素·奇普曼(Russell A. Chipman),(美)慧梓·蒂凡尼·林(Wai-Sze Tiffany Lam),(美)嘉兰·杨(Garam Young)著;侯俊峰,张旭升,王东光译.—北京:清华大学出版社,2023.6

(变革性光科学与技术丛书)

书名原文:Polarized Light and Optical Systems

ISBN 978-7-302-63379-2

I. ①偏… II. ①罗… ②慧… ③嘉… ④侯… ⑤张… ⑥王… III. ①偏振光—光学系统 IV. ①O436.3

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 068445 号

责任编辑:鲁永芳

封面设计:意匠文化·丁奔亮

责任校对:薄军霞

责任印制:宋 林

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-83470000

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市龙大印装有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:27.5

字 数:669 千字

版 次:2023 年 8 月第 1 版

印 次:2023 年 8 月第 1 次印刷

定 价:169.00 元

产品编号:101497-01

丛书编委会

主 编

罗先刚 中国工程院院士,中国科学院光电技术研究所

编 委

周炳琨 中国科学院院士,清华大学

许祖彦 中国工程院院士,中国科学院理化技术研究所

杨国桢 中国科学院院士,中国科学院物理研究所

吕跃广 中国工程院院士,中国北方电子设备研究所

顾 敏 澳大利亚科学院院士、澳大利亚技术科学与工程院院士、
中国工程院外籍院士,皇家墨尔本理工大学

洪明辉 新加坡工程院院士,新加坡国立大学

谭小地 教授,北京理工大学、福建师范大学

段宣明 研究员,中国科学院重庆绿色智能技术研究院

蒲明博 研究员,中国科学院光电技术研究所

丛书序

光是生命能量的重要来源,也是现代信息社会的基础。早在几千年前人类便已开始了对光的研究,然而,真正的光学技术直到 400 年前才诞生,斯涅耳、牛顿、费马、惠更斯、菲涅耳、麦克斯韦、爱因斯坦等学者相继从不同角度研究了光的本性。从基础理论的角度看,光学经历了几何光学、波动光学、电磁光学、量子光学等阶段,每一阶段的变革都极大地促进了科学技术的发展。例如,波动光学的出现使得调制光的手段不再限于折射和反射,利用光栅、菲涅耳波带片等简单的衍射型微结构即可实现分光、聚焦等功能;电磁光学的出现,促进了微波和光波技术的融合,催生了微波光子学等新的学科;量子光学则为新型光源和探测器的出现奠定了基础。

伴随着理论突破,20 世纪见证了诸多变革性光学技术的诞生和发展,它们在一定程度上使得过去 100 年成为人类历史长河中发展最为迅速、变革最为剧烈的一个阶段。典型的变革性光学技术包括激光技术、光纤通信技术、CCD 成像技术、LED 照明技术、全息显示技术等。激光作为美国 20 世纪的四大发明之一(另外三项为原子能、计算机和半导体),是光学技术上的重大里程碑。由于其极高的亮度、相干性和单色性,激光在光通信、先进制造、生物医疗、精密测量、激光武器乃至激光核聚变等技术中均发挥了至关重要的作用。

光通信技术是近年来另一项快速发展的光学技术,与微波无线通信一起极大地改变了世界的格局,使“地球村”成为现实。光学通信的变革起源于 20 世纪 60 年代,高琨提出用光代替电流,用玻璃纤维代替金属导线实现信号传输的设想。1970 年,美国康宁公司研制出损耗为 20 dB/km 的光纤,使光纤中的远距离光传输成为可能,高琨也因此获得了 2009 年的诺贝尔物理学奖。

除了激光和光纤之外,光学技术还改变了沿用数百年的照明、成像等技术。以最常见的照明技术为例,自 1879 年爱迪生发明白炽灯以来,钨丝的热辐射一直是最常见的照明光源。然而,受制于其极低的能量转化效率,替代性的照明技术一直是人们不断追求的目标。从水银灯的发明到荧光灯的广泛使用,再到获得 2014 年诺贝尔物理学奖的蓝光 LED,新型节能光源已经使得地球上的夜晚不再黑暗。另外,CCD 的出现为便携式相机的推广打通了最后一个障碍,使得信息社会更加丰富多彩。

20 世纪末以来,光学技术虽然仍在快速发展,但其速度已经大幅减慢,以至于很多学者认为光学技术已经发展到瓶颈期。以大口径望远镜为例,虽然早在 1993 年美国就建造出 10 m 口径的“凯克望远镜”,但迄今为止望远镜的口径仍然没有得到大幅增加。美国的 30 m 望远镜仍在规划之中,而欧洲的 OWL 百米望远镜则由于经费不足而取消。在光学光刻方面,受到衍射极限的限制,光刻分辨率取决于波长和数值孔径,导致传统 i 线(波长为 365 nm)光刻机单次曝光分辨率在 200 nm 以上,而每台高精度的 193 光刻机成本达到数亿元人民币,且单次曝光分辨率也仅为 38 nm。

在上述所有光学技术中,光波调制的物理基础都在于光与物质(包括增益介质、透镜、反射镜、光刻胶等)的相互作用。随着光学技术从宏观走向微观,近年来的研究表明:在小于波长的尺度上(即亚波长尺度),规则排列的微结构可作为人造“原子”和“分子”,分别对入射光波的电场和磁场产生响应。在这些微观结构中,光与物质的相互作用变得比传统理论中预言的更强,从而突破了诸多理论上的瓶颈难题,包括折反射定律、衍射极限、吸收厚度-带宽极限等,在大口径望远镜、超分辨成像、太阳能、隐身和反隐身等技术中具有重要应用前景。譬如,基于梯度渐变的表面微结构,人们研制了多种平面的光学透镜,能够将几乎全部入射光波聚集到焦点,且焦斑的尺寸可突破经典的瑞利衍射极限,这一技术为新型大口径、多功能成像透镜的研制奠定了基础。

此外,具有潜在变革性的光学技术还包括量子保密通信、太赫兹技术、涡旋光束、纳米激光器、单光子和单像元成像技术、超快成像、多维度光学存储、柔性光学、三维彩色显示技术等。它们从时间、空间、量子态等不同维度对光波进行操控,形成了覆盖光源、传输模式、探测器的全链条创新技术格局。

值此技术变革的肇始期,清华大学出版社组织出版“变革性光科学与技术丛书”,是本领域的一大幸事。本丛书的作者均为长期活跃在科研第一线,对相关科学和技术的历史、现状和发展趋势具有深刻理解的国内外知名学者。相信通过本丛书的出版,将会更为系统地梳理本领域的技术发展脉络,促进相关技术的更快速发展,为高校教师、学生以及科学爱好者提供沟通和交流平台。

是为序。

罗先刚

2018年7月



目 录

作者简介	15
致谢	16
前言	17
这本书是怎么产生的	19
建议的课程	21
章节导览	23
学习特征	37
缩略语表	39

第 14 章

基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简	1
14.1 引言	1
14.2 泡利矩阵和琼斯矩阵	3
14.2.1 泡利矩阵恒等式	3
14.2.2 展开为泡利矩阵之和	4
14.2.3 泡利符号约定	4
14.2.4 偏振元件绕光轴旋转时的泡利系数	4
14.2.5 泡利之和形式的本征值、本征矢量及矩阵函数	6
14.2.6 标准求和形式	7
14.3 偏振元件序列	7
14.4 矩阵指数和对数	10
14.4.1 矩阵指数	10

14.4.2	矩阵对数·····	11
14.4.3	延迟器矩阵·····	11
14.4.4	二向衰减器矩阵·····	12
14.4.5	齐次琼斯矩阵的偏振性质·····	14
14.5	椭圆延迟器和延迟器空间·····	18
14.6	非齐次琼斯矩阵的偏振特性·····	20
14.7	二向衰减空间和非齐次偏振元件·····	21
14.7.1	二向衰减空间和延迟空间的叠加·····	22
14.8	弱偏振元件·····	23
14.9	总结和结论·····	23
14.10	习题集·····	24
14.11	参考文献·····	27

第 15 章

近轴偏振像差	30
15.1 引言	30
15.2 偏振像差	31
15.2.1 弱偏振琼斯矩阵的相互作用	33
15.2.2 弱偏振光线截点序列的偏振	34
15.3 近轴偏振像差	36
15.3.1 近轴角度和入射面	36
15.3.2 近轴二向衰减和延迟	38
15.3.3 二向衰减离焦	38
15.3.4 二向衰减离焦和延迟离焦	38
15.3.5 视场内的二向衰减和延迟	39
15.3.6 偏振倾斜和平移	41
15.3.7 双节点偏振	42
15.3.8 界面近轴偏振像差总结	42
15.4 七片透镜系统的近轴偏振分析	44
15.5 高阶偏振像差	52
15.5.1 电场像差	52
15.5.2 定向器	57
15.5.3 二向衰减和延迟	62
15.6 偏振像差测量	63
15.7 总结与结论	65
15.8 附录	66
15.8.1 近轴光学	66
15.8.2 建立光学系统	66

15.8.3	近轴光线追迹·····	68
15.8.4	约化厚度和约化角度·····	69
15.8.5	近轴斜光线·····	70
15.9	习题集·····	70
15.10	参考文献·····	73

第 16 章

有偏振像差的成像·····	75
16.1 引言·····	75
16.2 离散傅里叶变换·····	76
16.3 琼斯出瞳和琼斯光瞳函数·····	78
16.4 振幅响应矩阵·····	81
16.5 米勒点扩展矩阵·····	83
16.6 ARM 和 MPSM 的尺度·····	85
16.7 像的偏振结构·····	86
16.8 光学传递矩阵·····	87
16.9 例子——偏振光瞳及非偏振物体·····	89
16.10 例子——实体角锥回射器·····	92
16.11 例子——临界角角锥回射器·····	96
16.12 讨论和结论·····	100
16.13 习题集·····	100
16.14 参考文献·····	103

第 17 章

平移和延迟计算·····	104
17.1 引言·····	104
17.1.1 固有延迟计算的目的·····	106
17.2 几何变换·····	106
17.2.1 局部坐标的旋转：偏振仪视角·····	106
17.2.2 非偏振光学系统·····	107
17.2.3 矢量的平移·····	108
17.2.4 反射时矢量的平移·····	110
17.2.5 平移矩阵 $\mathbf{Q}$ ·····	111
17.3 正则局部坐标·····	114
17.4 固有延迟计算·····	115
17.4.1 固有延迟的定义·····	115
17.5 从 $\mathbf{P}$ 中分离几何变换·····	115
17.5.1 用于 $\mathbf{P}$ 的固有延迟算法, 方法 1·····	116

17.5.2	用于 $\mathbf{P}$ 的固有延迟算法,方法 2	117
17.5.3	延迟范围	117
17.6	例子	118
17.6.1	正入射的理想反射	118
17.6.2	一个镀铝的三反射镜系统例子	119
17.7	总结	120
17.8	习题集	121
17.9	参考文献	122

第 18 章

倾斜像差	124
18.1 引言	124
18.2 倾斜像差的定义	125
18.3 倾斜像差算法	126
18.4 镜头示例——美国专利 2896506	128
18.5 近轴光线追迹中的倾斜像差	129
18.6 近轴倾斜像差的例子	131
18.7 倾斜像差对 PSF 的影响	133
18.8 美国专利 2896506 的 PSM	134
18.9 统计——CODE V 专利库	135
18.10 总结	136
18.11 习题集	136
18.12 参考文献	137

第 19 章

双折射光线追迹	138
19.1 双折射材料中的光线追迹	138
19.2 电磁波在各向异性介质的数学描述	141
19.3 双折射材料	141
19.4 双折射材料的本征模式	147
19.5 双折射界面的反射和折射	148
19.6 光线倍增的数据结构	158
19.7 双折射界面的偏振光线追迹矩阵	160
19.7.1 案例 I: 各向同性-各向同性界面	162
19.7.2 案例 II: 各向同性-双折射界面	164
19.7.3 案例 III: 双折射-各向同性界面	165
19.7.4 案例 IV: 双折射-双折射界面	166
19.8 例子: 光束经过三个双轴晶体的光线分裂	169

19.9	例子：双轴立方体的内反射	170
19.10	总结	172
19.11	习题集	174
19.12	参考文献	175

第 20 章

用偏振光线追迹矩阵进行光束组合	177
20.1 引言	177
20.2 波前和光线网格	178
20.3 共传播的波前合并	180
20.4 非共传播的波前合并	188
20.5 不规则光线网格的合并	189
20.5.1 合并未对齐光线数据的一般步骤	189
20.5.2 逆距离加权插值	190
20.6 小结	194
20.7 习题集	195
20.8 参考文献	197

第 21 章

单轴材料和元件	199
21.1 单轴材料中的光学设计问题	199
21.2 单轴材料描述	200
21.3 单轴材料的本征模式	202
21.4 单轴界面的反射和折射	203
21.5 折射率椭球、光率体、 K 面和 S 面	205
21.6 晶体波片的像差	219
21.6.1 A 板的像差	220
21.6.2 C 板的像差	222
21.7 A 板的成像	224
21.8 偏移板	229
21.9 晶体棱镜	231
21.10 习题集	231
21.11 参考文献	236

第 22 章

晶体偏振器	237
22.1 引言	237

22.2	晶体偏振器的材料	238
22.3	格兰-泰勒偏振器	238
22.3.1	有限视场	239
22.3.2	多条潜在的光线路径	241
22.3.3	多个偏振波前	244
22.3.4	从偏振器出射的偏振波前	246
22.4	格兰-泰勒偏振器的像差	248
22.5	格兰-泰勒偏振器对	250
22.6	小结	254
22.7	习题集	254
22.8	参考文献	257

第 23 章

衍射光学元件	259
23.1 引言	259
23.2 光栅方程	262
23.3 光线追迹衍射光学元件	265
23.3.1 反射式衍射光栅	265
23.3.2 线栅偏振器	268
23.3.3 衍射延迟器	271
23.3.4 衍射亚波长减反膜	272
23.4 RCWA 算法总结	275
23.5 习题集	278
23.6 致谢	279
23.7 参考文献	279

第 24 章

液晶盒	281
24.1 引言	281
24.2 液晶	282
24.2.1 介电各向异性	284
24.3 液晶盒	284
24.3.1 液晶盒的构造	286
24.3.2 恢复力	287
24.3.3 液晶显示器：高对比度的强度调制	287
24.4 液晶盒种类	289
24.4.1 弗里德里克斯液晶盒	289
24.4.2 90°扭曲向列相液晶盒	290

24.4.3	超扭曲向列相液晶盒	292
24.4.4	垂直配向液晶盒	293
24.4.5	面内切换液晶盒	295
24.4.6	硅基液晶盒	296
24.4.7	蓝相液晶盒	297
24.5	偏振模型	298
24.5.1	扩展琼斯矩阵模型	299
24.5.2	光线单次通过的偏振光线追迹矩阵	299
24.5.3	多层干涉模型	300
24.5.4	液晶盒 ZLI-1646 的计算	301
24.6	液晶盒构建中的一些问题	302
24.6.1	间隔物	303
24.6.2	向错	303
24.6.3	预倾斜	304
24.6.4	振荡方波电压	304
24.7	液晶盒性能的限制	305
24.7.1	液晶盒速度	305
24.7.2	出射偏振态的光谱变化	307
24.7.3	相位延迟随入射角的变化	308
24.7.4	双轴薄膜补偿液晶盒的偏振像差	310
24.7.5	偏振片漏光	310
24.7.6	退偏	311
24.8	液晶盒的测试	312
24.8.1	扭曲向列液晶盒测试例子	313
24.8.2	IPS 测试	314
24.8.3	VAN 盒	316
24.8.4	MVA 盒测试	316
24.8.5	薄膜延迟器缺陷	317
24.8.6	检偏器和出射偏振态之间的未对准	317
24.9	习题集	317
24.10	致谢	318
24.11	参考文献	318

第 25 章

应力诱导双折射	320
25.1 应力双折射简介	320
25.2 光学系统中的应力双折射	322

25.3	应力诱导双折射理论	322
25.4	应力双折射元件中的光线追迹	324
25.5	对具有空间变化应力双折射元件的光线追迹	328
25.5.1	系统形状的存储	329
25.5.2	折射和反射	329
25.5.3	应力数据格式	330
25.5.4	空间变化双轴应力的偏振光线追迹矩阵	330
25.5.5	空间变化应力函数的例子	333
25.6	应力双折射对光学系统性能的影响	335
25.6.1	用偏光镜观察应力双折射	336
25.6.2	注塑成型透镜的仿真	338
25.6.3	塑料 DVD 透镜的仿真	340
25.7	总结	342
25.8	习题集	342
25.9	致谢	343
25.10	参考文献	343

第 26 章

多阶延迟器和不连续性之谜	346
26.1 引言	346
26.2 延迟不连续之谜	347
26.3 基于简单色散模型的齐次延迟器系统的延迟展开	349
26.3.1 色散模型	349
26.3.2 齐次延迟器系统的延迟	349
26.3.3 齐次延迟器的迹线以及在延迟器空间的延迟展开	351
26.4 任意取向复合延迟器系统延迟展开的不连续性	352
26.4.1 复合延迟器的琼斯矩阵分解	353
26.4.2 组合延迟器在延迟器空间的迹线	354
26.4.3 组合延迟器系统的多模出射	356
26.4.4 快轴方向相差 45° 的复合延迟器例子	357
26.5 总结	359
26.6 附录	360
26.7 习题集	360
26.8 参考文献	362

第 27 章

总结和结论	363
-------------	-----

27.1	难题	363
27.2	偏振光线追迹的复杂性	364
27.2.1	光学系统描述的复杂性	364
27.2.2	光线路径的椭圆偏振特性	365
27.2.3	光程长度和相位	365
27.2.4	延迟的定义	366
27.2.5	延迟和倾斜像差	366
27.2.6	多级延迟	367
27.2.7	双折射光线追迹的复杂性	367
27.2.8	相干模拟	368
27.2.9	散射	368
27.2.10	退偏	369
27.3	偏振光线追迹的概念和方法	370
27.3.1	琼斯矩阵和琼斯光瞳	370
27.3.2	P 矩阵和局部坐标	370
27.3.3	PSF 和 OTF 的推广	370
27.3.4	光线倍增、光线树和数据结构	371
27.3.5	模式合并	372
27.3.6	替代模拟方法	372
27.4	偏振像差抑制	373
27.4.1	偏振光线追迹输出分析	374
27.5	偏振光线追迹与偏振像差的比较	374
27.5.1	铝膜与偏振像差表达式	375
27.5.2	偏振光线追迹和琼斯光瞳	377
27.5.3	琼斯光瞳的像差表达式	378
27.5.4	二向衰减和延迟的贡献	380
27.5.5	基于偏振像差的设计规则	382
27.5.6	振幅响应矩阵	385
27.5.7	米勒矩阵点扩展矩阵	386
27.5.8	PSF 分量的位置	389
27.6	参考文献	390

作者简介

罗素·奇普曼(Russell A. Chipman), 博士, 亚利桑那大学光学科学教授, 也是日本宇都宫大学光学研究与教育中心(CORE)的客座教授。他在这两所大学教授偏振光、偏振测量和偏振光学设计课程。奇普曼教授获得麻省理工学院(MIT)物理学学士学位, 以及亚利桑那大学光学科学硕士和博士学位。他是美国光学学会(OSA)和国际光学与光子学学会(SPIE)的会员。2015年, 他获得了 SPIE 的 2007 G. G. Stokes 偏振测量研究奖和 OSA 的约瑟夫·夫琅禾费奖/罗伯特·伯利光学工程奖。他是美国航天局喷气推进实验室气溶胶多角度成像仪的联合研究员, 该偏振测量仪计划于 2021 年前后发射到地球轨道, 用于监测城市的气溶胶和污染。他还在为其他 NASA 系外行星和遥感任务开发紫外和红外偏振仪试验样机和分析方法。他最近专注于开发 Polaris-M 偏振光线追迹代码, 该软件可分析包含各向异性材料、电光调制器、衍射光学元件、偏振散射光和许多其他效应的光学系统。他的爱好包括徒步旅行、钻研日语、养兔子和听音乐。

慧梓·蒂凡尼·林(Wai-Sze Tiffany Lam), 博士, 在香港出生和长大。她目前是脸书 Oculus 研究项目的光学科学家。她在亚利桑那大学获得了光学工程学士学位和光学科学硕士和博士学位。她为双折射和光学旋光元件、具有应力双折射的元件、晶体延迟器和偏振器中的像差以及液晶盒的建模开发了稳健的光学建模和偏振仿真算法。其中许多算法构成了艾里光学公司销售的商业光线追迹软件 Polaris-M 的基础。

嘉兰·杨(Garam Young), 博士, 毕业于韩国首尔国立大学获得物理学学士学位, 随后获得亚利桑那大学光学科学学院的博士学位, 还获得了毕业告别演讲和优秀研究生荣誉。然后, 她在帕萨迪纳市的 Synopsys 公司开发 CODE V 和 LightTools 的偏振特性和优化特性, 目前在旧金山湾区担任光学和照明工程师。她的丈夫和女儿让她在家里忙个不停。

致 谢

我们的家人在我们写这本书的过程中提供了如此多的支持,他们是 Laure, Peter, Kin Lung, Tek Yin, Wai Kwan, Stefano 和 Sofia。

特别感谢亚利桑那大学光学科学学院、喷气推进实验室、宇都宫大学光学研究和教育中心、Oculus 研发实验室和 Nalux 有限公司。

如果没有这么多同事的帮助,这本书是不可能完成的,其中包括:Lloyd Hillman, Steve McClain, Jim McGuire, James B. Breckinridge, Stacey Sueoka, Christine Bradley, Brian Daugherty, Scott Tyo, Anna-Britt Mahler, Scott McEldowney, Michihisa Onishi, Hannah Nobel, Paula Smith, Matthew Smith, Kyle Hawkins, Meredith Kupinski, Lisa Li, Dennis Goldstein, Shih-Yau Lu, Karen Twietmeyer, David Chenault, John Gonglewski, Yukitoshi Otani, Ashley Gasque, Larry Pezzaniti, Robert Galter, Nasrat Raouf, Glenn Boreman, David Diner, Greg Smith, Rolland Shack, Dan Reiley, Angus Macleod, Cindy Gardner, Stanley Pau, David Voeltz, Ab Davis, Joseph Shaw, Kira Hart, James C. Wyant, Amy Phillips, Tom Brown, John Stacey, Suchandra Banerjee, Brian DeBoo, David Salyer, Toyohiko Yatagai, Julie Gillis, Alba Peinado, Jeff Davis, Juliana Richter, Jack Jewell, Alex Erstad, Chanda Bartlett-Walker, Jaden Bankhead, Kazuhiko Oka, Wei-Liang Hsu, Adriana Stohn, Eustace Dereniak, Chikako Sugaya, Justin Wolfe, John Greivenkamp, Momoka Sugimura, Erica Mohr, Alex Schluntz, Charles LaCasse, Jason Auxier, Karlton Crabtree, Israel Vaughn, Pierre Gerligand, Jose Sasian, Ami Gupta, Ann Elsner, Juan Manuel Lopez, Kurt Denninghoff, Toru Yoshizawa, Kyle Ferrio, Tom Bruegge, Bryan Stone, James Harvey, Brian Cairns, Charles Davis, Adel Joobeur, Robert Shannon, Robert Dezmelyk, Matt Dubin, Quinn Jarecki, Masafumi Seigo, Tom Milster, James Hadaway, Dejian Fu, Steven Burns, James Trollinger Jr., Beth Sorinson, Mike Hayford, Jennifer Parsons, Johnathan Drewes, Bob Breault, Rodney Fuller, Peter Maymon, Alan Huang, Jacob Krause, Kasia Sieluzycka, Jurgen Jahns, Phillip Anthony, Aristide Dogariu, Michaela May, Jon Herlocker, Robert Pricone, Charlie Hornback, Krista Drummond, Barry Cense, Lena Wolfe, Neil Beaudry, Virginia Land, Noah Gilbert, Helen Fan, Eugene Waluschka, Phil McCulloch, Thomas Germer, Thiago Jota, Morgan Harlan, Tracy Gin, Cedar Andre, Dan Smith, Victoria Chan, Lirong Wang, Christian Brosseau, Andre Alanin, Graham Myhre, Mona Haggard, Eugene W. Cross, Ed West, Shinya Okubo, Matt Novak, Andrew Stauer, Conrad Wells, Michael Prise, Caterina Ubacch, David Elmore, Oersted Stavroudis, Weilin Liu, Tyson Ririe, Tom Burleson, Long Yang, Sukumar Murali, Julia Craven, Goldie Goldstein, Adoum Mahamat, Ravi Kinnera, Livia Zarnescu, Robert Rodgers, Randy Gove, Gordon Knight, Randall Hodgeson, Dan Brown, Nick Craft, Stephen Kupiac, Graeme Duthie, John Caulfield Jr., Joseph Shamir, Ken Cardell, and Bill Galloway。



前言

本书为本科生和研究生偏振光课程教材,该课程已在亚利桑那大学光学科学学院开展和完善了约十年。本书还可作为光学工程师和光学设计师在构建偏振测量仪、设计严格偏振光学系统以及为各种目的操控偏振光方面的参考书。

偏振是液晶显示器、三维(3D)电影、先进遥感卫星、微光刻系统和许多其他产品的核心技术。应用偏振光的光学系统其复杂性越来越大,由此,用于仿真和设计的工具也迅速发展起来了。更精确和复杂的偏振器、波片、偏振分束器和薄膜的发展为设计师和科学家提供了新的选择,也带来了许多仿真上的挑战。

与蜜蜂和蚂蚁不同,人类本质上是偏振视盲的。人类看不到天空、水和自然界其他地方丰富而微妙的偏振信息。同样,我们也无法看到偏振光在透过挡风玻璃、眼镜和所有光学系统时是如何变化和演变的。因此,学生往往难以理解偏振对光学系统设计、计量、成像、大气光学以及光在组织中传播的重要性。本书通过将偏振光的基本原理与光学工程师和设计师的实践结合起来,就这些技术背后的光学知识提供了指导。

偏振涉及多达 16 个自由度:线偏振、圆偏振和椭圆偏振、二向衰减、延迟和退偏。这些自由度对我们来说是不可见的,因此可能看起来很抽象。在与学生的讨论中,我们偶尔会听到偏振被认为是复杂的、困难的,而且经常被误解。不幸的是,这种情况经常发生,因为许多偏振概念是在仓促和过于简化的处理中教授的。

本书包含对偏振光及偏振光学系统的详细讨论,以澄清作者发现的容易产生混淆的几个主题,以及通常被忽视的以下主题:

- 电磁场和菲涅耳方程的符号约定
- 用琼斯算法在横向平面局部坐标系中处理偏振光
- 许多微妙的相位问题
- 使用矩阵指数,以一种新的更简单的方式定义延迟的三个自由度和二向衰减的三个自由度
- 斯托克斯参数和米勒矩阵的非正交坐标系
- 将琼斯或米勒算法应用于三维光线追迹光学系统,特别是用于杂散光或组织光学

为了解决这些问题,我们开发了一种新的教学方法,并在课堂上进行了测试。这种方法从光传播的三维方法开始。光在光学系统中以任意方向传播,用数学对此进行处理。但琼斯矩阵和米勒矩阵仅描述沿 z 轴的传播。重新定位此 z 轴,使其成为局部坐标,会带来一些重要问题,尤其对于反射的描述。这里,我们教授了三维偏振光线追迹矩阵,它简化了光学系统和偏振元件的分析。然后,琼斯矢量和琼斯矩阵被视为一个有用的特殊情形。这种三维方法听起来可能更复杂,但实际上它使偏振计算更简单。我们开始喜欢这种三维方法,因为它解决了长期以来关于琼斯矩阵和正入射反射的坐标相关悖论!

在许多入门光学课程中,普遍介绍了偏振,但很少再详细讨论。经常介绍菲涅耳方程,但其结果却被忽略了。因此,本书给出了描述菲涅耳方程如何影响光通过透镜和反射镜以及成像的详细研究。通过学习偏振光的衍射和成像,学生可逐步了解菲涅耳方程如何改变点扩散函数的结构,以及偏振态如何在点物的像中变化。

在光学工程中,偏振元件通常被视为一个独立的子系统。偏振的数学方法,即琼斯演算和米勒演算,一直与一阶光学、像差理论、透镜设计的数学方法分开,并且在很大程度上也与干涉和衍射分开。早期对偏振的研究主要集中在琼斯演算、米勒演算和偏振元件上。本书将偏振元件视为光学元件,也将光学元件视为偏振元件。透镜和反射镜系统的特性随波长、角度和位置而变化,这些就是像差。类似地,偏振元件的偏振特性随波长、角度和位置而变化,这些就是偏振像差。正如光学设计师在传统光学设计中需要对光程长度进行详细计算一样,偏振光线追迹也可以对偏振特性进行类似的详细计算。

现在大多数光学设计程序都提供了偏振光线追迹计算,因此现在许多用户更需要了解偏振光在光学系统中传播的细微之处,以便成功使用偏振光线追迹软件,并能够清楚地表达结果。到目前为止,偏振光线追迹尚未成为光学课程的一部分。为了解决这一问题,我们为讲师提供了材料,将课程建立为以光学系统中的偏振为基础,而不是把偏振作为一个子系统。本书通过讲授偏振元件、偏振元件序列、偏振测量、菲涅耳方程和各向异性材料的基础知识来满足这些需求。

偏振元件从来都不是理想的。所提出的理论和分析方法便于人们深入理解常见光学元件(如透镜、折轴反射镜和棱镜)的偏振效应。因此,本书在偏振像差方面投入了相当大的篇幅:波片的延迟随入射角和波长的变化,以及线栅、偏振片和格兰-泰勒偏振器的角度相关性。

为了完善本书对光学系统的论述,本书提供了光线追迹算法和近轴光学的概述,并提供了足够的材料,使来自光学以外的科学家和工程师熟悉光线追迹算法的基本概念。本书中的许多示例系统都是用我们内部研究的偏振光线追迹软件 Polaris-M 计算的,该软件基于三维偏振光线追迹矩阵。

我们觉得这些概念很有趣,希望我们的魅力能传达给读者。几何是数学中最令人愉悦的领域之一,偏振与光学系统的结合提供了大量的几何问题和见解。对于光学设计师来说,从标量波前像差函数(一个自由度,光程长度)的面转移到八维琼斯光瞳及其高维形状是一大步。但一旦人们习惯了二向衰减像差和延迟像差,将塞德尔像差和泽尼克像差推广到八维空间就具有极大的美和对称性。我们在对偏振像差的研究中,在琼斯演算结构中给出了这个八维琼斯矩阵空间的逐步指导。

罗素·奇普曼
慧梓·蒂凡尼·林
嘉兰·杨

这本书是怎么产生的

第一作者罗素·奇普曼讲授偏振光学已有 30 多年,同时在光学设计、偏振测量和偏振器件领域开展了广泛的偏振研究项目。多年来,他的研究优先于书籍写作,但课程材料获得了稳步发展和讲授。

从 2006 年开始,嘉兰·杨撰写了一篇关于偏振光线追迹的论文,在此过程中,偏振光线追迹中围绕相位、延迟和倾斜像差的许多潜在问题被揭示出来,并澄清了深层次的问题。这些进展致使亚利桑那州科学基金会支持编写一个研究偏振光线追迹的程序 Polaris-M,以演示这些新的偏振光线追迹方法。蒂凡尼·林与史蒂夫·麦克莱恩(Steve McClain)共同负责各向异性材料光线追迹算法的开发和测试,生成了许多极具指导意义的偏振光线追迹示例,并开发了双折射光线追迹的特殊处理方法。

本书是第一作者对于偏振像差研究的顶峰,该项研究始于 1982 年,是在喷气推进实验室的吉姆·怀恩特(Jim Wyant)和吉姆·布雷金里奇(Jim Breckinridge)指导下在亚利桑那大学光学研究生院开展的。在奇普曼的教材和研究经验、杨的偏振光线追迹论文和林的各向异性光线追迹论文中,这一雄心勃勃项目的各个部分都已就绪。这不仅仅是一本关于偏振光和偏振演算的书,它还将引导读者了解光学系统的现代观点,即光学系统中的一切都是偏振元件。



建议的课程

根据多年来讲授这门课程的经验,作者安排了各章的逻辑顺序。该顺序的组织是为了在课堂上自然流畅。这些章节从简单到复杂,从基础的概念到更实用的概念。根据课程目标,可以选择不同的章节顺序。以下是三个建议的课程:粉色突出显示的是(1)本科偏振光学课程,蓝色突出显示的是(2)研究生偏振光学课程,紫色突出显示的是(3)偏振光学设计高级课程。

本科生课程:偏振的光

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. 引言和概述 | 15. 近轴偏振像差 |
| 2. 偏振光 | 16. 有偏振像差的成像 |
| 3. 斯托克斯参量和庞加莱球 | 17. 平移和延迟计算 |
| 4. 偏振光干涉 | 18. 倾斜像差 |
| 5. 琼斯矩阵及偏振特性 | 19. 双折射光线追迹 |
| 6. 米勒矩阵 | 20. 用偏振光线追迹矩阵进行光束组合 |
| 7. 偏振测量术 | 21. 单轴材料和元件 |
| 8. 菲涅耳公式 | 22. 晶体偏振器 |
| 9. 偏振光线追迹计算 | 23. 衍射光学元件 |
| 10. 光学光线追迹 | 24. 液晶盒 |
| 11. 琼斯光瞳和局部坐标系 | 25. 应力诱导双折射 |
| 12. 菲涅耳像差 | 26. 多阶延迟器和不连续性之谜 |
| 13. 薄膜 | 27. 总结和结论 |
| 14. 基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简 | |

研究生课程:偏振光学

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. 引言和概述 | 15. 近轴偏振像差 |
| 2. 偏振光 | 16. 有偏振像差的成像 |
| 3. 斯托克斯参量和庞加莱球 | 17. 平移和延迟计算 |
| 4. 偏振光的干涉 | 18. 倾斜像差 |
| 5. 琼斯矩阵和偏振特性 | 19. 双折射光线追迹 |
| 6. 米勒矩阵 | 20. 用偏振光线追迹矩阵进行光束组合 |
| 7. 偏振测量术 | 21. 单轴材料和元件 |
| 8. 菲涅耳公式 | 22. 晶体偏振器 |
| 9. 偏振光线追迹计算 | 23. 衍射光学元件 |
| 10. 光学光线追迹 | 24. 液晶盒 |
| 11. 琼斯光瞳和局部坐标系 | 25. 应力诱导双折射 |
| 12. 菲涅耳像差 | 26. 多阶延迟器和不连续性之谜 |
| 13. 薄膜 | 27. 总结和结论 |
| 14. 基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简 | |

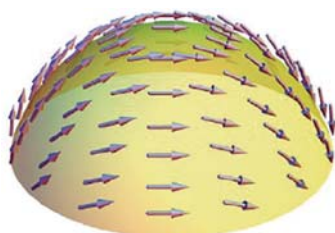
高级课程:偏振光学设计

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1. 引言和概述 | 15. 近轴偏振像差 |
| 2. 偏振光 | 16. 有偏振像差的成像 |
| 3. 斯托克斯参量和庞加莱球 | 17. 平移和延迟计算 |
| 4. 偏振光的干涉 | 18. 倾斜像差 |
| 5. 琼斯矩阵和偏振特性 | 19. 双折射光线追迹 |
| 6. 米勒矩阵 | 20. 用偏振光线追迹矩阵进行光束组合 |
| 7. 偏振测量术 | 21. 单轴材料和元件 |
| 8. 菲涅耳公式 | 22. 晶体偏振器 |
| 9. 偏振光线追迹计算 | 23. 衍射光学元件 |
| 10. 光学光线追迹 | 24. 液晶盒 |
| 11. 琼斯光瞳和局部坐标系 | 25. 应力诱导双折射 |
| 12. 菲涅耳像差 | 26. 多阶延迟器和不连续性之谜 |
| 13. 薄膜 | 27. 总结和结论 |
| 14. 基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简 | |

章节导览

第 1 章：引言和概述

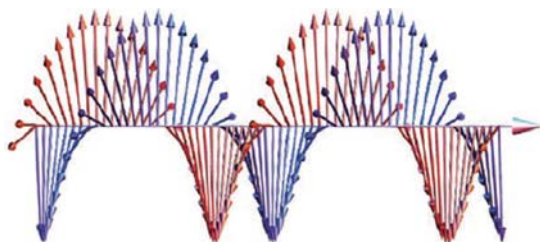
概述了偏振光和偏振光学,并介绍光学系统中的几个偏振问题。介绍了光的电磁本性。解释了偏振元件,如偏振器、延迟器、退偏器,以及相关特性,如双折射。以图形方式研究了一系列偏振问题:未镀膜透镜的马耳他十字图案、偏振器和延迟器的视场相关性、光学薄膜引起的偏振像差、应力双折射以及液晶的角度相关性。



半球面波前上的线偏振

第 2 章：偏振光

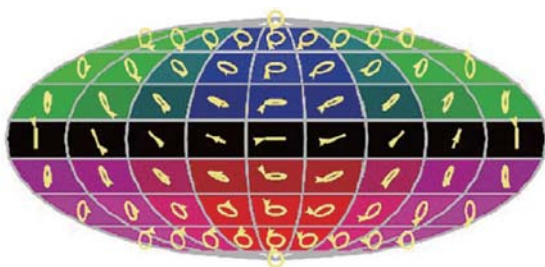
涵盖了单色光和平面波在二维琼斯矢量和三维偏振矢量中的数学处理,详细探讨了偏振椭圆,在此过程中回顾了基本向量数学。最后总结讨论了球面波前和光源的偏振。



圆偏振光电磁场的三维视图

第 3 章：斯托克斯参量和庞加莱球

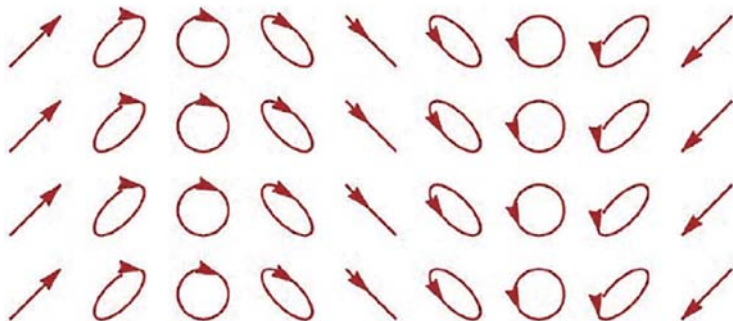
研究多色光、部分偏振光和非相干光。斯托克斯参量有一个不寻常的非正交坐标系,它对于辐射测量和遥感问题非常有效。庞加莱球是斯托克斯参量的三维表示,它简化了许多偏振元件问题的分析。



墨卡托投影法表示的庞加莱球

第 4 章：偏振光干涉

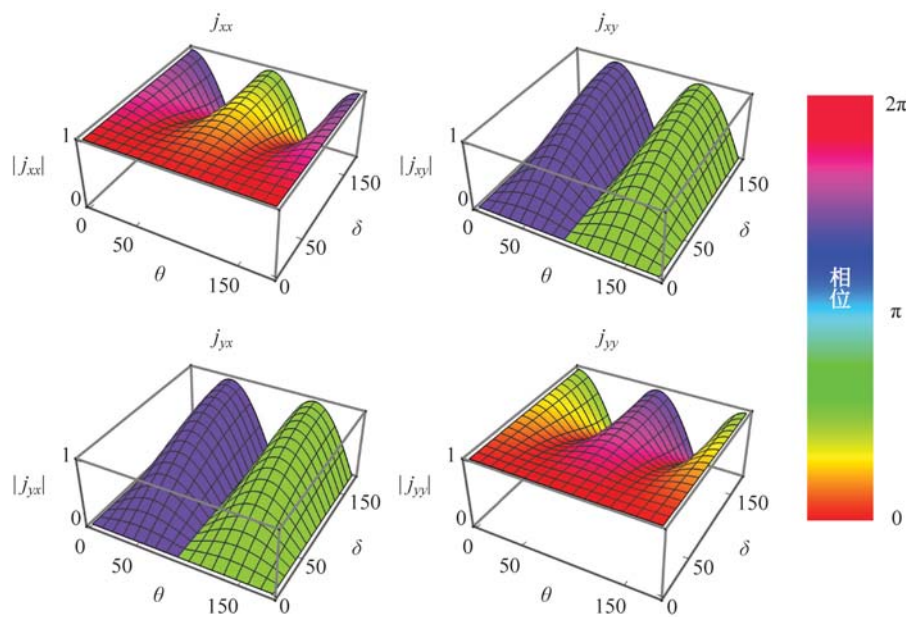
研究干涉中的偏振条纹和强度条纹。偏振问题会影响干涉仪,并给记录良好的干涉图造成困难。部分偏振光和多色光的干涉自然地导致光的斯托克斯参数描述。



0° 和 90° 激光束的干涉产生具有恒定强度和周期性偏振条纹的图案

第 5 章：琼斯矩阵及偏振特性

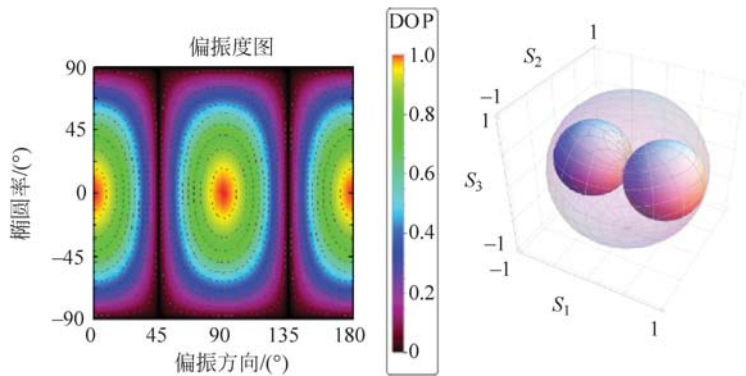
发展了矩阵作为偏振元件的强大模型。每个偏振元件和偏振特性都有一个对应的琼斯矩阵族。考虑了光通过一系列偏振元件的传播,为光学工程师提供了有价值的例子。考察了光正入射到反射镜上时反射的琼斯矩阵;这个琼斯矩阵展现了一个悖论,它将通过偏振光线追迹矩阵来解决。提出了入射光束和出射光束不平行情况下琼斯矩阵的概念,这在光学设计中非常重要。



所有线性延迟器的琼斯矩阵。高度是幅值,颜色编码为相位

第 6 章：米勒矩阵

为偏振元件(偏振器、二向衰减器、延迟器以及退偏器)的非相干光计算提供了一种强大的方法。引入反射和折射米勒矩阵,将该方法推广到包含光学元件的问题。退偏是一种具有九个自由度的常见现象。

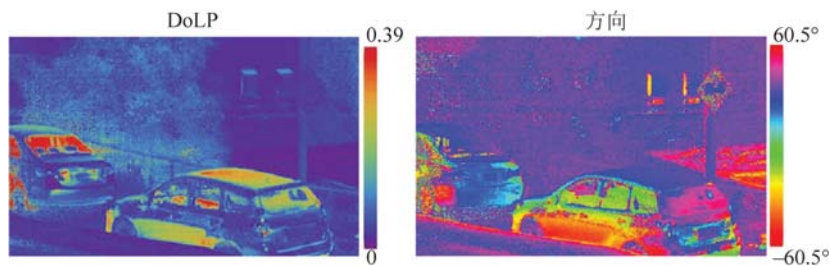


水平和垂直偏振器之间孔径上的二维和三维偏振度图

第 7 章：偏振测量术

将米勒矩阵方法应用于斯托克斯参数和米勒矩阵的测量。斯托克斯偏振测量仪在遥感中有许多应用,包括描述大气中的气溶胶特征和在杂乱场景中寻找人造物体。米勒矩阵用

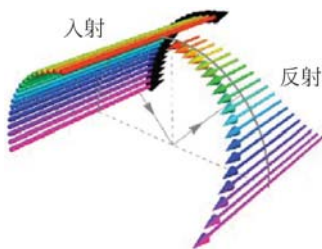
于测试偏振元件和光子器件,并作为椭偏仪用于测量薄膜厚度和折射率。



汽车图像的偏振度和偏振方向

第 8 章：菲涅耳公式

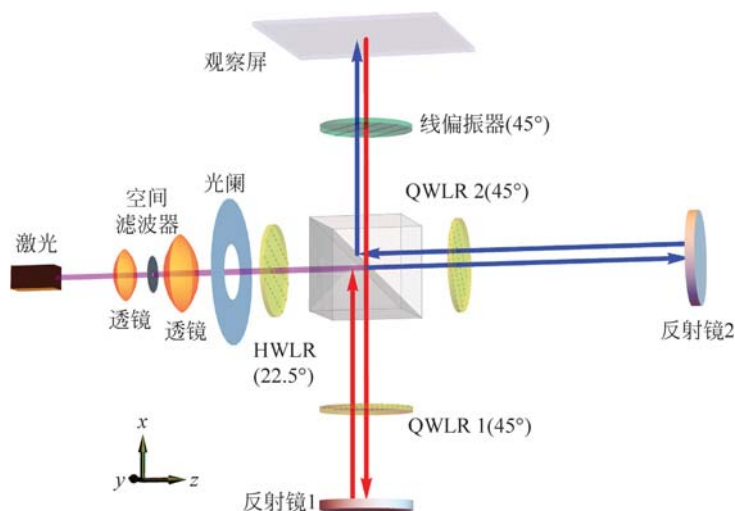
本章描述了发生在电介质界面上、全内反射和从金属反射镜反射的偏振变化。将入射光解析为 s 偏振和 p 偏振分量,并将其作为本征偏振分别进行研究。在延迟导数变为无穷大的临界角处,会发生非常大的偏振效应。



玻璃表面反射的 p 偏振光的入射和反射电场矢量

第 9 章：偏振光线追迹计算

本章开发了 3×3 偏振光线追迹矩阵和相关算法。该演算将偏振光线追迹系统化为三维偏振光线追迹矩阵,即 $\mathbf{P}$ 矩阵,它是琼斯矩阵的三维推广。 $\mathbf{P}$ 矩阵的一个主要优点是它定义在全局坐标中;它解决了琼斯矩阵和局部坐标由于奇点和非唯一性导致的深层次问题,这是贯穿本书的主题。因此,任何用 $\mathbf{P}$ 矩阵进行光线追迹光学系统的人都会得到相同的矩阵,不像琼斯矩阵或米勒矩阵的计算,其结果取决于所选局部坐标的顺序。给出了使用 $\mathbf{P}$ 矩阵计算二向衰减和延迟的算法。正入射时反射镜的反射琼斯矩阵与透射半波延迟器的琼斯矩阵相同,这一悖论得到了解决。通过偏振干涉仪的光线追迹(如图所示)给出了一个重要的演算例子。



用偏振光线追迹演算分析偏振干涉仪

第 10 章：光学光线追迹

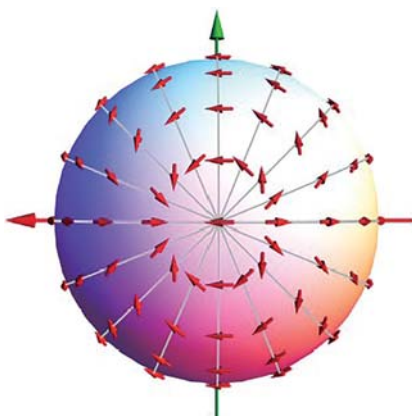
本章介绍了光线追迹光学系统的算法,并计算了波前和偏振像差函数。偏振光线追迹算法考虑了光线追迹过程中镀膜和未镀膜界面的偏振效应,例如菲涅耳系数。偏振光线追迹矩阵用于计算光线的透射率(切趾)、二向衰减和延迟特性。波前的光线网格构成了确定偏振像差函数的基础。给出了光线追迹概念的一个示例:有两个非球面的手机镜头。本章最后回顾了偏振光线追迹的历史。



通过手机镜头的离轴光束的二向衰减,逐面重叠在出瞳中

第 11 章：琼斯光瞳和局部坐标系

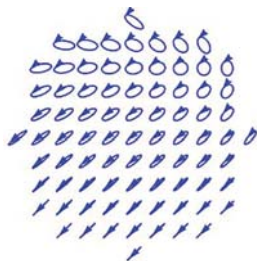
本章分析了将定义于三维球面上的光线追迹结果转换为平面表示的琼斯光瞳的难题。琼斯光瞳在工业上常用于表示偏振像差。为了正确使用琼斯光瞳,解释了局部坐标系的微妙之处,并提出了最优方法。发展了两种主要的局部坐标系:偶极坐标系和双极坐标系。对于高数值孔径波前,由于双极坐标系更接近透镜的自然行为,因此使用双极坐标系更加方便。双极坐标还包含一个迷人的双退化奇点。手机镜头示例继续说明 $\mathbf{P}$ 矩阵如何转换为琼斯光瞳。



透镜的双极偏振图中围绕双奇点的 720° 偏振旋转

第 12 章：菲涅耳像差

本章将菲涅耳公式应用于几个示例光学系统,得到的偏振像差令人惊讶。正交偏振器之间的未镀膜透镜会漏光形成马耳他十字图案。卡塞格林望远镜中的金属膜层将少量像散引入轴上光束! 该望远镜在正交偏振器之间的点扩散函数中心为深色,另有四个光斑分布在周边。菲涅耳公式的一个巧妙应用是菲涅耳菱体——一种基于全内反射的四分之一波延迟器。

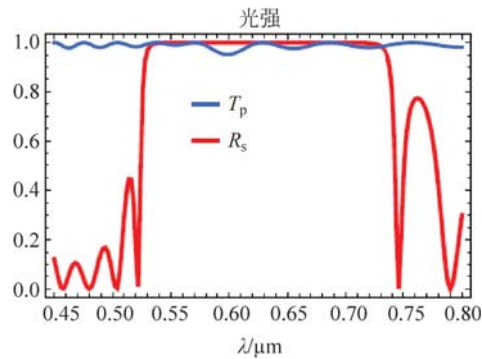


当入射偏振方向在 s 和 p 之间的 45° 时,从铝折光镜反射的 $f/1$ 光束的偏振态

第 13 章：薄膜

本章涵盖了几种最重要的光学薄膜及其偏振特性:

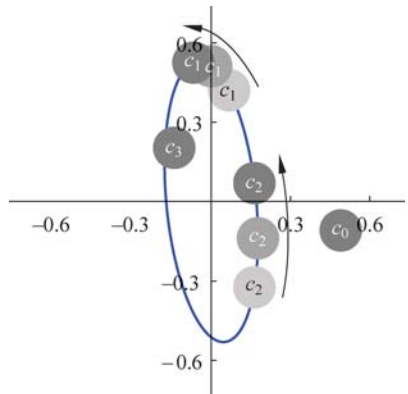
- 增透膜
- 增强反射膜
- 金属分束膜
- 偏振分束膜



麦克尼尔 (MacNeille) 偏振分束棱镜分光膜的 p 强度透射率和 s 强度反射率

第 14 章：基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简

本章将琼斯光瞳解释为二向衰减和延迟像差函数。琼斯矩阵一章介绍了从偏振特性、二向衰减和延迟计算琼斯矩阵的正问题。本章通过求琼斯矩阵的标准形式,泡利矩阵和矩阵指数将琼斯矩阵转换为二向衰减和延迟。

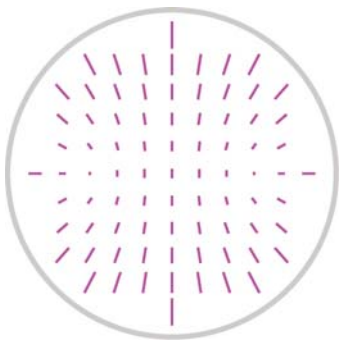


偏振元件可表示为单位矩阵和三个泡利矩阵的复系数加权之和。

当元件旋转时,两个线性系数沿椭圆轨迹移动,而单位矩阵系数和圆泡利系数保持不动

第 15 章：近轴偏振像差

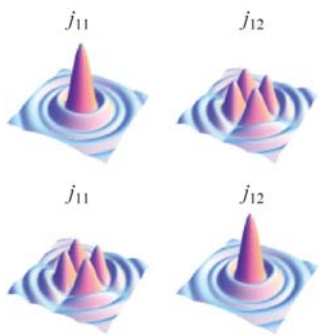
本章研究径向对称系统中偏振像差的形式,从入射角函数开始,结合典型的二向衰减和像差函数,得出二阶偏振像差模式,类似于离焦、倾斜和平移。将近轴光线追迹像差作为研究起点,以便扩展认知完全像差。



望远镜离轴视场光瞳上的双峰延迟分布,有两个零点,围绕每个零点快轴旋转 180°

第 16 章：有偏振像差的成像

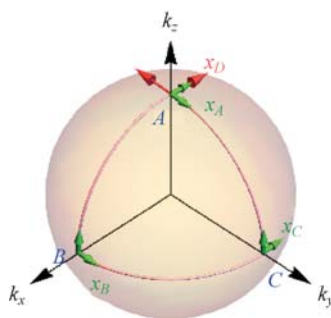
本章研究衍射以及存在偏振像差时点扩散函数和光学传递函数的计算。从光学系统出射的偏振态的变化会引起像及其偏振结构的有趣变化。由于倾斜像差和全内反射引起的延迟,角立方体的偏振像差非常大。



在 x 和 x 、 y 和 x 、 x 和 y 以及 y 和 y 方向偏振器之间的卡塞格林望远镜的点扩展函数，对于正交偏振器组合,产生了一个四瓣点扩展函数,中间为暗

第 17 章：平移和延迟计算

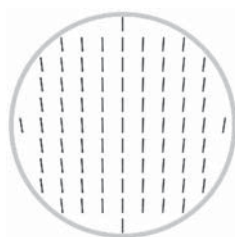
本章描述了延迟器和延迟的计算。延迟是一个特别微妙且有时矛盾的概念,通常描述为两个正交偏振态之间的光程差。然而,当一个系统有两个以上的干涉光束时,会出现其他概念问题,这些问题会使测量和解释显示器用双折射薄膜的特性变得复杂。当入射光线、中间光线段和出射光线彼此不平行时,三维中的延迟计算会出现一个悖论。本章展示了如何在详细了解通过光学系统的光线路径的情况下,简单地解决延迟悖论。



延迟的计算取决于单位传播球上形成的球面多边形面积,该单位传播球由每个光线段所有传播矢量形成

第 18 章：倾斜像差

本章将延迟悖论的解决方案应用于非偏振光学系统中发生的偏振态旋转。用 Pancharatnam/ Berry 相位解释了一种新型的偏振像差,即倾斜像差。倾斜像差的一个独特特征是它存在于理想非偏振光学系统中。这种效应对于具有大视场的高数值孔径光学系统是非常显著的;微光刻系统就是这种光学系统的好例子。推导了倾斜像差对偏振点扩展函数和光学传递函数的影响。



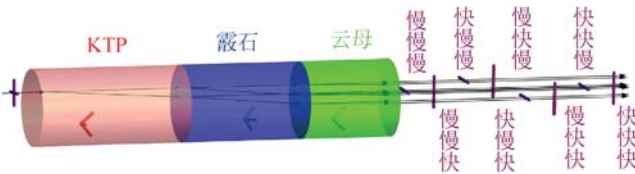
由于偏振态的平行转移,离轴视场的出射偏振在光瞳上发生了偏振旋转

第 19 章：双折射光线追迹

本章介绍了各向异性材料的光线追迹方法,并讨论了光线倍增的处理。通过各向异性材料进行偏振光线追迹需要追迹所有分裂光线的大量参数:

- 传播矢量 $\mathbf{k}$
- 坡印廷矢量 $\mathbf{S}$
- 模式折射率 n
- 复菲涅耳系数 a
- 电场方向 $\hat{\mathbf{E}}$

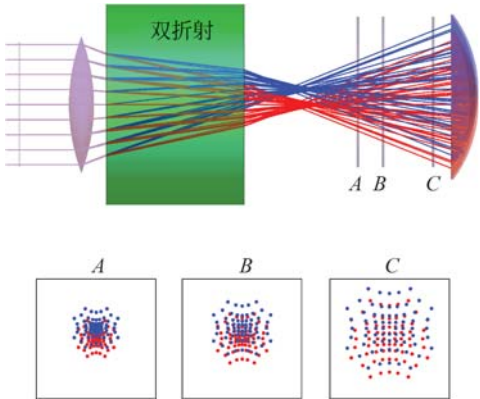
各向异性算法可以处理双折射和反射、镀膜的各向异性界面、倏逝光线,包括全内反射和抑制反射。本书的网站 www.polarizedlight.org 包含光束通过双轴材料以及偏振态演化的动画。



通过三块各向异性晶体序列的 8 条透射光线路径, 每条光线路径具有不同的模式序列和不同的光程长度。
8 条光线平行出射, 每条都在双平行四边形形状中的不同位置出射

第 20 章：用偏振光线追迹矩阵进行光束组合

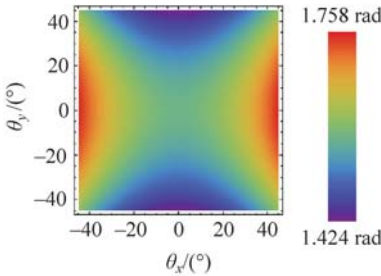
本章分析了具有相似和不同传播方向的多个波前的相互作用。作为光线追迹过程的一部分, 必须仿真多个出射光束的相互作用, 以分析双折射器件和干涉仪。组合多个波前的众多问题之一是光线网格的相对位置和插值的必要性。



两种模式(红色和蓝色)的光线网格, 通过厚波片聚焦, 在不同位置具有不同的像差。
仿真需要把相应的电场相加来模拟干涉、衍射和成像

第 21 章：单轴材料和元件

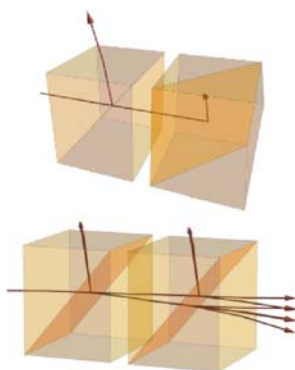
本章探索了常见单轴器件中的光传播和光线追迹。折射率椭球有助于解释波前通过双折射界面的传播。在单轴材料中, 由于折射率的角度变化, 异常模的双折射像差非常复杂。在分析波片时, 了解这种像差很重要。



通过波片的延迟随方向的变化, 呈马鞍形

第 22 章：晶体偏振器

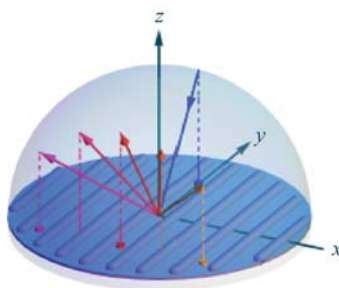
本章对常见但被误解的光学元件(晶体偏振器,包括格兰-泰勒和格兰-汤普逊)进行了新的分析。这种研究方法使人们对偏振器的视场、光束切趾及其像差有了新的认识。描述了由晶体偏振器产生的众多小光束,并解释了它们的路径。分析变得更加复杂,但对于入射球面波的平行和正交晶体偏振器来说却很有趣。



轴上光线不能穿过一对正交的格兰-泰勒偏振器,但对于 4° 离轴光线,会透过五个模式对。
这将偏振器的视场限制为 3°

第 23 章：衍射光学元件

本章使用严格的耦合波分析法对衍射光学元件进行了模拟。研究了反射光栅、线栅偏振器和减反射膜亚波长结构的偏振特性。解释了通过对振幅系数(菲涅耳系数)进行积分,在偏振光线追迹中准确包含衍射光学元件的方法。

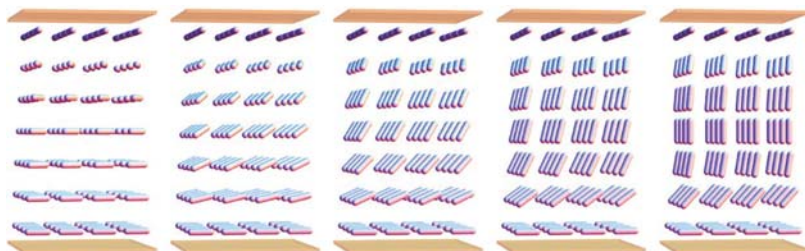


面外照射衍射光栅,不同衍射级的传播矢量位于圆锥面,但矢量在 xy 平面上的投影保持等间距

第 24 章：液晶盒

液晶盒通过旋转液晶分子来操控光的偏振,从而产生电控延迟器、偏振控制器和空间光调制器。本章分析了最常见和历史上最重要的方案。液晶盒的主要问题之一是延迟随角度的变化。在不同设计之间比较了这些角偏振像差,并研究了液晶盒与视场校正双轴多层膜

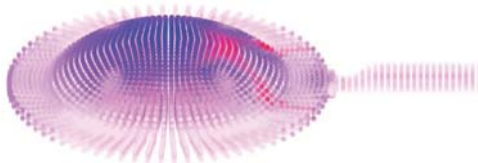
模组,以制作高性能液晶显示器。为了在显示器市场上占据主导地位,液晶技术克服了许多障碍,包括吸收、散射、低对比度、切换时间、均匀性、有限视角、向错和偏振像差。



从 0V(左)到 5V(右)的扭曲向列相液晶盒中的指向矢分布

第 25 章：应力诱导双折射

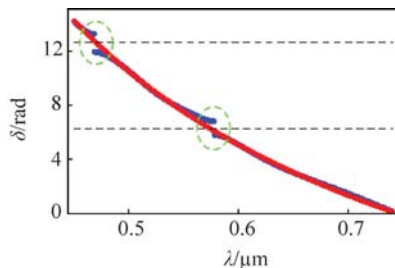
应力诱导双折射是光学中的一个普遍问题,由于成型工艺在注塑塑料光学元件中,以及由于光机安装技术较差在玻璃透镜中,经常出现这种问题。应力是光学元件中的内力,它改变了原子之间的距离,产生空间变化的双折射。应力可能在玻璃成型、塑料透镜注塑成型或光学元件安装过程中产生。本章的算法模拟了偏振光通过具有应力双折射的光学元件的传播。讨论了在 CAD 文件中存储应力信息的常用数据结构。包括解读应力双折射偏光镜彩色图像的方法。



注塑成型 DVD 透镜中的应力(蓝色)和应变(红色)的空间分布

第 26 章：多阶延迟器和不连续性之谜

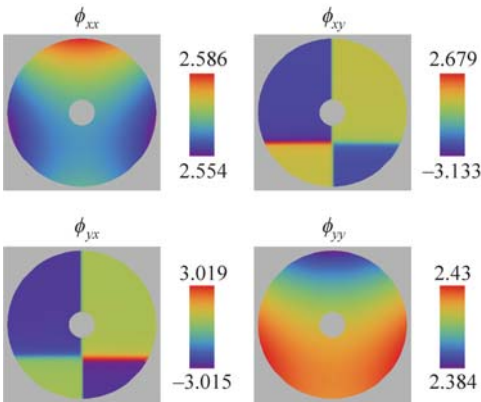
多阶延迟器是延迟大于一个波的延迟器。例如,复合延迟器(由多个双折射板构成)的延迟可以在 $1 \frac{1}{2}$ 波到 $2 \frac{1}{2}$ 波的延迟之间连续变化,而不会通过 2 波延迟! 当双折射组件的快轴彼此不平行或不垂直时,可以认为延迟同时有多个值。实测数据证实了这一复杂但迷人的问题。



轴对齐的双片延迟器的延迟谱是连续的(红色),但当其中一片稍微旋转时,在 $2n\pi$ (蓝色)值附近会出现不连续,绿色圆圈中所示

第 27 章：总结和结论

本章对本书的所有问题进行审视,以了解全局。回顾了光程长度、相位、延迟和坐标系等关键问题,并讨论了偏振容差。本书通过讨论偏振效应和像差的交流问题来结束。光学设计师和工程师如何与同事、供应商和生产同行最好地沟通这一复杂信息?



琼斯光瞳的相位部分显示了偏振像差(线性延迟倾斜),这导致点扩散函数的 x 和 y 偏振部分略微分离

学习特征

本课程是作者罗素·奇普曼在亚利桑那大学为本科生和研究生讲授多年的偏振课程。此外,许多 SPIE 和 OSA 短期课程都讲授了大部分课程内容。观察学生的学习,观察他们的困难,并从课堂上获得反馈,使本书具有几个特点,包括将光学设计整合到研究中。

彩色图

偏振和几何光学是高度几何化的学科,许多概念的交流用三维彩色图形比用方程式更有效。颜色表达更多细节,并能加快理解速度。准备这么多的图形需要付出巨大的努力,我们的作者之一蒂凡尼·林率先开发了图形。

庞加莱球

庞加莱球对于理解和解释偏振光非常有用。要真正欣赏和应用球形,三维庞加莱球至关重要。因此,本书的网站上有-一个庞加莱球:www.polarizedlight.org。我们建议在厚纸上打印这个庞加莱球,然后将其切割和折叠,并将其粘贴成球形。



庞加莱球

视图

彩色图形在课堂上非常有效,可以吸引学生并保持他们的兴趣。采用本书的教师可以使用一套包含大多数插图的教学视图。

工作例子

贯穿全书的是与习题集密切相关的数值例子。这些工作例子解释了坐标旋转等基本概念,并为重要例子提供了有用的数值。学生通过对这些例子的学习,可以加快在数学问题解决技能上的进步,并进一步理解基本物理过程。当首次引入线性代数方法以帮助掌握矩阵操作时,工作示例给出了线性代数方法的逐步说明。

习题集和解题手册

每章都包含习题集,以帮助学生掌握概念并测试其解决问题的能力。通常,前几个问题只需用几分钟,然后问题的难度就会增加。

三维偏振光线追迹演算

对沿任何方向传播的光进行操作的 3×3 矩阵在这里得到了充分的解释,并集成到光学设计算法中。嘉兰·杨在她的论文中阐述了这个矩阵的概念,并给出了许多例子,证明了它优于琼斯算法。蒂凡尼·林在她的论文中进一步将偏振光线追迹演算扩展到双折射元件,包括单轴、双轴和应力双折射光学元件。

参考列表

贯穿全书的列表给出了偏振光、琼斯矩阵、米勒矩阵、斯托克斯参量和材料特性的关键特性。

缩 略 语 表

a, a_p, a_s	振幅系数, s 和 p 系数, 例如菲涅耳、薄膜
A	面积
A_E	入瞳的面积
a_i	像差系数
A_x, A_y, A_z	电场沿坐标轴的实振幅
A	分析器矢量, 米勒矩阵的顶行
$A(\rho)$	琼斯矩阵, 描述了振幅的偏振无关变化
$a(x, y)$	振幅函数
Abs	绝对值
AoP(S)	斯托克斯参量 S 的偏振角
$\text{apt}(x, y)$	孔径函数
ARM	振幅响应矩阵
arg	复数的参数
B 和 B	磁感应场和磁感应强度矢量
BP	蓝相
BRDF	双向反射分布函数
c	光速
C	对比度
C_0, C_1, C_2	应力光学系数
C	应力光学张量
C_q	第 q 个面的曲率
CA	晶轴
$CR(\delta)$	圆延迟器, 延迟量 δ
d	液晶盒间隙
d	薄膜厚度
$D, \mathcal{D}$	二向衰减
d	偶极轴矢量
D 和 D	电位移场和电位移场矢量
D	对角矩阵, 奇异值矩阵
D	并矢矩阵
Det	行列式
DFT	离散傅里叶变换
D_H, D_{45}, D_R	二向衰减分量
DoCP(S)	斯托克斯参量 S 的圆偏振度
DOE	衍射光学元件
DoLP(S)	斯托克斯参量 S 的线偏振度
DoP(S)	斯托克斯参量 S 的偏振度

e	椭圆率,椭圆短轴与长轴的比值
e	异常模式的标记
E	偏振器或二向衰减器的消光比
E	异常主轴的标记
E	杨氏模量
E	琼斯矢量
E	偏振矢量
$E(\mathbf{r}, t)$	单色平面波的电场
E_q	在第 q 个光线截点的电场矢量
E_x, E_y, E_z	电场沿三个坐标轴的复振幅
$ED(d_H, d_{45}, d_L)$	椭圆二向衰减器,二向衰减分量 d_H, d_{45}, d_L
$E(\epsilon, \phi)$	椭圆率为 ϵ 、取向角为 ϕ 的椭圆偏振器
EPD	入瞳直径
$ER(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$	椭圆延迟器,延迟分量 $\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$
f	快模式的标记
F	快主轴的标记
FEM	有限元模型
FOV	视场
G 和 g	旋光张量和旋光常数
$\mathbf{g}_{\text{In}, i}, \mathbf{g}_{\text{Exit}, i}$	定义在入瞳面和出瞳面的双极坐标
H	拉格朗日不变量
H	水平偏振光的琼斯矢量
H 和 H	磁场和磁场矢量
H	厄米矩阵
H	物坐标
$H(\mathbf{r}, t)$	单色平面波的磁场
i, j	求和序数
i	各向同性模式的标记
i_c	主光线入射角
i_m	边缘光线入射角
I	光通量、光强度、特定偏振态的光强部分
I	第一个斯托克斯参量, S_0 , 光通量
I	米勒矩阵的非齐次性
I	单位矩阵
Im	复数值的虚部
inc	入射光线的标记
$I_{\max}, I_{\min}$	最大和最小光强透射率
IPS	面内切换
IR	抑制折射
J	琼斯矩阵
$J_{\text{光瞳}}$	琼斯矩阵光瞳
$JP(x, y)$	在出瞳面上对波前和偏振态的全面描述
k	波数
k	传播矢量
$\hat{k}_q$	在第 q 个光线截点的归一化传播矢量

l	物理光线路径
l	左旋圆偏振模式的标记
L	左旋圆偏振光的琼斯矢量
L, L_2	矩阵的条件数
L	左主折射率的标记
$\hat{L}(\theta)$	取向角为 θ 的线偏振光
LC	液晶
LCoS	硅基液晶
$LD(t_1, t_2, \theta)$	线性二向衰减器(部分偏振器), t_1, t_2 为振幅透射率, θ 为轴向
LCD	液晶显示器
LED	发光二极管
$LR(\delta, \theta)$	线性延迟器, δ 为延迟量, θ 为快轴方向
$LP(\cdot)$	线性偏振器的琼斯矩阵
M	下标, 表示递增相位符号规则中的量
M	放大率
M	介质主轴的标记
M	米勒矩阵
$\vec{M}$	展开的米勒矢量, 16×1
MMBRDF	米勒矩阵二向反射分布函数
MPSM	米勒点扩展矩阵
MVA	多畴垂直配向液晶盒
MTF	调制传递函数
MTM	调制传递矩阵
m_{ij}, M_{ij}	米勒矩阵元, $m_{00}, m_{01}, \dots, m_{33}$
Δn	双折射率
n	折射率
N_i	零空间的矢量
NA	数值孔径
o	寻常模式的标记
O	寻常主轴的标记
O, O^{-1}	正交变换矩阵
$O_{n,e}^m$	定向器基函数
OA	光轴
OPL	光程长度
OTM	光学传递矩阵
P	光通量、辐照度、偏振光通量, $P_H, P_V, P_{45}, \dots$
p	在入射面内的 p 分量
p_1, p_2	应变光学系数
$\hat{p}$	p 分量基矢量
P	光通量测量值矢量
P	3D 偏振光线追迹矩阵
$\tilde{P}$	用于相加的 3D 偏振光线追迹矩阵, 其 k 的奇异值设置为零
PBS	偏振分束器
PDL	偏振相关损耗, 分贝数表示的消光比

POI	入射面
PSA	偏振态分析器
PSF	点扩展函数
PSG	偏振态发生器
PSM	点扩展矩阵
PTM	相位传递矩阵
$p_q(x, y, z)$	1—0 值的孔径函数
PVA	图案化垂直配向液晶盒
$\ \mathbf{W} \ _p$	矩阵或矢量 $\mathbf{W}$ 的 p 范数
q	表面或元件的序数
Q	表面、元件等的总数
Q	斯托克斯参量的第二个参数 S_1 , 即 $0^\circ - 90^\circ$ 光通量
Q	3D 平行转移矩阵
r, r_p, r_s	振幅反射系数
R	曲率半径
r	右旋偏振模式的标记
R_p, R_s	光强反射系数
$\mathbf{r}$	位置矢量
R	右主折射率的标记
r, r_q	光线截点坐标, 在第 q 个面上的光线截点
$\mathbf{R}$	右旋圆偏振光的琼斯矢量
$\mathbf{R}, \mathbf{Rot}$	旋转矩阵
$\mathbf{R}(\alpha)$	琼斯矩阵旋转运算符
$\mathbf{R}_M(\cdot)$	斯托克斯参量和米勒矩阵的旋转矩阵
RMS	均方根
$\text{Re}(\cdot)$	实部
RCWA	严格耦合波分析
s	垂直于入射面的 s 分量
$\hat{s}$	s 分量基矢量
$\mathbf{S}$	坡印廷矢量
$\mathbf{S}$	应力张量
s	慢模式的标记
$\mathbf{S}$	慢主轴的标记
S_0, S_1, S_2, S_3	斯托克斯参量
$1, s_1, s_2, s_3$	归一化的斯托克斯参量
$\mathbf{S}$	斯托克斯参量
sup	上界, 限定的最大值
STN	超扭曲向列型液晶盒
SVD	奇异值分解
SWG	亚波长光栅
t	时间, 厚度
t, t_p, t_s	振幅透射系数
T	透射率, 出射光通量与入射光通量之比
$t_{q-1, q}$	光线段的长度, 面 $q-1$ 至面 q
TE	横向电场

TIR	全内反射
TM	横向磁场
TN	扭曲向列型液晶盒
T_p, T_s	光强透射系数
Tr	矩阵的迹
$T_{\max}$	偏振态的最大透射率
$T_{\min}$	偏振态的最小透射率
u	能量密度
U	第 3 个斯托克斯参数 S_2 , 即 $45^\circ-135^\circ$ 光通量
u	边缘光线角度
$\bar{u}_q$	面后的主光线角度
U	非偏振光的斯托克斯参量, $(1, 0, 0, 0)$
U, V	酉矩阵
V	第 4 个斯托克斯参数 S_3 , 即右旋-左旋光通量
V	条纹的可见性
V	速度
V	垂直偏振光的琼斯矢量
$V_{n,e}^m(\rho, \phi)$	矢量泽尼克多项式
VAN	垂直配向模式
W	偏振测量值矩阵
W^{-1}	偏振测量值约减矩阵
W_P^{-1}	W 的伪逆矩阵
W^T	矩阵 W 的转置
$W(x, y)$	波像差函数
x_E, y_E	入瞳坐标
$\hat{x}_{\text{Loc}}, \hat{y}_{\text{Loc}}$	局部 x, y 坐标
$\bar{y}_q$	第 q 面上的主光线高度
$z(x, y)$	某个面上的弧垂(矢高)函数
x, y, z	笛卡儿坐标轴
135	135° 线偏振光的琼斯矢量
45	45° 线偏振光的琼斯矢量
α	旋光度
$\alpha_{s,t,q}, \alpha_p$	菲涅耳 s、p 系数
β	薄膜的相位厚度
β_m	第 m 衍射级的衍射角
γ	分离角、偏离角
γ	应变张量系数
Γ	应变张量
δ	延迟量
$\delta_H, \delta_{45}, \delta_R, \delta_L$	延迟分量
$\delta_{i,j}$	克罗内克 δ 函数
$\delta_{\text{主}}$	主延迟
$\delta_{\text{展开}}$	展开的延迟
Δn	双折射率
$\Delta\lambda$	光谱带宽

ΔOPL	光程差
Δr	横向剪切
Δt	光线路径
ε	偏振椭圆的椭圆率
ε_0	自由空间的介电常数
$\tilde{\epsilon}, \epsilon$	介电张量
η	庞加莱球上的纬度
η	薄膜层或基底的特征导纳
$\eta, \hat{\eta}$	表面法线, 从入射介质指向别处
η	逆介电张量
θ	角度, 入射角、旋转角、偏振器或延迟器的角度
$\theta_i, \theta_{\text{in}}, \theta_{\text{inc}}$	入射角
θ_B	布儒斯特角
θ_B	光栅闪耀角
θ_C	临界角
$\bar{\theta}_q$	第 q 个面上的主光线入射角
Θ_1^m	偏振基矢量
κ	折射率的虚部, 吸收系数
κ	圆锥常数
λ	波长
λ_B	闪耀波长
Λ_i	奇异值
μ_i	奇异值
μ	磁导率张量
Ξ	扩展量
ξ, ξ_q, ξ_r	本征值
v_p 和 v_r	相位速度和光线速度
ν	泊松比
ρ	复振幅
ρ	归一化的光瞳坐标
ρ, ρ_p, ρ_s	振幅系数的幅值
$\hat{\rho}$	归一化的光瞳坐标
σ	正应力
σ_0	单位矩阵
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	泡利矩阵
Σ	用波数表示的相位
τ	剪切应力
τ_q	第 q 个面后的约化厚度
ϕ	光的相位, 复数的相位
φ	从 x 轴开始逆时针度量的光瞳角
Φ	入射面
Φ_q	第 q 个面的光焦度
$\Phi(\phi)$	总相位变化的琼斯矩阵
Ψ	偏振椭圆的主轴角度

Ψ	延迟器的快轴方向
$\Psi_o、\Psi_e$	寻常模式和异常模式的临界角
ω	角频率,单位为弧度每秒
$\bar{\omega}_q$	第 q 个面的主光线约减角度
Ω	立体角,单位为立体弧度、球面度
Ω	应变光学张量
$\cdot$	点积,矩阵乘积
$\dagger$	伴随矢量,转置的复共轭

第 14 章

基于泡利矩阵的琼斯矩阵数据约简

14.1 引言

本章提出了计算琼斯矩阵二向衰减和延迟分量的算法。这些分量类似于斯托克斯参数,只是它们表征了琼斯矩阵的二向衰减部分和延迟部分的强度和本征偏振。将琼斯矩阵表示为简单的二向衰减器和延迟器的组合,这提供了一种有助于增进理解和方便沟通的方法。

各种类型的延迟器、偏振器和二向衰减器的琼斯矩阵的推导很简单,在第 5 章已介绍。本章研究它的反问题,给定一个琼斯矩阵,计算它的偏振特性:延迟、二向衰减、振幅和相位。琼斯矩阵有四个复数矩阵元素,每个元素都有实部和虚部,总共八个自由度,见表 14.1。 ρ_0 和 ϕ_0 这两个自由度是非偏振的;入射偏振态和出射偏振态在纯振幅或相位相互作用下是不变的。 D_H 、 D_{45} 和 D_L 这三个自由度描述了二向衰减的大小和本征偏振。最后三个自由度 δ_H 、 δ_{45} 和 δ_L 描述延迟的大小和本征偏振。

本章通过使用矩阵指数和矩阵对数,用与阶数无关的形式导出了齐次矩阵的分量 D_H 、 D_{45} 、 D_L 、 δ_H 、 δ_{45} 和 δ_L 。三个延迟分量可以在三维延迟空间中表示。类似地,三个二向衰减分量可以在二向衰减空间中表示。将这些空间叠加起来,可以简单地理解齐次和非齐次偏振元件(14.7 节)。

表 14.1 琼斯矩阵八个自由度的分类

ρ_0	振幅,非偏振
ϕ_0	相位,非偏振
D_H	线性二向衰减,水平或垂直分量
D_{45}	线性二向衰减,45°或 135°分量
D_L	圆二向衰减,左旋或右旋分量
δ_H	线性延迟,水平或垂直分量
δ_{45}	线性延迟,45°或 135°分量
δ_L	圆延迟,左旋或右旋分量

本章分析了具有小二向衰减和小延迟的弱偏振元件。琼斯矩阵的性质在单位矩阵的领域中特别简单。弱偏振元件值得特别注意,因为在镀有减反膜的透镜表面和金属镜表面上,大多数光的相互作用会引起相对弱的偏振。光学系统中处处都存在弱偏振相互作用。

第 2 章和第 4 章介绍了琼斯矢量和琼斯矩阵,从系统角度对光沿 z 轴传播进行偏振计算。入射光用二元琼斯矢量 $\mathbf{E}$ 来描述(第 2 章)。偏振元件用琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 来描述,它是一个 2×2 复元素矩阵。基本的琼斯矩阵方程采用以下形式^[1]:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E}' = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E'_x \\ E'_y \end{pmatrix} \quad (14.1)$$

在偏振研究中,常常会计算得到一个样品的琼斯矩阵,这就直接导致了一个问题:琼斯矩阵关联的偏振性质是什么?这和另一个样品相似吗?它有更多的偏振还是更少的偏振?可以用逐个元素的方式比较矩阵,但更有意义的是根据已建立的偏振特性进行比较。样品显示什么类型的二向衰减或延迟?数量是多少?二向衰减和延迟通过矩阵乘法混合在一起,而不是延迟出现在二向衰减之前(反之亦然),14.4.5 节和 14.6 节提供了以顺序无关的方式计算偏振特性的算法。

本章应用琼斯矩阵的如下两种表示法:第一种表示法将琼斯矩阵表示为泡利矩阵 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 和单位矩阵 σ_0 之和,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 \end{aligned} \quad (14.2)$$

其中, c_0 、 c_1 、 c_2 和 c_3 是复泡利系数。第二种表示法把琼斯矩阵当作泡利矩阵和的指数,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} = e^{b_0 \sigma_0 + b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3} \quad (14.3)$$

其中, b_0 、 b_1 、 b_2 和 b_3 是指数化的泡利系数,求 $\mathbf{J}$ 的矩阵对数可计算出这些系数

$$\ln(\mathbf{J}) = b_0 \sigma_0 + b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3 \quad (14.4)$$

式(14.3)和式(14.4)是特殊的,因为它们有助于揭示琼斯矩阵的结构及其与偏振特性的关系。二向衰减和延迟的讨论和分析始终贯穿于本书。式(14.3)是琼斯矩阵的一种自然而独特的表示形式,因为它导出了二向衰减和延迟的简单表达式。在物理学中,这种自然的和独特的表示法称为标准形(canonical forms)。

14.2 泡利矩阵和琼斯矩阵

沃尔夫冈·泡利将泡利矩阵引入量子力学,用来描述电子和原子核的角动量与外磁场的相互作用^[2-4]。光是一种量子现象,尽管这里没有使用量子公式,但量子力学的基础数学自然而然可以用在偏振演算中^[5]。

14.2.1 泡利矩阵恒等式

泡利矩阵 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的定义如下^{①[6]}：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14.5)$$

这些矩阵,以及作为补充的另外一个 2×2 单位矩阵,由下标 0 表示,

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (14.6)$$

构成了 2×2 复矩阵的基底。泡利矩阵乘法的一般规则如下,让 $\alpha=1,2$ 或 3 ,每个泡利矩阵的平方就是单位矩阵,

$$\sigma_\alpha \cdot \sigma_\alpha = \sigma_\alpha^2 = \sigma_0 \quad (14.7)$$

即泡利矩阵是单位矩阵的矩阵平方根。作为单位矩阵的平方根,每个泡利矩阵是表 14.2 所列的半波延迟器琼斯矩阵。

两个泡利矩阵的矩阵相乘等于第三个泡利矩阵的 $\pm i$ 倍。例如,将前两个泡利矩阵相乘,得到

$$\sigma_1 \cdot \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \sigma_3 \quad (14.8)$$

表 14.2 泡利矩阵和单位矩阵对应的偏振元件

σ_0	单位矩阵,非偏振,非吸收
σ_1	在 0° 和 90° 偏振光之间引入半波线性延迟
σ_2	在 45° 和 135° 偏振光之间引入半波线性延迟
σ_3	在左旋和右旋偏振光之间引入半波圆延迟

当改变矩阵乘法的顺序,得到

$$\sigma_2 \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i \sigma_3 \quad (14.9)$$

让 (α, β, γ) 是 $(1, 2, 3)$ 的偶排列,即 $(1, 2, 3)$ 、 $(2, 3, 1)$ 或 $(3, 1, 2)$ 。然后,对于偶排列,为

$$\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta = i \sigma_\gamma \quad (14.10)$$

① 在量子力学中,下面的泡利矩阵下标表示法更为常见:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

我们选择的下标符号与斯托克斯参量的编号法以及二向衰减和延迟分量的标记法相一致。

对于奇排列,为(1,3,2)、(2,1,3)或(3,2,1),

$$\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta = -i\sigma_\gamma \quad (14.11)$$

因此,泡利矩阵的矩阵乘法是反交换的,

$$\sigma_\alpha \cdot \sigma_\beta = -\sigma_\beta \cdot \sigma_\alpha \quad (14.12)$$

14.2.2 展开为泡利矩阵之和

当琼斯矩阵表示为泡利矩阵之和时,琼斯矩阵具有显著的结构。泡利矩阵和单位矩阵构成了 2×2 复矩阵集的完备基底,使得任何琼斯矩阵都可以表示为泡利矩阵之和,

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0 + c_1 & c_2 - ic_3 \\ c_2 + ic_3 & c_0 - c_1 \end{pmatrix} = c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 \end{aligned} \quad (14.13)$$

其中 c_0, c_1, c_2 和 c_3 是复泡利系数,

$$c_0 = \frac{j_{xx} + j_{yy}}{2}, \quad c_1 = \frac{j_{xx} - j_{yy}}{2}, \quad c_2 = \frac{j_{xy} + j_{yx}}{2}, \quad c_3 = \frac{i(j_{xy} - j_{yx})}{2} \quad (14.14)$$

复泡利系数也可用迹算子 Tr 表示为

$$c_i = \frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{J} \cdot \sigma_i] \quad (14.15)$$

其中迹算子是对角线元素之和, $\text{Tr}[\mathbf{J}] = j_{xx} + j_{yy}$ 。 c_0 与单位矩阵相关,因此描述了偏振无关的振幅变化和相位变化。

14.2.3 泡利符号约定

根据泡利矩阵的定义,有如下关系:

$$\sigma_1 \sigma_2 = i\sigma_3, \quad \sigma_2 \sigma_3 = i\sigma_1, \quad \sigma_3 \sigma_1 = i\sigma_2 \quad (14.16)$$

在递减相位惯例中,正 σ_3 表示左旋圆偏振分量。因此,正实数 f 表示左旋圆二向衰减(或存在实的 σ_1 和 σ_2 项的情况下,表示左旋椭圆二向衰减),

$$\mathbf{J} = \sigma_0 + f\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + f \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14.17)$$

同样,一个正虚部 g 表示左旋圆或椭圆延迟量,

$$\mathbf{J} = \sigma_0 + ig\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + ig \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (14.18)$$

这不同于我们对斯托克斯参量的约定,其中正 S_3 表示右旋圆偏振分量。因此,如 6.12.1 节所述,在将这些琼斯矩阵转换为米勒矩阵时,必须小心需要额外的负号。

14.2.4 偏振元件绕光轴旋转时的泡利系数

琼斯矩阵绕光传播方向旋转角度 θ 的变换是

$$\mathbf{J}(\theta) = \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{R}(-\theta) \quad (14.19)$$

其中 $\mathbf{R}$ 是二维的笛卡儿旋转矩阵。

$$\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (14.20)$$

考虑一个琼斯矩阵,它表示为泡利矩阵之和,见式(14.13)。 σ_0 和 σ_3 在旋转下是不变的^①:

$$\mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_0 \cdot \mathbf{R}(-\theta) = \sigma_0 \quad (14.21)$$

$$\mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_3 \cdot \mathbf{R}(-\theta) = \sigma_3 \quad (14.22)$$

旋转将 σ_1 和 σ_2 相互耦合在一起,

$$\mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_1 \cdot \mathbf{R}(-\theta) = \sigma_1 \cos 2\theta + \sigma_2 \sin 2\theta \quad (14.23)$$

$$\mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_2 \cdot \mathbf{R}(-\theta) = -\sigma_1 \sin 2\theta + \sigma_2 \cos 2\theta \quad (14.24)$$

经过角度 θ 的旋转,琼斯矩阵 $\mathbf{J}(\theta)$ 变为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= \mathbf{R}(\theta) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{R}(-\theta) \\ &= c_0 \sigma_0 + (c_1 \cos 2\theta - c_2 \sin 2\theta) \sigma_1 + (c_1 \sin 2\theta + c_2 \cos 2\theta) \sigma_2 + c_3 \sigma_3 \end{aligned} \quad (14.25)$$

例 14.1 泡利系数的旋转

考虑由 $\lambda/4$ 右旋圆延迟器、透射轴在 22.5° 且透射率为 1 和 0.5 的线性二向衰减器、快轴为 60° 的 $\lambda/4$ 线性延迟器组成的序列的琼斯矩阵 $\mathbf{J}_1$,

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_1 &= \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right) \mathbf{LD}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{8}\right) \mathbf{CR}\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 0.707 + 0.354i & -0.612i \\ -0.612i & 0.707 - 0.354i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.927 & 0.177 \\ 0.177 & 0.573 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.924 & 0.383 \\ -0.383 & 0.924 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.558 + 0.313i & 0.366 - 0.183i \\ -0.04 - 0.463i & 0.422 - 0.528i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.26)$$

于是,泡利系数为 $c_0 = 0.49 - 0.108i$, $c_1 = 0.068 + 0.421i$, $c_2 = 0.163 - 0.323i$, $c_3 = -0.14 + 0.203i$,在图 14.1(a)的阿甘特(复数)平面上绘出了这些系数。图 14.1(b)显示了旋转偏振元件的系数变换。

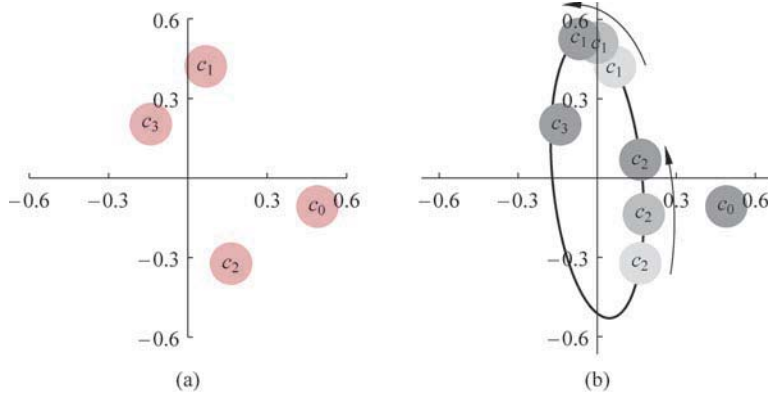


图 14.1 (a)矩阵 $\mathbf{J}_1$ 的泡利 c 系数绘制在阿甘特(复数)平面上。(b)当偏振元件绕入射轴旋转时,每旋转 180° c_1 和 c_2 沿椭圆移动一周,而 c_0 和 c_3 保持不变。旋转 45° 后, c_2 移动到 c_1 的初始位置, c_1 移动到 $-c_2$ 的初始位置。较浅的 c_1 和 c_2 圆盘表示未旋转时的系数。中暗的圆盘是旋转 11.25° 之后的系数,最暗的圆盘是旋转 22.5° 之后的系数

① 见习题 14.4。

14.2.5 泡利之和形式的本征值、本征矢量及矩阵函数

当琼斯矩阵表示为泡利矩阵之和时,有一个特别优雅的本征值 ξ_q 和 ξ_r 的表达形式。本征值的特征方程为

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{J} - \xi \boldsymbol{\sigma}_0) &= \det \begin{pmatrix} c_0 + c_1 - \xi & c_2 - ic_3 \\ c_2 + ic_3 & c_0 - c_1 - \xi \end{pmatrix} = 0 \\ &= c_0^2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 - 2c_0\xi + \xi^2\end{aligned}\quad (14.27)$$

二次方程的根为

$$\xi_q, \xi_r = c_0 \pm \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \quad (14.28)$$

注意这个平方运算是 c_i^2 , 而不是更普遍的 $|c_i|^2$ 。这种简单性表明复数泡利之和表示法是基本的。两个本征矢量(本征偏振态) $\mathbf{E}_q, \mathbf{E}_r$ 为

$$\mathbf{E}_q = \begin{pmatrix} c_1 + \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ c_2 + ic_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_r = \begin{pmatrix} c_1 - \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \\ c_2 + ic_3 \end{pmatrix} \quad (14.29)$$

琼斯矩阵的行列式在用泡利系数表示时有一个类似的紧凑表达式

$$\det(\mathbf{J}) = j_{xx}j_{yy} - j_{xy}j_{yx} = c_0^2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2 \quad (14.30)$$

矩阵逆也是如此

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{J})} \begin{pmatrix} j_{yy} & -j_{xy} \\ -j_{yx} & j_{xx} \end{pmatrix} = \frac{c_0\boldsymbol{\sigma}_0 - c_1\boldsymbol{\sigma}_1 - c_2\boldsymbol{\sigma}_2 - c_3\boldsymbol{\sigma}_3}{\det(\mathbf{J})} \quad (14.31)$$

矩阵转置

$$\mathbf{J}^T = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{yx} \\ j_{xy} & j_{yy} \end{pmatrix} = c_0\boldsymbol{\sigma}_0 + c_1\boldsymbol{\sigma}_1 + c_2\boldsymbol{\sigma}_2 - c_3\boldsymbol{\sigma}_3 \quad (14.32)$$

厄米伴随是

$$\mathbf{J}^\dagger = \begin{pmatrix} j_{xx}^* & j_{yx}^* \\ j_{xy}^* & j_{yy}^* \end{pmatrix} = c_0^*\boldsymbol{\sigma}_0 + c_1^*\boldsymbol{\sigma}_1 + c_2^*\boldsymbol{\sigma}_2 + c_3^*\boldsymbol{\sigma}_3 \quad (14.33)$$

图 14.2 显示了当进行转置、逆和伴随运算时,式(14.26)的示例矩阵 $\mathbf{J}_1$ 是如何进行 c 系数变换的。

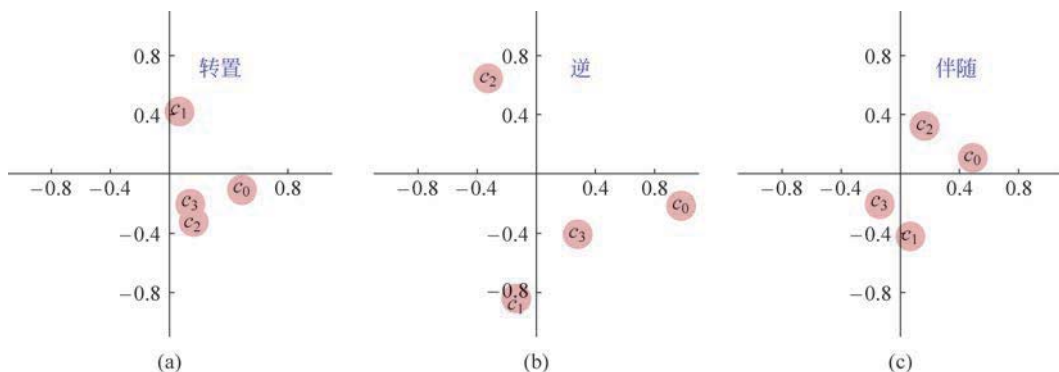


图 14.2 复泡利系数变化的几何图形。(a)对于转置, c_3 对称地移动跨过原点。(b) $\mathbf{J}_1$ 的行列式为 $1/2$, 因此,对于 $\mathbf{J}_1$ 的逆矩阵,首先 c_1, c_2 和 c_3 对称地跨过原点,然后所有四个系数离开原点距离的加倍。(c)对于 $\mathbf{J}_1$ 的伴随,所有系数都对称移动跨过 x 轴

如果 $\mathbf{J} = \mathbf{J}^\dagger$, 那么 $\mathbf{J}$ 是纯二向衰减器(厄米共轭的)。因此, 对于二向衰减器(没有附加相位) c_0, c_1, c_2 和 c_3 是实数。如果 $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}^\dagger$, 则 $\mathbf{J}$ 是纯延迟器(酉的), c_0 是实数, c_1, c_2 和 c_3 是虚数。

以泡利求和形式表示琼斯矩阵的矩阵幂, 包括对于矩阵平方,

$$\mathbf{J}^2 = (c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) \boldsymbol{\sigma}_0 + 2c_0c_1\boldsymbol{\sigma}_1 + 2c_0c_2\boldsymbol{\sigma}_2 + 2c_0c_3\boldsymbol{\sigma}_3 \quad (14.34)$$

对于矩阵立方,

$$\mathbf{J}^3 = c_0[c_0^2 + 3(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)] \boldsymbol{\sigma}_0 + (3c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(c_1\boldsymbol{\sigma}_1 + c_2\boldsymbol{\sigma}_2 + c_3\boldsymbol{\sigma}_3) \quad (14.35)$$

对于矩阵的平方根,

$$\mathbf{J}^{1/2} = \frac{\Gamma}{2} \boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{c_1\boldsymbol{\sigma}_1 + c_2\boldsymbol{\sigma}_2 + c_3\boldsymbol{\sigma}_3}{\Gamma} \quad (14.36)$$

其中,

$$\Gamma = \sqrt{c_0 + \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} + \sqrt{c_0 - \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}} \quad (14.37)$$

注意, 矩阵根不是唯一的。式(14.36)是主平方根的方程, 即位于 $\mathbf{J}$ 和单位矩阵之间的矩阵根。

14.2.6 标准求和形式

泡利系数与琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 相关的线偏振、圆偏振形式的二向衰减和延迟有关。单位矩阵的系数, 即 c_0 , 与非偏振行为相关。幅值 $|c_0|$ 与振幅的变化有关, 参数 $\arg[c_0]$ 表示整个相位的变化。当展开式写成这样一个形式, 其中 c_0 (绝对振幅和相位变化, 也就是琼斯矩阵的偏振无关部分) 被析出时, 其他系数的实部和虚部类似地与其他二向衰减和延迟基本对相关, 见表 14.3。

$$\mathbf{J} = c_0 \left(\boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{c_1\boldsymbol{\sigma}_1 + c_2\boldsymbol{\sigma}_2 + c_3\boldsymbol{\sigma}_3}{c_0} \right) = c_0 (\boldsymbol{\sigma}_0 + f_1\boldsymbol{\sigma}_1 + f_2\boldsymbol{\sigma}_2 + f_3\boldsymbol{\sigma}_3) \quad (14.38)$$

14.4 节阐述了这些 f 系数与二向衰减和延迟成分之间的关系。

表 14.3 泡利 f 系数的实部(Re)和虚部(Im)与偏振特性的关系

$\text{abs}(c_0)$	振幅
$\arg(c_0)$	相位
$\text{Re}(f_1)$	线性二向衰减, 沿 x 或 y 轴
$\text{Im}(f_1)$	线性延迟量, 沿 x 或 y 轴
$\text{Re}(f_2)$	线性二向衰减, 沿 $\pm 45^\circ$ 轴
$\text{Im}(f_2)$	线性延迟量, 沿 $\pm 45^\circ$ 轴
$\text{Re}(f_3)$	圆二向衰减
$\text{Im}(f_3)$	圆延迟量

14.3 偏振元件序列

当偏振元件级联时, 产生了偏振元件中不存在的新的偏振形式。例如, 一个 0° 线性延

迟器后接一个 45° 线性延迟器具有椭圆本征偏振。因此,相互作用产生了一些圆延迟量。这种耦合遵循泡利矩阵恒等式(式(14.8))。相反地,由一个二向衰减器后面跟一个延迟器组成的序列会产生一个二向衰减分量,遵循如下关系 $\sigma_1 \cdot i\sigma_2 = -\sigma_3$ 。

本节将整理并举例说明这些偏振耦合。这一分类后面将应用于第 15 章的偏振光线追迹和偏振像差理论中,以帮助简化对光学系统偏振特性的理解。表 14.4 列出了这些耦合,该改进的泡利矩阵乘法表描述了发生的偏振耦合。

表 14.4 二向衰减和延迟特性的相互作用

	D_H	D_{45}	D_L	δ_H	δ_{45}	δ_L
D_H		δ_L	$-\delta_{45}$		D_L	$-D_{45}$
D_{45}	$-\delta_L$		δ_H	$-D_L$		D_H
D_L	δ_{45}	$-\delta_H$		D_{45}	$-D_H$	
δ_H		D_L	$-D_{45}$		δ_L	$-\delta_{45}$
δ_{45}	$-D_L$		D_H	$-\delta_L$		δ_H
δ_L	D_{45}	$-D_H$		δ_{45}	$-\delta_H$	

左列: 第一属性; 上行: 第二属性; 单元格: 产生的偏振形式

例 14.2 两个 $\lambda/4$ 线性延迟器级联产生一个圆延迟分量

偏振元件序列的性质取决于元件排列的顺序。考虑两个 $\lambda/4$ 延迟器, $\mathbf{LR}(\pi/2, 0)$ 和 $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/4)$, 表示为泡利求和形式。当光首先通过 $\mathbf{LR}(\pi/2, 0)$, 则琼斯矩阵积为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \\
 &= \frac{\sigma_0 - i\sigma_2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_0 - i\sigma_1}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_0 - i\sigma_1 - i\sigma_2 - i\sigma_3}{2} \\
 &= \sigma_0 \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \frac{i\sigma_1 + i\sigma_2 + i\sigma_3}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1-i & 1-i \\ -1-i & 1+i \end{pmatrix} \quad (14.39)
 \end{aligned}$$

它是一个延迟量为 $\delta = 2\pi/3$ 的椭圆延迟器。对于快轴(本征偏振), 快的琼斯本征偏振态和相应的斯托克斯参量是(为简单起见都没有进行归一化)

$$\mathbf{E}_{\text{fast}} = \begin{pmatrix} (1+i)(1+\sqrt{3}) \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_{\text{fast}} = (\sqrt{3}, 1, 1, 1) \quad (14.40)$$

因此, 式(14.39)中两个线性延迟器的组合可以产生一个圆延迟分量。反转顺序, 当光首先通过 $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/4)$ 时,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \cdot \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) &= \frac{\sigma_0 - i\sigma_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sigma_0 - i\sigma_2}{\sqrt{2}} = \frac{\sigma_0 - i\sigma_1 - i\sigma_2 + i\sigma_3}{2} \\
 &= \sigma_0 \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3} \frac{i\sigma_1 + i\sigma_2 - i\sigma_3}{2} \quad (14.41)
 \end{aligned}$$

结果也是一个延迟量为 $\delta = 2\pi/3$ 的椭圆延迟器, 但非标准化的斯托克斯矢量, 对于快轴(本征偏振), 现在有相反的圆分量,

$$\mathbf{S}_{\text{fast}} = (\sqrt{3}, 1, 1, -1) \quad (14.42)$$

这一次生成了相反的圆分量。通常,当依次通过两种不同形式的偏振时,将引入第三种形式的偏振。采用泡利矩阵和的展开形式,这是最容易看到的。在第一个延迟器序列例子中,式(14.39), $i\sigma_2 \cdot i\sigma_1 = i\sigma_3$ 项已把水平和 45° 延迟的组合耦合为圆延迟。当反转延迟器顺序时,会引入相反的圆延迟,因为 $i\sigma_1 \cdot i\sigma_2 = -i\sigma_3$ 。

例 14.3 两个二向衰减器级联产生一个圆延迟分量

类似地,一个水平二向衰减器后跟一个 45° 二向衰减器的组合必然产生一个圆延迟分量,因为 $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = i\sigma_3$ 。目前还不清楚为什么非平行二向衰减器序列会产生延迟,所以考虑两个二向衰减为 $D=3/5$ 的线性二向衰减器的例子。第一个透射轴为 0° ,第二个透射轴为 45° 。笛卡儿形式的琼斯矩阵乘积和泡利系数形式为

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \mathbf{LD}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \cdot \mathbf{LD}\left(1, \frac{1}{2}, 0\right) \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{3\sigma_0 + 3\sigma_2}{4} \cdot \frac{3\sigma_0 + 3\sigma_1}{4} = \frac{9\sigma_0 + 3\sigma_1 + 3\sigma_2 + i\sigma_3}{16} \end{aligned} \quad (14.43)$$

在 $\mathbf{J}$ 的泡利矩阵和中,项 $i\sigma_3/16$ 是圆分量,这一点是清楚的。本征偏振光为 11.7° 和 119.3° 方向的线偏振光;因此,琼斯矩阵是非齐次的,因为本征偏振不是正交的(不是 90°)。 $\mathbf{J}$ 旋转线偏振光的偏振面,如图 14.3(a)所示。图 14.3(b)显示了光的旋转角度,它是入射偏振方向的函数。这种旋转是不对称的,与顺时针旋转相比,向较小角度(看向光束逆时针)的旋转更多。平均旋转为 -5.3° 。由于逆时针旋转占主导地位,泡利矩阵系数中出现了一个圆延迟分量。

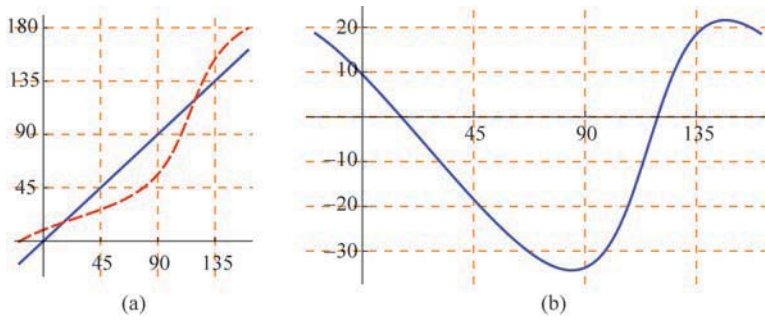


图 14.3 (a)在线性二向衰减器序列 $\mathbf{J}$ 上的入射(实线)和出射光的偏振面。偏离蓝色对角线表示偏振平面的旋转。(b) $\mathbf{J}$ 产生的偏振面旋转是不对称的,轴下区域比轴上大

在复泡利求和形式中,琼斯矩阵的级联也可以通过系数的矩阵乘法来计算,如式(14.44)所示。例如,三个矩阵的乘积:

$$(a_0\sigma_0 + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3)$$

$$= (b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3) \cdot (c_0\sigma_0 + c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2 + c_3\sigma_3) \cdot (d_0\sigma_0 + d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3) \quad (14.44)$$

得到系数 (a_0, a_1, a_2, a_3) , 这些系数可以这样计算得到, 将第一个琼斯矩阵的泡利和系数排列在向量中, 其余矩阵的系数排列成体现泡利矩阵乘法规则的矩阵, 如式(14.45)所示:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ b_1 & b_0 & -ib_3 & ib_2 \\ b_2 & ib_3 & b_0 & -ib_1 \\ b_3 & -ib_2 & ib_1 & b_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_0 & -ic_3 & ic_2 \\ c_2 & ic_3 & c_0 & -ic_1 \\ c_3 & -ic_2 & ic_1 & c_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (14.45)$$

14.4 矩阵指数和对数

14.4.1 矩阵指数

这里的主要任务是以一种简单、独特的方式定义和计算琼斯矩阵元素的特性。我们已经证明了如何将琼斯矩阵表示为泡利矩阵之和, 这为常见的矩阵运算提供了简单的形式, 如逆和伴随。矩阵指数是偏振特性的一种优雅表示, 它提供了一种与顺序无关的算法。类似地, 矩阵指数和矩阵对数提供了以其分量形式表示二向衰减琼斯矩阵和延迟器琼斯矩阵的算法。

指数函数 e^x 是根据级数展开定义的

$$e^x = \exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (14.46)$$

矩阵指数由相同的级数展开式定义, 但应用于矩阵, 用单位矩阵代替 1,

$$e^{\mathbf{M}} = \exp(\mathbf{M}) = \sigma_0 + \mathbf{M} + \frac{\mathbf{M}^2}{2!} + \frac{\mathbf{M}^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^n}{n!} \quad (14.47)$$

例如, 单位矩阵的矩阵指数很容易计算, 因为单位矩阵的任何幂都是单位矩阵,

$$\sigma_0 = \sigma_0^2 = \sigma_0^3 = \sigma_0^n \quad (14.48)$$

因此, 单位矩阵的矩阵指数是单位矩阵的 e 倍

$$e^{\sigma_0} = \sigma_0 \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots \right) = \sigma_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \quad (14.49)$$

考虑把琼斯矩阵表示为泡利矩阵和的矩阵指数, 因为这提供了对应于八个琼斯矩阵自由度的关系(表 14.1),

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} = e^{b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 + b_3\sigma_3} \quad (14.50)$$

系数 b_0, b_1, b_2 和 b_3 是指数化的泡利系数, 见式(14.3)。

尽管式(14.47)定义了矩阵指数, 但一般来说, 这不是计算矩阵指数的最佳算法, 这是由于某些矩阵的收敛速度以及数值舍入误差的累积问题。矩阵指数的计算有许多潜在隐患, 这超出了本书的讨论范围。任何要编程实现自己的矩阵指数函数的读者都应该查阅大量的文献。

14.4.2 矩阵对数

为了将矩阵指数形式应用于琼斯矩阵 J , 有必要要求它的矩阵对数 M , 当 M 作为指数时 (式(14.47)), 它等于 J 。对数函数定义为指数函数的逆函数。因此当矩阵 K 等于矩阵 M 的矩阵指数, 即 $K=e^M$ 时, M 是 K 的矩阵对数, 即 $M=\ln(K)$ 。

标量的对数函数, 如图 14.4 所示, 在 $x=0$ 处有一个奇点, 因此对数在原点不能有效地展开。对数最常见的级数展开式是关于 $x=1$ 的泰勒级数展开式,

$$\ln(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n (-1)^{n-1}}{n} \quad (14.51)$$

式(14.51)的矩阵形式是关于单位矩阵的展开式

$$\begin{aligned} \ln(J) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sigma_0 - J)^n (-1)^{n-1}}{n} \\ &= \sigma_0 - J - \frac{(\sigma_0 - J)^2}{2} + \frac{(\sigma_0 - J)^3}{3} - \frac{(\sigma_0 - J)^4}{4} + \dots \end{aligned} \quad (14.52)$$

式(14.52)可用于计算矩阵对数并计算 b_0 、 b_1 、 b_2 和 b_3 。实际上, 式(14.52)收敛得非常慢^[12]。分母增长缓慢(与式(14.46)相比), 且各项符号交替出现。此外, 式(14.52)并不对所有琼斯矩阵都收敛。例如, 对于纯延迟器, 式(14.52)仅对 $|\delta| < 2\pi/3$ 收敛。式(14.52)可以定义矩阵对数, 但在计算上, 它不是计算矩阵对数的最佳算法。

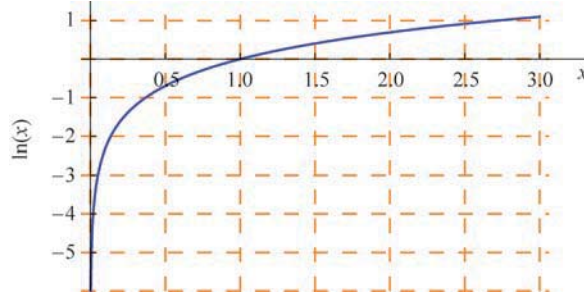


图 14.4 $\ln(x)$ 在 $x=0$ 处有奇异性。 $\ln(x)$ 的标准泰勒级数是关于 $x=1$ 展开的

关于矩阵对数一般计算的算法细节超出了本书的范围, 涉及许多复杂的问题^[13-14]。许多优秀的矩阵对数算法已被开发出来, 其中一个最好的算法是

$$\ln(M, K, n) \cong 2^{n+1} \sum_{k=0}^K \frac{[(M^{\frac{1}{n}} - \sigma_0)(M^{\frac{1}{n}} + \sigma_0)^{-1}]^{2k+1}}{2k+1} \quad (14.53)$$

当 $K > 4$ 和 $n > 4$ 时, 通常可获得很好的收敛性。

14.4.3 延迟器矩阵

泡利矩阵的指数化产生了所有二向衰减器和延迟器的矩阵形式。首先, 考虑虚值系数 $i\Delta$, 然后将在 14.4.4 节中讨论实系数 α 。

σ_1 和虚系数 $i\Delta$ 一起作为指数得到一个很有趣的形式,

$$\begin{aligned}
e^{i\Delta\sigma_1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\Delta\sigma_1)^n}{n!} = \sigma_0 + i\Delta\sigma_1 + \frac{(i\Delta\sigma_1)^2}{2!} + \frac{(i\Delta\sigma_1)^3}{3!} + \dots \\
&= \sigma_0 \left(1 - \frac{\Delta^2}{2!} + \frac{\Delta^4}{4!} + \dots\right) + i\sigma_1 \left(\Delta - \frac{\Delta^3}{3!} + \frac{\Delta^5}{5!} + \dots\right) \\
&= \begin{pmatrix} \cos\Delta + i\sin\Delta & 0 \\ 0 & \cos\Delta - i\sin\Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\Delta} & 0 \\ 0 & e^{-i\Delta} \end{pmatrix} \\
&= \sigma_0 \cos\Delta + i\sigma_1 \sin\Delta = \mathbf{LR}(\Delta/2, 0)
\end{aligned} \tag{14.54}$$

这是快轴在竖向、延迟量为 $\delta = \Delta/2$ 的延迟器 $\mathbf{LR}(\Delta/2, 0)$ 的琼斯矩阵。因此,快轴方向为 $0^\circ (\delta > 0)$ 或 $90^\circ (\delta < 0)$ 的延迟器的指数形式为

$$\mathbf{LR}(\delta_H, 0) = \exp\left(\frac{-i\delta_H}{2} \sigma_1\right) = \sigma_0 \cos \frac{\delta_H}{2} - i\sigma_1 \sin \frac{\delta_H}{2} \tag{14.55}$$

类似地,由另两个泡利矩阵的矩阵指数生成 45° 延迟器 $\mathbf{LR}(\delta_{45}, 0)$ 和左旋圆延迟器 $\mathbf{LR}(\delta_L, \pi)$ 的指数化琼斯矩阵

$$\mathbf{LR}(\delta_{45}, 0) = \exp\left(\frac{-i\delta_{45}}{2} \sigma_2\right) = \sigma_0 \cos \frac{\delta_{45}}{2} - i\sigma_2 \sin \frac{\delta_{45}}{2} \tag{14.56}$$

$$\mathbf{CR}(\delta_L, \pi) = \exp\left(\frac{-i\delta_L}{2} \sigma_3\right) = \sigma_0 \cos \frac{\delta_L}{2} - i\sigma_3 \sin \frac{\delta_L}{2} \tag{14.57}$$

结合式(14.55)~式(14.57),所有的延迟器琼斯矩阵 $\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$ 都可表示为具有纯虚泡利指数系数的泡利自旋矩阵和的矩阵指数。这个矩阵指数可以转换成第二行所示的三角形形式^①,

$$\begin{aligned}
\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L) &= e^{-i(\delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 + \delta_L\sigma_3)/2} \\
&= \sigma_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{\delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 + \delta_L\sigma_3}{\delta}\right)
\end{aligned} \tag{14.58}$$

其中延迟量大小 δ 为

$$\delta = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_{45}^2 + \delta_L^2} \tag{14.59}$$

该延迟器琼斯矩阵符合对称相位约定(5.6.1节)。负号是由于递减相位约定。因此,对于任何酉矩阵 $\mathbf{U}$,延迟分量(表 14.1)由 $\mathbf{U}$ 的矩阵对数计算得出,

$$2i\ln(\mathbf{U}) = \phi\sigma_0 + \delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 + \delta_L\sigma_3 \tag{14.60}$$

其中 ϕ 描述可能存在的绝对相位。因为泡利矩阵和的指数与延迟系数产生了椭圆延迟器琼斯矩阵,然后取理想椭圆延迟器琼斯矩阵的矩阵对数,

$$\ln[\mathbf{ER}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)] = \ln[e^{-i(\delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 + \delta_L\sigma_3)/2}] = -i\left(\frac{\delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 + \delta_L\sigma_3}{2}\right) \tag{14.61}$$

得到一个包含延迟分量的表达式。

14.4.4 二向衰减器矩阵

下面分析二向衰减器的指数形式。考虑带有实系数的泡利矩阵指数。把 $\alpha_1\sigma_1$ 指数化

① 见习题 14.11。

得到

$$\begin{aligned}\exp(\alpha_1 \sigma_1) &= \begin{pmatrix} \exp(\alpha_1) & 0 \\ 0 & \exp(-\alpha_1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \alpha_1 + \sinh \alpha_1 & 0 \\ 0 & \cosh \alpha_1 - \sinh \alpha_1 \end{pmatrix} = \sigma_0 \cosh \alpha_1 + \sigma_1 \sinh \alpha_1\end{aligned}\quad (14.62)$$

这是水平二向衰减器的一般形式。与 $\exp(\alpha_1 \sigma_1)$ 的本征偏振态相关的本征值振幅透过率 $t_{\max}$ 和 $t_{\min}$ 为

$$t_{\max} = \cosh \alpha_1 + |\sinh \alpha_1|, \quad t_{\min} = \cosh \alpha_1 - |\sinh \alpha_1| \quad (14.63)$$

光强透过率 $T_{\max}$ 和 $T_{\min}$ 是本征值(即对角线元素)的平方,

$$T_{\max} = (\cosh \alpha_1 + \sinh \alpha_1)^2, \quad T_{\min} = (\cosh \alpha_1 - \sinh \alpha_1)^2 \quad (14.64)$$

由此可得二向衰减 D 的表达式为

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} = \frac{2 \cosh \alpha_1 \sinh \alpha_1}{2(\cosh^2 \alpha_1 + \sinh^2 \alpha_1)} = \frac{1}{2} \tanh(2\alpha_1) \quad (14.65)$$

因此,水平二向衰减器的指数形式,即包含水平分量的“椭圆”二向衰减器, $\mathbf{ED}(D_H, 0, 0)$, 表示为二向衰减分量 D_H 的形式

$$\begin{aligned}\mathbf{ED}(D_H, 0, 0) &= \exp\left(\frac{\operatorname{arctanh} D_H}{2} \sigma_1\right) \\ &= \sigma_0 \cosh\left(\frac{\operatorname{arctanh} D_H}{2}\right) + \sigma_1 \sinh\left(\frac{\operatorname{arctanh} D_H}{2}\right)\end{aligned}\quad (14.66)$$

对于 $\mathbf{ED}(D_H, 0, 0)$, 平均光强透过率 T_U , 即非偏振光的光强透过率为

$$T_U = \frac{(\cosh \alpha_1)^2 + (\sinh \alpha_1)^2}{2} \quad (14.67)$$

它大于或等于 1。因此,需要将矩阵 $\mathbf{ED}$ 乘以一个常数,以产生期望的非偏振光透射率,该透射率将在 0 和 1 之间。一般椭圆二向衰减器 $\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L)$ 是用三个实二向衰减分量 D_H, D_{45}, D_L 定义的,如 5.7.2 节所述,它的二向衰减大小为

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2}, \quad 0 \leq D \leq 1 \quad (14.68)$$

是由矩阵指数方程对 $D_H \sigma_1 + D_{45} \sigma_2 + D_L \sigma_3$ 求幂得到的

$$\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L) = \exp\left[\operatorname{arctanh}(D) \frac{D_H \sigma_1 + D_{45} \sigma_2 + D_L \sigma_3}{2D}\right] \quad (14.69)$$

其中包含归一化因子 $\operatorname{arctanh}(D)/(2D)$ 。然后将 $\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L)$ 乘以任何期望的振幅 ρ 和相位 $e^{-i\phi}$, 以设置两个非偏振自由度: 振幅和相位。例如,如果 $\mathbf{ED}(D_H, D_{45}, D_L)$ 除以其较大的特征值,则最大振幅透射率为 1, 因此 $T_{\max} = 1$ 。

当二向衰减器接近偏振器时, $D \rightarrow 1$, $\operatorname{arctanh}$ 接近无穷大, 式(14.69)发散。因此,偏振器琼斯矩阵的对数是未定义的,就像 $1/0$ 是未定义的一样。二向衰减器琼斯矩阵的平方根是一个更弱的二向衰减器,当取更高阶矩阵根,在根的阶数接近无穷大时,二向衰减器琼斯矩阵的根接近单位矩阵。二向衰减越大,逼近单位矩阵的速度越慢。但偏振器的矩阵平方根(奇异矩阵)是相同的偏振器矩阵。例如, 0° 线性偏振器的矩阵平方根就是它本身,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{因此} \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14.70)$$

因此,偏振器的矩阵根本不趋向于单位矩阵。结果,偏振器矩阵的矩阵对数是未定义的,就像零的对数是负无穷大一样。

因此,可以用矩阵指数/矩阵对数法进行分量分析的二向衰减器琼斯矩阵集是一个只能逼近于偏振器矩阵集的开集。为了分析偏振器矩阵,即奇异矩阵,这些矩阵需要转变为与之相近的二向衰减器(例如二向衰减率为 0.9999)。通过计算特征值和特征向量,将其中一个特征值从 0 改为一个小的数字(如 0.0001),并将矩阵重新生成为一个非常强的二向衰减器,就可以实现这种小的转变。

14.4.5 齐次琼斯矩阵的偏振性质

14.4.3 节演示了如何从酉矩阵的矩阵对数简单地计算酉矩阵的延迟和本征态。类似地,14.4.4 节给出了厄米矩阵的二向衰减和本征态的类似计算。这种矩阵对数算法可以推广到分析齐次琼斯矩阵总合的二向衰减和延迟,其中本征偏振态 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 是正交的,即 $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r = 0$,并且对于几乎齐次的琼斯矩阵, $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r \approx 0$ (二向衰减和延迟本征态几乎相同),这种算法也可用,且误差很小。共享相同特征向量的两个矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可交换,它们矩阵相乘的结果是顺序无关的,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (14.71)$$

对于这种可交换矩阵,用方括号 $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ 表示交换运算,其值为零

$$[\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}] = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (14.72)$$

如果 $\mathbf{A}$ 是酉矩阵, $\mathbf{B}$ 是厄米矩阵,则 $\mathbf{J}_H = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ 是一个既有二向衰减又有延迟,且具有正交本征偏振态的矩阵; $\mathbf{J}_H$ 是齐次琼斯矩阵。

现在,计算齐次琼斯矩阵组分的算法可以由单独的延迟和二向衰减表达式组合而成。结合 14.4.3 节和 14.4.4 节的结果,琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 可以用八个自由度表示(表 14.1)。对于琼斯矩阵数据约简的第一步,单位矩阵从指数中分解出来,指数泡利系数用实部和虚部表示,

$$\mathbf{J} = \exp(b_0 \boldsymbol{\sigma}_0) \exp \left[\frac{d_H - i\delta_H}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{d_{45} - i\delta_{45}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{d_L - i\delta_L}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \right] \quad (14.73)$$

当表示为泡利矩阵和时,这些系数是从 $\mathbf{J}$ 的矩阵对数中获得的,

$$\ln(\mathbf{J}) = b_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{d_H - i\delta_H}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{d_{45} - i\delta_{45}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{d_L - i\delta_L}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \quad (14.74)$$

为了得到二向衰减和延迟分量的指数形式,将泡利对数系数分为实部和虚部。虚部是延迟分量。实分量需按式(14.69)进行 $\text{arctanh}(D)/(2D)$ 因子的缩放,以获得二向衰减分量,因此厄米二向衰减器琼斯矩阵为

$$\mathbf{J} = \exp(b_0 \boldsymbol{\sigma}_0) \exp \left[\text{arctanh}(D) \frac{D_H \boldsymbol{\sigma}_1 + D_{45} \boldsymbol{\sigma}_2 + D_L \boldsymbol{\sigma}_3}{2D} \right] \quad (14.75)$$

其中二向衰减 D 为

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2} \quad (14.76)$$

延迟分量上的负号遵循递减相位符号约定。方程(14.75)根据偏振特性生成了一个任意的

齐次琼斯矩阵。在递增相位约定中,琼斯矩阵将使用加号。指数的第二半部分是酉矩阵 $\mathbf{U}$,

$$\mathbf{U} = \exp\left(\frac{-i\delta_H}{2}\boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{-i\delta_{45}}{2}\boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{-i\delta_L}{2}\boldsymbol{\sigma}_3\right) \quad (14.77)$$

它代表一个延迟量为 $\delta = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_{45}^2 + \delta_L^2}$ 的纯延迟器。 $\mathbf{Sr}_1 = (\delta, \delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$ 和 $\mathbf{Sr}_2 = (\delta, -\delta_H, -\delta_{45}, -\delta_L)$ 是用斯托克斯参量表示的延迟本征偏振态。14.4.3 节对此进行了推导。

所有齐次琼斯矩阵都可用振幅 ρ 、相位 ϕ 、二向衰减 D 和延迟 δ 生成,这些分量来自指数形式

$$\mathbf{J} = \rho e^{-i\phi} \exp\left[\operatorname{arctanh}(D) \frac{D_H \boldsymbol{\sigma}_1 + D_{45} \boldsymbol{\sigma}_2 + D_L \boldsymbol{\sigma}_3}{2D} - \frac{i(\delta_H \boldsymbol{\sigma}_1 + \delta_{45} \boldsymbol{\sigma}_2 + \delta_L \boldsymbol{\sigma}_3)}{2}\right] \quad (14.78)$$

二向衰减分量的范围限于

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2}, \quad 0 \leq D < 1 \quad (14.79)$$

但对其他五个分量的范围没有限制。

反过来说,用表 14.1 中的分量表示的非奇异但任意的齐次琼斯矩阵的偏振性质是通过 $\mathbf{J}$ 的矩阵对数得到的,

$$\ln(\mathbf{J}) = (\ln(\rho) - i\phi) \boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{d_H - i\delta_H}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{d_{45} - i\delta_{45}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{d_L - i\delta_L}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \quad (14.80)$$

泡利对数系数的实部,即式(14.75)中的指数,是厄米矩阵 $\mathbf{H}$,

$$\mathbf{H} = \exp\left[\operatorname{arctanh}(D) \frac{D_H \boldsymbol{\sigma}_1 + D_{45} \boldsymbol{\sigma}_2 + D_L \boldsymbol{\sigma}_3}{2D}\right] \quad (14.81)$$

这代表了一个纯二向衰减器; $\mathbf{H}$ 代表 $\mathbf{J}$ 的二向衰减部分。 $\mathbf{H}$ 的二向衰减为

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2} = \tanh(2\sqrt{d_H^2 + d_{45}^2 + d_L^2}) = \tanh(2d) \quad (14.82)$$

因此

$$d = \operatorname{arctanh}\left(\frac{D}{2}\right) \quad (14.83)$$

$\mathbf{Sd}_1 = (D, D_H, D_{45}, D_L)$ 和 $\mathbf{Sd}_2 = (D, -D_H, -D_{45}, -D_L)$ 是用斯托克斯参量表示的二向衰减本征偏振态。14.4.4 节对此进行了推导。最后,单位矩阵项

$$c_0 = \exp(b_0) = \rho_0 \exp(-i\phi_0) \quad (14.84)$$

包含与偏振无关的振幅变化 ρ_0 、与偏振无关的相变 ϕ_0 。因此,利用偏振分量的指数形式,琼斯矩阵的振幅、相位、二向衰减和延迟由八个系数 $\phi_0, \rho_0, D_H, D_{45}, D_L, \delta_H, \delta_{45}$ 和 δ_L 表征,如式(14.74)和式(14.75)所定义。由于这两个方程中的系数相加,偏振特性以顺序相关形式出现,这与 5.9.3 节中的极分解不同,极分解中可以是①二向衰减发生在延迟之前,或②延迟发生在二向衰减之前,两者都可以。偏振分量的指数形式和式(14.74)、式(14.75)在 14.4.5 节和 14.6 节中进行了更详细的探讨。

由式(14.78)和式(14.80)定义的齐次琼斯矩阵的偏振分量现在是与顺序无关的形式;偏振特性是混合在一起的。与琼斯矩阵的极分解($\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{U}$)或奇异值分解 $\mathbf{J} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{V}^\dagger$ 不同(5.9 节讨论了这两种分解),没有一个特性出现在其他特性之前或之后。这如图 14.5 所示,其中一系列无穷小琼斯矩阵排列在一个重复序列中,其乘积为指定的琼

斯矩阵 $\mathbf{J}$, 这些无穷小琼斯矩阵代表了表 14.1 八个分量中每个分量的小贡献。

奇异矩阵, 即行列式为零的偏振器琼斯矩阵, 可按照 14.4.4 节末尾所述小心处理。

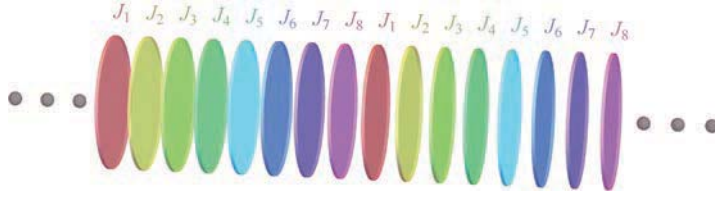


图 14.5 在偏振分量的指数形式中, 琼斯矩阵的振幅、相位、二向衰减和延迟由八个系数和八个相应的琼斯矩阵表征。由于没有一个偏振效应出现在其他任何偏振效应之前, 因此该表示法可以被描绘为把每种偏振形式的贡献分为许多无穷小的片段, $\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \dots, \mathbf{J}_8$, 并将这些片段搅乱到一个重复序列中, 如图所示。现在, 没有一个效应发生在其他效应之前或之后, 因为如果一些分量, 例如第一个 $\mathbf{J}_1$ 和 $\mathbf{J}_2$, 从序列的开始移动到最后, 整个序列的琼斯矩阵几乎没有变化, 因为这些是微分矩阵, 与单位矩阵只有无穷小差异

例 14.4 齐次琼斯矩阵的偏振成分

计算齐次琼斯矩阵 $\mathbf{K}$ 的八个偏振分量,

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0.4655 - 0.3041i & -0.4826 - 0.4212i \\ 0.5744 & -0.2834i & 0.4196 + 0.0482i \end{pmatrix} \quad (14.85)$$

$\mathbf{K}$ 的矩阵对数为

$$\ln(\mathbf{K}) = \begin{pmatrix} -0.1975 - 0.2618i & -0.6803 - 0.6813i \\ 0.8905 & -0.3659i & -0.3026 + 0.2618i \end{pmatrix} \quad (14.86)$$

实部与二向衰减有关, 虚部与延迟有关。将 $2\ln(\mathbf{K})$ 表示为泡利系数之和, 并分离实部和虚部, 得到

$$\ln(\mathbf{K}) = -0.25\sigma_0 + (0.105103\sigma_1 + 0.210205\sigma_2 + 0.315308\sigma_3)/2 + i(-0.5236\sigma_1 - 1.0472\sigma_2 - 1.5708\sigma_3)/2 \quad (14.87)$$

虚的泡利系数是三个延迟量系数乘以 -2:

$$(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R) = (0.5236, 1.0472, 1.5708) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (14.88)$$

它们的比值将延迟本征偏振的形式描述为斯托克斯参数。由实泡利系数的两倍得到二向衰减率

$$D = \tanh(2\sqrt{0.105103^2 + 0.210205^2 + 0.315308^2}) = 0.374 \quad (14.89)$$

三个二向衰减分量(表 14.1)为

$$(D_H, D_{45}, D_L) = \frac{1}{10}(1, 2, 3) \quad (14.90)$$

这些把二向衰减本征偏振的形式描述为斯托克斯参数, 产生净二向衰减率为

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2} = \frac{\sqrt{14}}{10} \quad (14.91)$$

这个厄米矩阵, 没有振幅项(-0.05),

$$\mathbf{H} = \exp(0.105103\sigma_1 + 0.210205\sigma_2 + 0.315308\sigma_3) \quad (14.92)$$

其振幅透过率为 1.2173 和 0.8215。第一个实系数 -0.5 与 σ_0 有关,描述的振幅透射率为

$$\rho = e^{-0.25} = 0.7788 \quad (14.93)$$

例 14.5 延迟器矩阵

一个延迟量为 $\delta_1 = \pi/2$ 的 45° 线性延迟器,后面跟着一个延迟量为 $\delta_2 = \pi/3$ 的右旋圆延迟器,考虑两者矩阵乘积得到的酉矩阵。

$$\mathbf{CR}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i & -\sqrt{3}i + 1 \\ -\sqrt{3}i - 1 & \sqrt{3} - i \end{pmatrix} \quad (14.94)$$

取矩阵对数,得到

$$\ln \left[\mathbf{CR}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, 45^\circ\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -i\tau & (1-i\sqrt{3})\tau \\ -2(-1)^{1/3}\tau & i\tau \end{pmatrix}, \quad \tau = \arctan \sqrt{\frac{5}{3}} \quad (14.95)$$

指数泡利系数为

$$\frac{i\tau}{\sqrt{5}} (0, -1, -\sqrt{3}, 1) \quad (14.96)$$

因此,三个延迟分量(表 14.1)是

$$(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L) = \frac{2\tau}{\sqrt{5}} (1, \sqrt{3}, -1) \quad (14.97)$$

注意 45° 延迟器和圆延迟器的组合是如何产生 0° 延迟的。取这些项的矩阵指数,

$$\begin{aligned} & \exp \left[\frac{i}{2} (\delta_H \sigma_1 + \delta_{45} \sigma_2 + \delta_L \sigma_3) \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - i & -\sqrt{3}i + 1 \\ -\sqrt{3}i - 1 & \sqrt{3} - i \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{CR}\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \mathbf{LR}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (14.98)$$

重新得到了原始酉矩阵(式(14.94))。

例 14.6 二向衰减器矩阵

考虑线性二向衰减器的厄米矩阵,它透射 22.5° 线偏振光的 $3/4$ 振幅,透射 112.5° 线偏振光的 $1/4$ 振幅,

$$\mathbf{LD}\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 + \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (14.99)$$

二向衰减率为

$$D = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{4}{5} \quad (14.100)$$

取矩阵对数,得到

$$\ln \left[\mathbf{LD} \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{\pi}{8} \right) \right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}(-8\ln 2 + \sqrt{2}\ln 3 + \ln 9) & \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{4}(-8\ln 2 - \sqrt{2}\ln 3 + \ln 9) \end{pmatrix} \\ \approx \begin{pmatrix} -0.449 & 0.388 \\ 0.388 & -1.225 \end{pmatrix} \quad (14.101)$$

指数泡利系数是

$$\left(\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right), \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}}, \frac{\ln 3}{2\sqrt{2}}, 0 \right) \quad (14.102)$$

第一个系数与 σ_0 有关,描述了振幅透射率

$$\exp \left[\ln \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right) \right] = \frac{\sqrt{3}}{4} \quad (14.103)$$

三个二向衰减分量(表 14.1)是

$$(D_H, D_{45}, D_L) = \left(\frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, 0 \right) \quad (14.104)$$

净二向衰减率为

$$D = \sqrt{D_H^2 + D_{45}^2 + D_L^2} = \frac{4}{5} \quad (14.105)$$

观察到 22.5° 情况下的二向衰减产生相等的 D_H 和 D_{45} 分量。

14.5 椭圆延迟器和延迟器空间

用三个复指数泡利系数(式(14.58))描述延迟器可直接得到延迟器的一种几何图形。延迟器可表示为三维延迟器空间中的点 $(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$, 如图 14.6 所示。

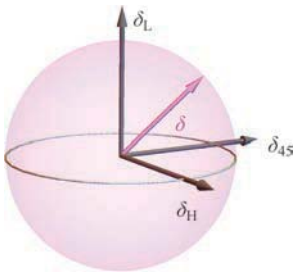


图 14.6 延迟器空间, 它的轴为 $\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$, 延迟器显示为始于原点的粉色箭头。从原点算起的长度为延迟量大小 δ 。范围没有限制, 延迟分量的值可以为任意大小。线性延迟器位于赤道平面上, 也就是图中灰色圆圈所示的平面

$\delta_H - \delta_{45}$ 平面上的点表示线性延迟器, 而沿 δ_L 轴的点表示纯圆延迟器。在此空间中, 所有 $\lambda/4$ 波椭圆延迟器位于半径为 $\pi/2$ 的球面上, 所有半波延迟器位于半径为 π 的球面上, 依此类推。半径为 $2\pi n$ 的球面上的所有琼斯矩阵(其中 n 是一个整数, 延迟器的阶数), 就是单位矩阵乘以相位作为琼斯矩阵, 原点的点也是如此。延迟器空间与庞加莱球相似, 只是绘制了延迟分量, 而不是斯托克斯参数。在延迟器空间中, 延迟量范围没有限制, 延迟分量的值可以为任意大小。延迟器琼斯矩阵对于延迟器阶数 n 、延迟量波数的整数部分或半整数部分无法辨别。可有

一系列延迟器对所有偏振态进行等效转换。例如,延迟量 $\delta=0$ 的延迟器保持所有偏振态不变,延迟量 $\delta=2\pi$ 或 $n2\pi$ 的延迟器也一样;所有偏振态都回归到入射偏振态,它们的琼斯矩阵为单位矩阵。

另一个例子, $\lambda/4$ 延迟器绕快轴顺时针旋转庞加莱球 $\pi/2\text{rad}$ 。具有正交快轴的 $3\lambda/4$ 延迟器逆时针旋转庞加莱球 $3\pi/2\text{rad}$,它与 $\lambda/4$ 延迟器具有相同的琼斯或米勒矩阵。实际上,器件是不同的。相比石英 $\lambda/4$ 延迟器,另一个延迟器也可能是旋转 90° 的、三倍厚度的石英延迟器,但作为黑匣子,两个延迟器进行相同的转换。第三个例子,主轴正交的两个半波延迟器将庞加莱球在相反方向旋转半圈,从而具有相同的琼斯矩阵(表 5.4)。因此,通常情况下,所有具有延迟量 $2\pi(n+\delta)$ 和特定归一化快轴($\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$)的琼斯矩阵,以及所有具有延迟量 $2\pi(m-\delta)$ 和正交归一化快轴($-\delta_H, -\delta_{45}, -\delta_L$)的琼斯矩阵都是相同的琼斯矩阵(m 和 n 是整数)。

图 14.7 显示了延迟器空间中具有不同绝对相位的两组相同的延迟器米勒矩阵。每个球代表延迟量为 $n\pi$ 的延迟器。球半径(延迟量) $2n\pi$ 对应于具有单位米勒矩阵的多波延迟器。所有红点($\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{A}'$)都有相同的延迟器米勒矩阵,等间距 2π 。类似地,绿点($\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{B}'$)显示了延迟器空间中另一组相同的米勒矩阵。

对于每个延迟量为 δ 的米勒矩阵,存在一系列具有相同快轴($\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$)的延迟量为 $2n\pi+\delta$ 的米勒矩阵和具有正交快轴($-\delta_H, -\delta_{45}, -\delta_L$)的延迟量为 $2n\pi-\delta$ 的米勒矩阵。当 $\delta \neq \delta_H$,对应琼斯矩阵 $\mathbf{E}\mathbf{R}(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$ 的本征偏振态 $\mathbf{V}_1$ 和 $\mathbf{V}_2$ 为

$$\mathbf{V}_1 = \frac{1}{\sqrt{2\delta(\delta_H + \delta)}} \begin{pmatrix} \delta_H + \delta \\ \delta_{45} - i\delta_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\delta(\delta_H - \delta)}} \begin{pmatrix} \delta_H - \delta \\ \delta_{45} - i\delta_L \end{pmatrix} \quad (14.106)$$

这是快轴和慢轴。对于特殊情形 $\mathbf{E}\mathbf{D}(\delta_H, 0, 0)$,这在式(14.106)中存在被零除的问题,本征偏振态变为

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14.107)$$

相应的延迟器米勒矩阵的本征偏振态更简单,其斯托克斯参数 $\mathbf{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_2$ 为

$$\mathbf{S}_1 = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \delta \\ \delta_H \\ \delta_{45} \\ \delta_L \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} \delta \\ -\delta_H \\ -\delta_{45} \\ -\delta_L \end{pmatrix} \quad (14.108)$$

式(14.106)和式(14.108)中,1 和 2 代表快模式和慢模式,但仅仅从琼斯矩阵或米勒矩阵来

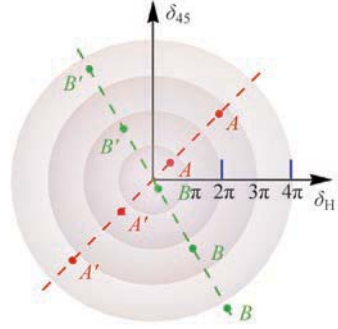


图 14.7 延迟器空间类似庞加莱球空间,它在三维空间中表示延迟器快轴($\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$)。在延迟器空间中显示了两组具有相同延迟量(模 2π)的米勒矩阵($\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$)。每组中的点以 2π 为间隔,并共享相同的快轴和慢轴。 1λ 和 2λ 延迟量球上的延迟器的米勒矩阵为单位矩阵

判断,通常是无法确定哪个快哪个慢的^①。

考虑到三维空间中延迟器的表示,很容易想到延迟器矢量,但 $(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$ 不构成矢量。延迟器序列不服从矢量加法,而是表现为单位四元数(unit quaternions),按照式(14.45)^[15-16]级联。然而,在非常小的延迟量限定下,当 $\delta \ll 1$,弱延迟器序列的延迟量是这些“矢量”之和。这有助于理解透镜和其他弱偏振光学系统中的延迟量积累,如第15章(近轴偏振像差)所述。

14.6 非齐次琼斯矩阵的偏振特性

遗憾的是,齐次琼斯矩阵的简单的矩阵指数和矩阵对数关系并没有扩展到非齐次琼斯矩阵,因为它们的东西部分和厄米部分具有非交换性。考虑两个矩阵 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{H}$ 指数的矩阵乘积,根据它们的矩阵指数展开式的先导项的乘法(式(14.47)),

$$\begin{aligned} & \exp(\mathbf{H}) \cdot \exp(\mathbf{U}) \\ = & \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{U}^n}{n!} \right) \sigma_0 + (\mathbf{H} + \mathbf{U}) + \left(\frac{\mathbf{H}^2}{2!} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{U} + \frac{\mathbf{U}^2}{2!} \right) + \left(\frac{\mathbf{H}^3}{3!} + \frac{\mathbf{H}^2 \cdot \mathbf{U}}{2!} + \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}^2}{2!} + \frac{\mathbf{U}^3}{3!} \right) + \dots \end{aligned} \quad (14.109)$$

上式包含了一些非交换项 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}$ 、 $\frac{\mathbf{H}^2 \cdot \mathbf{U}}{2!}$ 、 $\frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{U}^2}{2!}$ 等。 $\exp(\mathbf{H}) \cdot \exp(\mathbf{U})$ 的形式是李代数发展的一个重要结果,这一结果称为 Baker-Hausdorff-Campbell 公式^[17-18]。Dynkin^[19-20]给出了 Baker-Hausdorff-Campbell 公式的一种方便形式

$$\begin{aligned} \ln(\exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B})) = & (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \frac{1}{2}[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{1}{12}([\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + [\mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]) + \\ & \frac{1}{24}[\mathbf{B}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]] + \dots \end{aligned} \quad (14.110)$$

当 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可交换,则它们的矩阵指数的乘积很简单

$$\exp(\mathbf{A}) \cdot \exp(\mathbf{B}) = \exp(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad (14.111)$$

这是齐次琼斯矩阵(式(14.78))的矩阵指数表达式形式,产生了矩阵对数形式的二向衰减和延迟分量的简单结果。Baker-Hausdorff-Campbell 公式表明,对于非齐次琼斯矩阵的二向衰减和延迟,不能得到这种二向衰减和延迟的简单结果。

例 14.7 齐次矩阵和非齐次矩阵的例子

考虑把式(14.78)应用到两个例子中。首先,考虑一个齐次矩阵的例子,其中 $D_H = D = 1/5$, $\delta_H = \delta = \pi/4$ 。琼斯矩阵 $\mathbf{J}_{\text{Homo}}$ 变为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{Homo}} = & \exp \left[\operatorname{arctanh}(1/5) \frac{(1/5) \sigma_1 / 5}{2(1/5)} - \frac{i\pi \sigma_1 / 4}{2} \right] \approx \exp[(0.98698 - 0.39270i) \sigma_1] \\ = & \begin{pmatrix} 0.782542 - 0.782542i & 0 \\ 0 & 0.638943 + 0.638943i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.112)$$

① 习题 14.19 确定了这些本征偏振态的取向和椭圆率。

本征值 ξ_1 和 ξ_2 位于对角线,对于净延迟量 $\pi/4$,它们的相位为 $-\pi/8$ 和 $\pi/8$ 。二向衰减率为

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} = \frac{(\xi_1)^2 - (\xi_2)^2}{(\xi_1)^2 + (\xi_2)^2} = 0.2 \quad (14.113)$$

是预期的 $1/5$ 。

下一步,把延迟从 0° 旋转到 45° ,构建一个非齐次矩阵的例子。现在,二向衰减仍然是 $D_H = D = 1/5$,但是延迟变成 $\delta_{45} = \delta = \pi/4$ 。琼斯矩阵变为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\text{inh}} &= \exp \left[\operatorname{arctanh}(1/5) \frac{(1/5) \boldsymbol{\sigma}_1/5}{2(1/5)} - \frac{i\pi \boldsymbol{\sigma}_2/4}{2} \right] \approx \exp \left[\begin{pmatrix} 0.101366 & -0.785398i \\ -0.785398i & -0.101366 \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} 0.803161 & -0.708371i \\ -0.708371i & 0.620311 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (14.114)$$

从奇异值分解的奇异值中找到最大和最小振幅透射率为 $\Lambda_1 \approx 1.0956$ 、 $\Lambda_2 \approx 0.912746$ 。 $\mathbf{J}_{\text{inh}}$ 的二向衰减率是

$$D = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max} + T_{\min}} = \frac{(\Lambda_1)^2 - (\Lambda_2)^2}{(\Lambda_1)^2 + (\Lambda_2)^2} = 0.1806 \quad (14.115)$$

这不等于 $1/5$ 。因此可看出,式(14.78)对于非齐次示例无效。二向衰减大小不正确。

对于非齐次琼斯矩阵,由于 Baker-Hausdorff-Campbell 关系式(式(14.114))中的顺序相关项,采取矩阵对数函数不会产生二向衰减和延迟分量。因此,从矩阵对数到二向衰减和延迟分量没有明确的代数路径,但矩阵对数可以用作优化算法的种子。

到二向衰减和延迟分量的另一种途径,即极分解(5.9.3节),确实提供了定义延迟和二向衰减分量的算法,

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{H} = \mathbf{H}' \cdot \mathbf{U} \quad (14.116)$$

琼斯矩阵分为厄米部分和西部分,即 $\mathbf{U}$ 和 $\mathbf{H}$ 或等价的 $\mathbf{H}'$ 和 $\mathbf{U}$ 。可使用矩阵对数对其进行分析,以产生延迟和二向衰减分量,见 14.4.3 节和 14.4.4 节。

14.7 二向衰减空间和非齐次偏振元件

下面将探讨非齐次琼斯矩阵,并研究齐次和非齐次琼斯矩阵的二向衰减分量和延迟分量之间的关系。琼斯矩阵可分为两类:具有正交本征偏振态的齐次琼斯矩阵和具有非正交本征偏振态的非齐次琼斯矩阵,如 5.4.1 节所述^[21-22]。当 $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r = 0$ 时,两个琼斯矢量是正交的。当本征偏振是正交的,相应的琼斯矩阵具有相对简单的性质。图 14.8(a)中的箭头表示庞加莱球表面上的正交本征偏振态,箭头指向相反方向。对于齐次琼斯矩阵,本征偏振也是最大和最小透射率的偏振态。齐次偏振器和齐次延迟器是根据本征偏振的形式命名的。因此,当 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 为线偏振态时, $\mathbf{J}$ 为线性元件:线性二向衰减器、线性延迟器,或线性二向衰减器和延迟器的组合。当 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 是圆偏振态时, $\mathbf{J}$ 为圆元件。类似地,当 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 是椭圆偏振态时, $\mathbf{J}$ 为椭圆元件。

当本征偏振态不是正交的,也就是说,当

$$\hat{\mathbf{E}}_q^\dagger \cdot \hat{\mathbf{E}}_r = (E_{x,q}^* E_{y,q}^*)(E_{x,r} E_{y,r}) = E_{x,q}^* E_{x,r} + E_{y,q}^* E_{y,r} \neq 0 \quad (14.117)$$

那么 $\mathbf{J}$ 是非齐次的。图 14.8(b) 显示了例 14.8 中非齐次琼斯矩阵的本征偏振态以及最大和最小透射率的偏振态。非齐次琼斯矩阵比齐次矩阵具有更复杂的性质,不能简单地划分为线性、圆或椭圆元件。

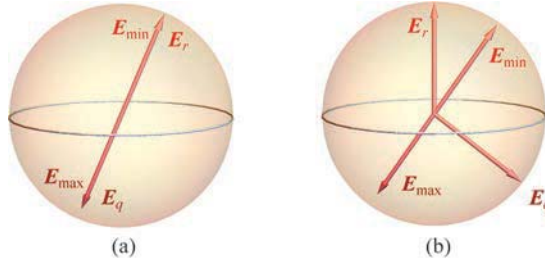


图 14.8 (a) 对于齐次琼斯矩阵,正交本征偏振态 $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 指向庞加莱球面上的相反方向,这些偏振态与最大和最小透射率对应的入射偏振态 $\mathbf{E}_{\max}$ 和 $\mathbf{E}_{\min}$ 相同。(b) 对于非齐次琼斯矩阵, $\mathbf{E}_q$ 和 $\mathbf{E}_r$ 不是正交的,并且不同于最大和最小透射率对应的入射偏振态 $\mathbf{E}_{\max}$ 和 $\mathbf{E}_{\min}$,它们始终是正交的

例 14.8 非齐次矩阵的例子

琼斯矩阵 $\mathbf{J}_1$, 它把 $(1,0)$ 变为 $(1,0)$, 其本征值为 1, 把 $(1,1)/\sqrt{2}$ 变为 $(1,1)/\sqrt{2}$, 其本征值为 $1/3$, 琼斯矩阵 $\mathbf{J}_1$ 为

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (14.118)$$

这些特征矢量不同于最大透射率的偏振态 $\mathbf{E}_{\max} \approx (-0.811, 0.584)$, 最小透射率的偏振态 $\mathbf{E}_{\min} \approx (0.584, 0.811)$, 它们是正交的。

14.7.1 二向衰减空间和延迟空间的叠加

与延迟分量一样,三个二向衰减分量 (D_H, D_{45}, D_L) 也可以绘制在三维空间,即二向衰减空间中,如图 14.9 所示。像庞加莱球一样,二向衰减空间的半径限定为 1。表面代表偏振器,内部代表二向衰减器。中心代表单位矩阵,即一个具有零二向衰减的矩阵。线偏振器位于 $D_H D_{45}$ 平面的外围,如图 14.9 中灰色圆圈所示。圆偏振器位于两极。

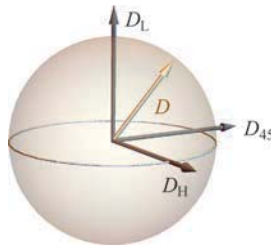


图 14.9 具有 D_H 、 D_{45} 和 D_L 轴的二向衰减空间位于单位球内。二向衰减 D 是从原点到一组二向衰减分量 (D_H, D_{45}, D_L) 的距离。线偏振器位于灰色圆圈上

当二向衰减空间和延迟空间重叠时,如图 14.10 所示,并且绘制了延迟和二向衰减分量,那么对于齐次琼斯矩阵,分量沿同一轴指向相同或相反方向。因此,如果二向衰减分量和延迟分量的叉积为零,则琼斯矩阵是齐次的。

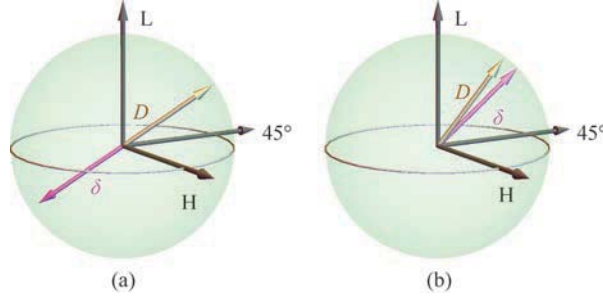


图 14.10 在重叠延迟空间和二向衰减空间后,(a)对于齐次琼斯矩阵,二向衰减分量和延迟分量沿同一轴指向相同或相反方向。(b)对于非齐次矩阵,二向衰减分量和延迟分量不沿同一轴对齐;对于任何常数 k ,

$$(D_H, D_{45}, D_L) \neq k(\delta_H, \delta_{45}, \delta_L)$$

14.8 弱偏振元件

弱偏振元件只会对偏振态造成微小的变化。例如,与通过光学系统的许多光线路径相关联的偏振是弱的。减反膜和小角度反射通常是弱偏振的。在照相机镜头和其他类似的光学镜头中,二向衰减通常很小, $D \ll 1$, 以及延迟 $\delta \ll 1$ 。

考虑矩阵 $\mathbf{M}$ 的矩阵指数方程(式(14.47)),它接近于零,因为二向衰减分量(D_H, D_{45}, D_L)和延迟分量($\delta_H, \delta_{45}, \delta_L$)接近于零。如果 $\mathbf{M}$ 的元素的量级约为 10^{-4} 、则 $\mathbf{M}^2$ 元素的量级约为 10^{-8} (式(14.47)),以此类推,适用于更高阶;因此,高阶项并不重要。无需假设振幅透射率 ρ_0 和相位变化量 $-\phi_0$ 是小参数,可以采用任何值。因此,对于弱偏振元件,琼斯矩阵可以仅用矩阵指数级数展开式(式(14.47))的一阶项来近似,

$$\rho_0 e^{-i\phi_0} \exp(\mathbf{M}) \approx \rho_0 e^{-i\phi_0} (\sigma_0 + \mathbf{M}) \approx \rho_0 e^{-i\phi_0} \begin{pmatrix} 1 + M_{x,x} & M_{x,y} \\ M_{y,x} & 1 + M_{y,y} \end{pmatrix},$$

$$M_{x,x}, M_{x,y}, M_{y,x}, M_{y,y} \approx 0 \quad (14.119)$$

相应的琼斯矩阵接近于单位矩阵乘以一个复常数 $\rho_0 e^{-i\phi_0}$ 。对于弱偏振元件,偏振特性被大大简化,特别是在泡利表示中,可以直接从以下关系式的复泡利和系数确定,修正到一阶,

$$\mathbf{J} \approx \rho_0 e^{-i\phi_0} \left(\sigma_0 + \frac{D_H - i\delta_H}{2} \sigma_1 + \frac{D_{45} - i\delta_{45}}{2} \sigma_2 + \frac{D_L - i\delta_L}{2} \sigma_3 \right) \quad (14.120)$$

14.9 总结和结论

琼斯矩阵元将入射光的 x 和 y 分量与出射光的 x 和 y 分量联系起来。至泡利矩阵和的变换将琼斯矩阵分解为与① x 和 y 方向二向衰减和延迟,② 45° 和 135° 方向二向衰减

和延迟,以及③左旋和右旋二向衰减和延迟相关的分量。利用泡利基,偏振效应的相互作用变得清晰,例如, x 二向衰减和 45° 延迟如何产生圆二向衰减分量,以及当两个元件反转时,圆二向衰减分量如何改变符号。取泡利矩阵的线性组合的指数,直接得到延迟分量的表达式,再进一步操作,得到二向衰减分量。与极分解不同,该泡利矩阵指数提供了与顺序无关的偏振特性分解。因此,对琼斯矩阵取矩阵对数可得到求琼斯矩阵的延迟和二向衰减分量的简单算法。矩阵指数的一阶级数展开项提供了弱偏振元件的方程,这将在第 15 章(近轴偏振像差)中有用。

使用线性、圆二向衰减和延迟元件的目的是了解与偏振矩阵和光学系统相关的延迟和二向衰减类型;特别是,它可以便利工作者之间的沟通,例如光学设计和计量部门之间的沟通,或者公司、光学系统集成商和供应商之间的沟通。没有必要非得使用本章的(D_H 、 D_{45} 、 D_L 、 δ_H 、 δ_{45} 、 δ_L 、 ρ 、 ϕ)基底来解决偏振问题^[23-24]。某些应用可能会更适用其他基底,以便能够简化问题,即便使得二向衰减和延迟,或厄米和酉部分混合而不是分离。这些方法可以追溯到琼斯算法的早期^[25-27]。

本章的主要结果,即通过矩阵指数和矩阵对数(式(14.78)和式(14.80))定义的表 14.1 中的偏振分量,在所有研究人员中并非独一无二的。偏振分量的类似值可通过极分解或奇异值分解获得(5.9.3 节)。

琼斯矩阵偏振分量的计算还应根据大量有关米勒矩阵偏振特性和分量的文献进行考虑,其中由于包含退偏,问题要复杂得多^[28-50]。例如,Aximetrix 米勒矩阵偏振测量仪中的延迟分量是从米勒矩阵的极分解中获得的^[51]。获得的特定延迟值接近指数泡利系数,两种定义的本质是相似的。在极分解的情况下,二向衰减先于延迟,延迟先于米勒矩阵的任何退偏。在这里使用指数泡利系数时,这些性质混合在一起,没有先后之分,它们是持续混合在一起的。这个指数泡利定义类似于 Noble 等用米勒矩阵根去定义米勒矩阵中的自由度^[52-53]。

作者发现许多定义偏振分量的方法都很有价值。泡利指数定义在这里进行了详细的论述,因为它的理论优雅性,它是与顺序无关的规范定义。良好科学交流的一个重要问题是从偏振矩阵导出的参数引用回所使用的定义。可以存在多个定义,它们总是会存在的,但必要时,可以在不同的定义之间转换这些特性。

14.10 习题集

- 14.1 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 的本征值和本征矢量是什么?
- 14.2 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是酉矩阵吗? σ_1 、 σ_2 、 σ_3 是厄米矩阵吗?
- 14.3 计算泡利旋转矩阵的下列函数,用泡利旋转矩阵之和的形式,
 - a. $e^{i\alpha\sigma_2}$
 - b. $\cos(\beta\sigma_1)$
- 14.4 琼斯矩阵 J 可表示为 $\exp(a\sigma_1 + b\sigma_2)$ 的形式,其中 a 和 b 可以是复数, σ_1 、 σ_2 是泡利矩阵。
 - a. 把这个矩阵转变为非指数形式。

- b. 如果 a 和 b 是实数, 这个矩阵代表什么偏振元件?
 c. 如果 a 和 b 是虚数, 这个矩阵代表什么偏振元件?
 d. 偏振元件的方向是什么?
 e. 如果这个元件是齐次的, a 、 b 的实部与 a 、 b 的虚部之间的关系是什么?
 f. 把 $\mathbf{J}$ 展开到泰勒级数的三阶, 证明没有顺序相关项(例如 $\sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3$ 形式的项)。
 14.5 求出以下琼斯矩阵的复泡利系数(式(14.14))。对于延迟器, 使用延迟器的对称相位形式。

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| a. $\mathbf{LP}(0)$ | b. $\mathbf{LP}(\pi/4)$ |
| c. $\mathbf{LP}(\pi/2)$ | d. $\mathbf{RCP}$ |
| e. $\mathbf{LCP}$ | f. $\mathbf{LR}(\pi, 0)$ |
| g. $\mathbf{LR}(\pi, \pi/4)$ | h. $\mathbf{LR}(\pi, \pi/2)$ |
| i. $\mathbf{LR}(\pi, \pi/8)$ | j. $\mathbf{CR}(\pi)$ |
| k. $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/4)$ | l. $\mathbf{LR}(\pi/2, \pi/2)$ |
| m. $\mathbf{LR}(\pi/3, \pi/2)$ | |

- 14.6 对习题 14.5 中的每个琼斯矩阵进行酉变换 $\mathbf{R}(\pi/2) \cdot \mathbf{J} \cdot \mathbf{R}(\pi/2)$ 。对于延迟器, 使用延迟器的对称相位形式。然后, 求出复泡利系数。
 14.7 证明笛卡儿形式的复二元矢量 $\mathbf{E}_q = (E_{x,q} - iF_{x,q}, E_{y,q} - iF_{y,q})$ 和 $\mathbf{E}_r = (E_{x,r} + iF_{x,r}, E_{y,r} + iF_{y,r})$ 的伴随和复共轭的关系式 $\mathbf{E}_q^\dagger \cdot \mathbf{E}_r = (\mathbf{E}_r^\dagger \cdot \mathbf{E}_q)^*$ 。对于极坐标形式的矢量 $\mathbf{E}_q = (\rho_{x,q} e^{-i\phi_{x,q}}, \rho_{y,q} e^{-i\phi_{y,q}})$ 和 $\mathbf{E}_r = (\rho_{x,r} e^{-i\phi_{x,r}}, \rho_{y,r} e^{-i\phi_{y,r}})$, 证明上述关系式。
 14.8 验证泡利矩阵的旋转式:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_0 \cdot \mathbf{R}(-\theta) &= \sigma_0, \\ \mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_1 \cdot \mathbf{R}(-\theta) &= \sigma_1 \cos 2\theta + \sigma_2 \sin 2\theta, \\ \mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_2 \cdot \mathbf{R}(-\theta) &= -\sigma_1 \sin 2\theta + \sigma_2 \cos 2\theta, \\ \mathbf{R}(\theta) \cdot \sigma_3 \cdot \mathbf{R}(-\theta) &= \sigma_3.\end{aligned}$$

- 14.9 通过矩阵乘法证明, 对于矩阵乘法的两个顺序: $\mathbf{J}\mathbf{J}^{-1}$ 和 $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{J}$, $\mathbf{J} = c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3$ 的矩阵逆是 $\mathbf{J}^{-1} = \frac{c_0 \sigma_0 - c_1 \sigma_1 - c_2 \sigma_2 - c_3 \sigma_3}{c_0^2 - c_1^2 - c_2^2 - c_3^2}$ 。
 14.10 考虑二向衰减器琼斯矩阵 $\mathbf{J}_{d1}$ 和延迟器琼斯矩阵 $\mathbf{J}_{r1}$, 其中二向衰减器的每个泡利系数都正比于对应的 $\mathbf{J}_{r1}$ 泡利系数。

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{d1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_{r1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.1i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + 0.2i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 0.3i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- a. $\mathbf{J}_{d1}$ 和 $\mathbf{J}_{r1}$ 是不是齐次的?
 b. 证明 $\mathbf{J}_{d1}$ 和 $\mathbf{J}_{r1}$ 有相同的特征矢量。
 c. 证明 $\mathbf{J}_{d1}$ 和 $\mathbf{J}_{r1}$ 可交换, 即 $[\mathbf{J}_{d1}, \mathbf{J}_{r1}] = \mathbf{J}_{d1} \cdot \mathbf{J}_{r1} - \mathbf{J}_{r1} \cdot \mathbf{J}_{d1} = 0$
 d. 令

$$\mathbf{J}_{d2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 0.2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - 0.4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 0.6 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

证明 $[\mathbf{J}_{d1}, \mathbf{J}_{d2}] = 0, [\mathbf{J}_{r1}, \mathbf{J}_{d2}] = 0$ 。

e. 解释为什么这些矩阵都是可交换的。

14.11 一系列水平线性延迟器后跟着一个 45° 线性延迟器, 产生一个圆延迟分量。

a. 计算下面的矩阵乘积。然后, 从乘积中确定圆延迟量的大小,

$$\mathbf{LR}(\delta_{45}, \pi/4) \cdot \mathbf{LR}(\delta_H, 0) = \left(\cos \frac{\delta_{45}}{2} \sigma_0 - i \sin \frac{\delta_{45}}{2} \sigma_2 \right) \left(\cos \frac{\delta_H}{2} \sigma_0 - i \sin \frac{\delta_H}{2} \sigma_1 \right)$$

b. 当 $\delta_H = \delta_{45}$ 且 $0 \leq \delta_H \leq 2\pi$ 时, 画出圆延迟量大小与 δ_H 的函数关系图。

c. 当 $\delta_H = \delta_{45} = \pi$, 延迟本征态是什么? 它们在庞加莱球上位于什么位置? 总延迟量是多少?

d. 当 $\delta_H = \delta_{45} = \pi/2$, 延迟本征态是什么? 它们在庞加莱球上位于什么位置? 总延迟是多少?

14.12 根据式(14.58), 针对椭圆延迟器证明下面的关系式:

$$\sin\left(\frac{\delta_H \sigma_1 + \delta_{45} \sigma_2 + \delta_L \sigma_3}{2}\right) = \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \frac{\delta_H \sigma_1 + \delta_{45} \sigma_2 + \delta_R \sigma_3}{\delta}$$

14.13 求出下列弱二向衰减器和延迟器的琼斯矩阵, 并表示为泡利矩阵之和:

a. $\mathbf{J}_1$, 一个线性延迟器, 延迟量为 $\delta_1 = 0.02\text{rad}$, 快轴为 $\theta_1 = 0$ 。

b. $\mathbf{J}_2$, 一个线性延迟器, 延迟量为 $\delta_2 = 0.04\text{rad}$, 快轴为 $\theta_2 = 45^\circ$ 。

c. $\mathbf{J}_3$, 一个圆二向衰减器, 振幅透过率为 $t_R = 1.01, t_L = 0.99$ 。

14.14 求解交换算子 $[\mathbf{C}, \mathbf{D}]$, 其中 $\mathbf{C} = c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3, \mathbf{D} = d_0 \sigma_0 + d_1 \sigma_1 + d_2 \sigma_2 + d_3 \sigma_3$, 将结果表示为泡利矩阵和的形式, $e_0 \sigma_0 + e_1 \sigma_1 + e_2 \sigma_2 + e_3 \sigma_3$ 。

14.15 利用式(14.47), 把 $\exp[i(\delta_H \sigma_1 + \delta_{45} \sigma_2 + \delta_L \sigma_3)/2]$ 展开为它的前四阶。收集奇数阶和偶数阶, 并证明它是 $\sigma_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \left(\frac{\delta_H \sigma_1 + \delta_{45} \sigma_2 + \delta_L \sigma_3}{\delta}\right)$ 级数的开头。

14.16 对于 $\mathbf{J} = c_0 \sigma_0 + c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3$, 证明

$$e^{\mathbf{J}} = \begin{pmatrix} e^{c_0} \left(\cosh \Psi + \frac{c_1 \sinh \Psi}{\Psi} \right) & \frac{e^{c_0} (c_2 - i c_3) \sinh \Psi}{\Psi} \\ \frac{e^{c_0} (c_2 + i c_3) \sinh \Psi}{\Psi} & e^{c_0} \left(\cosh \Psi - \frac{c_1 \sinh \Psi}{\Psi} \right) \end{pmatrix}$$

其中 $\Psi = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ 。

14.17 根据习题 14.15, 证明恒等式 $\det(e^{\mathbf{A}}) = e^{\text{Tr}(\mathbf{A})}$ 。

14.18 二向色性偏振片的琼斯矩阵为 $\mathbf{DSP} = \frac{1}{2500} \begin{pmatrix} 421 & 420 \\ 420 & 421 \end{pmatrix}$

a. 二向衰减是多少? 透光轴的方向是什么?

b. 若该偏振片可被准确切割为相等的两片, 每片的琼斯矩阵是什么?

14.19 求出作为 $(\delta_H, \delta_{45}, \delta_R)$ 函数的式(14.106)中本征偏振态的椭圆率。求本征偏振态主轴方向。

14.20 复泡利系数 c_0, c_1, c_2 和 c_3 的约束条件是什么,使得 $\mathbf{J}$ 具有正交本征矢量?

14.21 证明式(14.65)中作为二向衰减率函数的参数 α 为

$$\alpha \approx \frac{D}{2} + \frac{D^3}{6} + O[D^5] \quad (14.121)$$

14.22 一个水平线性二向衰减器,其振幅透射率为 1 和 t_y ,作用到线偏振光 $\mathbf{B}(\theta)$ 上。偏振面旋转多少角度?

14.23 如果一个齐次琼斯矩阵的本征偏振态为

$$\hat{\mathbf{E}}_q = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} \quad (14.122)$$

α 和 β 之间的关系是什么?

14.24 $\mathbf{J} = (i\sigma_0 + i\sigma_2)$ 有一个虚的 σ_2 分量。 $\mathbf{J}$ 是二向衰减器还是延迟器? 计算本征值,来证明这个分类。解释为什么式(14.38)中析出了因数 c_0 。

14.25 对于所有九对 α 和 β ,也就是 $(\alpha, \beta) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), \dots, (3, 3)$,证明 $\sigma_\alpha \sigma_\beta = \delta_{\alpha\beta} \sigma_0 + i\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma$ 成立。克罗内克(Kroniker) δ 符号 $\delta_{\alpha\beta}$ 定义为

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \alpha \neq \beta \\ 1, & \text{如果 } \alpha = \beta \end{cases} \quad (14.123)$$

Levi-Civita 符号 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 定义为 $(1, 2, 3)$ 的奇偶置换,如下所示:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} 1, & \text{如果 } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), \text{或 } (3, 1, 2) \\ -1, & \text{如果 } (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 2), (2, 1, 3), \text{或 } (3, 2, 1) \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14.124)$$

14.11 参考文献

- [1] R. Clark Jones, A new calculus for the treatment of optical systems, JOSA 31.7(1941): 488-493.
- [2] W. Pauli, General Principles of Quantum Mechanics, Springer Science & Business Media (2012).
- [3] P. A. M. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, No. 27, Oxford University Press (1981).
- [4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe, Quantum Mechanics, 2nd edition, Wiley (1992).
- [5] J. R. Oppenheimer, Note on light quanta and the electromagnetic field, Phys. Rev. 38.4 (1931): 725.
- [6] R. M. A. Azzam and N. M. Bashara, Ellipsometry and Polarized Light, North-Holland, Elsevier Science (1987).
- [7] C. Moler and C. Van Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, SIAM Rev. 20.4 (1978): 801-836.
- [8] C. Moler and C. Van Loan, Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later, SIAM Rev. 45.1 (2003): 3-49.
- [9] N. J. Higham, The scaling and squaring method for the matrix exponential revisited, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 26.4 (2005): 1179-1193.
- [10] N. J. Higham, Functions of Matrices: Theory and Computation, Siam (2008).
- [11] N. J. Higham and A. H. Al-Mohy, Computing matrix functions, Acta Numerica 19 (2010): 159-208.
- [12] N. J. Higham, Evaluating Padé approximants of the matrix logarithm, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22.4 (2001): 1126-1135.
- [13] S. H. Cheng, N. J. Higham, C. S. Kenney, and A. J. Laub, Approximating the logarithm of a matrix to specified accuracy, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 22(4) (2001): 1112-1125.

- [14] A. H. Al-Mohy and N. J. Higham, Improved inverse scaling and squaring algorithms for the matrix logarithm, *SIAM J. Sci. Comput.* 34, 4 (2012): C153-C169.
- [15] M. Martinelli and R. A. Chipman, Endless polarization control algorithm using adjustable linear retarders with fixed axes, *J. Lightwave Technol.* 21, 9 (2003): 2089.
- [16] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences*, Vol. 66, Princeton: Princeton University Press (1999).
- [17] H. Poincaré, *Compt. Rend. Acad. Sci. Paris* 128 (1899): 1065-1069; *Camb. Philos. Trans.* 18 (1899): 220-255.
- [18] H. Baker, *Proc. Lond. Math. Soc.* (1) 34 (1902): 347-360; H. Baker, *Proc. Lond. Math. Soc.* (1) 35 (1903): 333-374; H. Baker, *Proc. Lond. Math. Soc.* (Ser 2) 3 (1905): 24-47.
- [19] E. Borisovich Dynkin, Вычисление коэффициентов в формуле Campbell-Hausdorff [Calculation of the coefficients in the Campbell-Hausdorff formula], *Doklady Akademii Nauk SSSR* (in Russian) 57 (1947): 323-326.
- [20] N. Jacobson, *Lie Algebras*, John Wiley & Sons (1966).
- [21] J. J. Gil and E. Bernabeu, Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix, *Optik* 76 (1987): 67.
- [22] S.-Y. Lu and R. A. Chipman, Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices, *JOSA A* 11, 2 (1994): 766-773.
- [23] O. Arteaga and A. Canillas, Pseudopolar decomposition of the Jones and Mueller-Jones exponential polarization matrices, *JOSA A* 26, 4 (2009): 783-793.
- [24] O. Arteaga and A. Canillas, Analytic inversion of the Mueller-Jones polarization matrices for homogeneous media, *Opt. Lett.* 35, 4 (2010): 559-561.
- [25] R. Clark Jones, A new calculus for the treatment of optical systems. VII. Properties of the N-matrices, *JOSA* 38, 8 (1948): 671-683.
- [26] R. Clark Jones, New calculus for the treatment of optical systems. VIII. Electromagnetic theory, *JOSA* 46, 2 (1956): 126-131.
- [27] D. G. M. Anderson and R. Barakat, Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix, *JOSA A* 11, 8 (1994): 2305-2319.
- [28] S. R. Cloude, Group theory and polarisation algebra, *Optik* 75, 1 (1986): 26-36.
- [29] J. J. Gil and E. Bernabeu, Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its Mueller matrix, *Optik* 76 (1987): 67.
- [30] S. R. Cloude, Uniqueness of target decomposition theorems in radar polarimetry, in *Direct and Inverse Methods in Radar Polarimetry*, Springer Netherlands (1992), pp. 267-296.
- [31] S.-Y. Lu and R. A. Chipman, Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition, *JOSA A* 13, 5 (1996): 1106-1113.
- [32] S. R. Cloude, Lie groups in electromagnetic wave propagation and scattering, *J. Electromag. Waves Appl.* 6, 7 (1992): 947-974.
- [33] R. Ossikovski, A. De Martino, and S. Guyot, Forward and reverse product decompositions of depolarizing Mueller matrices, *Opt. Lett.* 32, 6 (2007): 689-691.
- [34] J. J. Gil, Polarimetric characterization of light and media, *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* 40, 01 (2007): 1-47.
- [35] R. Ossikovski et al., Depolarizing Mueller matrices: How to decompose them? *Phys. Stat. Solidi A* 205, 4 (2008): 720-727.
- [36] R. Ossikovski, Analysis of depolarizing Mueller matrices through a symmetric decomposition, *JOSA A* 26, 5 (2009): 1109-1118.

- [37] S. N. Savenkov, Jones and Mueller matrices: Structure, symmetry relations and information content, in *Light Scattering Reviews* 4 (2009), pp. 71-119.
- [38] S. Cloude, *Polarisation: Applications in Remote Sensing*, Oxford University Press (2009).
- [39] F. Boulvert et al., Decomposition algorithm of an experimental Mueller matrix, *Opt. Commun.* 282. 5 (2009): 692-704.
- [40] B. N. Simon et al., A complete characterization of pre-Mueller and Mueller matrices in polarization optics, *JOSA A* 27. 2 (2010): 188-199.
- [41] N. Ghosh, M. F. G. Wood, and I. A. Vitkin, Influence of the order of the constituent basis matrices on the Mueller matrix decomposition-derived polarization parameters in complex turbid media such as biological tissues, *Opt. Commun.* 283. 6 (2010): 1200-1208.
- [42] V. Devlaminck and P. Terrier, Non-singular Mueller matrices characterizing passive systems, *Optik* 121. 21 (2010): 1994-1997.
- [43] R. Ossikovski, Differential matrix formalism for depolarizing anisotropic media, *Opt. Lett.* 36. 12 (2011): 2330-2332.
- [44] O. Arteaga, E. Garcia-Caurel, and R. Ossikovski, Anisotropy coefficients of a Mueller matrix, *JOSA A* 28. 4 (2011): 548-553.
- [45] T. A. Germer, Realizable differential matrices for depolarizing media, *Opt. Lett.* 37. 5 (2012): 921-923.
- [46] R. Ossikovski, Differential and product Mueller matrix decompositions: A formal comparison, *Opt. Lett.* 37. 2 (2012): 220-222.
- [47] J. J. Gil, I. San José, and R. Ossikovski, Serial-parallel decompositions of Mueller matrices, *JOSA A* 30. 1 (2013): 32-50.
- [48] J. J. Gil, Transmittance constraints in serial decompositions of depolarizing Mueller matrices: The arrow form of a Mueller matrix, *JOSA A* 30. 4 (2013): 701-707.
- [49] S. R. Cloude, Depolarization synthesis: Understanding the optics of Mueller matrix depolarization, *JOSA A* 30. 4 (2013): 691-700.
- [50] J. J. Gil, Review on Mueller matrix algebra for the analysis of polarimetric measurements, *J. Appl. Remote Sens.* 8. 1 (2014): 081599.
- [51] S.-Y. Lu and R. A. Chipman, Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition, *JOSA A* 13. 5 (1996): 1106-1113.
- [52] H. D. Noble and R. A. Chipman, Mueller matrix roots algorithm and computational considerations, *Opt. Express* 20. 1 (2012): 17-31.
- [53] H. D. Noble, *Mueller Matrix Roots*, dissertation, University of Arizona (2011).

第 15 章

近轴偏振像差

15.1 引言

本章介绍光学系统偏振像差的描述方法,将重点介绍径向对称光学系统,如照相机镜头、显微物镜和望远镜。

像差是相对理想和期望性能的偏离。在传统光学设计中,球面波前是理想的。具有圆形轮廓的均匀球面波前聚焦于艾里斑;波前与球面的任何偏差,即任何像差,都会增加像的大小,从而降低图像的分辨率和信息含量。为更好地理解 and 表达像差信息,把波前像差项定义为一组基本函数,可添加这些函数,从而给出目标波前的准确拟合,如 10.7 节所述。

类似地,偏振像差是相对均匀振幅和均匀偏振态的偏差。为传输任意输入的具有均匀偏振态的波前,光线路径需要没有二向衰减和延迟。因此,偏振像差可以描述为所有光线相对单位琼斯矩阵的偏差。

本章给出了分析弱偏振光学元件(如透镜和反射镜)偏振的算法,并研究这些偏振如何相互作用。对于极弱偏振元件,泡利矩阵元素可以相加,从而获得极大的简化和洞悉。对于近轴光学系统,会出现三种偏振像差,即离焦(二次)、倾斜(线性)和平移(常数)的二向衰减或延迟等效像差,如图 15.1 所示。对于透镜和反射镜界面,正入射附近二向衰减和延迟随入射角的变化主要是二次的。因此,在用二向衰减和延迟的二次变化描述每个界面之后,径向对称系统的偏振离焦、倾斜和平移系数容易通过近轴算法来计算。

在几何光学中,近轴区域包括赛德尔像差、球差、彗差和像散不显著(可能不到十分之一

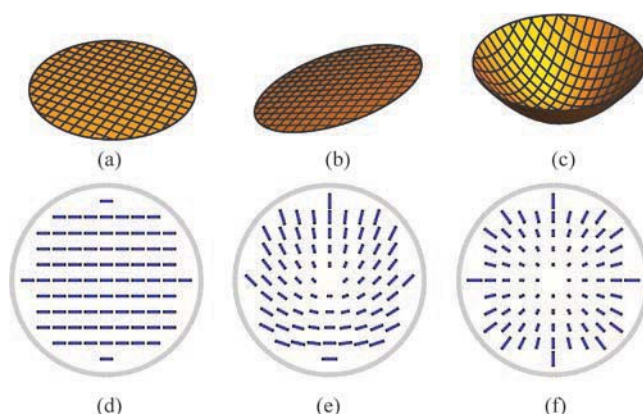


图 15.1 平移((a),(d))倾斜((b),(e))和离焦((c),(f))的波前像差((a)~(c))和偏振像差((d)~(f))

波长)的那些光线。对于近轴偏振像差,近轴区域包含靠近轴的一组光线,其中振幅系数的二阶拟合是精确的;关于菲涅耳公式二阶拟合精度范围的讨论见第 8 章。偏振近轴区域比光线和波前的近轴区域大得多。因此,这里开发的近轴偏振算法适用于大量的透镜和反射镜系统。近轴光学计算大大简化了光线追迹方程。偏振计算的进一步简化是,可以将光线视为沿 z 轴传播,忽略电场的 z 分量。因此,近轴分析将使用琼斯矩阵,而不是 3×3 偏振光线追迹矩阵。

近轴偏振像差的发展遵循这些步骤。近轴光线追迹方程的概要见本章附录。近轴光线追迹用于计算每个界面处波前上各点的入射角。振幅系数,例如无镀膜界面的菲涅耳公式,拟合为二次方程。近轴入射角与这些二次振幅关系结合起来得到偏振像差的各面贡献,三个为线性二向衰减,三个为线性延迟。这些面贡献可以各界面求和,从而获得光学系统的近轴偏振像差。后面将举几个例子用来说明近轴偏振像差的实用性。最后,将泽尼克多项式推广用于讨论高阶偏振像差。

一个有趣的结果是偏振像差的双节形式,这种形式是离轴的延迟和二向衰减像差的大小在光瞳中有两个零点;倾斜或偏心系统中像散也会产生类似的结果,这种像散称为双节像散^[1]。

正如像差理论中常见的那样,当使用线性和二次等术语时,实际上表示近似线性和近似二次函数关系。

15.2 偏振像差

光学系统的像差是其与理想性能的偏差。在理想球面波或平面波照明的成像系统中,期望的输出是以正确像点为中心的具有恒定振幅和恒定偏振态的球面波前。由于光学表面的几何形状以及反射和折射定律,光线通过光学系统的光程长度发生变化,从而导致偏离球面波前,这种偏差是由波像差函数描述的。与恒定振幅的偏差源于光线之间反射或折射效率的差异。振幅变化是振幅像差或切趾。由于光的 s 分量和 p 分量之间反射系数和透射系数的差异,每个反射和折射面也会发生偏振变化。对于一组光线,入射角和偏振改变是变化的,因此均匀偏振的输入光束在出射时会发生偏振变化^[2-3]。对于许多光学系统,期望的偏

振输出是恒定偏振态,透过系统时没有偏振变化,这种通过光学系统的光线路径可以用单位琼斯矩阵来描述。与该单位矩阵的偏差称为偏振像差。

偏振像差,也称为仪器偏振,是指光学系统的所有偏振变化以及随光瞳坐标 ρ 、物的位置 $\mathbf{H}$ 和波长 λ 的变化 $\mathbf{J}(\mathbf{H}, \rho, \lambda)$ 。术语菲涅耳像差(第 12 章)是指严格根据菲涅耳公式产生的偏振像差,即金属膜反射镜和未镀膜透镜系统^[2-5]。多层镀膜表面产生的偏振像差具有与未镀膜表面相似的函数形式,其偏振像差的幅值有大有小,取决于膜层和波长。对于具有均匀和各向同性界面的系统,偏振像差主要与线性二向衰减和延迟有关,它们的大小用入射角的偶函数来描述。

由于琼斯矩阵有八个自由度,因此偏离琼斯光瞳单位矩阵的变化(对于每个元素的实部和虚部,或是振幅和相位)可扩展为一组八个泽尼克多项式,用这些扩展多项式来描述。在反射和折射光学系统中,由偏振像差引起的与单位矩阵琼斯光瞳的偏差主要表现为线性二向衰减和线性延迟。线性延迟和线性二向衰减不是矢量,将延迟像差扩展为矢量泽尼克多项式是不合适的。为此,引入了一个新的数学对象“定向器”(orientor),它为线性延迟像差提供了更好的描述。类似地,定向器为线性二向衰减像差的扩展提供了有用的基础。15.5.2 节给出了关于定向器的进一步解释。

透镜和反射镜表面通常是弱偏振元件。如 14.8 节所述,弱偏振元件具有少量的二向衰减和延迟,因此二向衰减率 D 和延迟量 δ 远小于 1,

$$|D| \ll 1 \quad \text{和} \quad |\delta| \ll 1 \quad (15.1)$$

弱偏振元件的琼斯矩阵可很方便地做如下表示。首先,琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 表示为泡利矩阵之和,如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} j_{xx} & j_{xy} \\ j_{yx} & j_{yy} \end{pmatrix} = c_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_0 + c_1 & c_2 - ic_3 \\ c_2 + ic_3 & c_0 - c_1 \end{pmatrix} = c_0 \boldsymbol{\sigma}_0 + c_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + c_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + c_3 \boldsymbol{\sigma}_3 \end{aligned} \quad (15.2)$$

然后,提出单位矩阵 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 的系数 c_0

$$\mathbf{J} = c_0 \left(\boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{c_1 \boldsymbol{\sigma}_1 + c_2 \boldsymbol{\sigma}_2 + c_3 \boldsymbol{\sigma}_3}{c_0} \right) \quad (15.3)$$

c_0 表示光的振幅和相位的平均变化,这在极坐标中很容易识别,

$$c_0 = \rho_0 e^{-i\phi_0} \quad (15.4)$$

接下来,将其余系数分离为实部和虚部

$$\mathbf{J} \approx \rho_0 e^{-i\phi_0} \left(\boldsymbol{\sigma}_0 + \frac{D_H - i\delta_H}{2} \boldsymbol{\sigma}_1 + \frac{D_{45} - i\delta_{45}}{2} \boldsymbol{\sigma}_2 + \frac{D_L - i\delta_L}{2} \boldsymbol{\sigma}_3 \right) \quad (15.5)$$

加上了 $1/2$ 因子, D 和 δ 现在的单位是二向衰减和延迟的单位。该方程是弱偏振元件琼斯矩阵的标准形式,如第 14 章所述。选取减号是为了与整个过程中使用的递减相位符号约定保持一致。式(15.5)显示了二向衰减器和延迟器琼斯矩阵的一般指数形式的一级级数展开式,用三个二向衰减分量和三个延迟分量表示,见式(14.78)。

式(15.5)是标准形式,是光线截点琼斯矩阵的首选和最有用的形式,它给出了三个二向衰减和三个延迟分量的简单表达式。琼斯矩阵这种形式的实用性在于,当二向衰减和延迟

分量很小时,它们可以简单地相加,因为阶数相关项非常小。对于光线截点,界面琼斯矩阵也是线性的,不是椭圆的或圆的二向衰减或延迟, D_L 和 δ_L 通常为零。

15.2.1 弱偏振琼斯矩阵的相互作用

序列偏振相互作用的琼斯矩阵是各个相互作用琼斯矩阵的矩阵积。对于弱偏振相互作用,合成的琼斯矩阵可以简化为单个相互作用的泡利系数之和。这里研究了两个弱偏振相互作用组成的序列的琼斯矩阵,它们可以是弱偏振光学系统中的两个光线截点,以观察偏振特性如何相互作用。由此得到了弱偏振元件序列的简单方程。由于大多数反射和折射界面是线性二向衰减器和线性延迟器,而不是圆的或椭圆的,我们从两个线性界面的琼斯矩阵的例子开始。

考虑光线进入和射出带有减反膜的透镜(13.2.1 节)。减反膜是弱偏振的,具有线性本征偏振,因此,二向衰减 D 和延迟 δ 很小,

$$D_{H,1}, D_{45,1}, D_{H,2}, D_{45,2} \ll 1 \quad \delta_{H,1}, \delta_{45,1}, \delta_{H,2}, \delta_{45,2} \ll 1 \quad (15.6)$$

第二个下标表示第一个或第二个光线截点,其中没有 σ_3 分量。H 和 45 分量取决于光线截点的入射面。两个光线截点的标准形式的琼斯矩阵是

$$\mathbf{J}_1 \approx \rho_{0,1} e^{-i\phi_{0,1}} \left(\sigma_0 + \frac{D_{H,1} - i\delta_{H,1}}{2} \sigma_1 + \frac{D_{45,1} - i\delta_{45,1}}{2} \sigma_2 \right) \quad (15.7)$$

$$\mathbf{J}_2 \approx \rho_{0,2} e^{-i\phi_{0,2}} \left(\sigma_0 + \frac{D_{H,2} - i\delta_{H,2}}{2} \sigma_1 + \frac{D_{45,2} - i\delta_{45,2}}{2} \sigma_2 \right) \quad (15.8)$$

使用 14.2.1 节中泡利矩阵恒等式, $\sigma_0 \sigma_0 = \sigma_0$, $\sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_0 = \sigma_1$, $\sigma_0 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_0 = \sigma_2$, 以及

$$\sigma_1 \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = -\sigma_2 \sigma_1 = i\sigma_3 \quad (15.9)$$

乘积 $\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1$ 为

$$\rho_{0,1} \rho_{0,2} e^{-i(\phi_{0,1} + \phi_{0,2})} \left[\begin{aligned} & \left(\sigma_0 + \frac{(D_{H,1} + D_{H,2}) - i(\delta_{H,1} + \delta_{H,2})}{2} \sigma_1 + \right. \\ & \left. \frac{(D_{45,1} + D_{45,2}) - i(\delta_{45,1} + \delta_{45,2})}{2} \sigma_2 + \frac{\chi - iX}{2} \sigma_3 \right) \end{aligned} \right] \quad (15.10)$$

式中 χ 和 X 是 D 和 δ 中的高阶项。对于一阶项,矩阵乘积 $\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1$ 的线性二向衰减是各个二向衰减分量之和: $D_{H,1} + D_{H,2}$ 和 $D_{45,1} + D_{45,2}$ 。同样, $\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1$ 的线性延迟是各线性延迟分量之和: $\delta_{H,1} + \delta_{H,2}$ 和 $\delta_{45,1} + \delta_{45,2}$ 。这是弱偏振元件的主要简化结果。

$\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1$ 的 σ_3 (圆)分量来自以下乘积项:

$$\frac{D_{H,2} - i\delta_{H,2}}{2} \sigma_1 \frac{D_{45,1} - i\delta_{45,1}}{2} \sigma_2 + \frac{D_{45,2} - i\delta_{45,2}}{2} \sigma_2 \frac{D_{H,1} - i\delta_{H,1}}{2} \sigma_1 = \frac{\chi + iX}{2} \sigma_3 \quad (15.11)$$

这是其中一个光线截点的 σ_1 分量和另一个光线截点的 σ_2 分量的相互作用。 σ_3 分量的实部是一个圆二向衰减项

$$\chi = (D_{H,2} \delta_{45,1} + D_{45,1} \delta_{H,2} - D_{45,2} \delta_{H,1} - D_{H,1} \delta_{45,2})/2 \quad (15.12)$$

这是由一个表面的二向衰减与另一个表面的延迟相互作用产生的。 σ_3 分量的虚部是一个圆延迟项

$$X = (D_{H,2}D_{45,1} - D_{45,2}D_{H,1} - \delta_{H,2}\delta_{45,1} + \delta_{45,2}\delta_{H,1})/2 \quad (15.13)$$

很明显,相隔 45° 的线性延迟组合会产生圆延迟分量(椭圆延迟),如上面后两项所示。不太明显的是前两项,其中两个二向衰减的相互作用也产生椭圆延迟,因为它们在庞加莱球上产生一个整体旋转,参见示例 14.3。 χ 和 X 都涉及两个小的 D 和 δ 系数的乘积,因此是二阶项。因此,如果光线截点的二向衰减和延迟很小,例如,为 10^{-3} 量级,那么这些圆偏项为 10^{-6} 量级,可以忽略不计。另请注意,当顺序颠倒时,乘积 $J_1 J_2$ 为

$$\rho_{0,1}\rho_{0,2}e^{-i(\phi_{0,1}+\phi_{0,2})}\left[\sigma_0 + \frac{(D_{H,1}+D_{H,2})-i(\delta_{H,1}+\delta_{H,2})}{2}\sigma_1 + \frac{(D_{45,1}+D_{45,2})-i(\delta_{45,1}+\delta_{45,2})}{2}\sigma_2 - \frac{\chi-iX}{2}\sigma_3\right] \quad (15.14)$$

除圆偏项 χ 和 X 改变了符号以外,上式其余部分与 $J_2 J_1$ 相同。这是一个重要的结果。对于一阶,弱偏振琼斯矩阵的乘积与顺序无关,仅需将二向衰减和延迟贡献相加即可。

在弱偏振光学系统中,圆偏项很有趣,但很小,因此通常不重要。然而,随着相互作用强度的增加,这些圆偏项会变得更加重要。

例 15.1 光线中的弱偏振像差

一条子午光线传播通过有两个面的一个未镀膜透镜,传播面是 x 和 y 之间的 45° 平面。在第一个光线截点,光线的振幅变化 $\rho_{0,1}=0.79889$,二向衰减 $D_{H,1}=-0.00020$ 和 $D_{45,1}=0.00020$ 。在第二个光线截点处,光线的振幅变化 $\rho_{0,2}=1.21583$,二向衰减 $D_{H,2}=-0.00186$ 和 $D_{45,2}=0.00186$ 。总合的琼斯矩阵是

$$1.21583(\sigma_0 - 0.00186\sigma_1 + 0.00186\sigma_2) \times 0.79889(\sigma_0 - 0.00020\sigma_1 + 0.00020\sigma_2) \\ = 0.97131(\sigma_0 - 0.00206\sigma_1 + 0.00206\sigma_2) \quad (15.15)$$

注意,两个面上的二向衰减是对齐的;因此,圆偏交叉项为零。

15.2.2 弱偏振光线截点序列的偏振

15.2.1 节展示了两个弱线性偏振界面的线性二向衰减和延迟(一阶)如何相加。接下来,将该结果推广到任意数量的弱线性偏振界面,例如由未镀膜界面、减反射膜或小入射角的金属反射构成的光学系统。通过以类似向量的方式把复泡利系数相加,给出该求和的几何图。

一条光线通过一个光学系统,遇到了一系列弱偏振光线截点,标记为 $q=1,2,\dots,Q$,每个琼斯矩阵 J_q 都表示为归一化泡利求和形式

$$J_q = c_{0,q}(\sigma_0 + d_{1,q}\sigma_1 + d_{2,q}\sigma_2 + d_{3,q}\sigma_3) \\ = \rho_{0,q}e^{-i\phi_{0,q}}\left(\sigma_0 + \frac{D_{H,q}-i\delta_{H,q}}{2}\sigma_1 + \frac{D_{45,q}-i\delta_{45,q}}{2}\sigma_2 + \frac{D_{L,q}-i\delta_{L,q}}{2}\sigma_3\right) \quad (15.16)$$

虽然我们主要讨论具有线性本征偏振界面的光学系统(σ_3 为零),但出于一般性考虑, σ_3 仍然包含在此式子中,它的系数 $D_{L,q}$ 和 $\delta_{L,q}$ 通常为零。弱偏振序列的一阶的琼斯矩阵 J 是

$$J = J_Q \cdot J_{Q-1} \cdots J_2 \cdot J_1$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{q=1}^Q J_{Q-q+1} \\
&\approx c(\sigma_0 + d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 + d_3\sigma_3)
\end{aligned} \quad (15.17)$$

一阶的复泡利系数为

$$c = \prod_{q=1}^Q c_{0,q}, \quad d_1 = \sum_{q=1}^Q d_{1,q}, \quad d_2 = \sum_{q=1}^Q d_{2,q}, \quad d_3 = \sum_{q=1}^Q d_{3,q} \quad (15.18)$$

其中,

$$c = P e^{-iK}, \quad P = \prod_{q=1}^Q \rho_{0,q}, \quad K = \sum_{q=1}^Q \phi_{0,q} \quad (15.19)$$

因此,对于弱偏振光线截点序列,净二向衰减近似为各二向衰减分量之和,即 σ_1 分量之和, σ_2 分量之和,以及(如果存在) σ_3 分量之和。类似地,净延迟近似为各 σ_1 、 σ_2 之和,以及(如果存在) σ_3 延迟分量之和。二向衰减对应于实部,延迟对应于虚部。

式(15.18)得出了求和的向量状几何表示法,不是在 x - y 空间中,而是在 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ 空间中。仅考虑一系列三个光线截点的线性二向衰减贡献,如图 15.2 四个步骤所示。(1)上面一行在 x - y 空间中把三个二向衰减率的大小和方向表示为线段和二向衰减定向器(15.5.2 节)。旋转 180° 后,二向衰减重复。记住,泡利基底 σ_1 、 σ_2 仅相隔 45° 。(2)要将二向衰减线段转换为泡利基底,需将相对 x 轴的角度加倍,并把线段转换为向量,如第二行所示。(3)将“泡利矢量”作为矢量相加,得到黑色的合成矢量。(4)最后,当返回到 x - y 空间时,将角度减半,并将矢量转换回线段。注意,这是弱二向衰减器限制下的近似计算,忽略了 σ_3 分量,该分量将会在页面外出现,为叉积状分量。一个类似的泡利矢量算法将应用于延迟分量的求和。

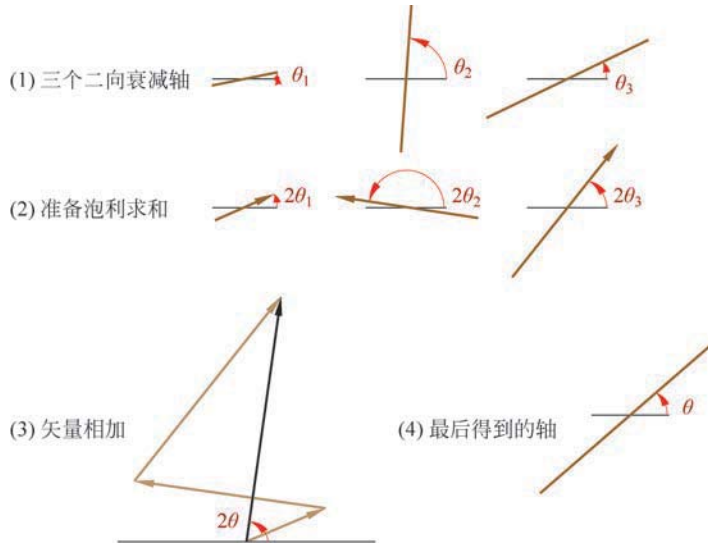


图 15.2 弱二向衰减合成的几何视图。(1)三个二向衰减,其大小由线段长度表示,方向由 θ_1 、 θ_2 和 θ_3 表示。(2)通过角度加倍,转换为泡利系数“矢量”,大小不变。(3)泡利系数的矢量相加。(4)通过矢量相加、角度减半得到的合成线性二向衰减。同样的构建方法也适用于弱延迟器

15.3 近轴偏振像差

本节将采用类似于赛德尔像差形式的偏振像差展开项,对透镜和反射镜系统近轴区域的偏振像差进行描述。对于许多径向对称系统,二向衰减和延迟的偏振像差仅扩展到二阶,就能给出对大部分物体和光瞳的精确偏振描述。这里提出了一种用近轴光线追迹和界面偏振的泰勒级数展开式计算这些系数的方法,该展开式可以是未镀膜界面和金属界面的菲涅耳公式展开式,或薄膜振幅系数的展开式。附录中总结了近轴光线追迹的概要。这种处理包括计算入射角、入射面和斜光线传播矢量,它们是计算偏振像差所需的。这些偏振像差系数也可以通过偏振光线追迹和琼斯光瞳拟合函数来确定,第 27 章(总结和结论)给出了这样的一个例子。

15.3.1 近轴角度和入射面

如图 15.3 所示,光学系统由归一化的物 H 和光瞳坐标,以及 10.7.1 节所述的入瞳 ρ_E 和出瞳 ρ_X 描述。

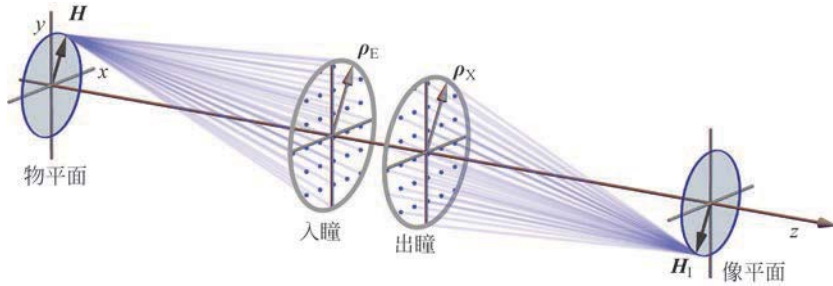


图 15.3 用于近轴偏振展开的归一化坐标

透镜和反射镜表面的偏振像差取决于入射角的变化和光束入射面的取向。图 15.4(a)显示了来自轴上物点并入射到球面上的波前。图 15.4(b)显示了这个轴上物点在光瞳上的入射角。光线在光瞳中心($\rho=0$)的入射角为零。对于轴上物点 $H=0$ 的光线,入射角线性增加到边缘光线入射角 i_m (在光瞳边缘)。入射平面的取向角 Φ 为径向。

$$\theta(H=0, \rho) = |\rho| i_m = \rho i_m, \quad \Phi(H=0, \rho) = \arctan\left(\frac{\rho_x}{\rho_y}\right) \quad (15.20)$$

图 15.5 显示了物点偏离光轴时的波前。由于波前是球形的,并且表面也是球形的,因此形式保持如图 15.4 所示,但移动并以光线垂直入射之处为中心,如图 15.6 所示。

在矢量物点位置 H 和光瞳位置 ρ 的边缘光线和斜光线的入射角 $\theta(H, \rho)$,可使用勾股定理计算得到,因为 $\theta(H, \rho)$ 具有 x 和 y 分量

$$\theta(H, \rho) = \sqrt{H \cdot H i_c^2 + 2H \cdot \rho i_c i_m + \rho \cdot \rho i_m^2} \quad (15.21)$$

其中 i_c 是主光线入射角。

考虑一个光学系统,它有一系列 $q=1, 2, \dots, Q$ 表面。每个表面 q 的近轴入射角是主光线角 $i_{c,q}$ 和边缘光线角 $i_{m,q}$ 的函数,

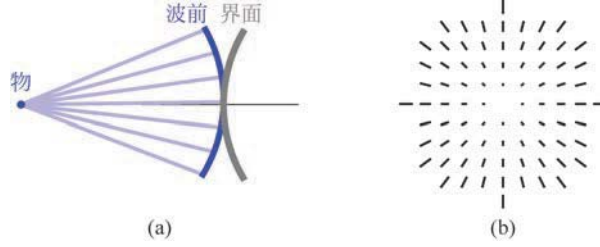


图 15.4 (a)来自轴上物点的波前入射到球形界面上,光束中心的入射角为零。(b)轴上波前在球面上的近轴入射角从中心线性增加,在边缘处等于边缘光线入射角。线段长度表示入射角,线段方向表示入射面

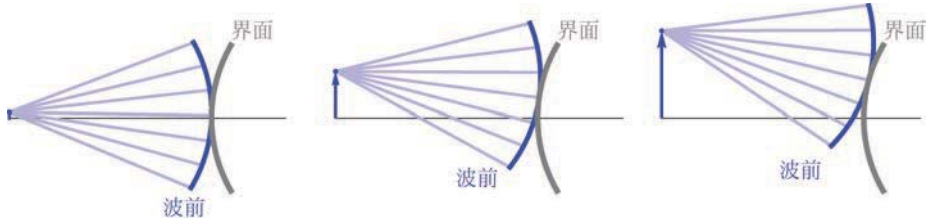


图 15.5 来自一个轴上和两个离轴物点的波前入射在球面上。这三种情况都是球面波前与球形界面相切

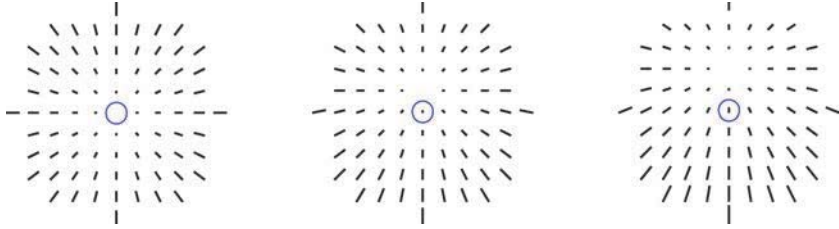


图 15.6 图 15.5 中的波前偏离光轴的入射角图。图形模式移动,但在其他方面不会改变。穿过每个图案中心(蓝色圆圈内)的光线是该区域的主光线

$$\theta_q = \sqrt{\theta_{x,q}^2 + \theta_{y,q}^2} = \sqrt{(G^2 + H^2)i_{c,q}^2 + 2(Gx + Hy)i_{c,q}i_{m,q} + (x^2 + y^2)i_{m,q}^2} \quad (15.22)$$

其中 (G, H) 是 $\mathbf{H}$ 的 x, y 分量, (x, y) 是 $\boldsymbol{\rho}$ 的 x, y 分量。为简单起见,物点最好放置在 y 轴上, $G=0$,入射角简化为

$$\theta_q = \sqrt{H^2 i_{c,q}^2 + 2Hy i_{c,q} i_{m,q} + (x^2 + y^2) i_{m,q}^2} \quad (15.23)$$

或在极坐标系中,用 ρ, ϕ 表示

$$\theta_q = \sqrt{H^2 i_{c,q}^2 + 2H\rho i_{c,q} i_{m,q} \sin\phi + \rho^2 i_{m,q}^2} \quad (15.24)$$

如图 15.6 所示,从 x 轴开始逆时针度量的入射面方位角 Φ 为

$$\tan\Phi = \frac{\theta_x}{\theta_y} \quad (15.25)$$

如果 $\theta_x=0$,则入射面与 $x-y$ 平面在垂线处相交。入射面的方向为

$$\sin\Phi = \frac{\theta_x}{\sqrt{(\theta_x^2 + \theta_y^2)}} = \frac{x_e i_m}{|\theta|} = \frac{\rho \sin\phi i_m}{|\theta|} \quad (15.26)$$

$$\cos\Phi = \frac{\theta_y}{\sqrt{(\theta_x^2 + \theta_y^2)}} = \frac{Hi_c + \rho \cos\phi i_m}{|\theta|} \quad (15.27)$$

所以

$$\Phi = \arctan\left(\frac{\rho i_m \sin\phi}{Hi_c + \rho i_m \cos\phi}\right) \quad (15.28)$$

15.3.2 近轴二向衰减和延迟

单透镜或反射镜表面的近轴偏振像差是通过将近轴入射角与作为入射角函数的二向衰减或延迟的二次表达式相结合得到的。通过将入射角函数与表面或膜层的琼斯矩阵近似相结合,得到了表面琼斯矩阵的近似表达式。对于所有各向同性膜和未镀膜界面,在小入射角 θ 下,界面的二向衰减 $D(\theta)$ 和延迟 $\delta(\theta)$ 很好地近似为简单的二次方程,

$$D(\theta) \approx D_2 \theta^2, \quad \delta(\theta) \approx \delta_2 \theta^2 \quad (15.29)$$

其中, D_2 和 δ_2 是二向衰减函数和延迟函数的系数。对于未镀膜和镀膜界面,系统中每个界面的 D_2 和 δ_2 由多层膜强度反射和透射方程以及相关的二向衰减和延迟表达式的多项式拟合得到;参见“数学小贴士 13.1”。

15.3.3 二向衰减离焦

考虑一个未镀膜的折射表面,它没有延迟,只有二向衰减。将图 15.6 的入射角图的大小取平方,但保持方向不变,获得轴上物点的二向衰减光瞳图,如图 15.7 所示。光瞳边缘的二向衰减大小为 $D_2 i_m^2$,即边缘光线的二向衰减率。这种二向衰减模式随光瞳坐标呈二次变化,因此被称为二向衰减离焦。 p 菲涅耳系数的大小大于 s 菲涅耳系数,因此,透射轴与入射面对齐。未镀膜的界面没有延迟,因为界面两侧的折射率都是实数。相应的琼斯光瞳方程为

$$\begin{aligned} J(\rho, \phi) &\approx (a_0 + a_2 \rho^2) e^{-i(\theta_0 + \theta_2 \rho^2)} \left(\sigma_0 + \frac{D_2}{2} \rho^2 \cos 2\phi \sigma_1 + \frac{D_2}{2} \rho^2 \sin 2\phi \sigma_2 \right) \\ &= (a_0 + a_2 \rho^2) e^{-i(\theta_0 + \theta_2 \rho^2)} \begin{bmatrix} 1 + \frac{D_2}{2} \rho^2 \cos 2\phi & \frac{D_2}{2} \rho^2 \sin 2\phi \\ \frac{D_2}{2} \rho^2 \sin 2\phi & 1 - \frac{D_2}{2} \rho^2 \cos 2\phi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (15.30)$$

二向衰减离焦的泡利系数如图 15.7(b)和(c)所示。对于小 D_2 ,二向衰减离焦的函数形式由式(15.30)中的矩阵给出。 σ_1 沿 x 轴为正,沿 y 轴为负,而 σ_2 分量旋转了 45° 。图 15.8 显示了 0° 、 45° 、 90° 和 135° 线偏振光入射时的输出偏振态图。沿与线偏振对齐的轴,光瞳边缘比中心亮,而沿与之正交的轴,光瞳边缘比中心暗。在与偏振轴成 $\pm 45^\circ$ 角时偏振发生了最大偏振旋转。图 15.9 给出了左右圆偏振光入射时对应的图。光瞳中心没有偏振变化。偏振变化向边缘呈二次增大,光变成椭圆偏振态,长轴平行于二向衰减。

15.3.4 二向衰减离焦和延迟离焦

接下来,将轴上的金属镜与 15.3.3 节中的未镀膜透镜表面进行比较。对于大多数界

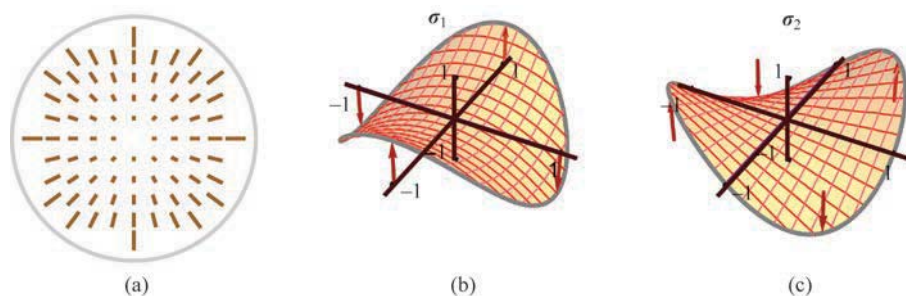


图 15.7 (a) 轴上波前的单个折射表面的二向衰减光瞳图,二向衰减从中心二次增大且呈径向分布。光瞳边缘的二向衰减大小是在边缘光线入射角下计算得到的界面二向衰减率。绘制了二向衰减图的 σ_1 (b)和 σ_2 (c)分量。红色箭头始于 x - y 平面,有助于观察形状, σ_1 为 $\cos 2\phi$ 形式, σ_2 为 $\sin 2\phi$ 形式

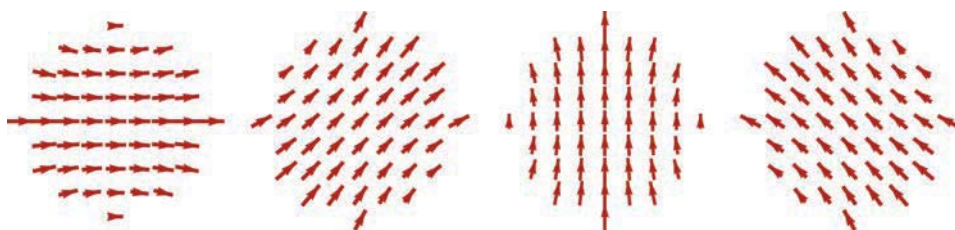


图 15.8 图 15.7 中二向衰减图的透射偏振椭圆图,从左到右, 0° 、 45° 、 90° 和 135° 线偏振光入射。本例中边缘光线的二向衰减大小为 0.3

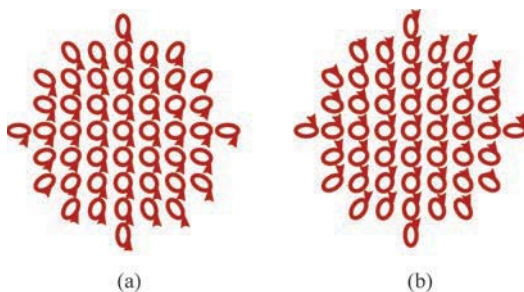


图 15.9 图 15.7 中二向衰减图的透射偏振椭圆。(a)左旋圆偏振光入射,(b)右旋圆偏振光入射

面,强度反射率和相位的变化在原点附近是二次的。图 15.10 绘制了典型镀铝金属镜的非涅耳系数、二向衰减和延迟。这种反射面具有非零延迟,且二向衰减和延迟几乎与入射角呈二次关系。

镀有多层反射或折射膜并在轴上照射的一般球面,具有二向衰减离焦和延迟离焦,并且均具有径向或切向轴。因此,对于轴上光束和某个界面,其二向衰减和延迟的组合符号有四种可能性,如图 15.11 的四列所示。金属镜为第三列的形式。

15.3.5 视场内的二向衰减和延迟

图 15.6 显示了物点离轴移动时近轴偏振像差(二向衰减或延迟)的变化。偏振像差图

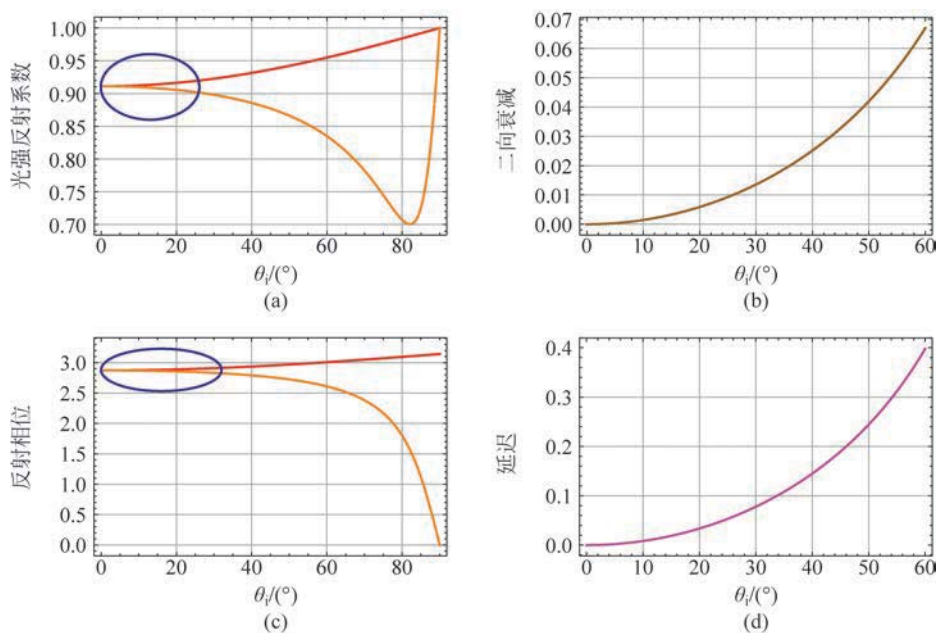


图 15.10 镀铝反射镜的非涅耳强度反射系数(a)、相位(c)、二向衰减(b)和延迟(d)随入射角的变化,在原点附近都是二次变化关系。红色表示 s 偏振,橙色表示 p 偏振。这些图形适用于 600nm 处 $n=1.262+7.185i$ 的铝反射面

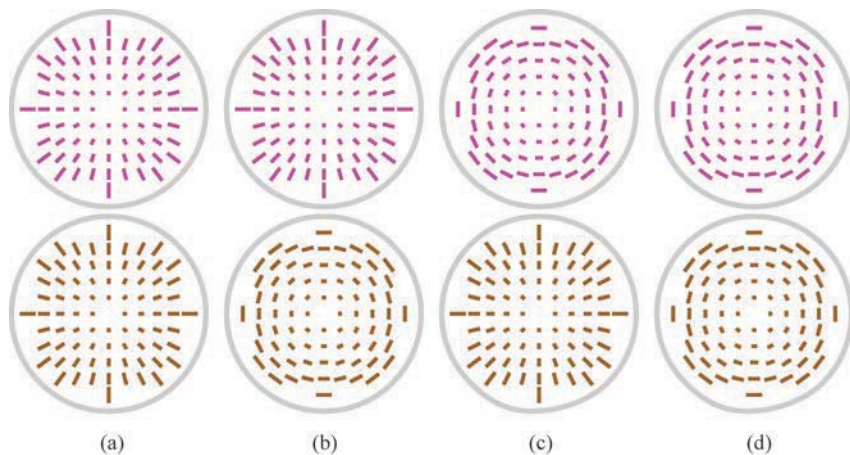


图 15.11 延迟离焦(洋红)和二向衰减离焦(棕色)的组合可以有四种符号组合:(a)正延迟和正二向衰减,(b)正和负,(c)负和正,以及(d)负和负

案在 H 移动的方向上平移。 σ_1 系数的大小是移位了的二次曲线,如图 15.12 所示。这种模式可以分解为二次项、线性项和常数项。当模式移动时,二次项保持与轴上模式相同的大小。视场边缘的泡利系数的形式如图 15.7 所示。

考虑在 y 方向上离轴的物体。图 15.13(a)的偏振像差模式可以表示为二次二向衰减图(b)、线性二向衰减图(c)和常数二向衰减图(d)的组合。这些是二阶偏振像差。这些函数形式被称为偏振离焦、偏振倾斜和偏振平移。当它们为二向衰减时,它们变成了二向衰减离

焦、二向衰减倾斜和二向衰减平移。类似地,对于延迟,它们是延迟离焦、延迟倾斜和延迟平移。

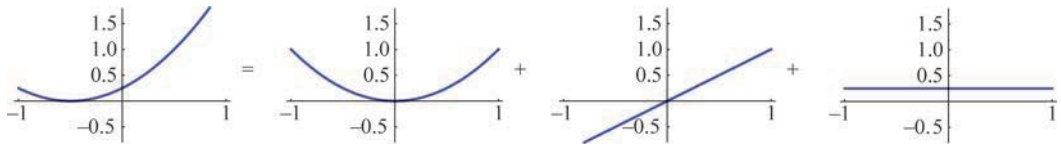


图 15.12 偏心的二次方程,可表示为二次、线性和常数分量之和

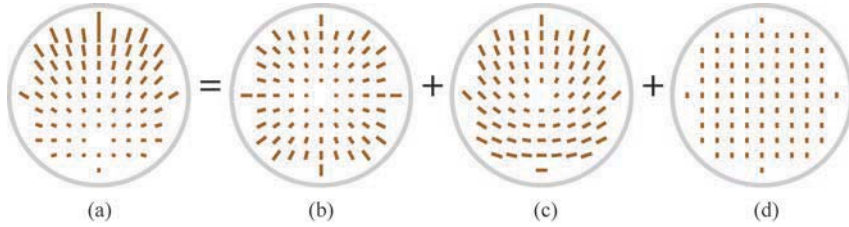


图 15.13 离轴光束的二向衰减图(a),沿 y 轴具有二次变化。此图形可表示为二次变化、线性变化和常数二向衰减之和。这些是二向衰减离焦、二向衰减倾斜和二向衰减平移像差。平行分量相加,正交分量相减,其他分量合并,如图 15.2 所示

15.3.6 偏振倾斜和平移

二向衰减倾斜和延迟倾斜是 σ_1 和 σ_2 在光瞳中的线性变化。 σ_1 分量在子午面(此处为 y 轴)内呈线性变化, σ_2 分量在垂直于子午面(此处为 x 轴)的方向呈线性变化,如图 15.14 所示。在径向对称系统中,偏振倾斜在轴上为零,并随物矢量线性变化。

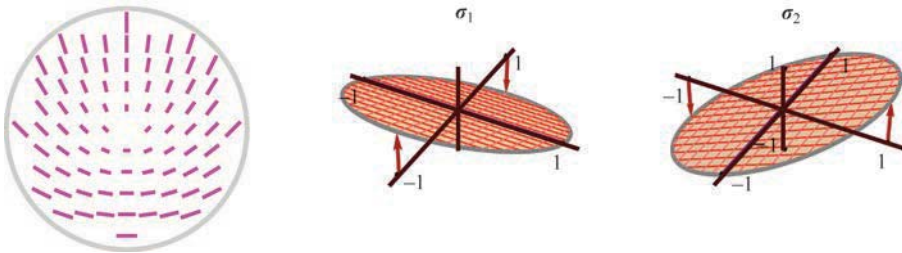


图 15.14 偏振倾斜,无论是二向衰减倾斜还是延迟倾斜,其大小从中心开始呈线性变化,并在通过中心时改变符号(90° 旋转)。轴围绕光瞳边缘旋转 180° 。 σ_1 分量在子午面(此处为 y 轴)上线性变化, σ_2 分量在正交方向上线性变化。红色箭头始于 $\sigma=0$

光学系统产生纯偏振倾斜的一种方法是两个偏振离焦模式的组合,两个偏振离焦模式的大小相等,符号相反,向相反方向平移,如图 15.15 所示,

$$J(\rho, \phi) \approx (a_0 + a_1 \rho \cos \phi) e^{-i(\theta_0 + \theta_1 \rho \cos \phi)} \left(\sigma_0 + \frac{D_1 - i\delta_1}{2} \rho \cos \phi \sigma_1 + \frac{D_1 - i\delta_1}{2} \rho \sin \phi \sigma_2 \right) \quad (15.31)$$

另一个二阶偏振像差是偏振平移,即图 15.13(d)和图 15.16 所示的常数二向衰减或延

迟。对于径向对称系统,偏振平移在轴上为零,并在视场范围内以 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}$ 的形式二次增大,

$$\mathbf{J}(\rho, \phi) \approx a_0 e^{-i\theta_0} \left(\sigma_0 + \frac{D_0 - i\delta_0}{2} \sigma_1 \right) \quad (15.32)$$



图 15.15 两个大小相等但符号相反的偏振离焦可产生纯偏振倾斜,其中一个向上平移,另一个向下平移

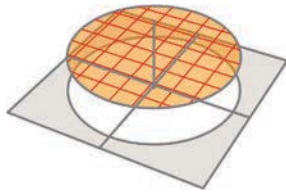


图 15.16 具有一个常数 σ_1 分量的偏振平移

15.3.7 双节点偏振

二阶偏振像差的一个有趣模式是如图 15.17(a)所示的双节点偏振像差。双节点表示光瞳中有两个零点,如图中 x 轴上的点所示。偏振轴围绕每个节点旋转 180° 。由偏振离焦(b)和偏振平移(c)的组合可以产生双节点偏振,在两个图案正交的地方产生零点。这种偏振分布与双节点像散中的像散分布非常相似^[6-7]。

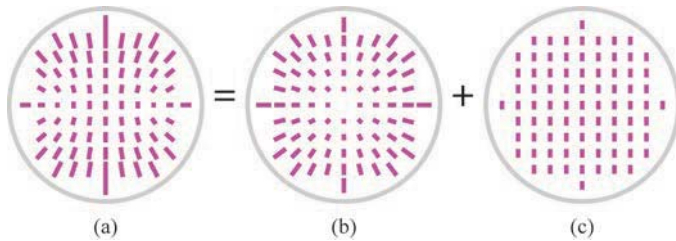


图 15.17 具有两个零点或节点的双节点偏振像差,围绕每个节点偏振旋转 180° 。在本例中,两个节点位于 x 轴上。偏振离焦(b)和偏振平移(c)的组合可以产生双节点偏振像差

15.3.8 界面近轴偏振像差总结

当光线传播通过一系列具有弱偏振像差的表面时,每个面上的像差贡献(延迟或二向衰减)可以相加来计算总像差。例如,图 15.18 重叠了三个面的偏振贡献,均以光瞳坐标表示。在这里,这些线段可表示线性二向衰减或线性延迟贡献,可以用 15.2.2 节的方法求和。

图 15.19 显示了三个表面级联的离轴光束近轴像差的另一个例子。第一列显示每个面

的净偏振(延迟或二向衰减),以及三个面的总像差(左下)。由于离轴光束,各个面图案的中心发生偏移。由于光束是离轴的,每个面的图案可以分解为偏振离焦(第二列)、偏振倾斜(第三列)和偏振平移项(右列)。可以单独相加离焦项,以获得总离焦(底行,第二列)。类似地,可以单独相加倾斜项,也可以单独相加平移项。因此,净偏振像差(底行,左)是①右上角九项的总和,或②第一列中三个面贡献的总和,或③底行中总离焦、倾斜和平移的总和。求和采用偏振的泡利表示法(15.2.2节)。

对于轴上光束,倾斜项和平移项将为零,因此净偏振像差将只是离焦项的总和(底行,第二列)。

对于径向对称系统,倾斜随视场线性增加,平移随视场二次方增加,而离焦恒定。因此,两倍图 15.19 中视场角的光束将具有两倍的倾斜,四倍的平移,但相同的偏振离焦。接下来,将用高扩展量透镜测试这种近轴偏振像差方法和这些相关的缩放规则。

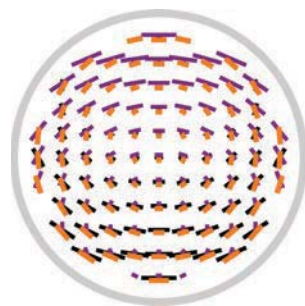


图 15.18 三个表面的偏振贡献,每个面都有平移了的偏振离焦,以黑色、紫色和橙色显示,为清晰起见,有小偏移

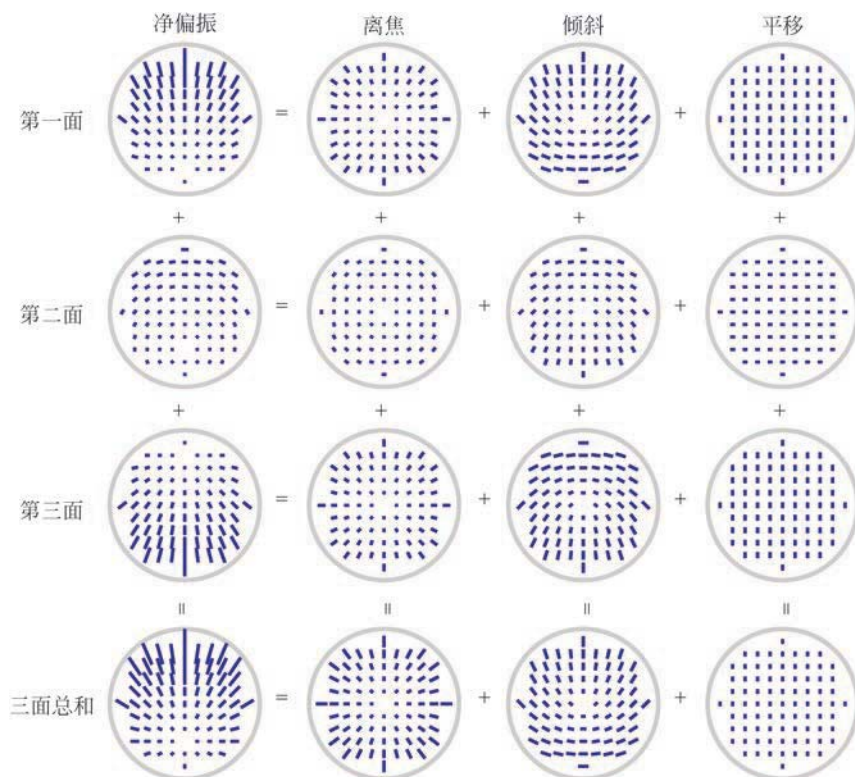


图 15.19 三个表面的偏振贡献,如左列所示。每个偏振像差图都可以分解为离焦项(第二列)、倾斜项(第三列)和平移项(右列)的总和。这些离焦、倾斜和平移项也可以分别相加(列求和),等于最下面一行的离焦、倾斜和平移项,它们相加为总偏振像差图(左下)

15.4 七片透镜系统的近轴偏振分析

使用 Polaris-M 偏振分析程序和如图 15.20 所示的七片式镜头演示近轴偏振像差方法。将进行精确的偏振像差计算,并将其与延迟和二向衰减离焦、倾斜和平移项的近轴计算进行比较,结果表明,在 10° 视场吻合误差在百分之几以内,而在 30° 视场(非常大的视场角)下,偏差仅为 20% 左右。本例子展示了如何求和各个偏振像差项,以及偏振像差的近轴区域有多大。

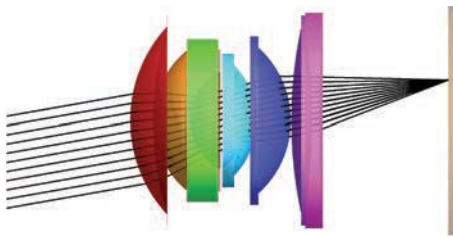


图 15.20 一个七片透镜系统(L1-L7),画出了多条来自无穷远的 10° 视场的子午光线路径。第二片透镜 L2(橙色)与第三片透镜 L3(绿色)胶合,第六片透镜 L6(蓝色)与第七片透镜 L7(洋红)胶合。光阑位于第三片和第四片透镜之间

在下面的计算中,每个透镜表面都有多层减反膜。对于无限远物体,评估了镀膜透镜在 500nm 处的偏振。图 15.21 和图 15.22 给出了 s 偏振和 p 偏振的膜层性能、透射振幅和相位,均为每个界面入射角的函数。注意,由于 $\arctan$ 函数,当相位为 $\pm\pi$ 时,膜层有 2π 不连续性。

图 15.23 显示了在一组角度上计算出来的每个界面处的二向衰减,这些计算值叠加在二向衰减的二次拟合曲线上;在每个图上方给出了二次的二向衰减系数 $D_{2,q}$,即每平方弧度的二向衰减。注意二次曲线在这个角度范围内的拟合程度。 $D_{2,q}$ 用于近轴计算,以确定二向衰减离焦、二向衰减倾斜和二向衰减平移的大小。类似地,图 15.24 显示了每个界面处延迟的二次拟合,以及二次的延迟系数 $\delta_{2,q}$ 。这为每个界面给出了近轴膜层偏振,但 L2/3 和 L6/7 除外,它们为无膜层的胶合面。

10° 视场的每个表面上入射角图如图 15.25 所示。每个图中正入射光线位于入射角变为零的位置。对于某些面,如 L2/3,正入射点位于光瞳顶部,而对于其他面,包括 L4_F(F 表示前)和 L4_B(B 表示后),正入射点位于下部。对于某些表面,如透镜 5_F 和透镜 6_F,垂直入射的光线位于孔径外。每个图右下角的标记显示了每个图中最大入射角值及其长度。在每个表面上,主光线的入射角 θ_c 是光束中心的值。

为了评估近轴偏振像差方法,将对精确偏振光线追迹的结果与近轴偏振计算的结果进行比较。图 15.26 显示了偏振光线追迹计算的逐面延迟贡献光瞳图。这些各个面的延迟图也可由入射角图计算得到。每个表面上的延迟节点和入射角节点位于同一位置。所有延迟量都很小,小于 0.2rad,因此,可通过 15.2.2 节的方法用泡利系数将延迟相加。

图 15.27(a)显示了根据偏振光线追迹精确计算的每个表面边缘光线的延迟。这是每个表面的延迟离焦的大小。这些值可以相加,得到整个透镜系统的累积延迟离焦。图 15.27(b)显

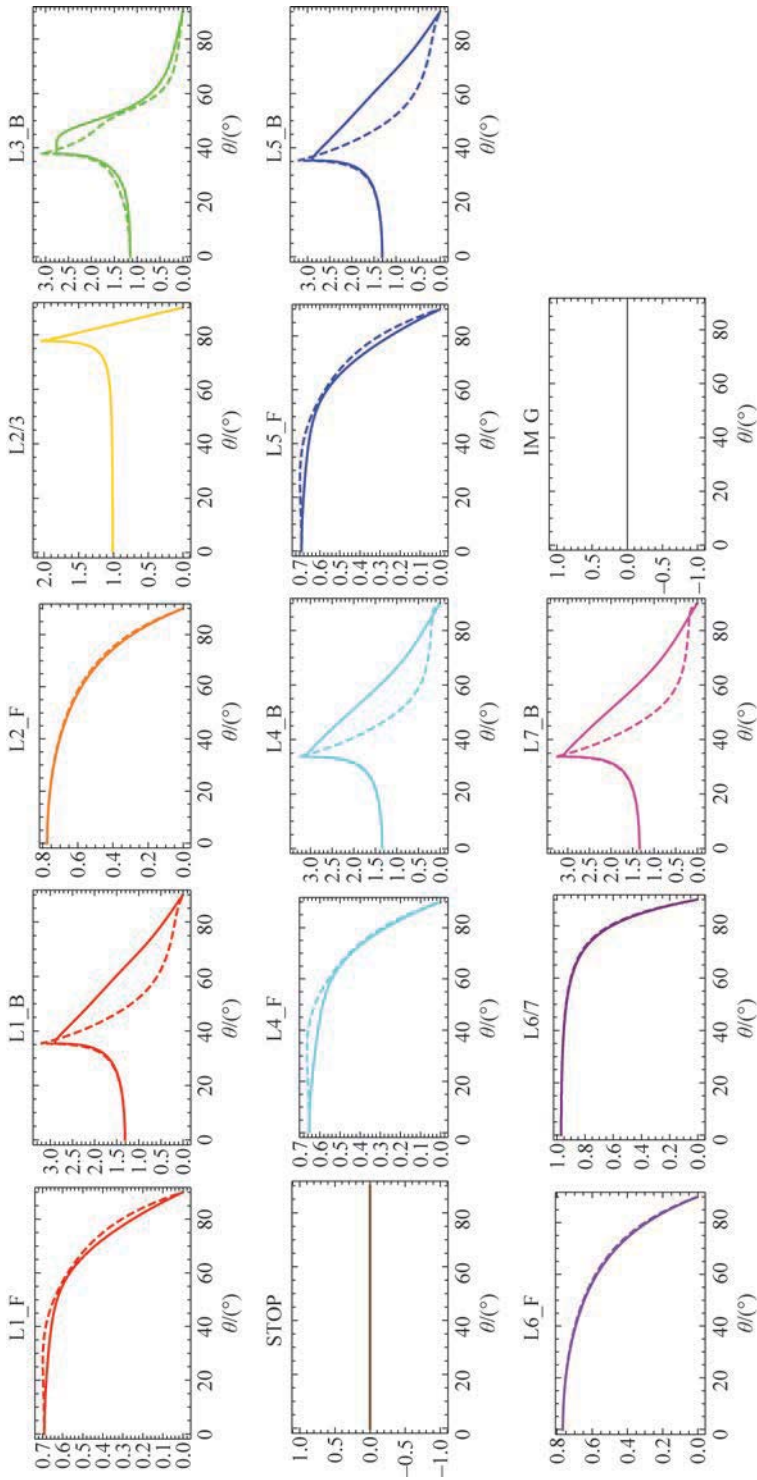


图 15.21 在 0° 到 90° 的入射角范围内,绘制了每个界面的 s(实线)和 p(虚线)振幅系数的大小。L1、L2 等分别指透镜 1、透镜 2 等。F 表示朝向物的前侧,B 表示朝向像的后侧。从玻璃射入空气的出射光束在其临界角以上表现为全内反射。F 代表前表面,B 代表后表面

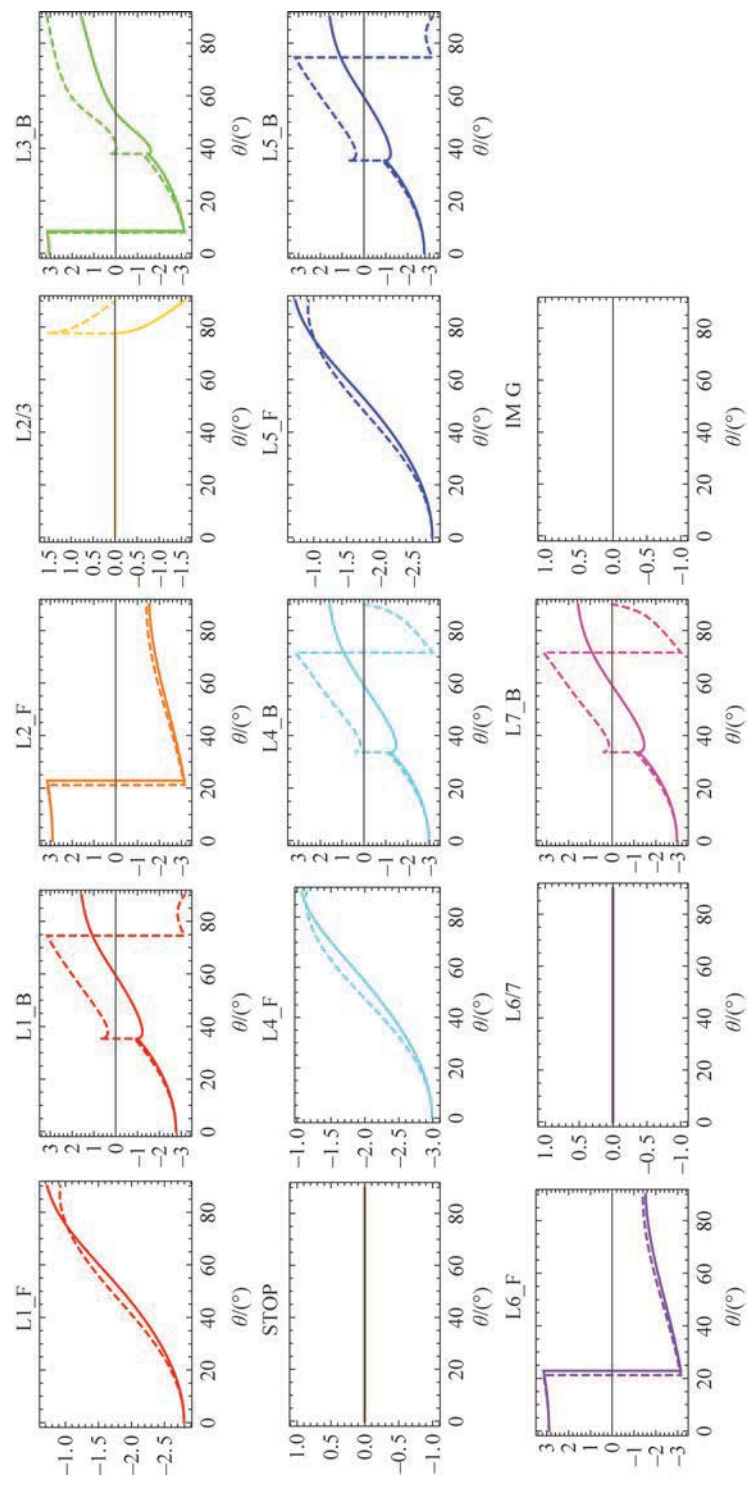


图 15.22 在 0° 到 90° 之间以弧度为单位绘制了每个镀有减反膜界面的 s (实线) 和 p (虚线) 相位系数。薄膜程序计算常显示出 2π 相位阶跃, 例如在 L3_B 上 8° ; 这些阶跃不会影响傅里叶变换, 但会使光程长度计算和干涉图计算及解析复杂化。F 代表前表面, B 代表后表面

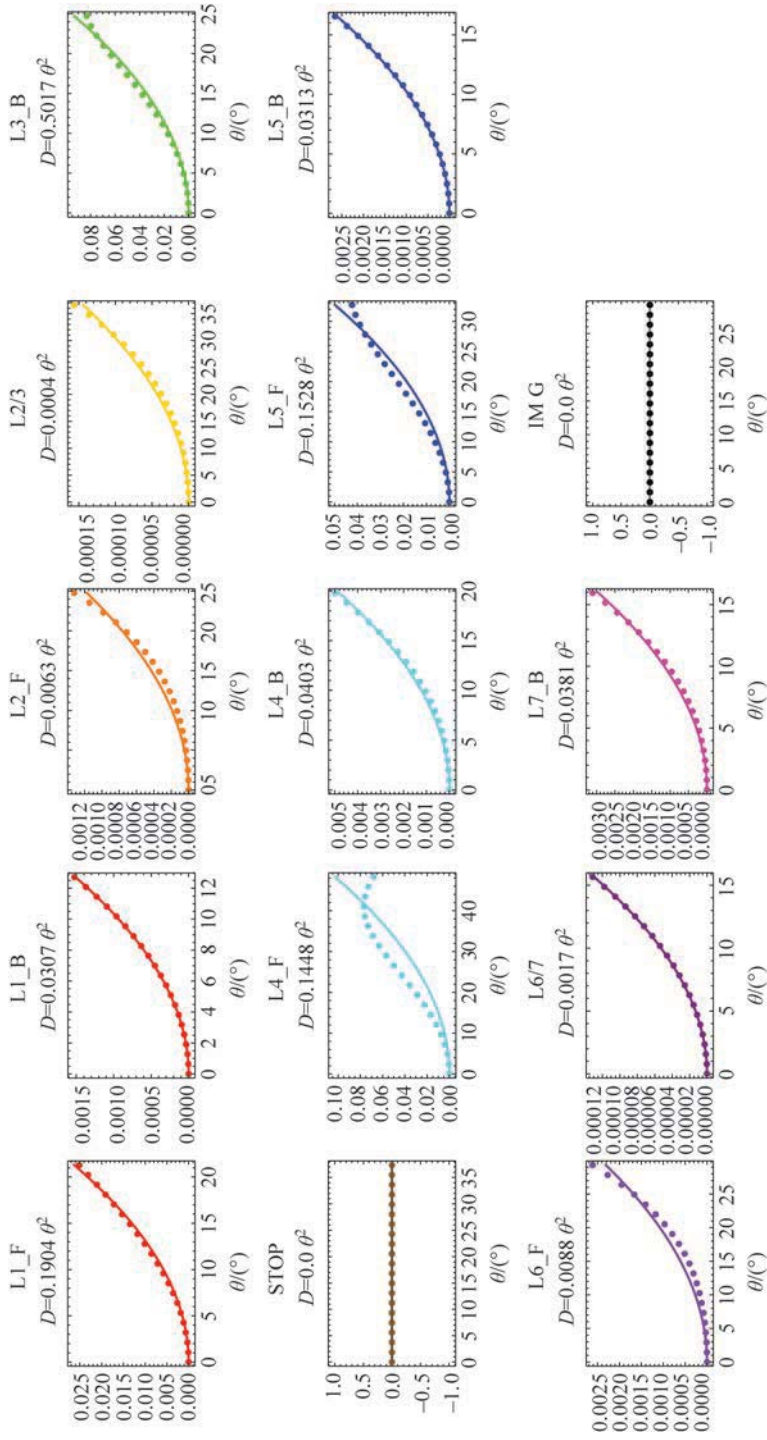


图 15.23 各表面入射角范围内的一组点表示其薄膜的二向衰减计算值。用实线绘制了二向衰减的二次拟合。在每个曲线图上方是二次拟合方程(θ 为弧度单位), 以及以数值形式表示的每个界面二向衰减的二次系数值 $D_{2,\eta}$ 。F 代表前表面, B 代表后表面

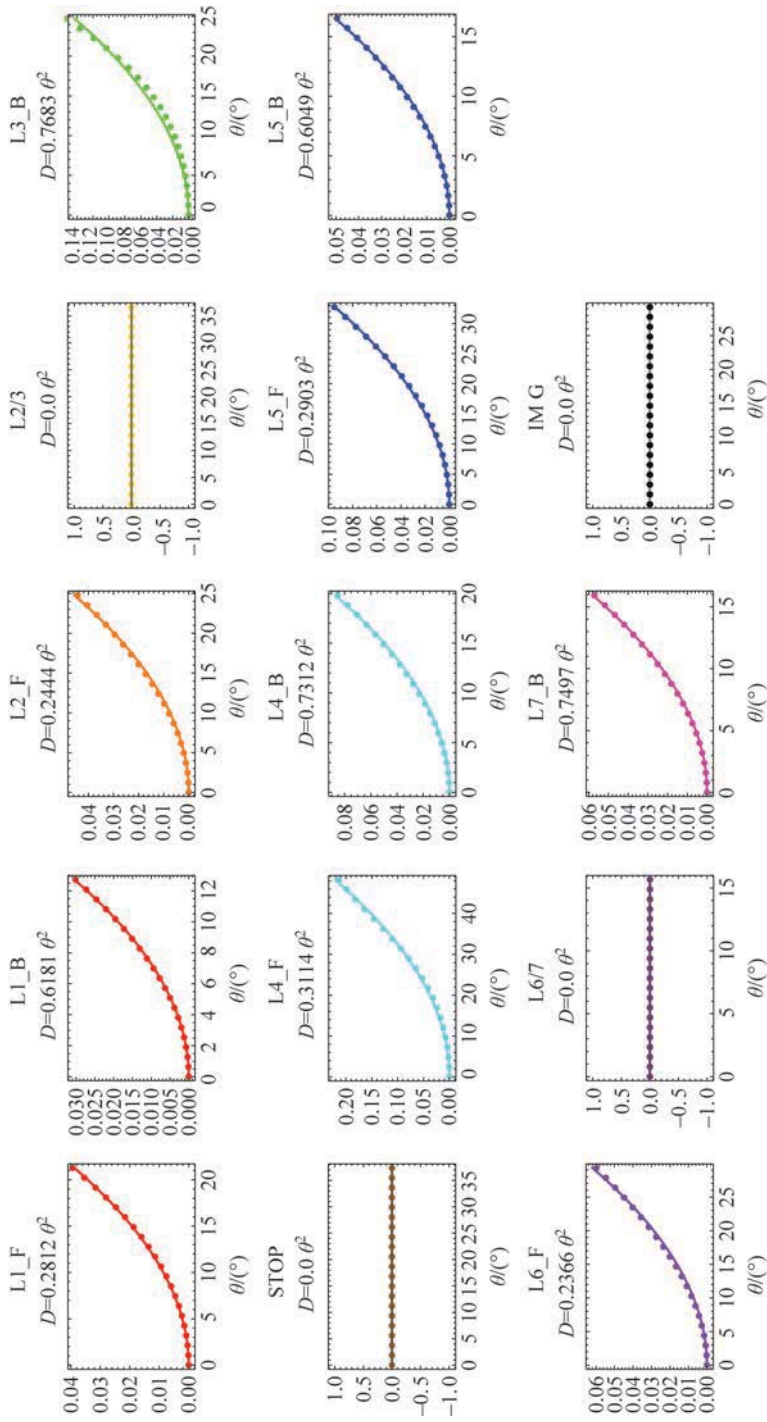


图 15.24 每个表面入射角范围内的一组点是通过薄膜算法计算得到的每个薄膜的延迟(以弧度为单位)。实线为延迟的二次拟合曲线。在每个图上上方是二次拟合方程,其中 θ 以弧度为单位,延迟量的二次系数 $\delta_{2,q}$ 以数值形式给出。F 代表前表面,B 代表后表面

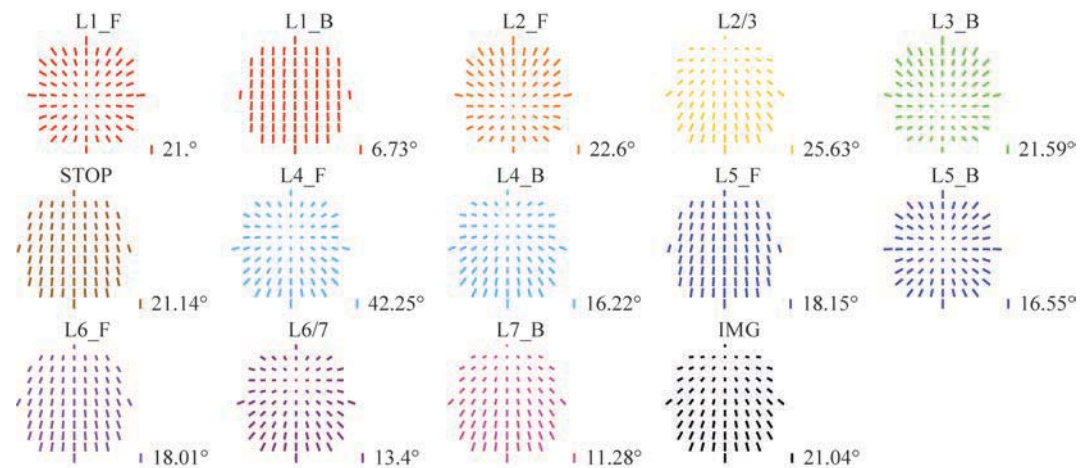


图 15.25 图 15.20 中的透镜在 10° 视场下的入射角图,均具有图 15.6 中的图案形式,入射角绕正入射光线径向排列,且从该节点开始,大小线性增加。F 代表前表面,B 代表后表面

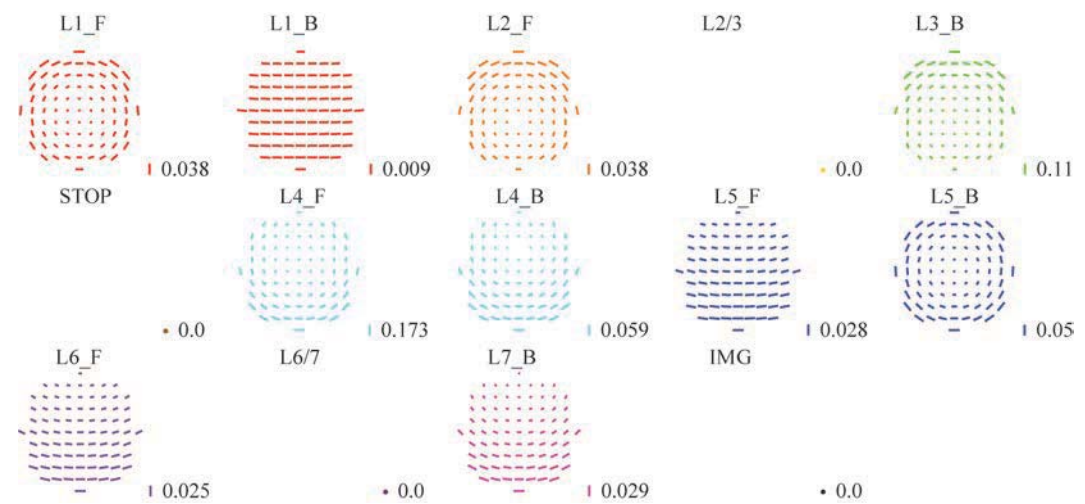


图 15.26 图 15.25 中 10° 视场光束的延迟图,均为图 15.13(a)的形式。因此,每个表面上的延迟图具有离焦、倾斜和平移分量,如图 15.12 所示。在每个表面,主光线的延迟量(光束中心的值)在右下角给出。F 表示透镜前表面,B 表示后表面

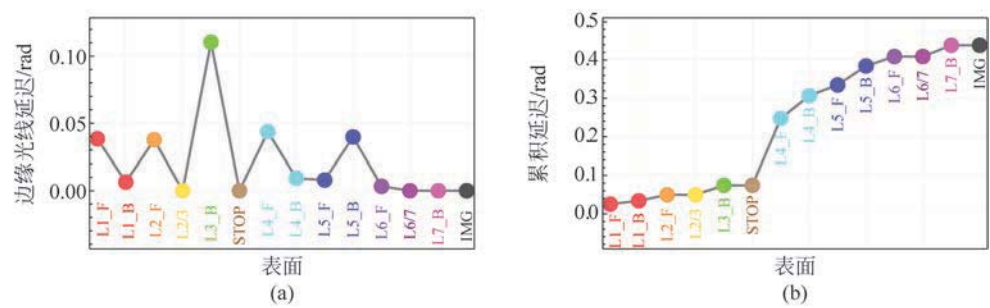


图 15.27 (a) 10° 视场的实际边缘光线的逐面延迟贡献。(b) 从物空间通过每个表面的累积边缘光线延迟单调增加到 0.4rad ,即延迟离焦的精确值

示了总和,表示从物空间经过每个表面的累积边缘光线延迟。同样,图 15.28 显示了每个表面主光线延迟的精确计算。这是每个表面的延迟平移的大小。图 15.29(a)显示了 10° 视场光线路径的总延迟(入瞳到出瞳)。该延迟图可分解为延迟离焦项(由边缘光线计算)、延迟平移项(由主光线计算)和延迟倾斜项(由每个表面的主光线和边缘光线的乘积计算)。现在,在这个视场和波长下,对于这些薄膜,可以比较近轴近似和精确偏振光线追迹,发现三个近轴二阶延迟像差占精确偏振像差的 95% 以上。

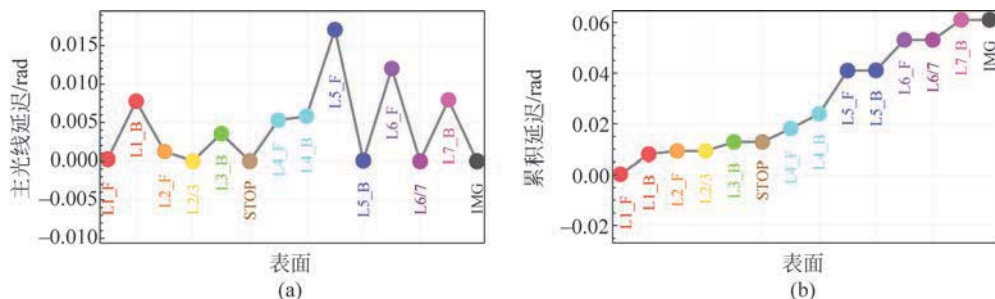


图 15.28 10° 视场主光线的逐面延迟贡献(a)和累积值(b)。最终累积值 0.06rad 是近轴延迟平移值

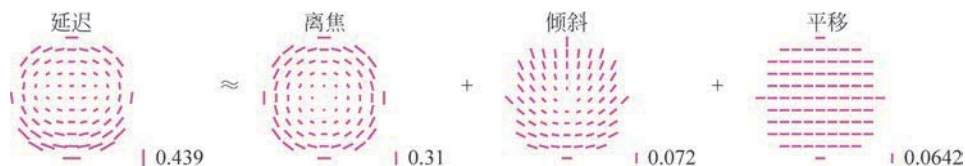


图 15.29 对于 10° 视场,根据近轴光线追迹计算了累积延迟图及其分解为延迟离焦、延迟倾斜和延迟平移之和。与精确计算值相比,主光线的近轴计算值大约有 5% 的偏差,边缘光线近轴计算值大约有 2% 的偏差

比较了二向衰减的精确计算和近轴计算。图 15.30 显示了每条光线二向衰减的精确偏振光线追迹计算。逐面二向衰减图是由入射角图计算得到的;每个表面上的二向衰减节点和入射角节点位于同一位置。所有的二向衰减值都很小,小于 0.1,因此,可用 15.2.2 节的方法将二向衰减用泡利系数相加。

为了与近轴偏振像差计算结果进行比较,用偏振光线追迹计算了二向衰减。图 15.31 显示了每个表面边缘光线二向衰减的精确计算结果,以及每个表面二向衰减离焦的大小。这些值可相加为整个透镜系统的累积二向衰减离焦。图 15.32 显示了每个表面主光线二向衰减的精确计算结果,以及每个表面的二向衰减平移的大小。图 15.33(a)显示了 10° 视场的端到端二向衰减图。该图可分解为一个二向衰减离焦项(由边缘光线计算),一个二向衰减平移项(由主光线计算),以及一个二向衰减倾斜项(由每个表面的主光线和边缘光线的乘积计算)。在这个视场和波长下,对于这些膜系,三个二阶二向衰减像差占偏振像差的 87%。

对于轴上视场(图 15.34),主光线沿光轴传播,在每个界面上入射角为零。因此,对于每个界面和整个镜头,二向衰减平移、延迟平移、二向衰减倾斜和延迟倾斜均为零,如图 15.34(b)和(c)中的延迟和二向衰减图所示。在近轴近似下,即二阶近似下,离焦像差不会随视场变化。倾斜项线性增大,而平移项二次增大。

图 15.35 显示了以 30° 视场透过镜头的光线路径的偏振、镜头的累积二向衰减图和累积延迟图,它们现在由二向衰减平移和延迟平移主导,因为这是随视场二次方增大的像差。

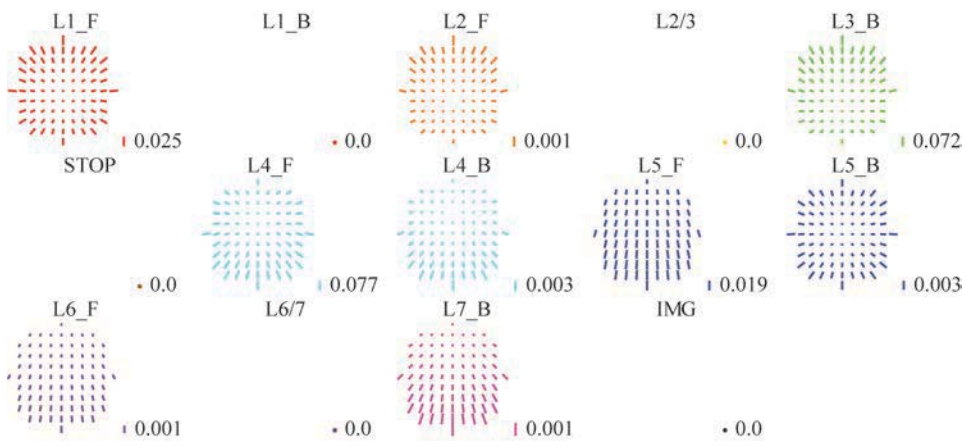


图 15.30 由偏振光线追迹得出的 10° 视场光束的精确二向衰减图。由于贡献是入射角的二次方关系,因此只有少数具有较大边缘光线角的表面做出了较大贡献

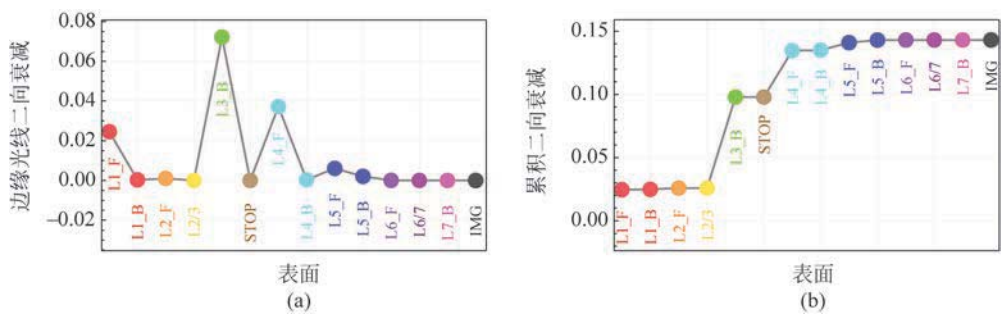


图 15.31 (a) 10° 视场每个表面的边缘光线二向衰减图。(b) 累积的边缘光线二向衰减,从物空间过每个面单调递增,最终值 0.13 是镜头的二向衰减离焦

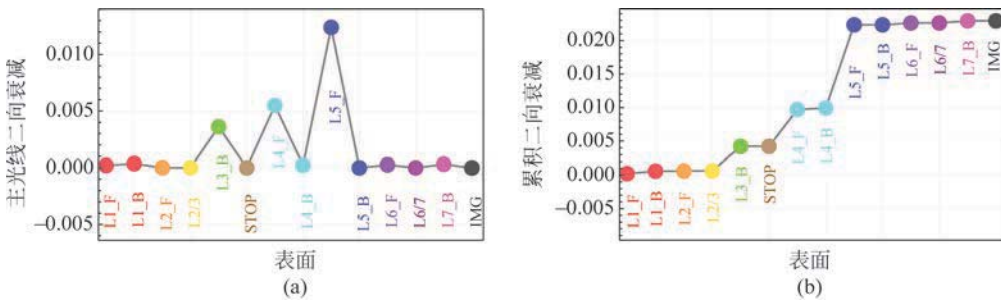


图 15.32 (a) 主光线逐面二向衰减和(b) 10° 视场累积值。最终累积值 0.02 是镜头的二向衰减平移值

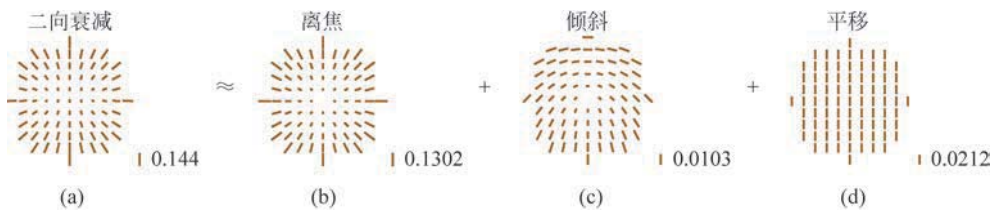


图 15.33 (a) 10° 视场的累积二向衰减图及其分解为(b)~(d)二向衰减离焦、二向衰减倾斜和二向衰减平移的总和。与图(a)显示的精确计算值相比,主光线二向衰减的近轴计算值有 8% 偏差,光瞳顶部边缘光线的近轴计算值有 2% 偏差,光瞳底部边缘光线的近轴计算值有 11% 偏差

本节将近轴偏振像差法应用于具有大扩展量的镜头,以展示使用二向衰减和延迟的二阶拟合计算二阶偏振像差的方法。本例中展示的特定数值并不重要,但该方法十分有效。该方法和由此产生的函数形式可以成为用于其他偏振分析的样板。

15.5 高阶偏振像差

15.3 节的近轴像差展开式非常适用于对径向对称透镜和反射镜系统的琼斯光瞳作近似,还可以精确描述许多离轴系统,如折反镜和离轴望远镜。在其他情况下,二向衰减和延迟的变化比二阶项能够准确描述的更复杂。于是,一组高阶基函数被用于分析此类情况。首先,矢量泽尼克多项式用于描述电场的高阶变化。然后,引入定向器,用于将入射角、线性二向衰减和线性延迟展开为一组基函数。

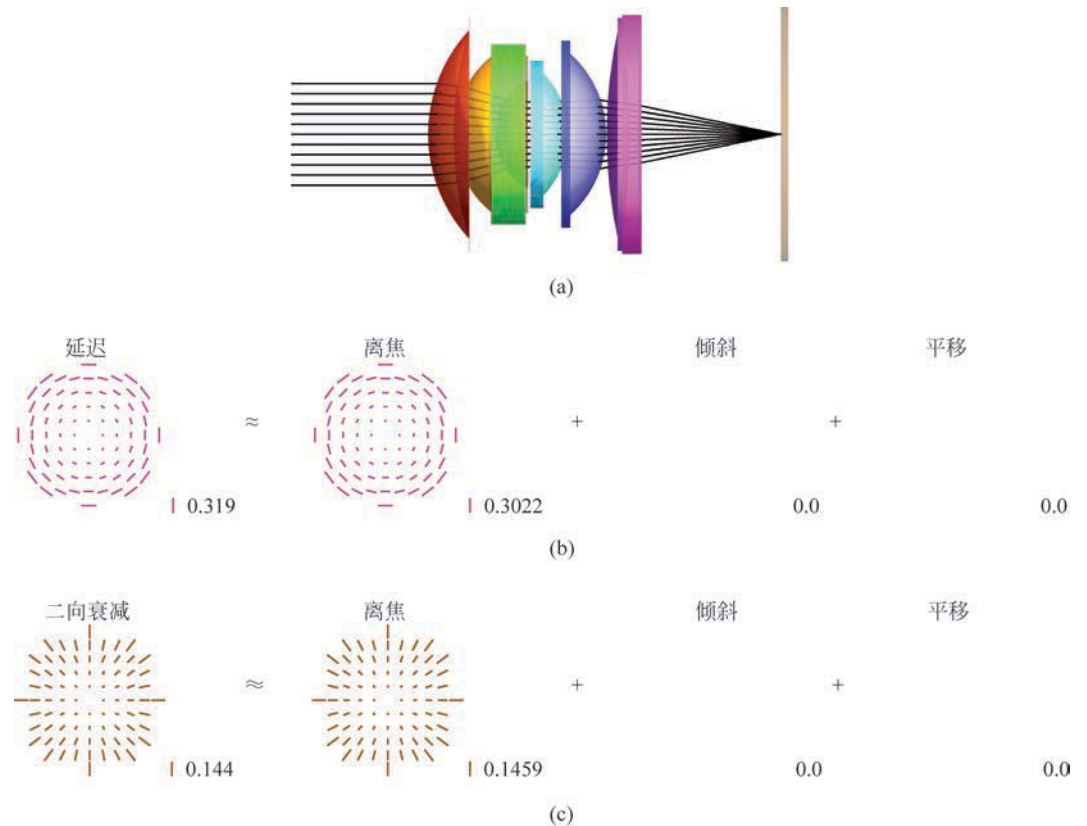


图 15.34 (a)轴上视场的光线路径。(b)轴上光束的延迟图和近轴近似,其中只有延迟离焦项是非零的。
(c)轴上光束的二向衰减图和近轴近似。在径向对称系统中,平移和倾斜在轴上始终为零

15.5.1 电场像差

考虑在参考球面上描述的任意偏振像差单色波前。电场分布可用归一化光瞳坐标中的琼斯矢量函数 E 来表征,可用极坐标 (ρ, ϕ) 或笛卡儿坐标 (x, y) 表示,

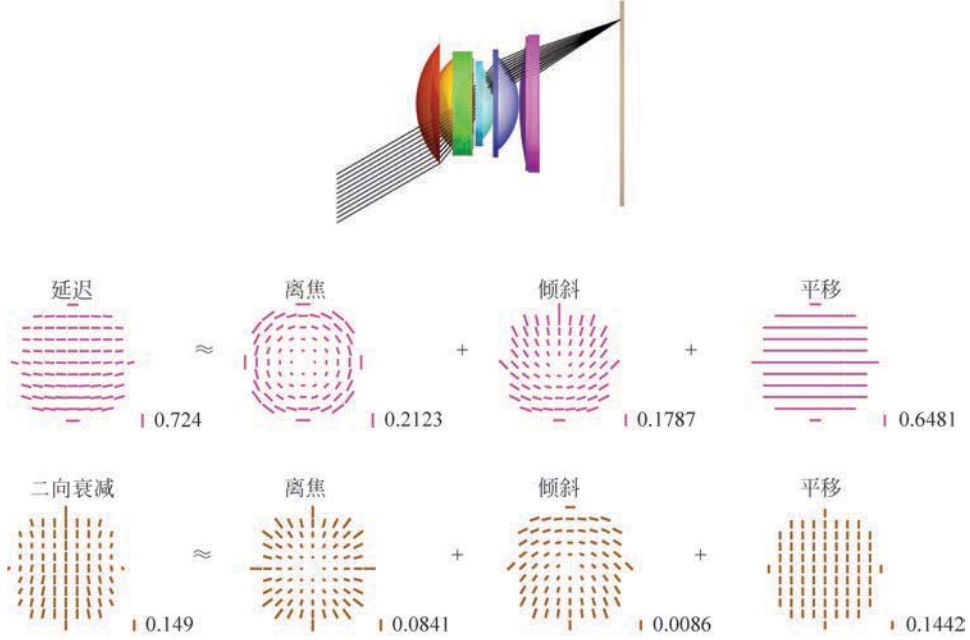


图 15.35 图 15.20 中的示例镜头, 追迹 30° 视场的光束。近轴计算与精确计算相比, 主光线的延迟差异为 28%, 主光线的二向衰减差异为 17%

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(x, y) &= \begin{pmatrix} E_x(\rho, \phi) \\ E_y(\rho, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(\rho, \phi) e^{i2\pi W_x(\rho, \phi)} \\ A_y(\rho, \phi) e^{i2\pi W_y(\rho, \phi)} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} E_x(x, y) \\ E_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x(x, y) e^{i2\pi W_x(x, y)} \\ A_y(x, y) e^{i2\pi W_y(x, y)} \end{pmatrix} \quad (15.33)
 \end{aligned}$$

由于 $\mathbf{E}$ 是一个二元复矢量函数, 因此需要四个标量函数 A_x 、 A_y 、 W_x 和 W_y 来进行完整描述。 W 是以波数表示的波前相位。

现在, 考虑一个更简单的波前。许多波前是线性或近似线性偏振的, 对于此类线性矢量场的描述, 泽尼克多项式(10.7.6 节)已被推广为矢量泽尼克多项式 $\mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi)$ [8]。为构造矢量泽尼克多项式, 泽尼克的 $\cos(m\phi)$ 被替换为矢量 Θ_0^m , $\sin(m\phi)$ 项被替换为 Θ_1^m , 其中正交偏振基矢量对 Θ_0^m 和 Θ_1^m 是

$$\Theta_0^m = \begin{pmatrix} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{pmatrix}, \quad \Theta_1^m = \begin{pmatrix} -\sin(m\phi) \\ \cos(m\phi) \end{pmatrix} \quad (15.34)$$

指数 m 是泽尼克多项式角度部分的阶数。表 15.1 中列出了 $n=0$ 至 $n=4$ 阶矢量泽尼克多项式, 并绘制在图 15.36 中。对于图 15.36 中的每个矢量泽尼克多项式, 都有另一旋转了 90° 的对应项; 前三个显示在图 15.37 的底行中。矢量泽尼克多项式构成正交基

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi) \cdot \mathbf{V}_{n',e'}^{m'}(\rho, \phi) \rho d\phi d\rho = \Gamma \delta_{n,n'} \delta_{m,m'} \delta_{e,e'} \quad (15.35)$$

其中, Γ 是归一化因子, 这里选取为等于 1。

表 15.1 $n=0$ 至 $n=4$ 阶的矢量泽尼克多项式

n	m	e	极坐标形式的矢量泽尼克	直角坐标形式的矢量泽尼克
0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
0	0	1	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
1	1	0	$\sqrt{\frac{3}{\pi}} \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{3}{\pi}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
1	1	1	$\sqrt{\frac{3}{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho \sin \phi \\ \rho \cos \phi \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{3}{\pi}} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
2	0	0	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} 2\rho^2 - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} 2(x^2 + y^2) - 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
2	0	1	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2\rho^2 - 1 \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2(x^2 + y^2) - 1 \end{pmatrix}$
2	2	0	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^2 \cos(2\phi) \\ \rho^2 \sin(2\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} (x-y)(x+y) \\ 2xy \end{pmatrix}$
2	2	1	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^2 \sin(2\phi) \\ \rho^2 \cos(2\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} -2xy \\ (x-y)(x+y) \end{pmatrix}$
2	2	2	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^2 \cos(2\phi) \\ -\rho^2 \sin(2\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} (x-y)(x+y) \\ -2xy \end{pmatrix}$
2	2	3	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^2 \sin(2\phi) \\ -\rho^2 \cos(2\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{5}{\pi}} \begin{pmatrix} -2xy \\ y^2 - x^2 \end{pmatrix}$
3	1	0	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} \rho(3\rho^2 - 2)\cos\phi \\ \rho(3\rho^2 - 2)\sin\phi \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} x(3(x^2 + y^2) - 2) \\ y(3(x^2 + y^2) - 2) \end{pmatrix}$
3	1	1	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho(3\rho^2 - 2)\sin\phi \\ \rho(3\rho^2 - 2)\cos\phi \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} -y(3(x^2 + y^2) - 2) \\ x(3(x^2 + y^2) - 2) \end{pmatrix}$
3	3	0	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^3 \cos(3\phi) \\ \rho^3 \sin(3\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{pmatrix}$
3	3	1	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^3 \sin(3\phi) \\ \rho^3 \cos(3\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} y^3 - 3x^2y \\ x^3 - 3xy^2 \end{pmatrix}$
3	3	2	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^3 \cos(3\phi) \\ -\rho^3 \sin(3\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ y^3 - 3x^2y \end{pmatrix}$
3	3	3	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^3 \sin(3\phi) \\ -\rho^3 \cos(3\phi) \end{pmatrix}$	$\sqrt{\frac{7}{\pi}} \begin{pmatrix} y^3 - 3x^2y \\ 3xy^2 - x^3 \end{pmatrix}$
4	0	0	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 6(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) + 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
4	0	1	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 6\rho^4 - 6\rho^2 + 1 \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} 0 \\ 6(x^2 + y^2)^2 - 6(x^2 + y^2) + 1 \end{pmatrix}$
4	2	0	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^2(4\rho^2 - 3)\cos(2\phi) \\ \rho^2(4\rho^2 - 3)\sin(2\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (x-y)(x+y)(4x^2 + 4y^2 - 3) \\ 2xy(4x^2 + 4y^2 - 3) \end{pmatrix}$
4	2	1	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^2(4\rho^2 - 3)\sin(2\phi) \\ \rho^2(4\rho^2 - 3)\cos(2\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -2xy(4x^2 + 4y^2 - 3) \\ (x-y)(x+y)(4x^2 + 4y^2 - 3) \end{pmatrix}$
4	2	2	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^2(4\rho^2 - 3)\cos(2\phi) \\ -\rho^2(4\rho^2 - 3)\sin(2\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} (x-y)(x+y)(4x^2 + 4y^2 - 3) \\ -2xy(4x^2 + 4y^2 - 3) \end{pmatrix}$

续表

n	m	e	极坐标形式的矢量泽尼克	直角坐标形式的矢量泽尼克
4	2	3	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^2(4\rho^2-3)\sin(2\phi) \\ -\rho^2(4\rho^2-3)\cos(2\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -2xy(4x^2+4y^2-3) \\ -4x^4+3x^2+4y^4-3y^2 \end{pmatrix}$
4	4	0	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^4\cos(4\phi) \\ \rho^4\sin(4\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} x^4-6y^2x^2+y^4 \\ 4x(x-y)y(x+y) \end{pmatrix}$
4	4	1	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^4\sin(4\phi) \\ \rho^4\cos(4\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -4x(x-y)y(x+y) \\ x^4-6y^2x^2+y^4 \end{pmatrix}$
4	4	2	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} \rho^4\cos(4\phi) \\ -\rho^4\sin(4\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} x^4-6y^2x^2+y^4 \\ -4x(x-y)y(x+y) \end{pmatrix}$
4	4	3	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -\rho^4\sin(4\phi) \\ -\rho^4\cos(4\phi) \end{pmatrix}$	$\frac{3}{\sqrt{\pi}} \begin{pmatrix} -4x(x-y)y(x+y) \\ -(x^2+y^2)^2\cos(4\arctan(x,y)) \end{pmatrix}$

如图 15.36 和图 15.37 所示的所有矢量泽尼克多项式具有相同的相位,因此箭头都位于电场线段的末端。相位变化使箭头围绕琼斯矢量的偏振椭圆移动,或者随着时间的推移,箭头沿线性琼斯矢量上下移动,如图 15.38 所示。因此,矢量泽尼克多项式描述线性偏振的振幅和方向,而不是相位。

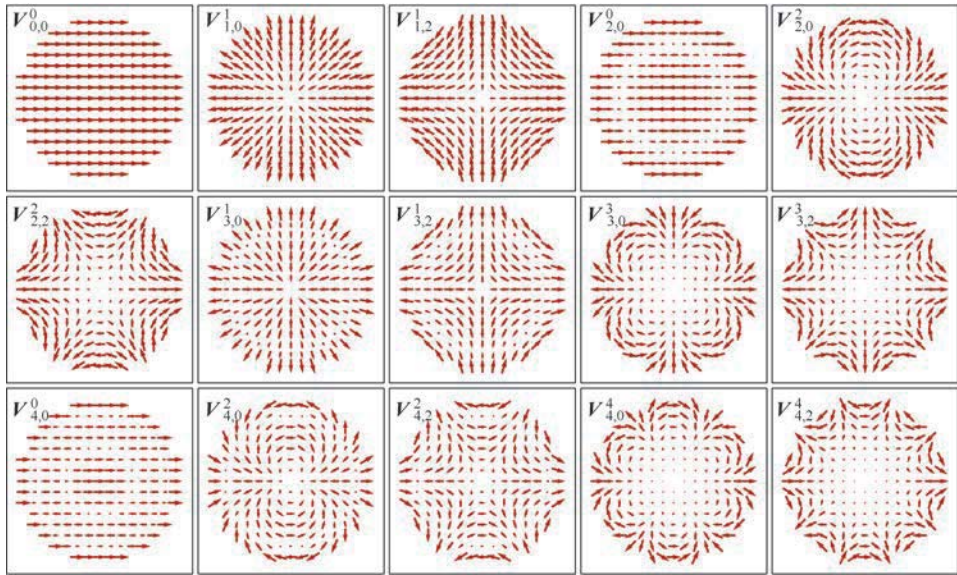


图 15.36 $n=0$ 至 $n=4$ 阶的矢量泽尼克多项式 $V_{n,e}^m(x,y)$, $e=0,2$

考虑以下形式的任意线偏振矢量函数:

$$\mathbf{E}_1(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} A_x(\rho, \phi) \\ A_y(\rho, \phi) \end{pmatrix} \quad (15.36)$$

其中相位等于零。使用矢量泽尼克多项式,式(15.36)可表示为求和形式

$$\mathbf{E}_1(\rho, \phi) = \begin{pmatrix} A_x(\rho, \phi) \\ A_y(\rho, \phi) \end{pmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{e=0}^1 v_{n,e}^m \mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi) \quad (15.37)$$

扩展系数 $v_{n,e}^m$ 由内积求出

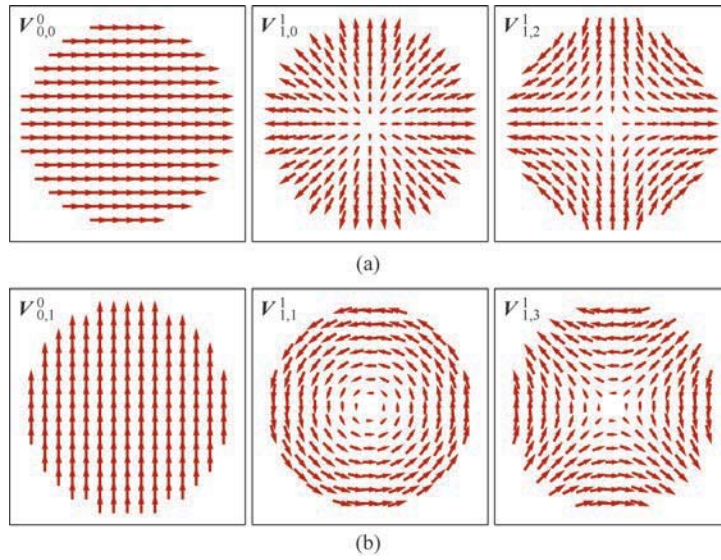


图 15.37 前三项矢量泽尼克多项式 $\mathbf{V}_{n,e}^m(x,y)$, 其中 $e=0,2$ (a), $e=1,3$ (b)。对于图 15.36 中的每个矢量泽尼克多项式, 都有另一旋转了 90° 的对应项, 这里显示了前三项

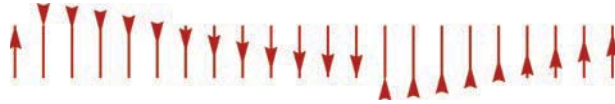


图 15.38 相位变化使箭头沿线性偏振椭圆上下移动

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi) \cdot \mathbf{E}_1(\rho, \phi) \rho d\phi d\rho = v_{n,e}^m \quad (15.38)$$

式(15.37)描述了具有恒定相位的线性偏振态的振幅和方向的变化。为描述相位, 需要另外两个函数:

- (A) (1) 一个 x 相位函数和,
- (2) 一个 y 相位函数或;
- (B) (1) 一个平均相位函数(波像差函数)和,
- (2) 一个相位差函数(椭圆偏振)。

(A) 是很简单明确的, 所以这里探讨(B)。首先, 相位平均值

$$W(\rho, \phi) = \frac{W_x(\rho, \phi) + W_y(\rho, \phi)}{2} \quad (15.39)$$

描述了一种(偏振无关的)波像差贡献, 它可用其自身的一组泽尼克多项式展开, 以描述离焦、倾斜、球差、彗差、像散等。但是, 光线可能不是均匀线偏振的。在这种情况下, 矢量泽尼克多项式描述偏振椭圆的长轴。光的椭圆率 $\epsilon(\rho, \phi)$, 从 $+1$ (右旋圆偏振光) 变化到 -1 (左旋圆偏振光), 可用另一组泽尼克多项式展开; 对于线偏振场, 这些最后的泽尼克系数都为零。因此, 一般来说, 需要四组泽尼克多项式(将矢量泽尼克项计算为两组), 以完全描述像差展开中的单个偏振波前(单个视场点、单个波长)。

15.5.2 定向器

15.5.1 节由于光的矢量性质,圆光瞳中的电场被扩展为矢量泽尼克多项式。矢量在 360° 旋转后重复。入射角、线性延迟和线性二向衰减不是矢量;它们的特性在 180° 旋转后重复。为了解释 180° 旋转后重复的这种几何特性,引入了定向器,它为入射角、线性延迟和线性二向衰减的展开给出了基函数^[8]。这些定向器基函数是从矢量泽尼克多项式推导而来的。

考虑线性延迟的行为。两个快轴平行的延迟量为 δ_1 和 δ_2 的延迟器,净延迟量为 $\delta_1 + \delta_2$ 。当一个延迟器旋转 180° 后,延迟量仍然为 $\delta_1 + \delta_2$,而当一个矢量旋转 180° 时,两个矢量将相减。考虑下面的几何结构来转换角度。如果线性延迟器的方向角(快轴角)加倍,则所有 θ 都转换为 2θ 。现在,变换后的“方向” 2θ 呈 360° 重复,可用“角度加倍线性延迟”的矢量表达方式。这一“角度加倍”特性如图 15.2 所示,其来源于弱线性延迟或弱线性二向衰减组合的泡利矩阵表达式。线性二向衰减与延迟在旋转时具有相同的行为。如果两个二向衰减器中的一个旋转 180° ,则两个二向衰减器组合相同。轴间隔为 90° 的等值二向衰减器的二向衰减相互抵消,净二向衰减为零。

使用这种“角度加倍”方法定义定向器,并应用于表征线性延迟、线性二向衰减和入射角的函数。考虑极坐标中的光瞳图,其线性延迟大小为 $\delta(\rho, \phi)$ 和快轴取向为 $\psi(\rho, \phi)$,其中 ψ 定义于 $0 \leq \psi \leq 180^\circ$ 范围内,如图 15.39 所示的任意延迟图例子。该光瞳图被转换成具有相同大小 $\delta(\rho, \phi)$ 但方向为 $2 \times \psi(\rho, \phi)$ 的向量分布。通过这种“加倍角度”变换,矢量泽尼克多项式现在可用作线性二向衰减和线性延迟像差的基,入射角图为高阶偏振像差提供了基集。因此,定向器是矢量泽尼克多项式,但取向角为一半。因此,定向器是一个线段对象,它具有大小和方向 ψ ,且与两倍方向角 $\phi = 2\psi$ 的矢量相关联。请注意,对于线性延迟、线性二向衰减和入射角的函数,没有相位需要描述,正如 15.5.1 节中的电场一样。

接下来,将考虑对应于最低阶矢量泽尼克多项式的最低阶定向器项。在零阶时,定向器基集有两个常数项, $\mathbf{O}_{0,0}^0$ 和 $\mathbf{O}_{0,1}^0$,彼此 45° 间隔,如图 15.40(a)所示,以及两个相应的矢量基函数 $\mathbf{V}_{0,0}^0$ 和 $\mathbf{V}_{0,1}^0$,彼此 90° 间隔,与 x 轴成两倍角,如图 15.40(b)所示。改变任何定向器的符号都会将它的图旋转 90° 。

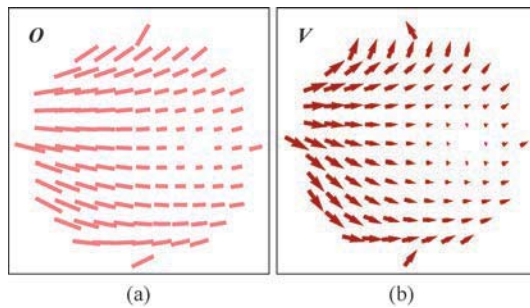


图 15.39 将定向器图(a)转换为矢量图(b)的示例。定向器分布可以是入射角图、二向衰减图或延迟图。若要创建矢量图,将在定向器的左端(正 x)添加一个箭头,并将其与 x 轴的角度加倍

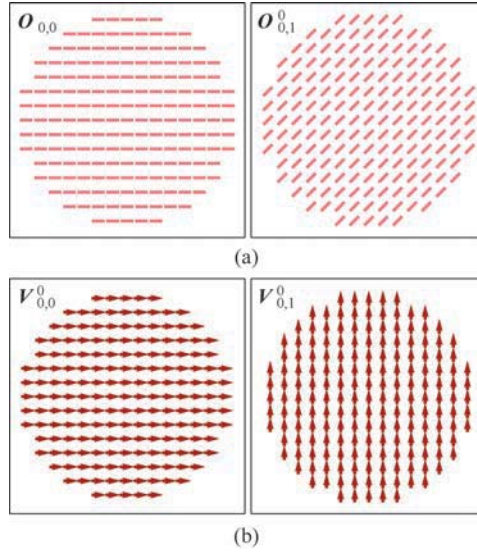


图 15.40 (a)两个零阶定向器光瞳图, $O_{0,0}^0$ 和 $O_{0,1}^0$, 显示为线段的恒定分布, 这些线段对应于平移 (piston)。图(b)深红色显示的是对应的矢量泽尼克图, 以两倍的定向器角度取向。对于负系数值, 定向器旋转 90° , 矢量旋转 180°

在一阶时, 有四个定向器, 如图 15.41 所示。两个一阶定向器光瞳图, $O_{1,0}^1$ 和 $O_{1,1}^1$, 顺时针旋转, 围绕光瞳顺时针移动, 与泽尼克径向多项式系数正值的角度分布相关,

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (15.40)$$

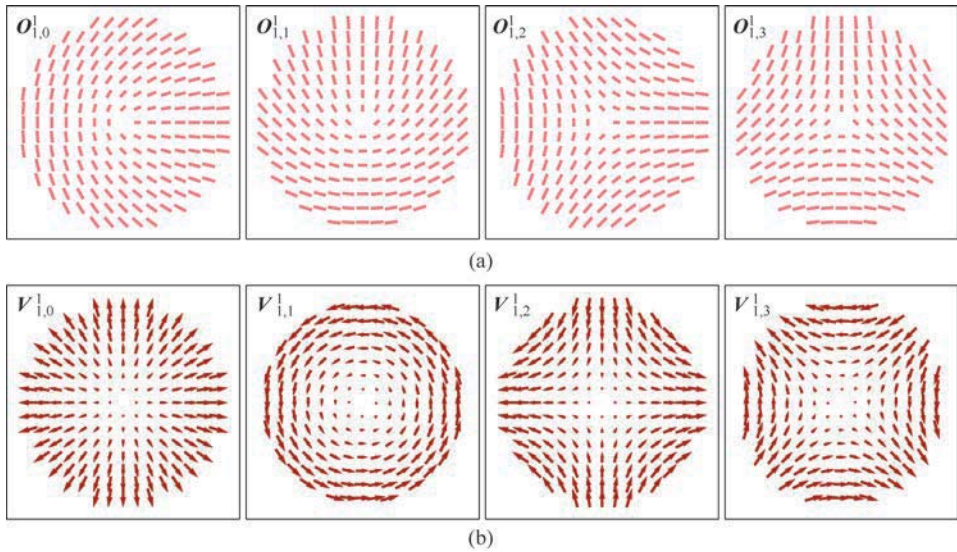


图 15.41 (a)一阶的四张定向器图: $O_{1,0}^0$ 、 $O_{1,1}^0$ 、 $O_{1,2}^1$ 和 $O_{1,3}^1$ 。(b)对应的泽尼克矢量多项式 $V_{1,0}^1$ 、 $V_{1,1}^1$ 、 $V_{1,2}^1$ 和 $V_{1,3}^1$ 以洋红色显示在正下方。 $O_{1,0}^0$ 、 $O_{1,1}^0$ 、 $V_{1,0}^1$ 和 $V_{1,1}^1$ 项(左两列)对应于二向衰减和延迟倾斜项。定向器显示为正系数。对于负系数值, 定向器旋转 90°

另两个一阶定向器光瞳图逆时针旋转,围绕光瞳顺时针移动, $\mathbf{O}_{1,2}^1$ 和 $\mathbf{O}_{1,3}^1$,与角度分布相关

$$\begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \\ -\sin\left(\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (15.41)$$

六个定向器基函数以二阶形式存在。图 15.42 显示了 $m=0$ 的两项: $\mathbf{O}_{2,0}^0$ 和 $\mathbf{O}_{2,1}^0$ 。请注意,当对应的泽尼克矢量多项式(图(b))过零时,定向器的方向会改变符号。 $\mathbf{O}_{2,0}^0$ 和 $\mathbf{O}_{2,1}^0$ 描述具有恒定方向的二次幅值变化。 $\mathbf{O}_{2,0}^0$ 和 $\mathbf{O}_{2,1}^0$ 在半径为 $\rho=1/\sqrt{2}$ 处过零,与常数项 $\mathbf{O}_{0,0}^0$ 和 $\mathbf{O}_{0,1}^0$ 正交。图 15.43 显示了 $m=2$ 的四项: $\mathbf{O}_{2,0}^2$ 、 $\mathbf{O}_{2,1}^2$ 、 $\mathbf{O}_{2,2}^2$ 和 $\mathbf{O}_{2,3}^2$ 。 $\mathbf{O}_{2,0}^2$ 是我们的线性二向衰减离焦和线性延迟离焦的像差形式,在描述径向对称系统的偏振像差时普遍存在。在典型的光瞳函数展开中,其他三项出现的程度要小得多。

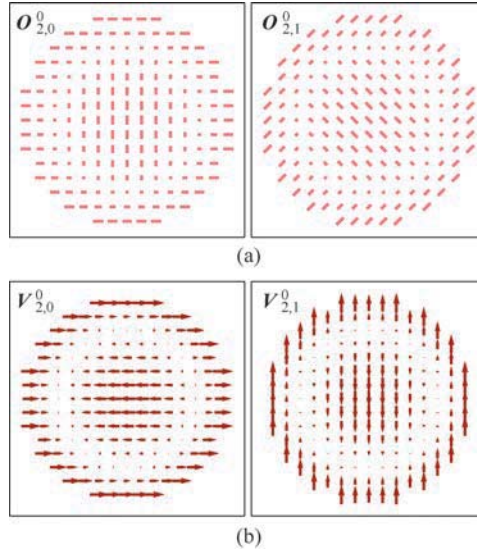


图 15.42 $m=0$ 时的二阶定向器光瞳图, $\mathbf{O}_{2,0}^0$ 和 $\mathbf{O}_{2,1}^0$

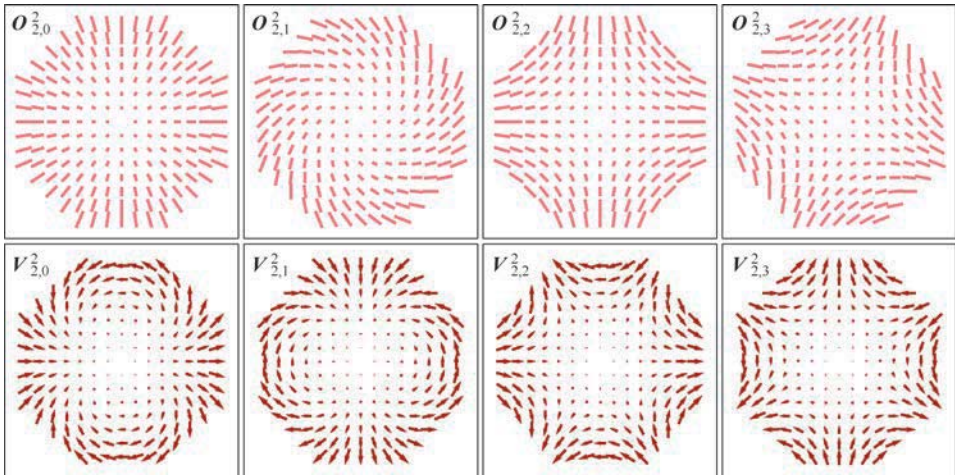


图 15.43 $m=2$ 时的二阶定向器光瞳图: $\mathbf{O}_{2,0}^2$ 、 $\mathbf{O}_{2,1}^2$ 、 $\mathbf{O}_{2,2}^2$ 和 $\mathbf{O}_{2,3}^2$ 。左边的 $\mathbf{O}_{2,0}^2$ 项对应于二向衰减离焦和延迟离焦

图 15.44 和图 15.45 继续展开,显示了三阶项,而图 15.46、图 15.47 和图 15.48 显示了四阶的定向器和相应的泽尼克矢量多项式。

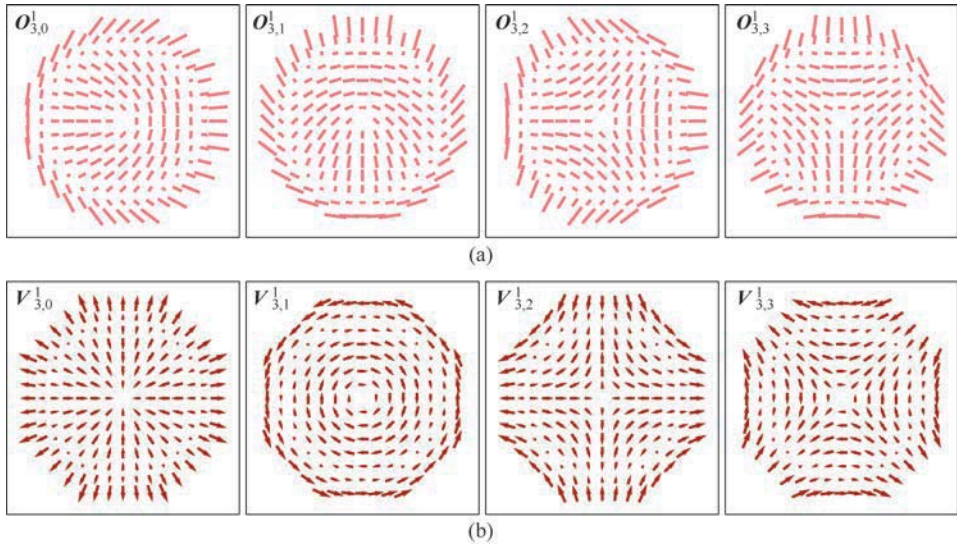


图 15.44 $m=1$ 的三阶定向器图(a)和矢量泽尼克多项式(b)

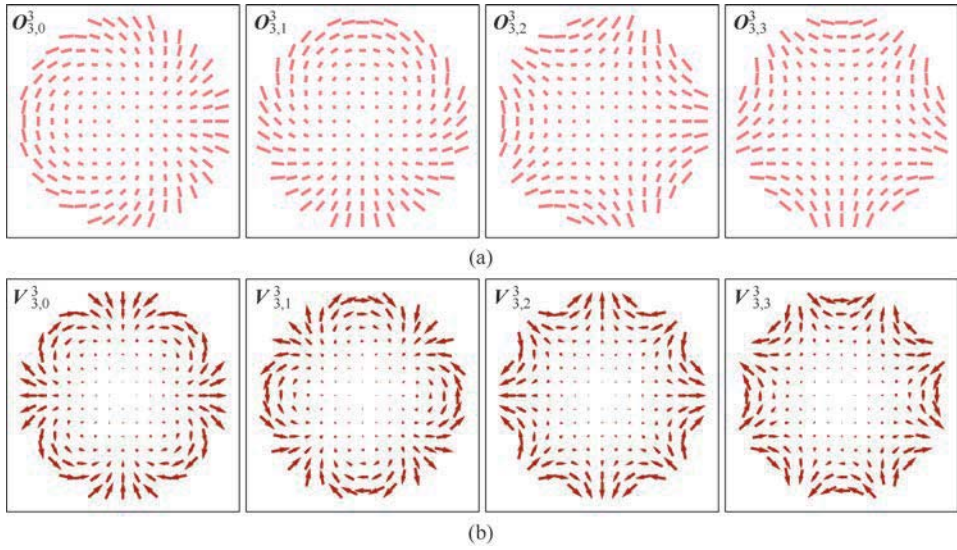


图 15.45 $m=3$ 的三阶定向器图(a)和矢量泽尼克多项式(b)

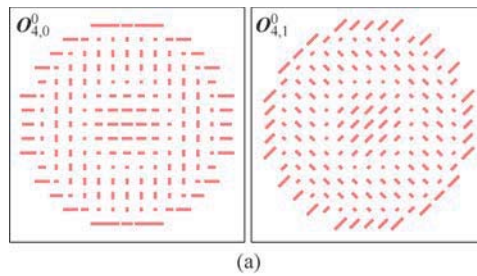


图 15.46 $m=0$ 的四阶定向器图(a)和矢量泽尼克多项式(b)

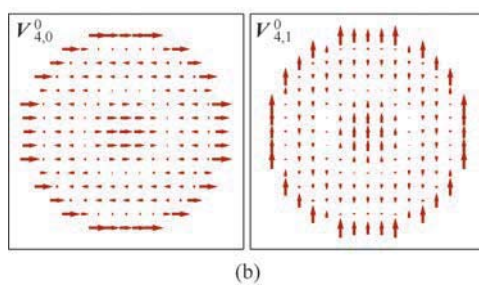
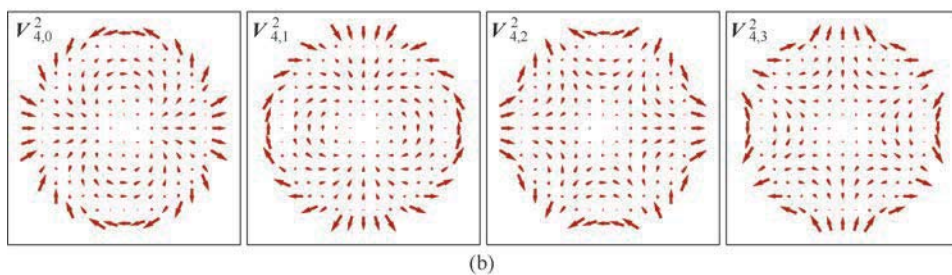
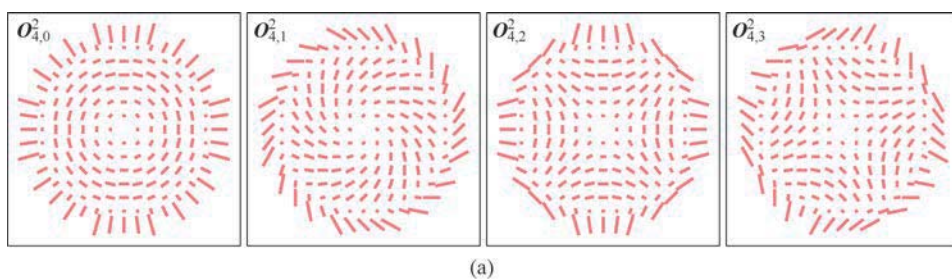
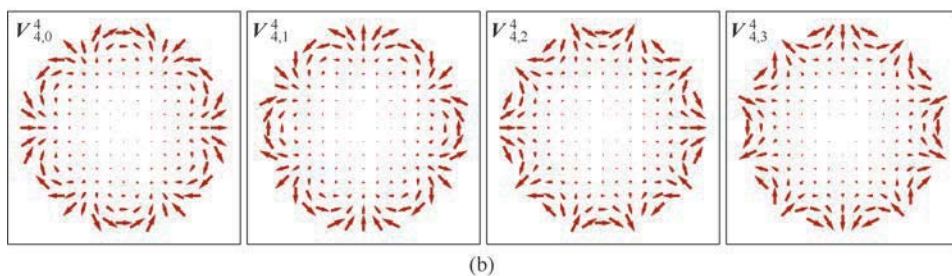
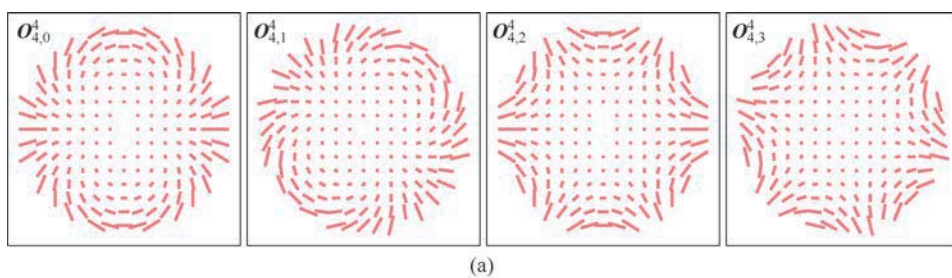


图 15.46 (续)

图 15.47 $m=2$ 的四阶定向器图(a)和矢量泽尼克多项式(b)图 15.48 $m=4$ 的四阶定向器图(a)和矢量泽尼克多项式(b)

15.5.3 二向衰减和延迟

定向器采用一系列基于泽尼克多项式的表示形式,用来描述线性二向衰减和线性延迟在光瞳中的分布。这样的一系列表示形式可用不同的方式构造。用定向器描述任意琼斯光瞳线性部分的一种算法如下所示。给定琼斯光瞳 $\mathbf{J}(\rho, \phi)$, 使用极分解(5.9.3节)将该函数分为厄米(二向衰减)矩阵函数 $\mathbf{H}(\rho, \phi)$ 和酉(延迟)矩阵函数 $\mathbf{U}(\rho, \phi)$,

$$\mathbf{J}(\rho, \phi) = \mathbf{H}(\rho, \phi) \cdot \mathbf{U}(\rho, \phi) \quad (15.42)$$

$\mathbf{H}(\rho, \phi)$ 和 $\mathbf{U}(\rho, \phi)$ 都有四个自由度。延迟依照第14章分解,使用矩阵对数将 $\mathbf{U}(\rho, \phi)$ 分解为代表平均相位 ϕ 的泡利分量,即 0° 和 45° 线性延迟分量 δ_H 和 δ_{45} , 以及圆形延迟分量 δ_L ,

$$2i\ln\mathbf{U} = \phi\sigma_0 + \delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 + \delta_L\sigma_3 \quad (15.43)$$

这确定了琼斯光瞳的线性延迟部分,该部分具有相应的线性延迟琼斯矩阵

$$\begin{aligned} \mathbf{LR}(\delta_{\text{线性}}, \theta) &= \exp(-i(\delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2)/2) \\ &= \sigma_0 \cos\left(\frac{\delta_{\text{线性}}}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\delta_{\text{线性}}}{2}\right) \begin{pmatrix} \delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2 \\ \delta_{\text{线性}} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (15.44)$$

接下来,使 $\mathbf{LR}(\delta_{\text{线性}}, \theta)$ 角度加倍($\theta \rightarrow 2\theta$),并将其视为一个矢量函数,展开为矢量泽尼克多项式。线性延迟量是 $\delta_{\text{线性}} = \sqrt{\delta_H^2 + \delta_{45}^2}$ 。对应于 $\delta_H\sigma_1 + \delta_{45}\sigma_2$ 的 $\mathbf{LR}$ 用定向器 $\mathbf{O}(\delta_{\text{线性}}, 2\theta)$ 展开,通过加倍方向角并用矢量泽尼克多项式展开 $\mathbf{O}(\delta_{\text{线性}}, 2\theta)$ 。相位,即“标量”波像差,将像往常一样展开为“标量”或普通的泽尼克多项式。线性延迟通常包含大部分延迟,但任何显著的圆延迟也可用它自身的标量泽尼克多项式集展开。表征和理解线性延迟通常比圆延迟更重要。

现在,线性延迟由矢量泽尼克多项式之和给出:

$$\mathbf{O}(\delta_{\text{Lin}}, 2\theta)(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{e=0}^1 \Delta_{n,e}^m \mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi) \quad (15.45)$$

以类似于泡利矩阵表示法的形式。系数 $\Delta_{n,e}^m$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \mathbf{O}(\delta_{\text{Lin}}, 2\theta)(\rho, \phi) \cdot \mathbf{E}_1(\rho, \phi) \rho d\phi d\rho = \Delta_{n,e}^m \quad (15.46)$$

描述每个矢量泽尼克多项式项的数量,以及延迟光瞳图中相应的定向器项,类似于波前的泽尼克多项式系数。

15.2.1节显示,对于较小的线性延迟值, $\delta_{\text{线性}} \ll 1$, 泡利形式的延迟可相加。因此,表示为矢量泽尼克多项式的线性延迟定向器在弱延迟限定条件下也可相加。如果弱延迟系统的几个部分表示为矢量泽尼克多项式,

$$\mathbf{O}_1(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{e=0}^1 \Delta_{n,e}^m \mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi), \quad \mathbf{O}_2(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \sum_{e=0}^1 E_{n,e}^m \mathbf{V}_{n,e}^m(\rho, \phi), \dots \quad (15.47)$$

由此产生的线性延迟分布可近似表示为每个对应的矢量泽尼克多项式项的系数之和, $\Delta_{n,e}^m + E_{n,e}^m + F_{n,e}^m + \dots$ 。Ruoff 和 Totzeck 的著作第八节中给出了该方法的应用例子^[8]。

为了用定向器的展开表示二向衰减图,应用了前述用于延迟的相同程序,但根据14.4.5节的程序,线性二向衰减是从琼斯矩阵厄米部分的矩阵对数中获得的。

15.6 偏振像差测量

偏振测量术可用于测量光学系统的偏振像差,并用于表征光学和偏振元件。本节提供了一些偏振像差测量的例子。光学系统偏振像差可通过将系统置于米勒矩阵成像偏振测量仪(如 Axometrics AxoStep 米勒矩阵成像偏振仪)的样品室中来测量。通常,对出瞳进行成像,测量米勒矩阵为光瞳坐标的函数。容易得出线性二向衰减、线性延迟和其他度量的分布图。这样的米勒矩阵光瞳图像很容易转换为琼斯光瞳,但非干涉式米勒矩阵成像装置不能测量得到绝对相位(波像差)。

图 15.49(a)显示了用于测量一对 0.55 数值孔径显微物镜偏振像差的偏振仪方案。来自偏振发生器的准直光进入第一个物镜的光瞳,聚焦于两个物镜的共同焦点,由第二个物镜重新准直,并由偏振态分析器测量。图 15.49(b)显示了测量得到的这对物镜的米勒矩阵光瞳图像,这种物镜作为专用于偏光显微镜的低偏振物镜出售。图 15.50 绘制了根据米勒矩阵图像计算的二向衰减和延迟图。这对显微物镜具有最大 5.4° 的延迟空间变化和 0.1 的二向衰减空间变化。当放置在正交线偏振器之间时,这对物镜将泄漏约 0.15% 的入射光通量(光瞳上的平均值)。

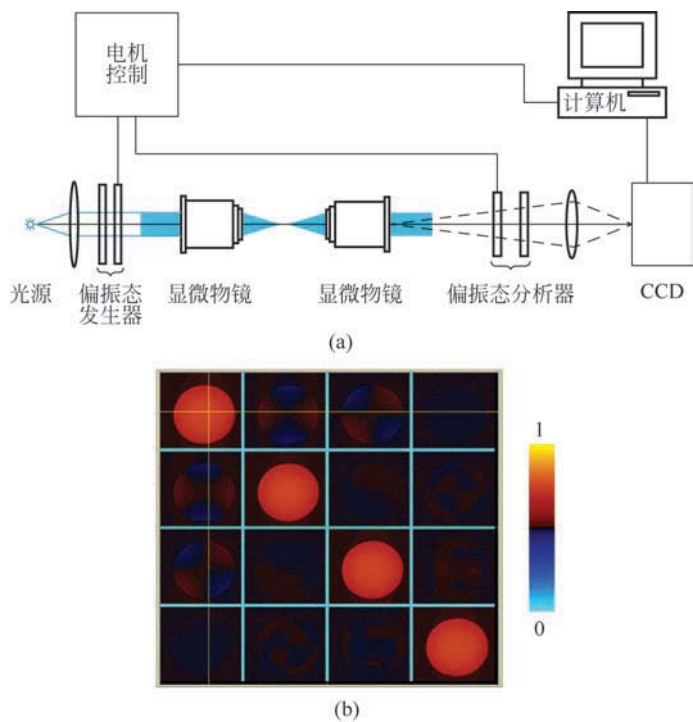


图 15.49 米勒矩阵成像偏振仪测量一对显微物镜偏振像差的示意图(a)。在此配置中,相机调焦在显微物镜的出瞳上。(b)显微物镜对的米勒矩阵图像接近单位矩阵,上面一行有明显的弱线性二向衰减,右下 3×3 矩阵的非对角元有延迟

图 15.51 显示了另一对显微镜的二向衰减和延迟像差,该对显微物镜通过薄膜镀膜设计进一步减小了偏振像差。图 15.52(a)示意性地显示了正交偏振器之间的显微物镜,而

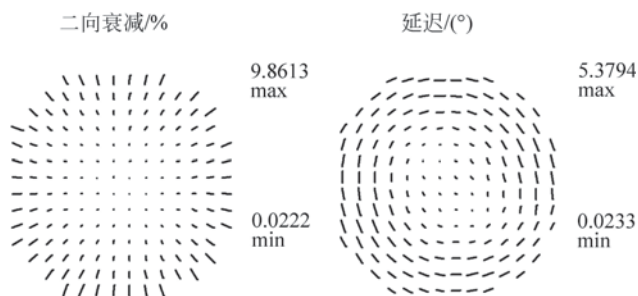


图 15.50 一对显微物镜的线性二向衰减和线性延迟光瞳图,几乎如预期的那样是径向对称的。偏离径向对称可能是由于轻微倾斜和偏心

图 15.52(b)显示了出瞳中的光通量分布。

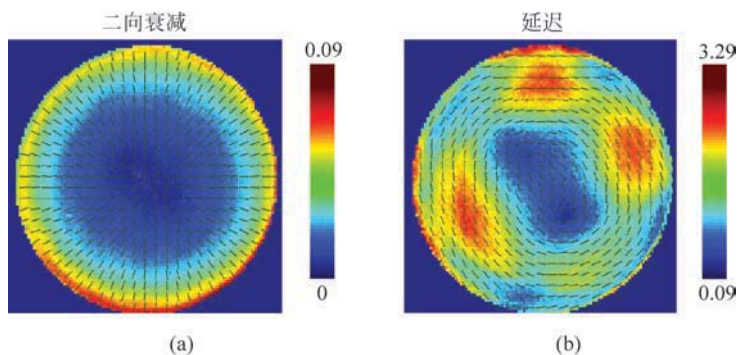


图 15.51 另一对具有减偏振膜设计的显微物镜的二向衰减(a)和延迟(b)像差。这对低偏振显微物镜在正交偏振器之间的漏光



图 15.52 (a)正交偏振器之间的显微物镜,(b)出瞳中的光通量分布

当存在明显的偏振像差时,以均匀偏振态入射的光学系统将在点扩展函数上发生偏振变化。为了表征这些变化以及点扩展函数对入射偏振态的相关性,将米勒矩阵成像偏振测量仪聚焦于物点的像,并测量米勒点扩展矩阵 **MPSM**,作为米勒矩阵图像(16.5 节)。图 15.53 显示了具有大偏振像差的测量 **MPSM**。将涡旋延迟器(5.6.3 节)放置在成像系统的光瞳中,该成像系统以大 $F/\#$ 成像在相机焦平面上,并获得米勒矩阵图像。该涡旋延迟器是一种半波线性延迟器,其快轴随光瞳角度的变化而变化^[9]。光瞳图像(图(a))显示了光瞳中延迟方向变化了 360° ,图(b)为 **MPSM**。当入射光的斯托克斯矢量乘以 **MPSM** 时,生成的斯托克斯矢量函数描述了图像内的光通量(点扩散函数)和偏振态变化,其为斯托克斯

矢量图像。图 15.54 显示了针对固定入射偏振态和多个分析器的点扩展函数,展示了点扩展函数内的偏振变化。

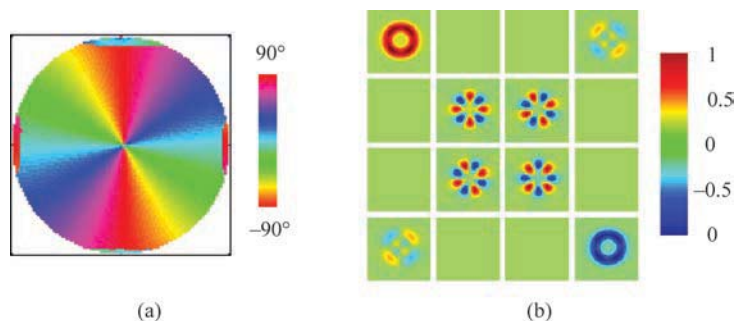


图 15.53 (a)半波涡旋延迟器的快轴方向围绕光瞳旋转 360° 。(b)米勒点扩展矩阵(MPSM)将点扩展函数的偏振相关性描述为米勒矩阵图像

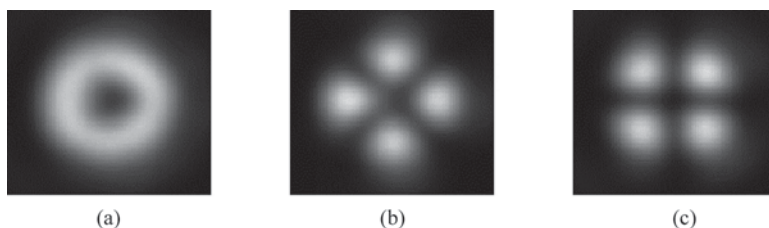


图 15.54 涡旋延迟器的测量点扩展函数随检偏状态完全改变:(a)无检偏器,(b)水平线性检偏器,(c)垂直线性检偏器。输入的是水平线偏振光

图 15.55 显示了从膜层被热损坏并开始剥落的透镜上测得的退偏像差^[10]。由此产生的米勒矩阵光瞳图像显示损坏区域的退偏率为千分之几。未受损区域的退偏率仅为万分之几,这是镀膜透镜的典型特征。

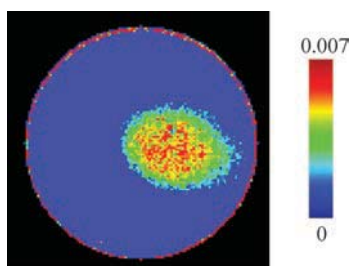


图 15.55 透镜的退偏指数,中心右侧膜层损坏导致约 0.005 的退偏

15.7 总结与结论

近轴光学为焦距和光学系统的其他“一阶”特性给出了直接而有意义的定义。近轴光学构成了像差理论的基础坐标系。赛德尔波像差定义为相对近轴性能的偏差。类似地,对于偏振像差的推导,近轴光学为推导低阶形式的偏振像差提供了极好的基础。事实上,可由二

阶偏振像差很好地描述的光学系统的扩展量范围通常远大于由四阶波像差描述的扩展量范围,也就是该区域中球差、彗差、像散、场曲的贡献远小于一个波长的光程长度。

光学设计师和光学工程师应该知晓,大多数光学系统中 95% 的偏振像差通常可以用三个术语来描述,即偏振离焦、偏振倾斜和偏振平移。

15.8 附录

15.8.1 近轴光学

近轴光学是在光轴附近通过径向对称光学系统的光线路径的光学。随着光线路径接近光轴,斯涅耳定律的线性近似和光线截点的位置变得越来越精确。在近轴光学中,来自一个物点的所有光线在同一像点相交,形成一个“理想像”。因此,近轴光学形成了描述像差非常好的坐标系;像差是相对近轴特性的偏差。本节给出了近轴光线追迹的简要总结,并补充计算了近轴斜光线的入射角和传播矢量(这是一个关键结果)。

近轴光学用于定义焦距、节点、主平面、光瞳位置、放大率和光学系统的其他“一阶”特性。我们的兴趣主要是近轴偏振像差,因此,本节不研究这些计算;读者可参考约翰·格雷文坎普(John Greivenkamp)的《几何光学指南》^[11],其中的符号已在本节采用。

光学系统的近轴区域是靠近光轴的一个小区域,在该区域中应用斯涅耳定律的线性形式可精确计算光线路径。在折射界面处,斯涅耳定律将折射率为 n_1 的入射介质中的入射角 θ_1 与折射率为 n_2 的介质中的折射角 θ_2 联系起来,

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (15.48)$$

对于在光轴附近传播的光线,入射角很小;因此,将 $\sin \theta$ 替换为其线性近似 θ 可以得到近轴形式的斯涅耳定律

$$n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2 \quad (15.49)$$

在计算近轴光线的光线截点时,只需要截点的线性近似值。由于圆弧、抛物线和其他圆锥曲线围绕顶点呈二次曲线变化,因此近轴光线追迹可忽略弧垂;近轴光线截点是光线与顶点平面的交点。

由于近轴光学的线性,由两条线性独立近轴光线的线性组合可以构造所有近轴光线。按照惯例,这两条光线被选为边缘光线和主光线。边缘光线在 y - z 平面中选取,从物中心穿过入瞳顶部和光阑边缘。主光线是从视场边缘上的一点发出,并穿过入瞳中心和光阑中心的光线。我们区分了近轴边缘光线和(实际)边缘光线,以及近轴主光线和(实际)主光线。图 15.56 显示了一个示例光学系统,其中 y - z 平面上有一条边缘光线, x - z 平面上有一条主光线,以及 yz 边缘光线和 xz 主光线相加后形成的一条斜光线。

利用主光线和边缘光线的近轴光线追迹的结果,以及菲涅耳系数、振幅反射和透射系数的二次泰勒级数展开系数,可以得到简单的近似和易于计算的偏振像差展开。

15.8.2 建立光学系统

径向对称光学系统在参考波长处由一组厚度 t_q 、折射率 n_q 和曲率 C_q 定义。曲率是曲

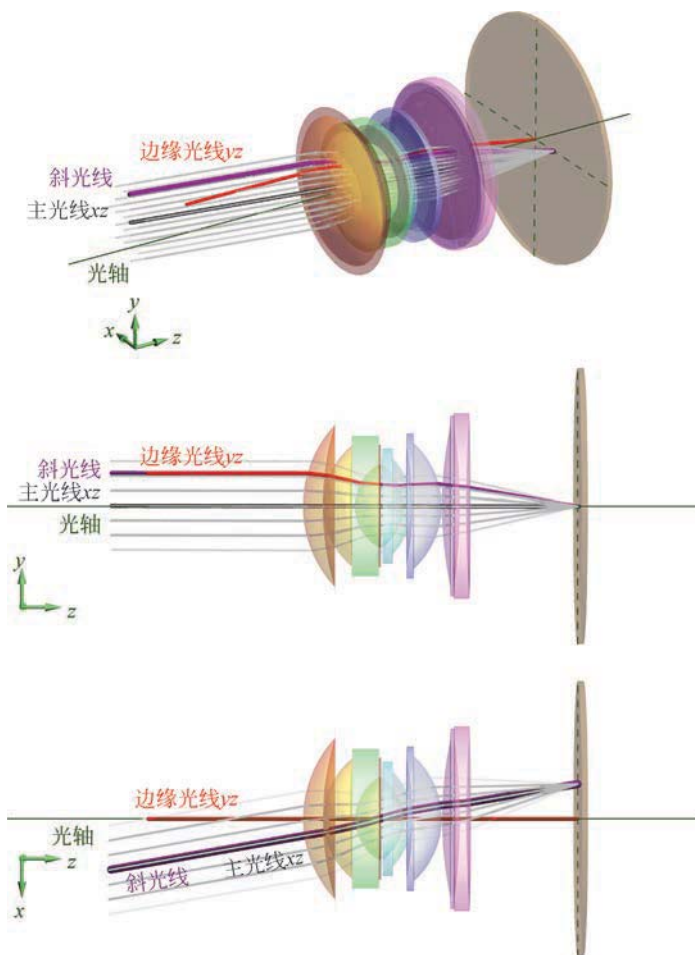


图 15.56 在 xz 平面中以 30° 视场角通过示例镜头传播的准直光线阵列(灰色),分别显示于透视图、 yz 平面和 xz 平面中。光线阵列中的主光线以黑色显示,在 xz 平面中传播。 yz 平面中的边缘光线显示为红色。准直光线阵列中的斜光线(紫色)可通过边缘光线和主光线的组合来计算(1 边缘光线高度+1 主光线高度)

面曲率半径 R 的倒数,单位为 mm^{-1} 。序数 $q=0,1,2,\dots,Q-1,Q$ 标记各表面。 $q=0$ 表示物面,也可由下标 O 表示。 $q=Q=I$ 表示像面。下标 E 表示入瞳;通常,入瞳是光学系统中的第一个面。同样,下标 X 表示出瞳。通常, $q=Q-1$ 将是出瞳。面 q 的光焦度 Φ_q ,即聚焦光的能力,为

$$\Phi_q = (n_q - n_{q-1})c_q \quad (15.50)$$

其度量单位为 mm^{-1} 。

近轴光线追迹计算可以做成标准表格, $y-n-u$ 光线追迹表(表 15.2),或者信息可以组织成计算机中的等效数据结构。在前三行中输入光学系统参数 C_q 、 t_q 和 n_q 。计算第四行和第五行的透镜表面光焦度 Φ_q 和约化厚度。

表 15.2 y - n - u 近轴光线追迹表

	C_1	C_2	C_3	C_4	
t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	
n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	

	$-\Phi_1$	$-\Phi_2$	$-\Phi_3$	$-\Phi_4$	
t_0/n_0	t_1/n_1	t_2/n_2	t_3/n_3	t_4/n_4	

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	
nu_0	nu_1	nu_2	nu_3		
u_0	u_1	u_2	u_3		

$\bar{y}_0$	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_4$	
$\overline{nu}_{c0}$	$\overline{nu}_{c1}$	$\overline{nu}_{c2}$	$\overline{nu}_{c3}$		
$\bar{u}_{c0}$	$\bar{u}_{c1}$	$\bar{u}_{c2}$	$\bar{u}_{c3}$		

15.8.3 近轴光线追迹

一般近轴光线追迹程序追迹两条光线,近轴边缘光线(从物中心到入瞳边缘)和全视场近轴主光线(从物顶点到入瞳中心)^[12]。所有近轴光线都可以通过这两条光线的线性组合来计算。将在 y - z 平面上进行近轴光线追迹。假设光学系统是固定的。开启光线追迹,计算光线在系统中的路径。考虑一个例子,即 y - z 平面中的子午光线。光线以 y_0 和 u_0 始于物平面。计算得到光线在第一个面的顶点平面上的截点位置 y_1 。入射角 θ_1 由 u_0 和法线计算得出。然后,光线被反射或折射以确定 u_1 。对第二个面、第三个面等重复该过程,直到到达像面为止。

近轴边缘光线高度由 $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{Q-1}, y_Q$ 表示。近轴边缘光线角度,即相对于光轴的角度,由 $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{Q-1}, u_Q$ 表示。如果从光轴到光线逆时针旋转,则光线的斜角 u 为正。近轴角定义为实际角度的正切值;因此,近轴光线追迹相对于光线角度和光线高度呈线性关系。入射的边缘光线角由 $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{Q-1}, \theta_Q$ 表示。主光线相关的量由相同的字母和下标表示,但字母上方有一条横线,如 $\bar{y}_q, \bar{u}_q$ 和 $\bar{\theta}_q$ 。

边缘光线从轴上 $y_0=0$ 开始,选取 u_0 射向入瞳的边缘。主光线从物的边缘 $\bar{y}_q$ 开始,选取角度为 $\bar{u}_q$ 使光线通过入瞳中心。边缘光线的起始值 $y_0=0$ 和 u_0 输入下两行的左侧,选择该值以使边缘光线与入瞳边缘相交。主光线的起始值 $\bar{y}_0$ 和 $\bar{u}_0$ 被输入选定的下两行中,以使主光线与入瞳中心相交。定义了边缘和主光线起始值后,光线通过近轴光线传递方程从每个面 q 传递到下一个面 $q+1$,

$$y_{q+1} = y_q + u_q t_q \quad \text{和} \quad \bar{y}_q = \bar{y}_{q-1} + \bar{u}_q t_q \quad (15.51)$$

然后,应用近轴折射方程和修正值 y_q 和 $\bar{y}_q$ 计算边缘光线角

$$n_q u_q = n_{q-1} u_{q-1} - y_q \Phi_q \quad (15.52)$$

和主光线角

$$n_q \bar{u}_q = n_{q-1} \bar{u}_{q-1} - \bar{y}_q \Phi_q \quad (15.53)$$

重复地应用传递和折射来完成这些行,系统地填充光线追迹表的空白条目。然后计算边缘和主光线截点的入射角 θ_q ,它定义为光线与光线截点的法线之间的角度,

$$\theta_q = u_q - \eta_{\text{近轴球面}} = u_q + y_q C_q \quad (15.54)$$

如图 15.57 所示,如果从面法线到光线为逆时针旋转,则 θ 为正。许多文献中提出的近轴光线追迹算法不包括 θ ,求解光线坐标和基点时不需要它。对于偏振分析,计算 θ 是一个必要的目标,因为计算菲涅耳系数和振幅系数以及计算界面的偏振时需要 θ 。

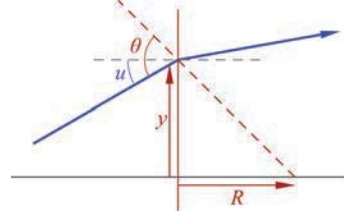


图 15.57 入射角为 θ 、近轴角为 u 和光线高度为 y 的一条光线(蓝色)与曲率半径为 R 的表面相交

对于反射面,光焦度设置为 $-\Phi_q$ 。平面反射镜的光焦度为 -1 。表面上点 r 处的面法线 η 是入射面中的向量,入射面在 r 处垂直于切平面。按照惯例, η 在光线截点处从入射介质指向折射介质。如果从光轴到 η 为顺时针旋转,则表面法线的斜率(标量 η)为正。对表面作抛物线拟合计算得到近轴角 η 。对于曲率为 C 的球面, y - z 平面上的矢高及其二阶近似值为

$$z(y) = R - \sqrt{R^2 - y^2} \approx \frac{y^2}{2R} = \frac{Cy^2}{2} \quad (15.55)$$

如图 15.58 所示,对于二阶近似,球面与密切抛物面相同。近轴球面法线的斜率为

$$\eta_{\text{近轴球面}} = yC \quad (15.56)$$

u 和 $\eta_{\text{近轴球面}}$ 的定义与斜率的常规定义一致

$$m = \frac{df(y)}{dz} \quad (15.57)$$

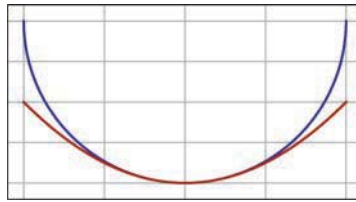


图 15.58 球面(蓝色)及其密切抛物面(红色)在顶点处形状匹配到二阶

15.8.4 约化厚度和约化角度

通过将折射率合并入角度和厚度,可简化近轴传递和折射。约化角 ω 是近轴角乘以折射率,

$$\omega_q = n_q u_q \quad \text{和} \quad \omega_q = n_q \bar{u}_q \quad (15.58)$$

约化厚度 τ 是物理厚度除以折射率

$$\tau_q = t_q / n_q \quad (15.59)$$

使用约化参量,在第 q 个光线截点处,边缘和主光线的近轴传递和折射方程采用以下简

化形式:

$$\begin{cases} y_{q+1} = y_q + \omega_q \tau_q \\ \bar{y}_{q+1} = \bar{y}_q + \bar{\omega}_q \tau_q \\ \omega_{q+1} = \omega_q - y_q \phi_q \\ \bar{\omega}_{q+1} = \bar{\omega}_q - \bar{y}_q \phi_q \end{cases} \quad (15.60)$$

15.8.5 近轴斜光线

18.5 节的倾斜像差算法需要有近轴倾斜光线的传播矢量 $\mathbf{k}_q$ 。由于近轴光学的线性,任何子午近轴光线都可以表示为两条线性无关的子午光线(如边缘光线和主光线)的线性组合。任意近轴斜光线可以表示为四条线性独立的近轴光线的线性组合; y - z 平面中的主光线和边缘光线以及旋转到 x - z 平面中的主光线和边缘光线用作基本光线集。

因此,对于从物点 (G, H) 过光阑位置 (x, y) 的光线,在第 q 个表面上的光线截点为

$$(x_q, y_q) = (Gy_q + x_e y_{m,q}, H\bar{y}_q + y_e y_{m,q}) \quad (15.61)$$

其中 G 和 H 是归一化物坐标, G 沿 x 轴, H 沿 y 轴。进行归一化,以便沿着圆形视场的边缘(由物平面上的主光线高度定义), $\sqrt{G^2 + H^2} = 1$ 。同样,第 q 个界面后的光线斜率为

$$(u_{x,q}, u_{y,q}) = (Gu_{c,q} + x_e u_{m,q}, Hu_{c,q} + y_e u_{m,q}) \quad (15.62)$$

对于斜光线,有必要区分相对于 x 轴(下标 x)和 y 轴(下标 y)度量的量。

倾斜像差的计算使用第 q 个光线截点后沿着 $(y_{q+1} - y_q, \bar{y}_{q+1} - \bar{y}_q, t_q)$ 的传播矢量 $\mathbf{k}_q$ 。归一化传播矢量 $\mathbf{k}_q$ 为

$$\mathbf{k}_q = \frac{(\omega_q, \bar{\omega}_q, 1)}{\sqrt{\omega_q^2 + \bar{\omega}_q^2 + 1}} \approx (\omega_q, \bar{\omega}_q, 1) \quad (15.63)$$

15.9 习题集

15.1 求近轴硅界面($n=4$)的偏振像差函数,轴上光束的边缘光线入射角为 0.2rad 。

15.2 以弱偏振元件形式表示以下偏振元件的琼斯矩阵:

$$\mathbf{J} = \rho_0 e^{-i\phi_0} \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{d_1 - i\delta_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{d_2 - i\delta_2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{d_3 - i\delta_3}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right]$$

- $\mathbf{J}_1$: 理想线性二向衰减器, $D_1 = 0.02$, 透射轴为 0° , 平均透过率为 1。
- $\mathbf{J}_2$: 理想线性延迟器, $\delta_2 = 0.006$, 快轴为 45° , 平均透过率为 1。
- $\mathbf{J}_3$: 理想线性延迟器, $\delta_3 = 0.01$, 快轴为 $\theta_3 = \arctan(3/4)/2$, 平均透过率为 $3/5$ 。
- 用弱偏振元件形式表示 $\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2$ 和 $\mathbf{J}_2 \mathbf{J}_1$ 。
- 哪种偏振效应是顺序无关的?
- 哪种偏振效应是顺序相关的?
- 用弱偏振元件形式表示 $\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_3$, 仅保留一阶项。
- 证明 $\mathbf{J}_1 \mathbf{J}_2 \mathbf{J}_3$ 的一阶项是顺序无关的, 是泡利系数之和。

15.3 一束光通过五个弱二向衰减器序列, 每个二向衰减器的二向衰减率为 $D = 0.01$ 。二

向衰减透射轴的方向角为 0° 、 22.5° 、 45° 、 67.5° 和 90° 。

a. 用弱偏振元件形式表示每个琼斯矩阵。求每个元件的 σ_1 和 σ_2 分量。

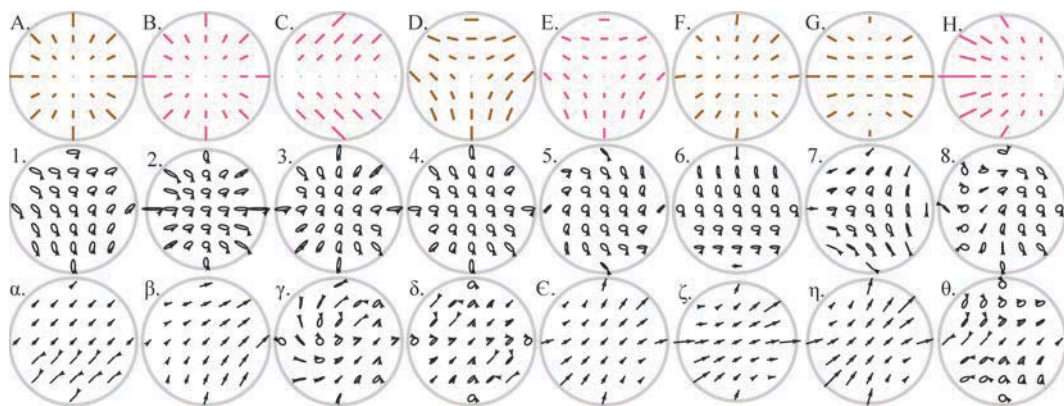
b. 把分量相加, 净二向衰减率是多少?

c. 二向衰减透射轴的方向是什么?

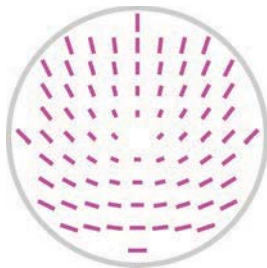
15.4 第一行包含 8 个偏振像差图, 标记为 A 到 H。棕色线表示线性二向衰减大小和方向的光瞳图, 粉红色线代表线性延迟。这些像差图用于生成第二行和第三行中的椭圆图。第二行已重新排列, 第三行也已重新排列。

a. 将第二行中标记为 1 到 8 的每个椭圆图与相应的偏振像差图配对, 并指出入射偏振态。

b. 将第三行中标记为 α 到 θ 的每个椭圆图与相应的偏振像差图配对, 并指出入射偏振态。



15.5 一个光学系统对特定物点有延迟倾斜。光瞳中任何位置的二向衰减都是零。延迟大小从光瞳中心线性增大。延迟的快轴方向 ψ (以度表示) 取决于光瞳中的角度 θ , 即 $\psi(\theta) = 45 - \theta/2$ 。这种延迟像差模式可以用图形表示如下:



每条线段的中心位置表示光瞳中的一个位置, 线段的长度表示延迟量大小, 方向表示延迟快轴的方向。假设光瞳边缘的最大延迟远小于 1rad 。(注: 此题无需计算。)

a. 在光瞳中的哪个位置, 对于所有偏振态都没有偏振态变化?

b. 在光瞳中的哪个位置, 对于 45° 线偏振光没有偏振态的变化?

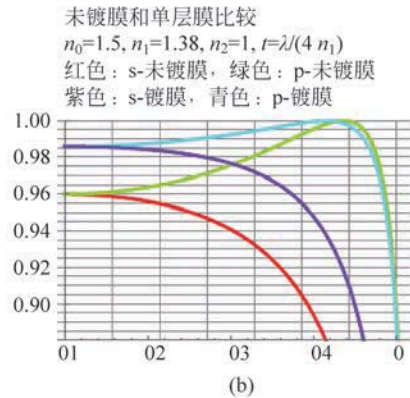
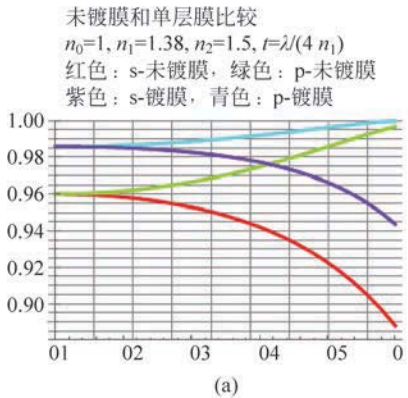
c. 如果将光学系统放置在具有水平线性起偏器和垂直线性检偏器的线性偏光仪中, 则出瞳上的光通量分布将是什么? 光通量是线性变化还是二次变化的?

d. 如果将光学系统放置在带有右旋圆起偏器和左旋圆检偏器的圆偏光仪中, 请描述

出瞳中的光通量分布。

- e. 对于什么样的入射偏振态, 偏振变化(在光瞳中积分)最大, 为什么? 这是偏光仪的总漏光量。

- 15.6 四片式镜头有八个表面。所有镜片均由相同的玻璃制成。制造了有镀膜的透镜组件和无镀膜的透镜组件。将对这些进行比较。这些表面由下面所示的光强透射率描述。图(a)表示进入镜头的光(外部折射、奇数界面)。图(b)显示的是从镜头出射的光(内部折射)。



- a. 估算镀膜和未镀膜镜头沿光轴方向的光强透射率和二向衰减。
 b. 如果边缘光线在每个连续的透镜表面的入射角为 $0.8\text{rad}, 0.4\text{rad}, 0.6\text{rad}, 0.1\text{rad}, 0.2\text{rad}, 0.3\text{rad}, 0.7\text{rad}, 0.5\text{rad}$, 则估计通过未镀膜镜头的边缘光线路径的二向衰减。
 c. 对于镀有减反膜的镜头, 重复 b. 的估算。

- 15.7 以下问题(a. 至 d.), 假设一种玻璃, 它对于小角度的二向衰减率为 $D(\text{AoI}) = d_2 \text{AoI}^2$ 。为每个问题用 $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$ 和 σ_3 写出一个偏振像差函数。例如, 沿 y 轴偏移

的偏振离焦的偏振像差函数, 琼斯矩阵 $\mathbf{J}(x, y) = \sigma_0 + \frac{d_H - i\delta_H}{2} [\sigma_1(x^2 - (y - y_0)^2) + \sigma_2 2x(y - y_0)]$, 其中 d_H 是光瞳边缘的二向衰减大小, δ_H 是光瞳边缘的延迟大小, y_0 是沿 y 轴的光瞳偏移, 以及 (x, y) 是归一化光瞳坐标。(请随意作简化近似。)

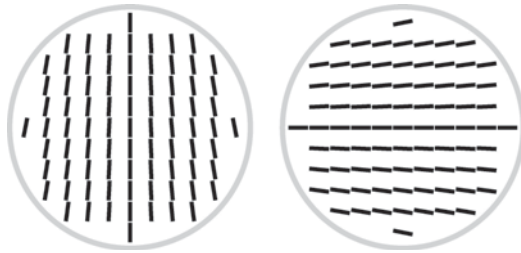
- a. 一准直光束被一个棱镜偏折 30° 。在每个表面上空气中的角度相等, 内角也相等。
 b. 直径为 2mm 的准直光束进入半径为 10mm 的球面, 球面顶点向 $+x$ 方向移动 1mm 。
 c. 光正入射进入直径为 2mm 的平板玻璃表面, 然后通过一个的三次相位板 $z = 0.01(x + y)^3$ 离开。
 d. 会聚球面光束进入并聚焦在球形弹珠的中心, 然后从背面折射出去。

对于下面的情形, 假设一个金属反射镜, 它对于小角度的二向衰减为 $D(\text{AoI}) = d_2 \text{AoI}^2$, 对于小角度的延迟量为 $\delta(\text{AoI}) = \delta_2 \text{AoI}^2$ 。

- e. 数值孔径为 0.2 的光束, 中心光线从反射镜正入射反射。
 f. 数值孔径为 0.2 的光束, 中心光线 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, 从反射器反射, 反射镜法线为 $\boldsymbol{\eta} =$

$$(0.2, 0, \sqrt{1-0.2^2}).$$

- g. 数值孔径为 0.2 的光束, 中心光线 $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$, 从反射镜反射, 反射镜法线为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (\sin 0.2, 0, \cos 0.2)$, 然后从第二个法线为 $\boldsymbol{\eta}_1 = (\sin 0.4, \sin 0.2, \sqrt{1 - \sin^2 0.4 - \sin^2 0.2})$ 的反射镜反射。
- h. 直径为 2mm 的准直光束从环形面 $z = 0.06xy$ 的反射。
- 15.8 两个相同的片状延迟器, 延迟量为 $\delta = 0.1 \approx 6^\circ$ 。由于制造过程中的拉伸, 延迟器的快轴从延迟器的一侧到另一侧稳定变化, 如图所示, 变化 $\pm 3^\circ$ 。然后将其中一个延迟器旋转 90° , 以便快轴在中心正交。



- a. 使用弱偏振近似计算组合延迟器的延迟。
- b. 会出现什么高阶效应, 它们会有多小?
- c. 在水平偏振器和垂直偏振器之间的泄漏会有多少?
- 15.9 对于 $H = (0, h_0)$, 给定主入射角和边缘入射角 i_c 和 i_m , 光瞳中哪个点处于正入射, $\theta = 0$?
- 15.10 对于 $\theta(H=1, \rho=1)$ 等于零, i_c 和 i_m 的条件是什么?
- 15.11 在图 15.8 中, 假设边缘光线的二向衰减率为 0.3, 如果四个波前透过垂直检偏器, 光通量 $P(\rho, \phi)$ 将是多少?

15.10 参考文献

- [1] J. Sasián, Introduction to Aberrations in Optical Imaging Systems, Figure 15.8, Cambridge University Press (2013).
- [2] H. Kuboda and S. Inoue, Diffraction images in the polarizing microscope, J. Opt. Soc. Am 49 (1959): 191-192.
- [3] R. A. Chipman, Polarization analysis of optical systems, Opt. Eng. 28(2) (1989): 90-99.
- [4] R. A. Chipman, Polarization aberrations, PhD dissertation, Optical Sciences Center, University of Arizona, Tucson, AZ (1987).
- [5] J. P. McGuire and R. A. Chipman, Polarization aberrations. 1. Rotationally symmetric optical systems, Appl. Opt. 33 (1994): 5080-5100.
- [6] R. V. Shack and K. Thompson, Influence of alignment errors of a telescope system on its aberration field, in Proc. SPIE 251, Optical Alignment I, 146 (1980).
- [7] K. Thompson, Description of the third-order optical aberrations of near-circular pupil optical systems without symmetry, J. Opt. Soc. Am. A 22 (2005): 1389-1401.
- [8] J. Ruoff and M. Totzeck, Orientation Zernike polynomials: A useful way to describe the polarization

- effects of optical imaging systems, J. Micro/Nanolithogr. MEMS MOEMS 8, 3 (2009): 031404.
- [9] S. C. McEldowney, et al., Vortex retarders produced from photo-aligned liquid crystal polymers, Opt. Exp. 16(10) (2008): 7295-7308.
- [10] J. Wolfe and R. A. Chipman, Reducing symmetric polarization aberrations in a lens by annealing, Opt. Exp. 12(15) (2004): 3443-3451.
- [11] J. E. Greivenkamp, Field Guide to Geometrical Optics, SPIE Field Guides 1 (2004).
- [12] B. R. Irving, et al., Code V, Introductory User's Guide, Optical Research Associates (2001), p. 82.

第 16 章

有偏振像差的成像

16.1 引言

光学成像系统的一个基本指标是点扩散函数(PSF),它描述了点物体的像。为了计算PSF,物理光学和傅里叶光学算法扩充了几何光学和光线追迹的方法。对于具有偏振像差的系统,PSF 取决于入射偏振态^[1]。本章通过引入振幅响应矩阵(amplitude response matrix, ARM)和米勒点扩展矩阵(Mueller point spread matrix, MPSM),对点扩展函数的概念进行了推广,以描述任意偏振态的成像。本章将展示如何通过使用琼斯矩阵和偏振光线追迹矩阵来推广传统光学设计程序的点扩散函数算法。接下来,讨论具有空间变化偏振态的物体的像计算。偏振像差影响系统的成像质量。第 12 章(菲涅耳像差)和第 15 章(近轴偏振像差)提供了光学系统中偏振像差及其对 PSF 影响的例子。给定波像差函数和琼斯光瞳函数,可计算 MPSM,它展示了 PSF 的偏振结构以及 PSF 如何随入射偏振态而变化。根据 MPSM,可以计算具有任意偏振态的点源的像,并且可以改变入射偏振态并观察得到的像的偏振结构。类似地,可以将传统光学的光学传递函数(OTF)扩展到光学传递矩阵(optical transfer matrix, OTM),以展示成像过程中物的空间滤波如何依赖于入射偏振态。

用相应的响应函数替换物的每个点,来计算扩展物的像。在镜头和其他成像系统中,当从轴上移动到视场的其他部位时,响应函数在视场中变化。等晕区是视场中 PSF 变化较小的区域。然后,简单的线性系统分析方法(ARM 和 MPSM)可以应用于物平面的空间不变区,其大小取决于波像差函数和 $JP(x, y)$ 的变化率^[2]。

图 16.1 和图 16.2 比较了几种算法的流程图,分别用于标量波的相干和非相干成像以及有偏振像差的成像系统。本章将详细描述各运算对象和运算方法。

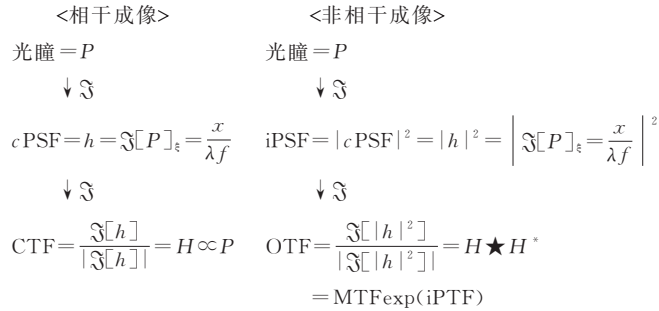


图 16.1 相干和非相干成像计算流程图。光瞳函数 P 表示光学系统出瞳处的波前函数。系统的空间变量为 x , 光的波长为 λ , 成像系统的焦距为 f 。相干点扩散函数为 $c\text{PSF}$ (振幅响应函数 ARF); 相干传递函数为 CTF; 非相干点扩散函数为 $i\text{PSF}$; 光学传递函数为 OTF; 调制传递函数为 MTF; 相位传递函数为 PTF。 $\mathfrak{F}$ 是傅里叶变换运算。 $\star$ 是自相关运算

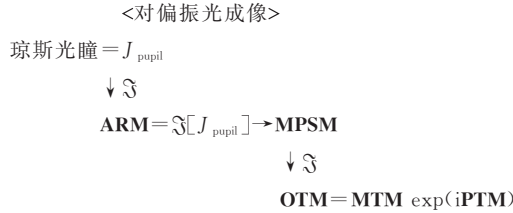


图 16.2 针对偏振光的成像计算。**ARM** 为 2×2 振幅响应矩阵; **MPSM** 为 4×4 米勒点扩展矩阵; **OTM** 为 4×4 光学传递矩阵; **MTM** 为 4×4 调制传递矩阵; **PTM** 是 4×4 相位传递矩阵

16.2 离散傅里叶变换

成像中衍射的计算涉及出瞳函数的傅里叶变换。大多数关于衍射和成像的教科书都提供了涉及简单傅里叶变换对的例子,例如将矩形函数傅里叶变换为 sinc 函数或将高斯函数傅里叶变换为高斯函数。然而,在光学设计中,有必要对任意函数(如高阶像差和不规则光瞳形状)进行傅里叶变换来计算 PSF。此外,光线追迹的结果是采样函数,而不是连续函数。对于光学设计中的此类光瞳函数,作为连续函数进行傅里叶变换评估是困难且不切实际的。离散傅里叶变换(DFT)^[3-5]提供了一种简单直接的算法,可以在规则采样网格上对任意函数进行傅里叶变换。DFT 用于大多数光学设计软件的衍射计算。所有数学软件包,如 MATLAB、Mathematica 等,都提供内置的 DFT 算法。因此,数学小贴士 16.1 中只给出了一个简短的总结。

数学小贴士 16.1 一维离散傅里叶变换

数组 $u = (u_1, u_2, \dots)$ 的一维离散傅里叶变换为

$$U_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (16.1)$$

其中出现 $r-1$ 和 $s-1$ 是因为数组 u 和 U 的序数从 1 开始计数。式(16.1)可写成矩阵乘法,

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ \vdots \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 & e^0 & e^0 & e^0 & \\ e^0 & e^\omega & e^{2\omega} & e^{3\omega} & \\ e^0 & e^{2\omega} & e^{4\omega} & e^{6\omega} & \cdots \\ e^0 & e^{3\omega} & e^{6\omega} & e^{9\omega} & \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (16.2)$$

式中 $\omega = i2\pi/n$ 。 $1/\sqrt{n}$ 是对 DFT 进行归一化。

数组 $U = (U_1, U_2, \dots)$ 的逆离散傅里叶变换为

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^n U_s e^{-2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (16.3)$$

例 16.1 一维 DFT 例子

计算下列数组的一维 DFT。

(1) $u = (\sqrt{2}, 0)$

$$U_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^2 u_r e^{i2\pi(r-1)(1-1)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 0) = 1$$

$$U_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^2 u_r e^{i2\pi(r-1)(2-1)/2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2} + 0) = 1$$

于是, $U = (1, 1)$ 。

(2) $u = (0, 2, 0, 2)$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & e^0 & e^0 & e^0 \\ e^0 & e^{i2\pi/4} & e^{i2 \times 2\pi/4} & e^{i3 \times 2\pi/4} \\ e^0 & e^{i2 \times 2\pi/4} & e^{i4 \times 2\pi/4} & e^{i6 \times 2\pi/4} \\ e^0 & e^{i3 \times 2\pi/4} & e^{i6 \times 2\pi/4} & e^{i9 \times 2\pi/4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此, $U = (2, 0, -2, 0)$ 。

输入函数 u 可用其 DFT 系数表示为

$$u = \frac{1}{\sqrt{4}} [U_1 e^{-i2\pi(r-1)0} + 0 + U_3 e^{-i2\pi(r-1)(3-1)/4}]$$

它将输入数组表示为复指数之和。

数学小贴士 16.2 二维离散傅里叶变换

阵列 $u_{q,r}$ 的二维 DFT 变换是

$$U_{s,t} = \frac{1}{n} \sum_{q=1}^n \sum_{r=1}^n u_{q,r} e^{i2\pi[(r-1)(s-1) + (q-1)(t-1)]/n} \quad (16.4)$$

这可以通过取每行的一维 DFT, 然后取每列的 DFT 来计算。

数学小贴士 16.3 平移函数

二维函数的离散傅里叶变换将 DFT 的原点(常数分量)置于(1,1)元素。该常数分量通常称为直流分量,是输入阵列的平均值。因为“DFT 的中心”位于角点处,所以大多数函数的 DFT 被分割位于其四个角点之间,如图 16.3(a)所示。这使得查看大多数二维 DFT 变得困难。当移位操作后 DFT 原点位于中心时,查看 DFT 函数(如 PSF)更容易。因此,在本章中,DFT 的原点已经平移到中心。

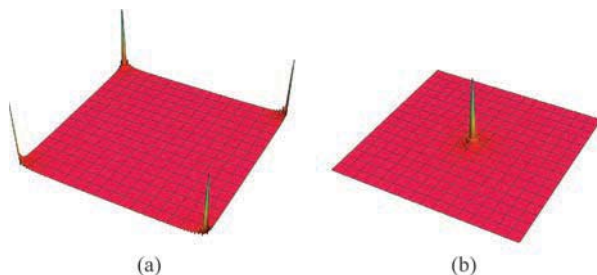


图 16.3 居中矩形孔径的傅里叶变换集中在四个角(a)。将原点移到中心后,傅里叶变换具有预期的外观(b)

数学小贴士 16.4 填充以获得更高的分辨率

为了提高 DFT 的分辨率,输入阵列通常用零填充。琼斯光瞳是出瞳处琼斯矩阵的网格,可以用零矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 填充,如图 16.4 所示,以在傅里叶变换域中实现更高的分辨率。填充网格的大小应至少为原始网格的两倍,以避免混叠。将填充增大到两倍以上可以提高分辨率,因为在傅里叶变换域中有更好的插值。

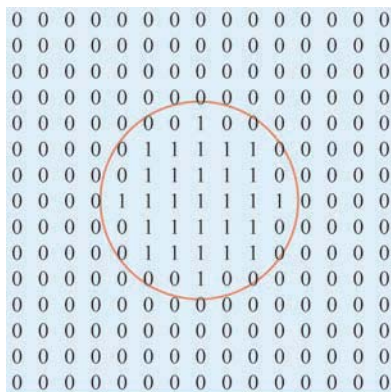


图 16.4 阵列的外围用零填充,使其傅里叶变换有更高分辨率。红色圆圈表示系统的出瞳

16.3 琼斯出瞳和琼斯光瞳函数

成像系统的偏振像差可用出瞳处的琼斯矩阵网格来描述,即第 15 章(近轴偏振像差)中

描述的琼斯出瞳。图 16.5 显示了卡塞格林望远镜,它被用作本章的成像例子。

通过卡塞格林望远镜追迹光线网格,计算轴上物点的琼斯光瞳。双极局部坐标用于描述出瞳处球形参考面上的琼斯矩阵(第 11 章琼斯光瞳和局部坐标系)。图 16.6 显示了琼斯光瞳的振幅和相位。该系统的波像差为零,但它的铝反射镜产生一些偏振像差。

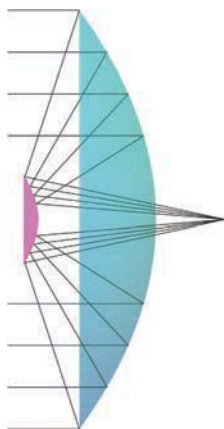


图 16.5 卡塞格林望远镜系统的侧视图,显示了轴上的光线网格。
抛物面主镜为蓝色,双曲面次镜为粉红色

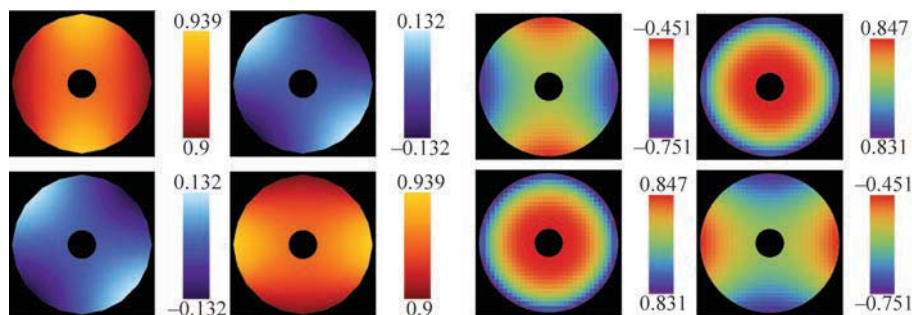


图 16.6 卡塞格林琼斯光瞳的振幅(左)和相位(右)。

追迹轴上光线阵列,并绘制出每一条光线在出瞳处的琼斯矩阵

出瞳处波前和偏振的完整描述可分为四个函数的组合:出瞳处的波像差函数、振幅函数、孔径函数和偏振像差函数。它们的组合称为琼斯光瞳,

$$JP(x, y) = apt(x, y) \cdot a(x, y) \cdot J(x, y) \cdot e^{-2\pi i W(x, y)} \quad (16.5)$$

$apt(x, y)$ 是一个孔径函数,孔径内为 1,孔径外为 0。 $a(x, y)$ 是振幅函数,描述了沿光线路径的透过率,也称为切趾。 $W(x, y)$ 是波像差函数,表征每条光线与主光线之间的光程差。 $J(x, y)$ 是从入瞳到出瞳沿光线路径的琼斯矩阵。 (x, y) 是光瞳坐标。 $JP(x, y)$ 在空间上是变化的,并且是偏振成像计算的起点。例 16.2 和例 16.3 讨论了两个琼斯光瞳函数的例子。

例 16.2 一个波长的离焦量、圆孔径

考虑一个圆孔径的光学系统,孔径半径为 1,具有一个波长离焦量的波像差,均匀的振幅,并且没有偏振像差。由于没有偏振像差, $\mathbf{J}(x,y)$ 是单位矩阵,琼斯光瞳是

$$apt(x,y) = \text{If}(x^2 + y^2 \leq 1, 1, 0)$$

$$a(x,y) = 1, \quad \mathbf{J}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$W(x,y) = W_{020}(x^2 + y^2), \quad W_{020} = 1$$

$$JP(x,y) = apt(x,y) \cdot a(x,y) \cdot J(x,y) \cdot e^{-2\pi i W(x,y)}$$

$JP(x,y)$ 的(1,1)元素的振幅和相位如图 16.7 所示。振幅在孔径内为 1,在图(b)中可以看到一个二次相位。

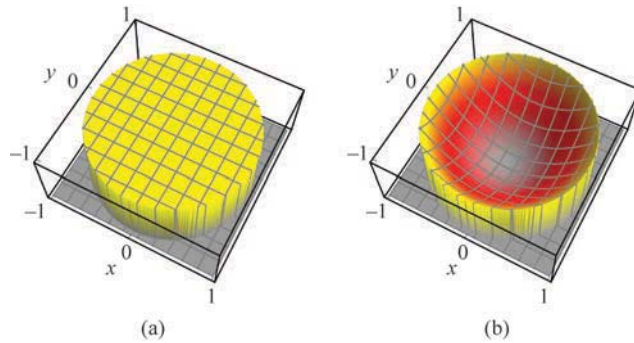


图 16.7 对于 1 个波长离焦量的波像差, $JP(x,y)$ 的(1,1)元素的幅值(a)和相位(b)。
将琼斯光瞳采样到一个方形阵列点上

例 16.3 二次径向延迟

第 15 章(近轴偏振像差)中描述的偏振像差之一是延迟离焦,其延迟量大小随光瞳半径呈二次变化 $\delta_0(x^2 + y^2)$ 。假设光瞳边缘的延迟量大小为 $\delta_0 = 1\lambda$,即 1 个波长的延迟离焦。进一步假设快轴方向切向变化, $\arctan(y/x)$ 。出瞳处的每条光线路径都有一个延迟琼斯矩阵。由于延迟离焦像差,出瞳中的每条光线都会经历不同的延迟大小和延迟方向,如图 16.8 所示。



图 16.8 延迟离焦像差图,其中线段的长度表示延迟的大小,线段的方向表示延迟的方向。

反射镜系统,如卡塞格林望远镜,具有这种形式的切向延迟,但本例中的延迟量幅值较大

假设没有波前像差,并且振幅函数为 1。琼斯光瞳函数是

$$apt(x, y) = \text{If}(x^2 + y^2 \leq 1, 1, 0)$$

$$a(x, y) = 1$$

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{e^{-i\delta_0(x^2+y^2)/2} x^2 + e^{i\delta_0(x^2+y^2)/2} y^2}{x^2 + y^2} & \frac{-2ixy \sin(\delta_0(x^2 + y^2)/2)}{x^2 + y^2} \\ \frac{-2ixy \sin(\delta_0(x^2 + y^2)/2)}{x^2 + y^2} & \frac{e^{i\delta_0(x^2+y^2)/2} x^2 + e^{-i\delta_0(x^2+y^2)/2} y^2}{x^2 + y^2} \end{bmatrix},$$

$$W(x, y) = 0,$$

$$JP(x, y) = apt(x, y) \cdot a(x, y) \cdot \mathbf{J}(x, y) \cdot e^{-2\pi i W(x, y)}$$

图 16.9 显示了 $JP(x, y)$ 四个元素的振幅和相位。卡塞格林望远镜的偏振像差是延迟离焦和二向衰减离焦的组合,其中延迟的贡献较大。

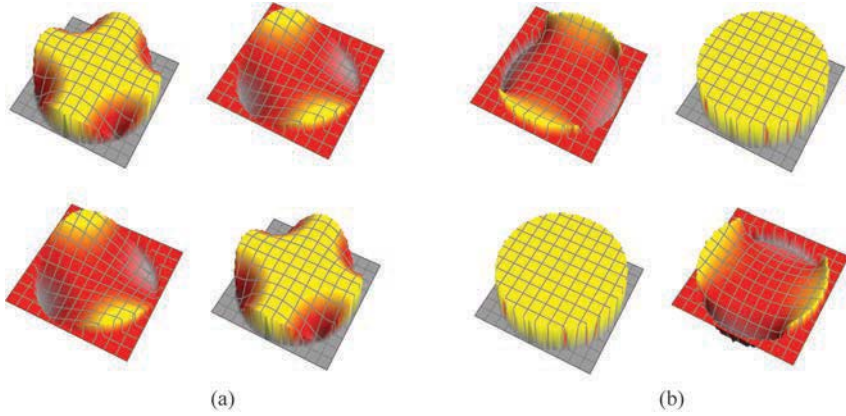


图 16.9 $JP(x, y)$ 的振幅(a)和相位(b),针对延迟离焦

16.4 振幅响应矩阵

在传统光学中,像面的振幅响应函数(ARF)是光瞳函数的傅里叶变换。为考虑偏振像差,将振幅响应函数推广到振幅响应矩阵(ARM),即琼斯光瞳对于相干光的脉冲响应。利用夫琅禾费衍射方程,描述具有连续琼斯光瞳的光学系统像面的 ARM,可由在 z 处观察到的琼斯光瞳函数的二维傅里叶变换来计算,

$$\text{JARM ARM}(\xi, \eta) = \iint_{\text{光瞳}} JP(x, y) \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] dx dy \quad (16.6)$$

如前所述,通过偏振光线追迹均匀采样的琼斯光瞳的 ARM 可以由每个 2×2 元素的 $JP(x, y)$ 的离散傅里叶变换($\mathfrak{F}$)计算,

$$\text{ARM}(r') = \begin{pmatrix} \text{ARM}_{xx}(r') & \text{ARM}_{yx}(r') \\ \text{ARM}_{xy}(r') & \text{ARM}_{yy}(r') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}[JP_{xx}(x, y)] & \mathfrak{F}[JP_{yx}(x, y)] \\ \mathfrak{F}[JP_{xy}(x, y)] & \mathfrak{F}[JP_{yy}(x, y)] \end{pmatrix} \quad (16.7)$$

其中, $\Im(JP_{l,m}(x,y)) = \Im(a p t(x,y) \cdot a(x,y) \cdot J_{l,m}(x,y) \cdot e^{-2\pi i W(x,y)})$ 和 $r' = (x', y')$ 是像面坐标。根据阵列光线的参数, 可从琼斯光瞳由离散傅里叶变换计算 **ARM**。 $JP(x,y)$ 的每个分量是在光瞳处累积的电场值的二维阵列, 并且 **ARM** 的每个分量是表征像平面处脉冲响应的二维阵列。

对于一个给定的点光源, 其琼斯矢量为 $\mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$, 振幅响应矩阵乘以 $\mathbf{E}_0$ 得到像的电场分布 $\mathbf{E}_i(x,y)$, 它表征偏振变化。对于相干成像, x 偏振的入射光产生的像具有 x 偏振的 $\Im(JP_{x,x}(x,y))$ 和 y 偏振的 $\Im(JP_{x,y}(x,y))$ 振幅响应函数。对应的点扩展函数光强是 $|\Im(JP_{x,x}(x,y))|^2 + |\Im(JP_{x,y}(x,y))|^2$, 这也可用 16.5 节中所示的米勒点扩展矩阵 **MPSM** 进行计算得到。

ARM 的四个元素描述了当成像系统位于四个偏振器对 (H&H、V&H、H&V 和 V&V) 之间时看到的四个 ARF, 其中 H 代表水平偏振器, V 代表垂直偏振器。

例 16.4 无像差系统的 ARM

对于具有圆形孔径且无波前、振幅或偏振像差的成像系统, 琼斯出瞳是具有圆形孔径的单位矩阵, 如图 16.10(a) 所示。因此, **ARM** 的对角元素是实值 Somb(sombrero 或 Airy) 函数^[6], 如图 16.10(b) 所示。

因此, 由于 **ARM** 是对角的, 所以点物经过该非偏振系统之后的像没有偏振混合; 像的偏振是均匀的, 并且在任何地方都与入射琼斯矢量相等。

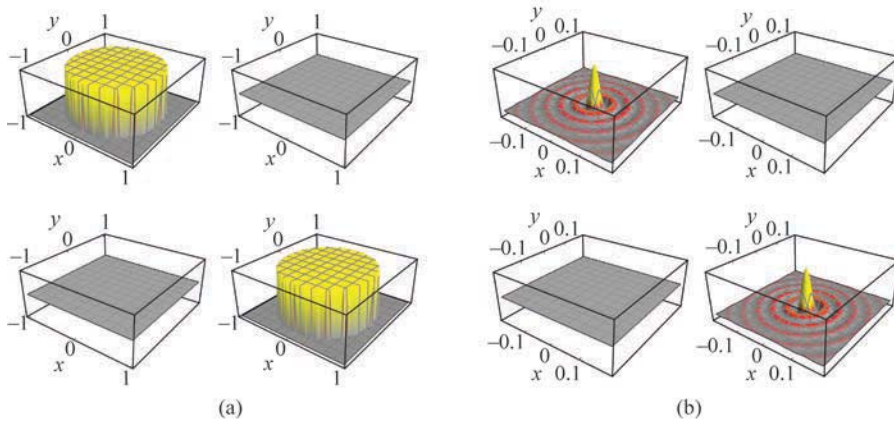


图 16.10 无像差光学系统的(a)琼斯光瞳函数和(b)振幅响应矩阵。
这两个函数的原点都已平移到每个阵列的中心

图 16.11 显示了图 16.5 中铝反射镜 ($n = 0.958 + 6.69i$) 卡塞格林望远镜例子中的琼斯振幅 **ARM**, 其中主镜和次镜的边缘光线入射角分别为 36° 和 42° 。图(b)放大了中心部分。这个卡塞格林望远镜的 **ARM** 具有非对角元素, 这表明偏振混合; 例如, 由于 **ARM** 的非对角元素中有四个凸起, 水平偏振点光源的像会有一个小的垂直偏振分量。然而, 由于对角线元素的相对大小显著大于非对角线元素的相对大小 ($2.388 : 0.101$), 偏振混合很小。

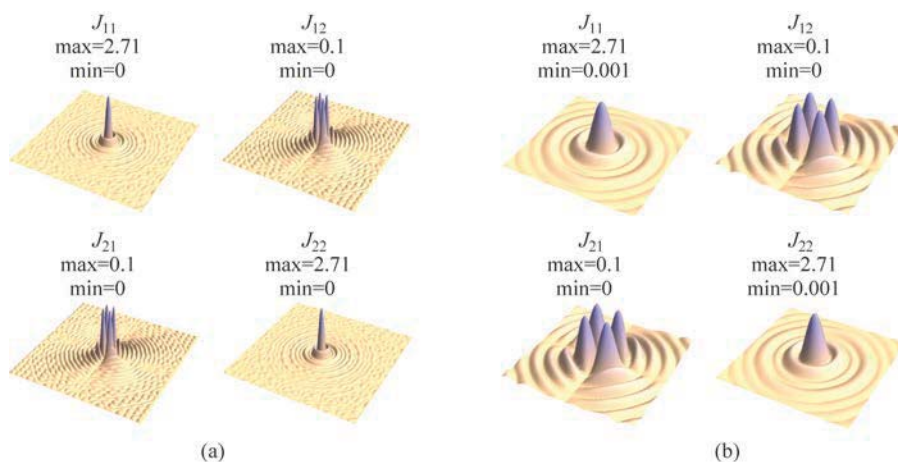


图 16.11 卡塞格林望远镜的振幅响应矩阵(ARM), (a)描绘了整个矩阵, (b)放大了光瞳的中心

16.5 米勒点扩展矩阵

对于非相干光,点扩展函数(PSF)描述了系统对强度空间中点光源(物)的响应。类似地,通过将琼斯 ARM 转换为 MPSM(使用式(6.106)或式(6.107)的米勒矩阵表示法)来计算米勒点扩展矩阵(MPSM)。MPSM 将点物的斯托克斯参数与其像的斯托克斯参数分布相关联。

在等晕区内模拟成像将成像计算简化成为卷积^[6-7]。相干和非相干物体的像计算涉及相同的 $JP(x, y)$ 和离散傅里叶变换,但计算结果是不同的响应函数:相干物体的振幅响应函数或非相干物体的点扩展函数。图 16.12 说明了物场和衍射场之间的这种关系。16.6 节解释了 ARM 和 MPSM 尺度的计算,即像中的阵列点之间的距离。

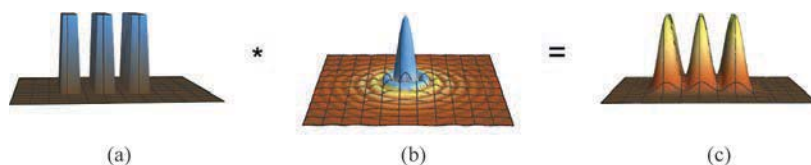


图 16.12 三个条状物(a)与点扩展函数(PSF)(b)的卷积(*)计算得到像(c)。

在这种情形中,像是三个条状物的模糊版本

数学小贴士 16.5 卷积

函数 f 与 g 的卷积是

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad (16.8)$$

例 16.5 无像差系统的 MPSM

具有 ARM 的例 16.4 无像差系统的 MPSM 沿对角线元素是艾里斑, 非对角线元素是零, 如图 16.13 所示, 这是通过将图 16.11 的琼斯矩阵转换为米勒矩阵计算得到的。

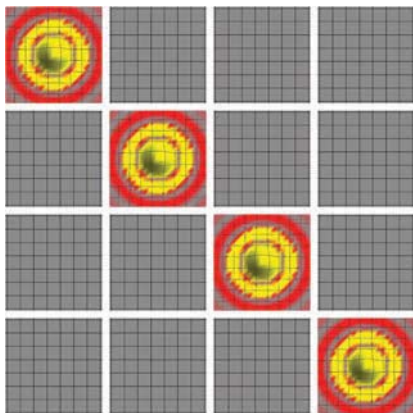


图 16.13 圆孔径无偏振像差光学系统的 MPSM 是采样艾里函数的对角矩阵

图 16.14 以三维图(a)和栅格图(b)形式显示了卡塞格林望远镜系统的 MPSM。注意对角线元素和非对角线元素之间的相对大小差异; 非对角元素的存在表示像平面上的偏振混合, 这几乎是普遍不希望的, 但此处非对角元素的小幅值表示仅有少量偏振混合。请注意, 等高线图的比例尺度使对角线元素饱和, 以便更好地展示更小的非对角线元素。

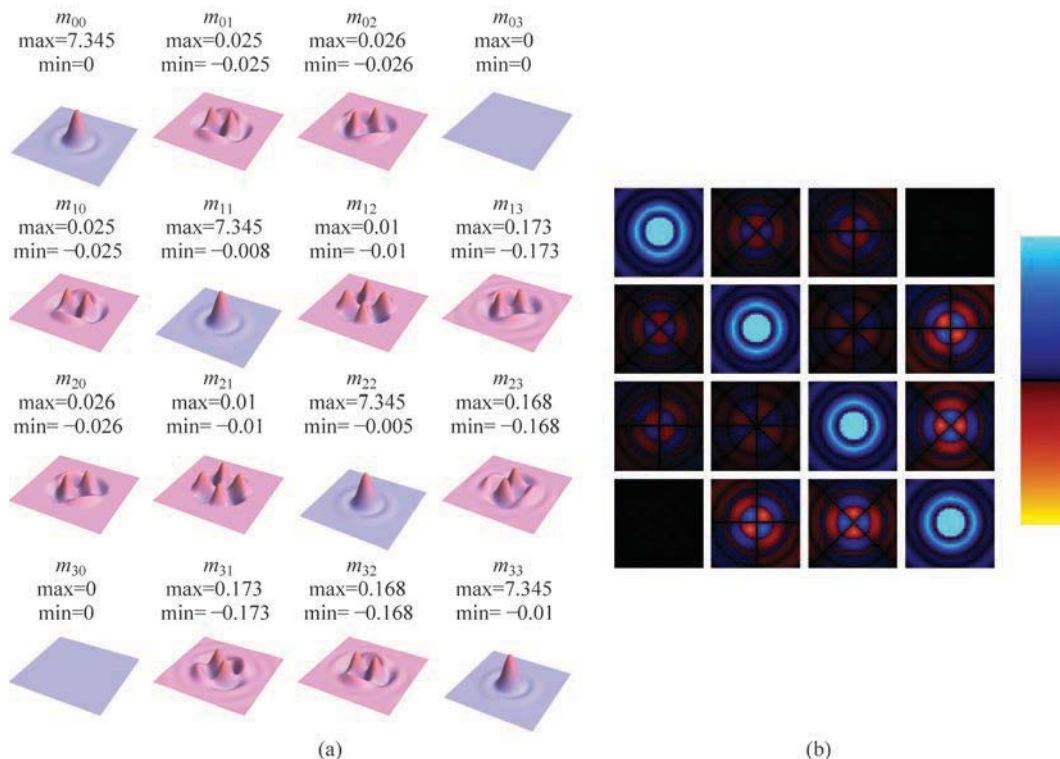


图 16.14 卡塞格林望远镜系统的 MPSM

(a) 三视图; (b) 相应的过度曝光栅格图, 以显示较暗的特征

用零填充琼斯出瞳阵列(数学小贴士 16.3)可以提高 **MPSM** 的分辨率,而不会改变像面上波前的描述。为了获得上文提到的具有良好结构分辨率的 **ARM** 和 **MPSM**,有必要用零矩阵将琼斯光瞳阵列填充为比光瞳大八倍的阵列。在没有填充的情况下,像中仅计算出几个点,因此强度分布很难可视化。

16.6 ARM 和 MPSM 的尺度

琼斯光瞳的 DFT 给出了像的振幅值阵列,但不能给出像的大小或 **ARM** 阵列元素之间的间距。本章中的琼斯 **ARM** 和 **MPSM** 是由 $JP(x, y)$ 的离散傅里叶变换计算的。通过关联夫琅禾费衍射方程和 **DFT** 方程,可计算 **ARM** 和 **MPSM** 的尺度。

为了简单起见,考虑一维傅里叶变换。式(16.6)变为

$$\text{JARM ARM}(\xi) = \int JP(x) \exp \left[\frac{i2\pi}{\lambda z} (x\xi) \right] dx \quad (16.9)$$

其中 z 是像面距离出瞳的位置。DFT 方程为

$$U_s = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{r=1}^n u_r e^{2\pi i(r-1)(s-1)/n} \quad (16.10)$$

其中 n 是 u_r 数组的长度。比较式(16.9)和式(16.10), $JP(x) = u_r$, 傅里叶变换中的指数与 DFT 中的指数相等。由于 s 和 r 是离散的, x 和 ξ 可以写成 $x = \Delta_x r$ 和 $\xi = \Delta_s s$, 其中 Δ_x 和 Δ_s 是空间域 x 中的单位间距和傅里叶变换域 ξ 中的间距。因此

$$\frac{2\pi i}{\lambda z} x\xi = \frac{2\pi i}{\lambda z} \Delta_x r \Delta_s s = \frac{2\pi i}{n} rs \quad (16.11)$$

因此, **ARM** 中的网格间距是

$$\Delta_s = \frac{\lambda z}{n \Delta_x} \quad (16.12)$$

分母 $n \Delta_x$ 是琼斯光瞳阵列的大小,包括零填充。

例 16.6 ARM 和 MPSM 的尺度

透镜的出瞳直径为 20mm(XPD=20mm),放大倍数为 $M=1/3$ 。出瞳距离像面 $z=L=80\text{mm}$ 。在出瞳上追迹 41 条光线的方形阵列,计算了 $\lambda=1.064\mu\text{m}$ 的琼斯光瞳。然后用零矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 将琼斯光瞳填充到大小为 200×200 个琼斯矩阵构成的阵列($n=200$)。通过对 200×200 琼斯光瞳阵列进行二维傅里叶变换,计算出 $2 \times 2 \times 200 \times 200$ 振幅响应矩阵。**ARM** 各元素之间的间距(以毫米为单位)是多少?

在出瞳面上的间距是 $\Delta_x = \text{XPD}/41 = 0.4878\text{mm}$ 。因此,在 **ARM** 中的网格间距是 $\Delta_s = \lambda L / (200 \cdot \Delta_x) = 0.00087\text{mm}$ 。**MPSM** 阵列元素之间的间距也是 Δ_s 。

间距 Δ_s 可由如图 16.15 所示解释。考虑一个平面波垂直于 z 轴离开出瞳。该平面波映射到傅里叶域像平面中的中心像素。然后,倾斜 $\Delta\theta$ 的平面波(如深绿色所示)映射到离开中心像素的一个像素。两个平面波之间的光程变化为 λ 。因此

$$\Delta\theta = \frac{\lambda}{n \Delta_x} \quad (16.13)$$

根据几何关系

$$\Delta_s = z \Delta\theta = \frac{\lambda L}{n \Delta_x} \quad (16.14)$$

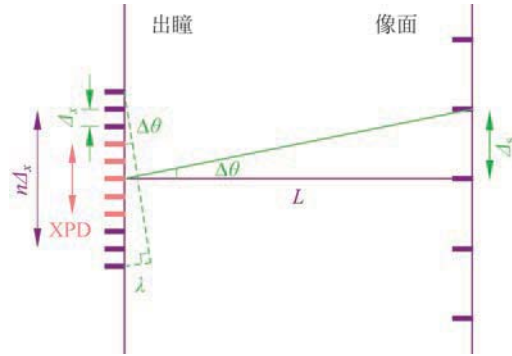


图 16.15 考虑在整个琼斯网格(不只是出瞳)上的一个 1λ 倾斜的平面波。
该平面波对应于 **ARM** 中的阵列间距

16.7 像的偏振结构

可以使用 **ARM** 或 **MPSM** 计算像的偏振结构。图 16.16 展示了一个例子,它是线偏振点光源的像,表示为琼斯矢量图像。琼斯 **ARM** 乘以一个入射琼斯矢量,得到像的三维图(表示为琼斯矢量)。在右侧,在网格上绘制每条光线的偏振态;线段的长度表示琼斯矢量的振幅,线段的方向表示琼斯矢量的方向。由于 **ARM** 的非对角元素比对角元素小得多(图 16.11),因此琼斯矢量图像大部分是水平偏振的,但振幅不同。

利用物的斯托克斯参数可以从 **MPSM** 计算斯托克斯参数图像;图 16.17 显示了水平偏振的斯托克斯参数入射到卡塞格林望远镜时的斯托克斯参数像。在这种情况下,斯托克斯的像是 **MPSM** 前两列的总和。请注意,对角线元素的中心已过度曝光,以显示微弱的细节。由于 **MPSM** 的非对角元素,水平偏振点物的像包含空间变化的 S_2 和 S_3 分量。

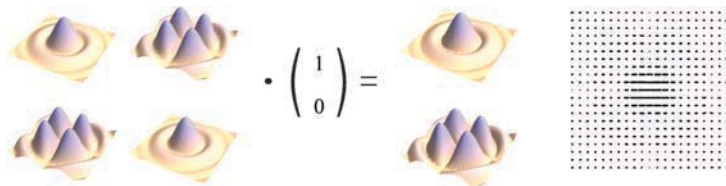


图 16.16 当点物发出的水平偏振琼斯矢量入射到卡塞格林望远镜时,由琼斯 **ARM** 计算出的琼斯矢量图像

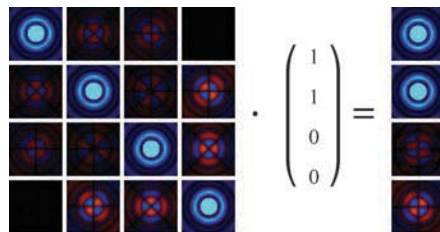


图 16.17 **MPSM** 作用于水平偏振斯托克斯参数产生斯托克斯参数图像。色标与图 16.14 相同

16.8 光学传递矩阵

传统(标量)光学的光学传递函数(OTF)将成像描述为一种空间滤波过程。通常,成像系统准确地对物的最低频率成像,但较高空间频率的振幅会减小,直到在截止频率处和截止频率之外,最高空间频率分量完全衰减。如图 16.18 所示,像的傅里叶变换是物的傅里叶变换乘以光学系统的 OTF^[8]。OTF 通常以线对每毫米为单位。在等晕区内成像时,成像过程是线性的,线性系统理论适用。在该等晕区中,余弦形物的像始终是余弦形的^[6-7]。

米勒光学传递矩阵(OTM)是一个复值的矩阵函数,利用它可将 OTF 推广到具有偏振像差的非相干成像系统。矩阵是必要的,因为每个物的斯托克斯参数都可以耦合为像的所有四个斯托克斯参数。米勒 OTM 描述了物的每个斯托克斯参数的空间滤波。米勒 OTM 对物的斯托克斯参数进行傅里叶变换。复值 OTM 的模(米勒调制传递矩阵[MTM])描述了每个空间频率的调制变化。

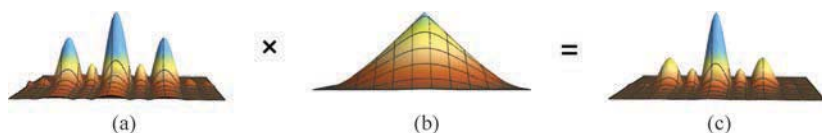


图 16.18 在傅里叶域中,图 16.12(a)物的傅里叶变换乘以 OTF(b)就是像的傅里叶变换(c)。图 16.12 中的物在中央瓣附近有一对强的频率分量,该分量因系统的光学传递函数而显著降低,如图(c)像的傅里叶变换所示,图(c)对应于图 16.12(c)的模糊像

图 16.19 展示了卡塞格林望远镜 MTM 的三维图(a)和栅格图(b)。米勒矩阵是实矩阵,

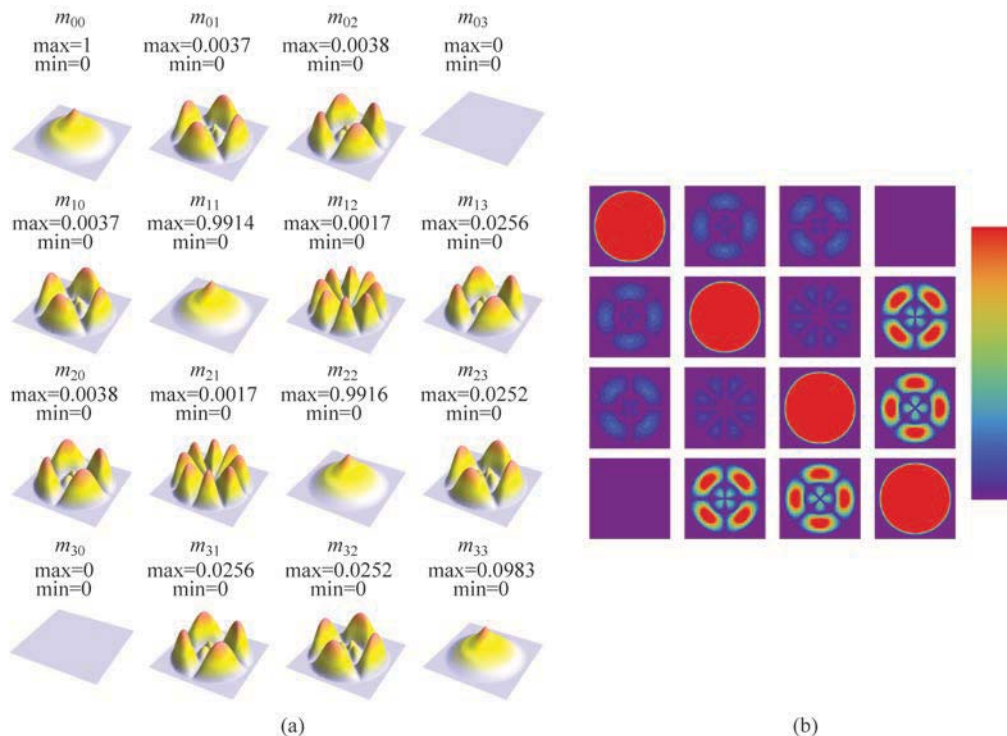


图 16.19 卡塞格林望远镜的 OTM 大小,显示为三维图(a)和栅格图((b),过度曝光)

但一般来说,OTM 不是实矩阵,而是复数矩阵,因为 MPSM 函数可能同时具有偶数和奇数分量,而实奇数函数具有虚值傅里叶变换。从物理上讲,这意味着余弦物体的像位置会偏离其几何像。因此,复值 OTM 的相位(米勒相位传递矩阵[PTM])描述了每个余弦空间频率从其几何像的偏移;PTM 的 π 值对应于半周期的位移。Gaskill^[7] 的著作从第 236 页开始介绍由于相位传递函数导致的图像退化的例子。图 16.20 展示了卡塞格林望远镜 PTM 的三维图(a)和栅格图(b)。

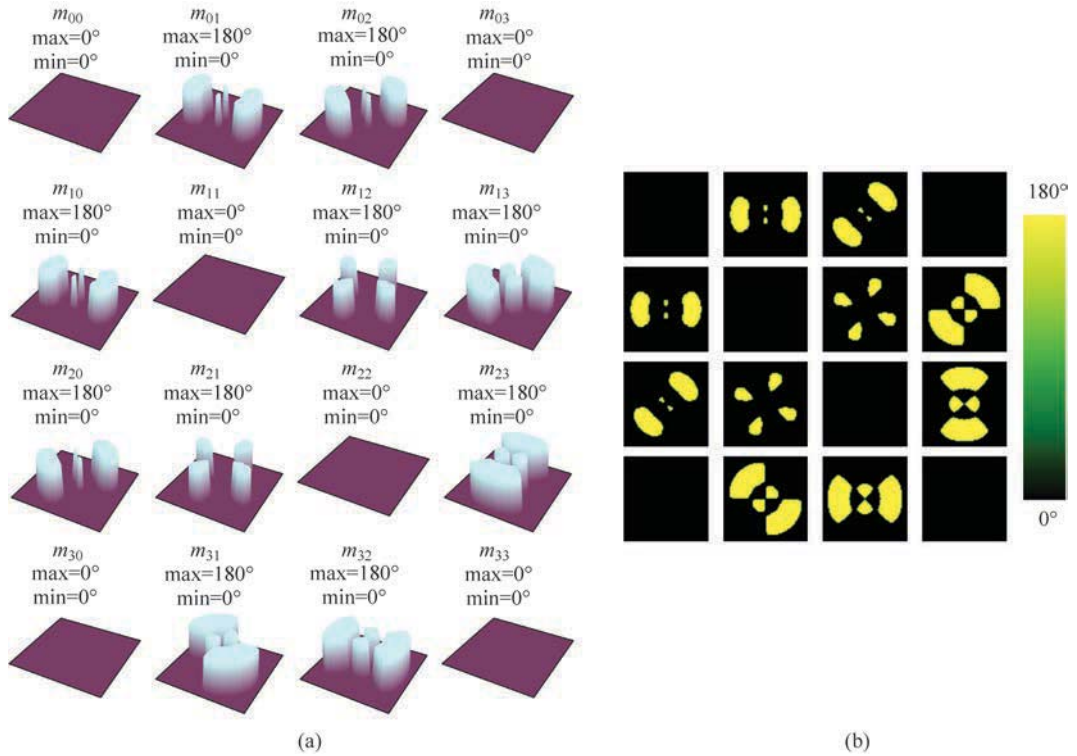


图 16.20 卡塞格林望远镜的 OTM 相位,显示为三维图(a)和栅格图(b)

MTM 栅格图的对角线元素过度曝光,以显示更多非对角线元素细节。MTM 总是将 m_{00} 元素在光瞳中心归一化为 1。这意味着对任何入射斯托克斯参数 $(S_{0,o}, S_{1,o}, S_{2,o}, S_{3,o})^T$,米勒 MTM 给出的像斯托克斯参数,其在阵列中心像素处具有最大值 $S_{0,i} = S_{0,o}$ 。

例 16.7 OTM 的尺度

继续例 16.6,计算 OTM 元素之间间距(线对每毫米) $\Delta\xi$,并计算 OTM 的截止频率。

MPSM 阵列的大小为 $n\Delta_s$ 。首先,像面上 MPSM 的基本周期为 $p_i = n\Delta_s = 0.174496\text{mm}$ 。由于系统具有 $1/3$ 的放大率,因此物面的基本周期,也就是以毫米为单位的量值为

$$p_o = p_i / M = 0.523488$$

因此,以每毫米线对数表示的 OTM 的空间频率间隔 $\Delta\xi$ 为

$$\Delta\xi = 1/p_o = 1.91026$$

奈奎斯特截止频率 $\Delta\xi_{Nq}$ 是 $\Delta\xi_{Nq} = \Delta\xi_n / 2 = 191.026$ 线对每毫米。

16.9 例子——偏振光瞳及非偏振物体

举一个容易看到较大偏振效应的非相干成像例子,考虑以下具有方形孔径的衍射受限成像系统。让中心 $2/3$ 的孔径 ($-2/3 \leq x \leq 2/3$) 用垂直偏振器填充,其余的 ($-1 \leq x \leq -2/3$ 和 $2/3 \leq x \leq 1$) 填充水平偏振器,如图 16.21(a)所示。图 16.21(b)显示了这种条状偏振器系统的 $JP(x, y)$,它是一个具有均匀振幅和零波像差的方形孔径。 J_{11} 分量的非零部分表示光瞳边缘的水平偏振器,而 J_{22} 分量表示占据光瞳中心 $2/3$ 的垂直偏振器。

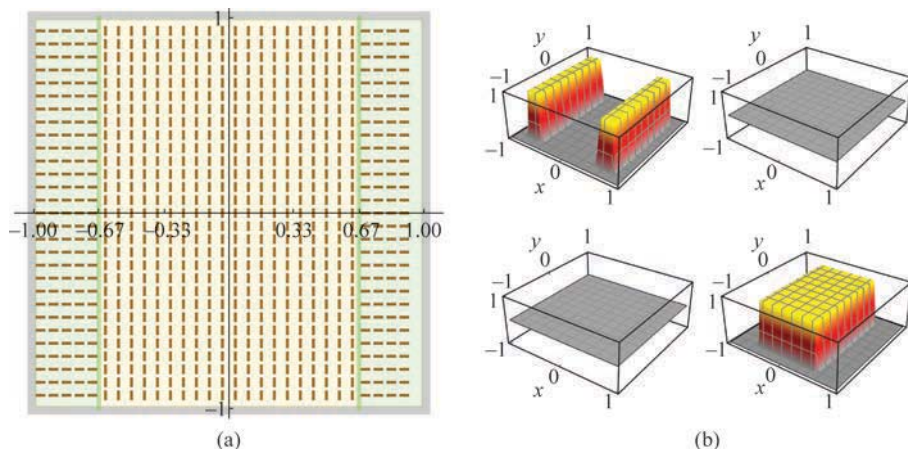


图 16.21 (a)显示了一个方形孔,其中心 $2/3$ 填充有垂直偏振器,其余部分填充有水平偏振器。(b)显示了无波像差且振幅均匀的方形孔径的 $JP(x, y)$ 。方形中心的 $2/3$ 是垂直偏振器,其余部分是水平偏振器

使用式(16.6)计算该条状偏振器系统的琼斯 **ARM**,其结果如图 16.22 所示, J_{11} 分量(图(a))和 J_{22} 分量(图(b))如图 16.23 所示。因为每个琼斯光瞳元素都是偶函数,所以琼斯 **ARM** 的每个元素都是实数。 J_{11} 分量类似于干涉图案,因为 $JP(x, y)$ 的水平偏振器部分相当于沿 x 轴分离的双狭缝。由于垂直偏振的孔径相当于沿 y 轴具有更宽尺寸的单个狭缝,因此 **ARM** 的 J_{22} 分量是 x 和 y 方向具有不同宽度的 sinc 函数。因此,**ARM** 的 J_{22} 分量沿 x 轴比沿 y 轴更宽。

如图 16.1 所示,通过将琼斯 **ARM** 转换为米勒矩阵来计算 **MPSM**。当从水平偏振器观看水平偏振物时,系统的标量 PSF 可通过将 **MPSM** 放在两个水平偏振器米勒矩阵之间来计算,如图 16.24(a)所示。这种标量 PSF 称为水平-水平 **MPSM**。类似地,当通过垂直偏振器观察垂直偏振物时,也可以计算系统的标量 PSF,如图 16.24(b)所示。

米勒 **OTM** 的计算结果如图 16.25 所示。图 16.26 从两个不同的视角显示了 **OTM** 的 $(0,0)$ 元素。沿 x 方向和 y 方向的传递函数显示出截然不同的轮廓。

图 16.27 在两个不同视图(上一行和下一行)中显示了(图(a))在两个水平偏振器之间观察的米勒 **OTM**(水平-水平 **OTM**),以及(图(b))在两个垂直偏振器之间观察的 **OTM**(垂直-垂直 **OTM**)。对于水平偏振光,**OTM** 有三个峰值,因为 $JP(x, y)$ 是一个双缝。对于垂直偏振光,**OTM** 遵循熟悉的三角形状,因为 $JP(x, y)$ 是具有均匀振幅的矩形孔径。

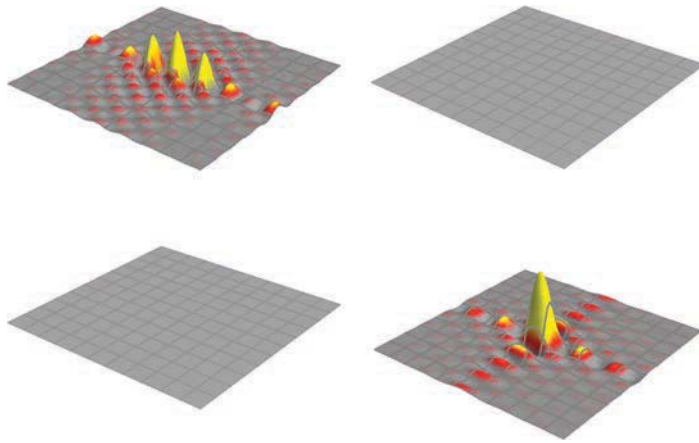


图 16.22 水平/垂直偏振器 $JP(x, y)$ 的琼斯 ARM



图 16.23 (a)该 ARM 的(1,1)分量是由水平偏振器双缝 $JP(x, y)$ 形成的干涉图案。幅值在-4.40 和 4.71 之间变化。(b)ARM 的(2,2)分量的夫琅禾费衍射图案是由垂直偏振器作为矩形单缝 $JP(x, y)$ 产生。幅值在-2.04 和 9.42 之间变化

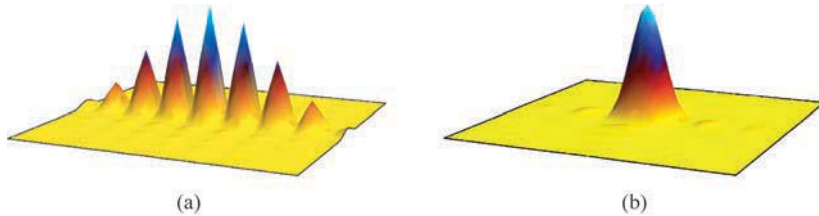


图 16.24 (a)在两个水平偏振器之间观察的条状偏振器系统的 PSF, 是一个双缝干涉图案, 最大和最小强度分别为 22.18 和 0。(b)在两个垂直偏振器之间观察到的 PSF, 最大和最小强度分别为 88.66 和 0

考虑由如图 16.28 所示的三杆(条状物)组成的非偏振物体。将光学系统的米勒 OTM 乘以物的傅里叶变换, 可计算像的斯托克斯参数的傅里叶变换,

$$\mathfrak{S} \begin{pmatrix} s_{i,0} \\ s_{i,1} \\ s_{i,2} \\ s_{i,3} \end{pmatrix} = \mathbf{OTM} \cdot \mathfrak{S} \begin{pmatrix} s_{o,0} \\ s_{o,1} \\ s_{o,2} \\ s_{o,3} \end{pmatrix} \quad (16.15)$$

其中非偏振物是 $S_o = (g(x, y) \ 0 \ 0 \ 0)^T$, $g(x, y)$ 是物的光强, 如图 16.28 所示。物 $g(x, y)$ 的空间频率为如图 16.24(a)所示系统的水平-水平 MPSM 空间频率的一半。

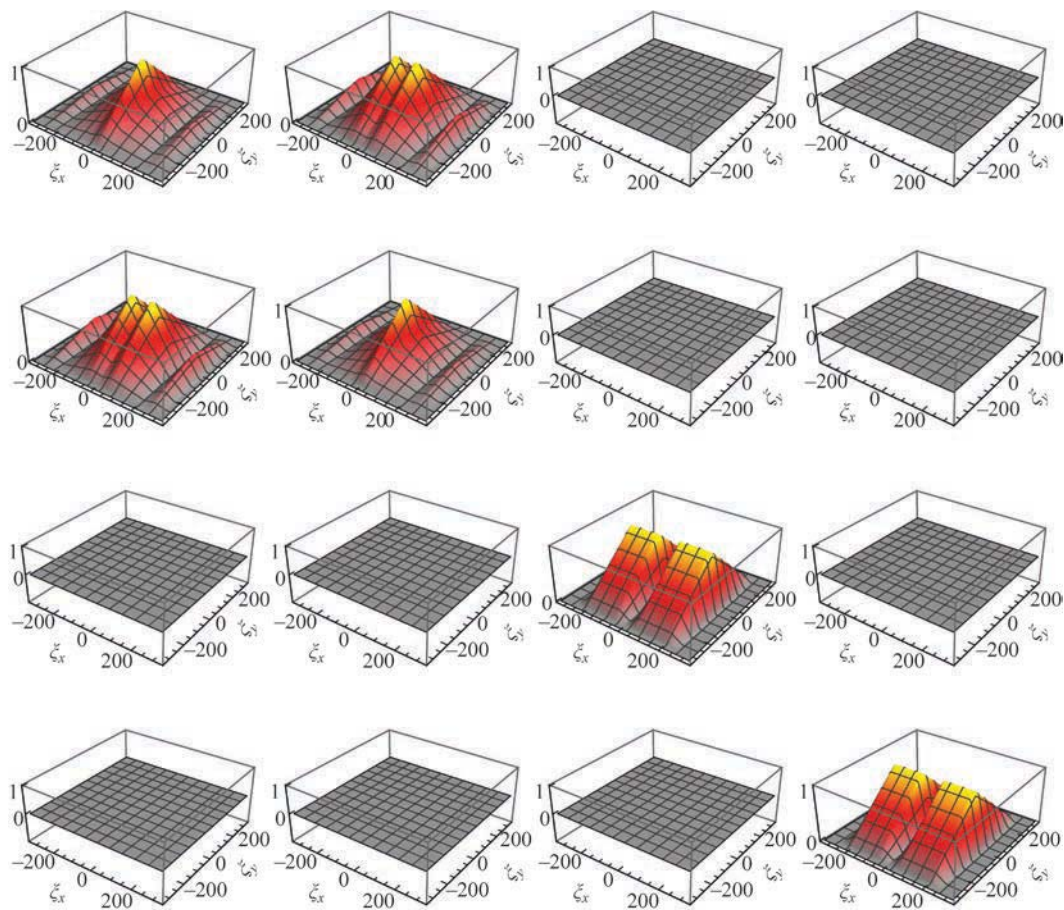
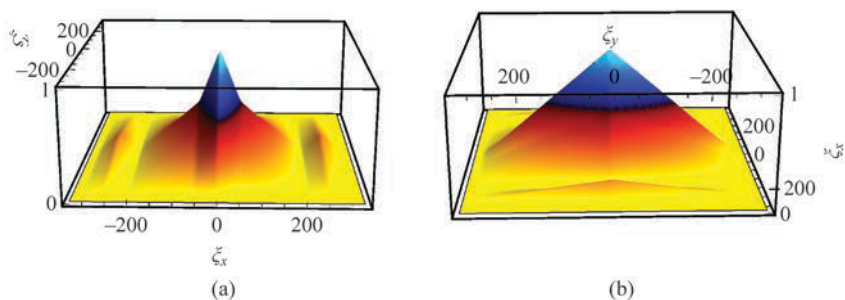


图 16.25 示例系统的米勒 OTM

图 16.26 当非偏振物进入示例系统时,沿 y 轴(a)和 x 轴(b)查看标量 OTF 的两个视图,显示不同的分辨率。(a)在大约每毫米 200 线对的位置,OTM 归零,一个空间频率带完全消失

然后,式(16.15)的逆傅里叶变换给出了物的像。由于米勒 OTM 的 m_{00} 和 m_{10} 分量不为零,因此非偏振物体有两个正交偏振分量,水平的和垂直的,如图 16.29 所示。

像的水平 and 垂直分量完全不同。对于垂直分量,由于光学系统有限的孔径尺寸造成的高频损耗,像是三杆物体的模糊版本。这很简单,可以从标量 PSF/OTF 计算中观察到。然而,像的水平部分需要更多的解释。由于物的空间频率为系统的水平-水平 MPSM 的一半,因此物的傅里叶变换的频率为系统的水平-水平 OTM 的两倍。这就是为什么像的水平偏振

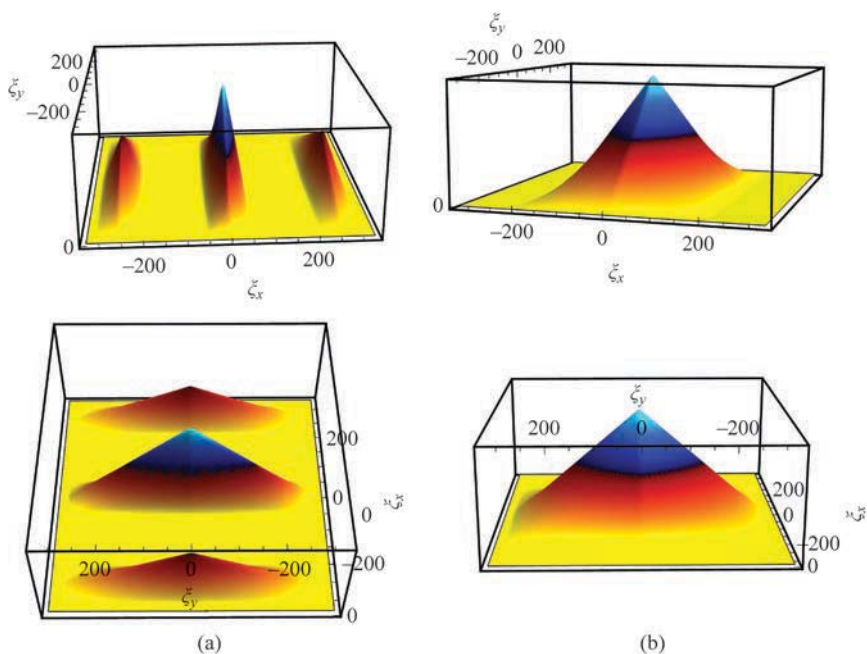


图 16.27 (a) 两个水平偏振器之间看到的米勒 OTM, (b) 两个垂直偏振器之间看到的米勒 OTM。
H-H OTM 的中心峰值为 0.325, V-V OTM 的中心峰值为 0.675

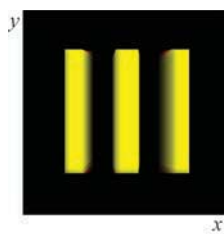


图 16.28 非偏振物体的斯托克斯参数 s_0 为 $g(x, y)$, 绘制了三条垂直杆



图 16.29 以相同比例绘制的 (a) 像的水平偏振分量和 (b) 像的垂直偏振分量

分量不显示任何峰值(或物的空间频率),而是有一个显示物的模糊扩展的包络。因此,可以看出如何使用光学系统的 MPSM/OTM 来理解偏振相关的像。

16.10 例子——实体角锥回射器

偏振成像的一个有趣例子是实心的角锥后向反射器(CCR),由于三个背面的全内反射(TIR),其具有较大的偏振像差。首先,使用中等折射率玻璃($n=1.6$)分析典型的 CCR。实心角锥棱镜首选更高的折射率,因为这样视场更大,视场的大小受 TIR 限制。然后,从理

论上考虑了在临界角下工作的低折射率($n=1.227$)角锥棱镜。

CCR 由三个相互垂直的反射面组成。如图 16.30 所示,角锥棱镜(显示为红色)实际上是立方体的角。对于实心玻璃立方体,折射进入正面的光线在背面经过三次 TIR,然后传播向量反转离开正面。对于正入射光线,三个反射面的入射角(AOI)为 $\arccos(1/\sqrt{3})=54.74^\circ$ 。对于 $n=1.6$ 的角锥棱镜例子,这些光线经历了三个线性延迟 $\delta=48.94^\circ$,但每个延迟位于不同的方向;因此,它们级联成一个椭圆延迟器。

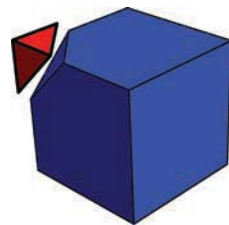


图 16.30 角锥棱镜后向反射器(红色)有三个相互垂直的反射面。折射进入前表面的光线反射三次,并沿其入射传播矢量反向离开前面,从而使光线后向反射

图 16.31 显示了 CCR 每个表面的编号方式。CCR 中有六个子孔径;根据入射光线在面 1 中的位置,存在六条不同的光线路径。六条光线路径中的每一条的延迟器本征态都不同。图 16.32 列出了看向 1 号面的六个子孔径的表面截点顺序。进行了 Polaris-M 偏振光线追迹,图 16.33 显示了三种不同偏振态(不同行)下六个子孔径(每个子孔径位于不同列)的偏振演变。偏振椭圆以三维形式显示在每个面之后。对于上面两行中的线性偏振态,出射光始终为椭圆偏振态。图 16.34 显示了另外三条光线的偏振传播。

图 16.35 描绘了通过偏振光线追迹计算的琼斯光瞳的幅值和相位。图 16.36 显示了每个子孔径的三维偏振光线追迹(PRT)矩阵的特征向量。由于这些是用于后向反射的 PRT,因此偏振椭圆与传播矢量相关联,该传播矢量与入射传播矢量方向相反。每个子孔径的椭圆率相同。椭圆的主轴在子孔径之间旋转 120° 。

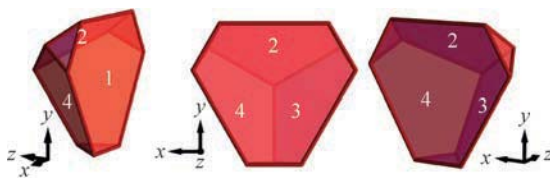


图 16.31 CCR 的前表面编号为 1,光在前表面进入和出射,三个反射面编号为 2、3 和 4

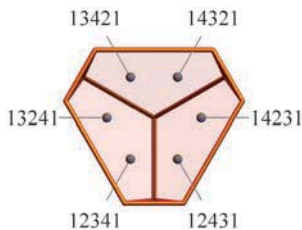


图 16.32 根据光线进入正面的位置,它会遇到图中所标注的不同顺序的表面反射。

角锥棱镜出瞳包含六个不同的子孔径

假设六角孔径的振幅透射率为 $a(x, y)=1$ 且无波前像差 $W(x, y)=0$,则远场衍射图,即由 $JP(x, y)$ 的离散傅里叶变换计算的琼斯 ARM,如图 16.37 所示。图(c)椭圆图是水平

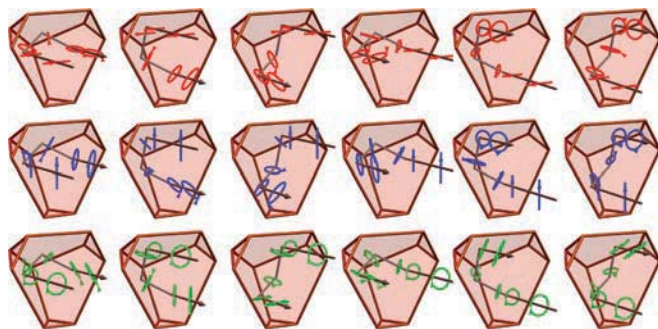


图 16.33 水平(上一行)、垂直(中间行)和左旋圆偏振(第三行)入射光束通过 CCR 的偏振传播,以三维形式显示在每个表面后面。每列表示六个子孔径之一的偏振传播

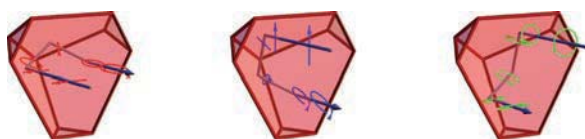


图 16.34 对于三种不同的入射偏振态,显示了沿三条不同光线路径的偏振变化

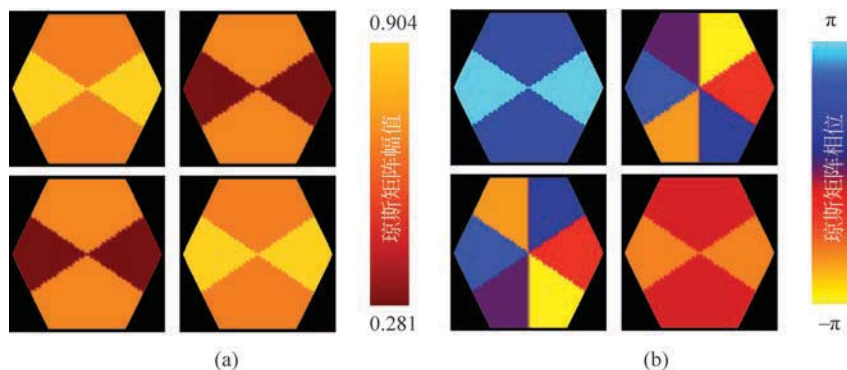


图 16.35 CCR 琼斯光瞳的幅值(a)和相位(b)

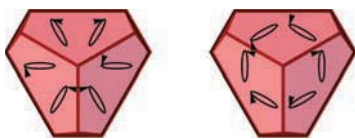


图 16.36 每个子孔径的两个本征偏振态

偏振点源的琼斯矢量图。与图 16.16 不同,由于琼斯 **ARM** 的非对角元素在大小上与对角元素相当,因此图像的偏振在方向和椭圆率上具有实质性的空间变化。有趣的是,在蓝色虚线圆圈的半径处,图 16.37(c)显示了线性偏振的 720° 旋转。

通过将琼斯 **ARM** 转换为米勒矩阵图像(图 16.38)来计算 **MPSM**。第一列包含非偏振点源的斯托克斯图像。 m_{00} 元素在中央峰周围有六个次峰。 m_{10} 和 m_{20} 元素显示,同一蓝色虚线半径处的光具有线性偏振,该偏振围绕中心旋转 540° (由于六个交替的旁瓣)。因此,即使非偏振光的 PSF 也有部分偏振的区域。

对 **MPSM** 的每个元素进行离散傅里叶变换,计算出米勒矩阵光学传递矩阵(**MOTM**)。

调制传递矩阵和相位传递矩阵的元素如图 16. 39 所示。由于这种大的偏振像差, 成像离衍射受限差得很远。例如, m_{00} 元素与衍射受限传递函数不同。

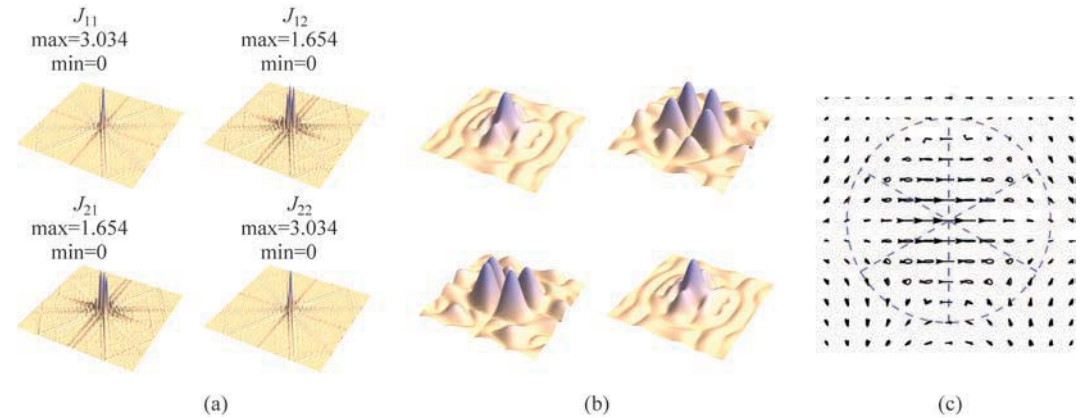


图 16. 37 $n=1.6$ CCR 的(a)琼斯 **ARM** 的幅值以及(b)中心放大的视图。(c)水平偏振点源的琼斯矢量图, 并且绘制了蓝色虚线, 表示六个子孔径方向。沿着蓝色虚线圆圈, 可观察到线性偏振的 720° 旋转

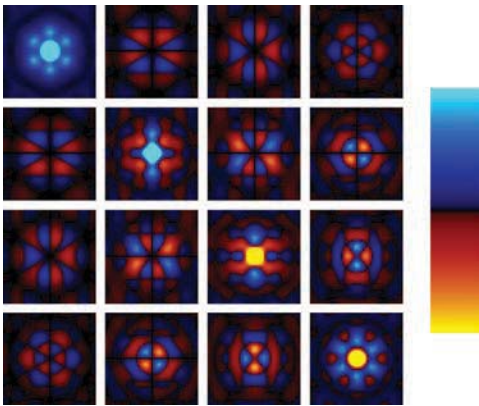


图 16. 38 $n=1.6$ CCR 的米勒点扩展矩阵, 显示了入射和出射斯托克斯参数之间大量和复杂的偏振耦合。图像过度曝光, 以显示暗淡区域的结构

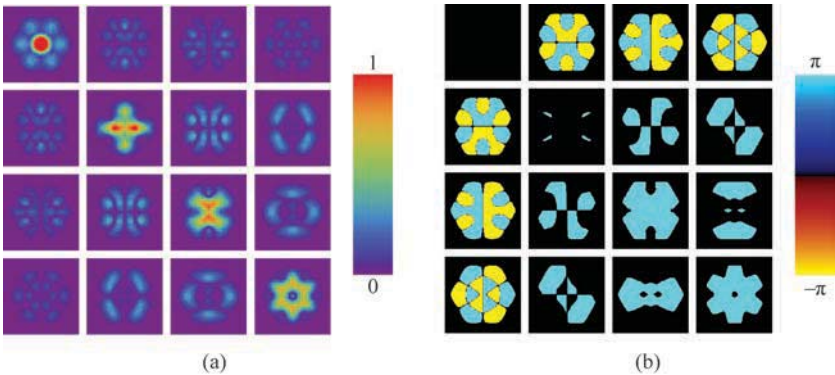


图 16. 39 米勒 **OTM** 的幅值(a)和相位(b)

16.11 例子——临界角角锥回射器

通过调节折射率可以构造无延迟的角锥镜,对于正入射光使它的三次反射工作于临界角。这个临界角角锥回射器在所有六个子孔径中都具有非常有趣的旋转线偏振的特性。由于入射角为 54.73° ,该角锥镜的折射率为 $n_c = 1.2247$ 。TIR 与延迟有关联,延迟随入射角迅速变化,如图 16.40 所示(针对 n_c)。在临界角处,延迟为零,反射为理想的非偏振反射, $r_s = 1$ 和 $r_p = 1$ 。由于轴上光线在三个光线截点处的延迟为零,因此这个角锥镜似乎是非偏振的。然而,当光束改变方向三次并被回射时,偏振态会发生旋转。这种偏振的变化称为几何变换或倾斜像差。该几何变换用第 17 章(平移和延迟计算)中的 Q 矩阵方法进行计算,并被理解为倾斜像差,如第 18 章(倾斜像差)中的讨论。在图 16.40 中,注意,在临界角处,延迟的斜率无穷大;因此,实际工作于临界角度下将需要一个不可能实现的完全准直和完全对准的光束,这使得它不切实际。然而,这个角锥镜的理论性质给出了一个有趣的偏振像差例子。

几何变换描述了当每条光线在非偏振表面折转或反射时,偏振如何变化(无二向衰减和延迟)。几何变换不会改变电场的椭圆率或振幅。由于每个光线截点处的延迟为零,临界角 CCR 没有偏振像差,只有几何变换。图 16.41 显示了过临界角 CCR 的光线网络的琼斯光瞳。

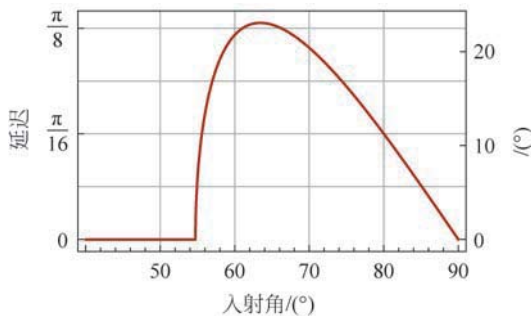


图 16.40 对于 $n_c = 1.2247$ 内反射,延迟量是入射角的函数



图 16.41 临界角 CCR^① 的琼斯出瞳都是实数值,对应于三对不同的圆延迟器

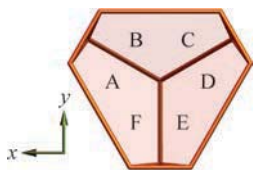


图 16.42 CCR 子孔径的标注

此琼斯光瞳仅包含实值,因为琼斯光瞳元素的相位为 π 或 $-\pi$ 。每个三角形子孔径(图 16.42)都有一个琼斯矩阵,它是沿 z 轴的旋转矩阵,旋转量为 0° 、 120° 和 240° 。相对的子孔径的琼斯矩阵是相同的,

$$J_A, J_D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

① 使用 CCR 的入射和出射传播矢量定义的局部坐标计算琼斯光瞳。

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_B, \mathbf{J}_E &= \begin{pmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{J}_C, \mathbf{J}_F &= \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.16)$$

因此,琼斯光瞳的每个子孔径都有一个圆延迟器琼斯矩阵,该矩阵将所有偏振态旋转 0° 、 120° 和 240° ,如图 16.43 所示,显示了三次反射后的偏振旋转。所有三次反射在临界角处都是完美的全内反射。因此,反射光的所得圆延迟仅由光线路径的几何形状引起。出射面周围的偏振旋转为 0° 、 120° 和 240° 。

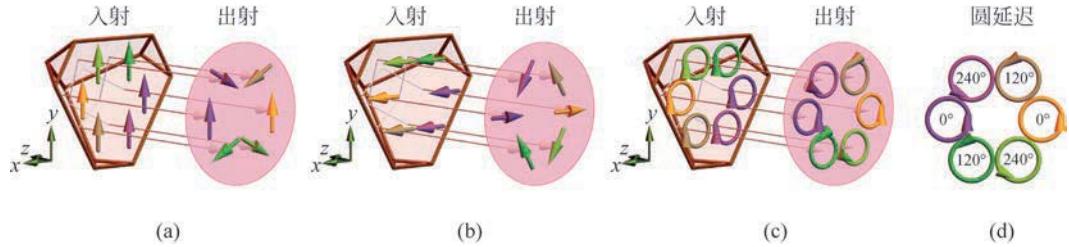


图 16.43 (a)~(c)入射到入射面不同区域的六条光线在角锥内沿不同的路径行进,并且对于垂直、水平和圆偏振入射光,对应的出射态具有不同的偏振旋转量。(c)角锥镜产生的圆延迟改变了圆偏振入射光的绝对相位。圆延迟量取决于角锥镜内部的光线路径。(d)在出瞳中诱导圆延迟相关的旋转为 0° 、 120° 和 240°

临界角 CCR 的这些性质和对称性产生了一个很有意思的振幅响应矩阵,如图 16.44(a)所示,这是作者见过的最有趣和对称的矩阵之一。分析表明,ARM 处处都有圆延迟器琼斯矩阵。图 16.44(b)绘制了 ARM 的圆延迟量。ARM 的中心是完全暗的,因为光的三个成分,例如 0° 、 120° 和 240° ,会产生相消性干涉。在一个小圆周围,从图形中心到边缘约 0.25 处,观察到围绕光瞳的 8π 延迟量变化;这将导致线偏振在该半径处围绕光瞳有稳定的 4π 旋转。圆延迟在水平和垂直方向上为零,在 $+60^\circ$ 径向上有 $2\pi/3$ 延迟,沿 -60° 方向上有一 $2\pi/3$ 延迟。沿着每条这些线,在 ARM 的零点处发现两个偏振奇点;在 x 轴上,从图中心到边缘约 0.5 和 0.8 处发现奇点。围绕这两个零之间的圆移动(在 x 轴上约 0.65),观察到连续的 16π 延迟量变化。

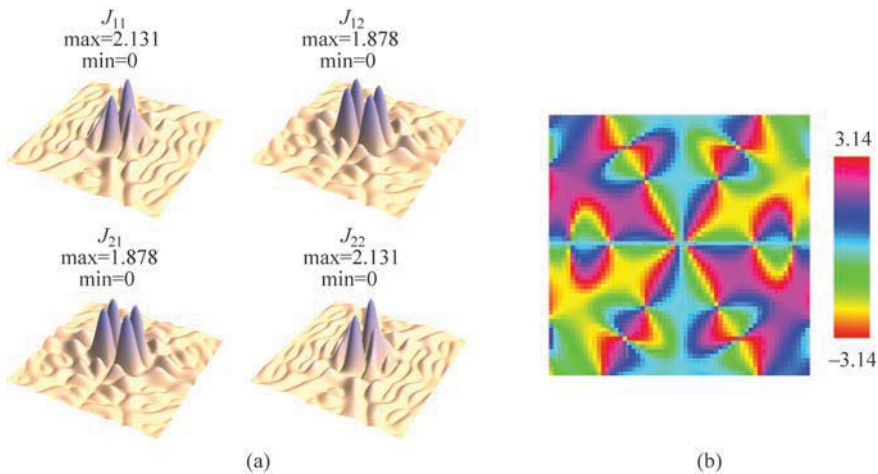


图 16.44 (a)振幅响应矩阵的幅值为纯实数。(b)临界角角锥镜的圆延迟图,以弧度为单位绘制

对于水平偏振的入射平面波,琼斯 **ARM** 在远场产生的琼斯矢量图,如图 16.45 所示。由于琼斯 **ARM** 的非对角元素,垂直偏振光(图(b))已混合到水平偏振态,并且在像面上存在空间线性偏振变化。图 16.44 中圆延迟图中可见的六个子孔径与图 16.45 中的六个光斑匹配。对于六个光斑中的每一个光斑,可观察到水平偏振态的不同旋转量。

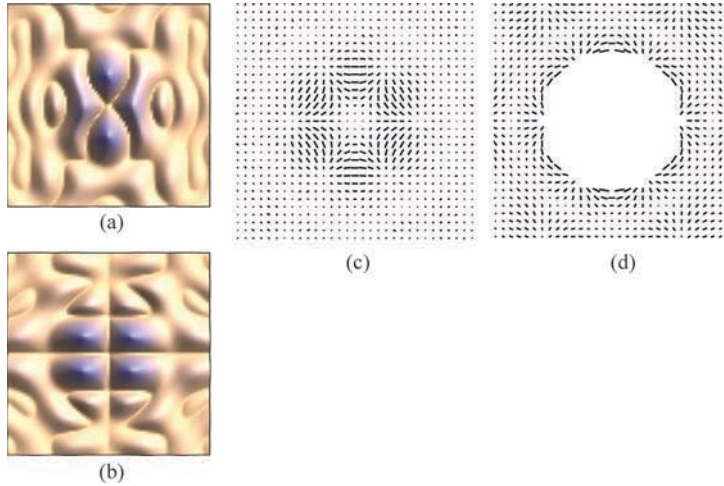


图 16.45 在水平偏振光入射下,临界角角锥镜的衍射图样显示出一个暗中心和六个内部光斑,分别位于 0° 、 120° 和 -120° 方向。琼斯 **ARM** 矢量的 x 振幅(a)和 y 振幅(b)显示了一个复杂的结构,当表示为偏振椭圆(c)时,它清楚地显示了具有不同偏振态的六个光斑。在衍射图样中六个光斑所在的半径处移动,可观察到线偏振的 720° 旋转。(d)将线段长度放大两倍,以显示距离中心更远的更多偏振结构;抑制了中心的线段。由于琼斯 **ARM** 矩阵在任何地方都是纯的圆延迟器,因此该衍射图案在任何地方都是线偏振的,没有椭圆偏振

临界角 CCR 的 **MPSM** 如图 16.46 所示。最上面一行的三个零元素表明光强分布与入射偏振态无关,没有二向衰减。第一列显示,对于非偏振入射光,像处处都是非偏振的,没有偏振化。第一列和最后一列显示右旋圆偏振的点光源生成右旋圆偏振的像点,而左旋圆偏振的物形成左旋圆偏振的像。中间的四个元素特别有趣,具有空间变化的圆延迟器的形式。对于线偏振光源,像处处都是线偏振的,并具有旋转的偏振态。对于圆偏振的物,**MPSM** 给出圆偏振像的斯托克斯参数,与物的手性相同,与 $n=1.6$ 的 CCR 相反。对于所有偏振态,**MPSM** 在中心是暗的;右旋圆偏振点光源将得到右旋圆偏振像点,而非偏振点光源将得到非偏振像点。

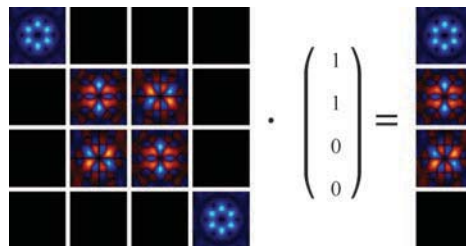


图 16.46 临界角 CCR 的 **MPSM**(左),作用在水平线偏振的斯托克斯参数上,形成了一个斯托克斯参数在空间上变化衍射图案,对应于偏振方向的变化

图 16.47 显示了米勒 OTM 的幅值(a)和相位(b)。再次,对于所有空间频率和方向,MPSPM 是圆延迟器。OTM 仅包含相位为 0 或 π 的实值。图 16.48 显示了米勒 MTM 沿水平方向的横截面。

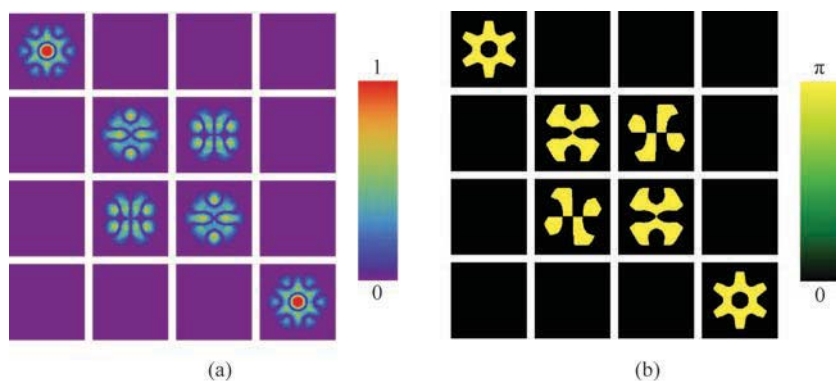


图 16.47 临界角 CCR 的米勒 MTM(a)和 PTM(b),过度曝光以显示微弱结构

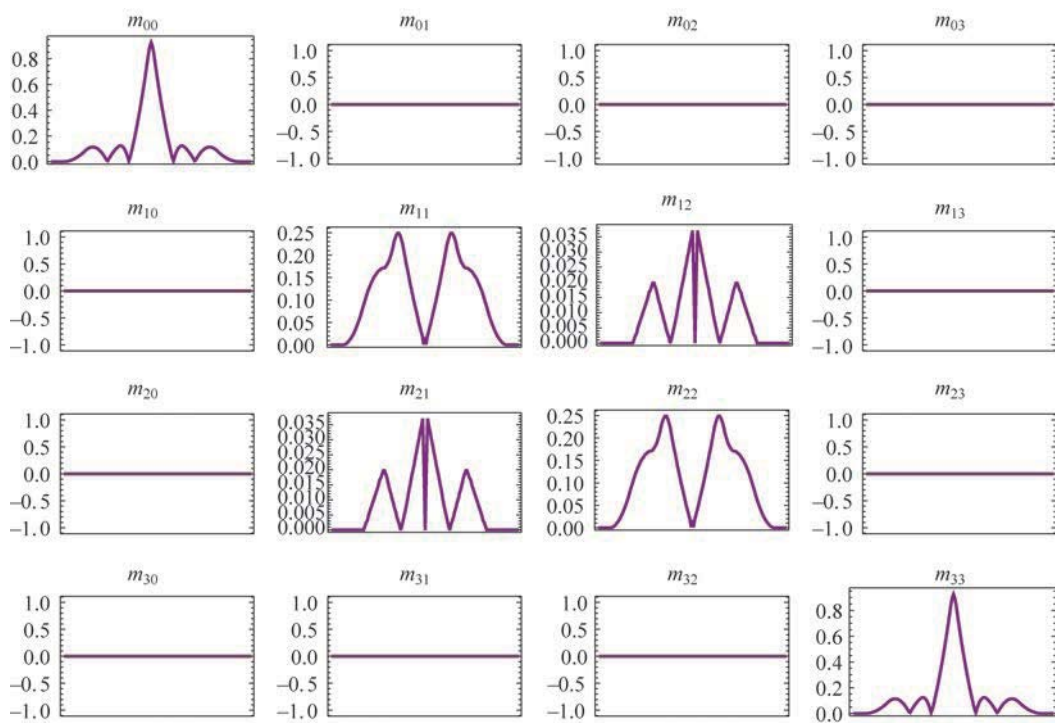


图 16.48 米勒 MTM 沿水平方向的横截面

临界角 CCR 提供了一个独特的偏振成像例子。它的作用只是在子孔径之间旋转偏振态,从而产生复杂且高度对称的 PSF 和 OTF。即使临界角 CCR 没有延迟或二向衰减,也会出现类似圆延迟的偏振变化。第 17 章(平移和延迟计算)和第 18 章(倾斜像差)更详细地探讨了这种内在几何变换。

16.12 讨论和结论

成像系统的分析已被推广到包含偏振像差。光学系统由孔径函数、振幅函数、波前像差和偏振像差来描述,这些像差被组合成 $JP(x, y)$ 。描述相干光学系统成像的 **ARM** 可以通过将 DFT 应用于 $JP(x, y)$ 的四个元素中的每一个来计算。对于非相干成像系统,可以通过将琼斯 **ARM** 转换为米勒矩阵来计算 **MPSM**。进一步用 DFT 可得到所有入射和出射斯托克斯参数对之间的米勒 **OTM** 形式的调制传递函数。

琼斯 **ARM**、**MPSM** 和米勒 **OTM** 提供了包含偏振像差的成像质量的完整描述。通常,这些矩阵需要简化为相应度量的标量版本。当物的琼斯矢量应用于琼斯 **ARM** 并通过线偏振器观察时,琼斯 **ARM** 可以简化为 ARF。类似地,通过将物的斯托克斯参数应用于相应的米勒矩阵并通过偏振器观察图像,可将 **MPSM** 或 **OTM** 简化为 PSF 和 OTF。

ARM、**MPSM** 或 **OTM** 中的非对角元素描述了像的偏振分量之间的耦合。非对角元素相对于对角元素的相对大小表示像面上发生的偏振混合量。例如,卡塞格林望远镜系统的偏振态之间的耦合很小,因此,像的偏振几乎与物偏振态相同。两个角锥后向反射器的 **ARM**、**MPSM** 和 **OTM** 中有明显的非对角元素,因此,在它们的像中观察到大量空间变化的偏振耦合。

16.13 习题集

16.1 对以下数组 u 进行一维离散傅里叶变换。辨认函数为 $\sin$ 、 $\cos$ 、常量等。

- $u = (\sqrt{2}, 0)$
- $u = (0, 2, 0, 2)$
- $u = (0, 2i, 0, -2i)$
- $u = (0, 0, 4, 0)$
- $u = (0, 0, 2\sqrt{2}, 0, 0, 0, 0, 0)$
- $u = (4, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0)$

16.2 计算以下采样函数 $u_{q,r}$ 的二维离散傅里叶变换 $U_{s,t}$ 。辨析函数为 $\sin$ 、 $\cos$ 、常量等。

$$\begin{aligned} \text{a. } U &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{b. } U &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, & \text{c. } U &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{d. } U &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \text{e. } U &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$f. U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad g. U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

四元素的采样函数可以描述的最高频率的波是什么？八元素的采样函数呢？

- 16.3 按照以下步骤计算延迟离焦的 **PSM**。为偏振像差“延迟散焦”计算点扩展函数。假设均匀照明的圆孔径没有波前像差，延迟离焦量大小 δ_{mag} 为 1rad，出瞳直径为 2mm。在 $J(x, y)$ 中，延迟器的琼斯矩阵已展开为线性和二次泰勒级数项。

$$a(x, y) = 1$$

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{i\delta_{\text{mag}}(x^2 - y^2)}{2} & -i\delta_{\text{mag}}xy \\ -i\delta_{\text{mag}}xy & 1 - \frac{i\delta_{\text{mag}}(-x^2 + y^2)}{2} \end{pmatrix}$$

$$W(x, y) = 0$$

使用计算机程序 (MATLAB 或 Mathematica) 创建奇数维 (如 129×129) 的光瞳阵列。

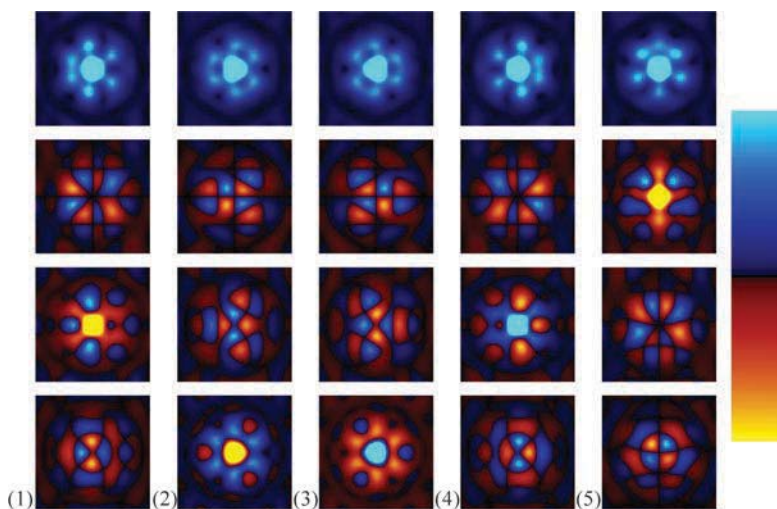
- 创建一个有 33 条光线穿过圆形出瞳的出瞳阵列，并用 0 填充到 129×129 。绘制 $2 \times 2 \times 129 \times 129$ 琼斯光瞳的实部和虚部。
- 计算 $2 \times 2 \times 129 \times 129$ 振幅响应矩阵 (**ARM**)，即相干点扩展函数的琼斯矩阵形式。每个 129×129 的 2×2 琼斯光瞳元素分别进行傅里叶变换。绘制 $2 \times 2 \times 129 \times 129$ **ARM** 的实部和虚部。
- 计算并绘制 $4 \times 4 \times 129 \times 129$ 的 **MPSM**。
根据 a 部分和 b 部分中的振幅响应矩阵，回答以下问题：
- 如果用水平偏振光照射光学系统，并通过垂直偏振器观察，相干点扩展函数的形式是什么？
- J_{xx} 元素存在什么波前像差？它与 J_{yy} 元素中的像差相比如何？
- 描述并解释“水平入射-水平分析”相干点扩展函数和“垂直入射-垂直分析”相干点扩展函数之间的差异。

根据 c 步骤中的 **MPSM**，回答以下问题：

- 非偏振点光源的像的偏振态是什么？
- 点扩散函数 (S_0 分量) 的强度分布如何依赖于入射偏振态？

- 16.4 参考图 16.35 和图 16.37。当右旋圆偏振光入射时，像的中心是右旋圆偏振的还是左旋圆偏振的？为什么？第一个衍射环中的六个光斑是否具有与中心相同的偏振？

- 16.5 图 16.46 显示了 CCR **MPSM** 作用于水平偏振光后的出射斯托克斯参数。将入射偏振态与下面的出射斯托克斯参数匹配。



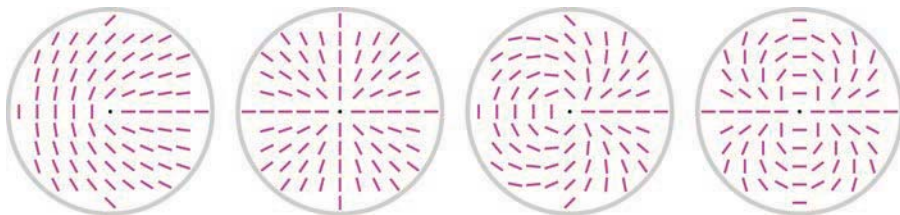
$$\text{a. } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b. } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c. } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d. } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{e. } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

16.6 在琼斯光瞳上进行什么计算来计算靠近焦点但不在焦点的区域中的 **ARM**?

16.7 考虑涡旋延迟器,它们是半波线性延迟器,它们的快轴围绕中心旋转 $m/2$ 次。它们的琼斯矩阵是

$$\mathbf{J}_m = \begin{pmatrix} \cos(m \cdot \arctan(x, y)) & \sin(m \cdot \arctan(x, y)) \\ \sin(m \cdot \arctan(x, y)) & -\cos(m \cdot \arctan(x, y)) \end{pmatrix}$$

延迟光瞳图如下所示:



计算 $m=1, 2, 3$ 和 4 的琼斯矩阵的 **PSM**。

16.8 波长为 500nm 的准直光束入射到沃拉斯顿棱镜上的 $1\text{mm} \times 1\text{mm}$ 方形孔径上,具有以下偏振像差函数和光瞳函数:

$$a(x, y) = 1$$

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(-i\pi x/1) & 0 \\ 0 & \exp(i\pi x/1) \end{pmatrix}$$

$$W(x, y) = 0$$

棱镜后面是一个非偏振镜头。出瞳距离像面 100mm 。在尺寸为 $2 \times 2 \times 199 \times 199$ 的琼斯光瞳中,在孔径上选取九个像素。

a. 计算 $2 \times 2 \times 199 \times 199$ 的琼斯光瞳。绘制刚好大于光瞳的区域的幅值和相位。

- b. 计算 $2 \times 2 \times 199 \times 199$ 振幅响应矩阵。绘制 **ARM** 中心的幅值和相位图。
- c. 绘制水平偏振入射光的振幅点扩展函数的幅值和相位图(E_x 和 E_y)。仅绘制大部分光所在的中心区域。
- d. 绘制垂直偏振入射光的振幅点扩展函数中心的幅值和相位图。
- e. 绘制 45° 偏振入射光的振幅点扩展函数图。
- f. 计算并绘制水平偏振入射光的光学传递矩阵。
- g. 计算并绘制 45° 偏振入射光的光学传输矩阵。
根据 a 步骤中的琼斯光瞳：
- h. 存在哪些像差？
根据 c 步骤中水平偏振入射光的振幅点扩展函数：
- i. 水平偏振入射光的振幅点扩展函数的偏振态是什么？
根据 d 步骤中垂直偏振入射光的振幅点扩展函数：
- j. 垂直偏振入射光的振幅点扩展函数的偏振态是什么？
根据 c 和 d 步骤中的振幅点扩展函数：
- k. 水平点扩展函数相对于垂直点扩展函数的位置如何？请做解释。
根据 e 步骤中 45° 入射光的振幅点扩展函数：
- l. 描述 45° 偏振的点扩展函数的偏振态分布。
基于 f 步骤中水平偏振入射光的光学传递矩阵：
- m. 偏振像差对像的影响有多大？它能与衍射受限的光学传递函数相比较吗？
根据 g 步骤中 45° 偏振入射光的光学传递矩阵：
- n. 哪些空间频率被系统滤除掉(完全去除)？
- o. **ARM** 上像素之间的间距是多少(以毫米为单位)？

16.14 参考文献

- [1] N. Lindlein, S. Quabis, U. Peschel, and G. Leuchs, High numerical aperture imaging with different polarization patterns, *Opt. Express* 15(9) (2007).
- [2] J. P. McGuire and R. A. Chipman, Diffraction image formation in optical systems with polarization aberrations. I: Formulation and example, *J. Opt. Soc. Am. A* 7(9) (1990).
- [3] R. N. Bracewell, *The Fourier Transform and Its Applications*, Chapter 6, New York: McGraw-Hill Higher Education (2000).
- [4] R. W. Ramirez, *The FFT, Fundamentals and Concepts*, Hoboken, NJ: Prentice Hall (1985).
- [5] J. S. Walker, *Fast Fourier Transforms*, 2nd edition, Boca Raton, FL: CRC Press (1996).
- [6] J. W. Goodman, *Statistical Optics*, New York: Wiley (1985).
- [7] J. D. Gaskill, *Linear Systems, Fourier Transforms, and Optics*, New York: Wiley (1978).
- [8] E. Hecht, *Optics*, 4th edition, Boston, MA: Addison Wesley (2002).

第 17 章

平移和延迟计算

17.1 引言

光学系统延迟的知识提供了出射波前偏振相关性的重要信息^[1]。本章开发了一种计算延迟的算法,这是一个巧妙的话题。人们希望有这样一种算法,它将偏振光线追迹矩阵 $\mathbf{P}$ 以及相关的输入和输出传播矢量 $\mathbf{k}_{\text{in}}$ 和 $\mathbf{k}_{\text{out}}$ 作为输入,并返回延迟的大小 δ ,以及快、慢态。实际情况并非如此简单,因为过光学系统光路的延迟计算取决于穿过光学系统的整个 $\mathbf{k}$ 序列。

在描述光线通过光学系统传播时,折射带来的坐标系变化可以“伪装”为圆延迟,如 17.2.1 节所示。同样,反射带来的局部坐标系变化可以“伪装”为半波线性延迟。需要计算这两个效应并进行修正,以获得正确的延迟计算。本章的目标如下:①仔细考虑延迟的几种不同定义,目的是找到一个足够鲁棒的适用于一般光学设计的定义;②探索横向矢量沿光学系统的光线路径平移有关的局部坐标变换;③提出一种在偏振光线追迹中用 3×3 偏振光学追迹算法计算固有延迟(proper retardance)的算法。该算法将把偏振光线追迹矩阵中描述固有延迟的部分与描述非偏振旋转(几何变换)的部分分离。波前上的几何变换集合就是倾斜像差,这是第 18 章的主题。本章提供了一些例子来强调相关的微妙之处。

术语“延迟”是指光程长度的积累与入射偏振态相关的一种物理性质。经典的延迟器是一种晶体波片,它将光束分成两种模式,使它们具有两种不同的偏振态和两种光程长度^[3-5]。延迟量是光程差所对应的相位差,即传播时间差。对于一个波片组合,光程长度可

以是多值的,如图 17.1 所示。这种波片的延迟图需要推广,以包含金属反射和多层薄膜的延迟贡献。第 26 章(多阶延迟器和不连续性之谜)将详细讨论具有多值光程长度的多阶复合延迟器。

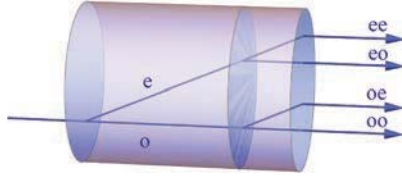


图 17.1 除非两个快轴完全平行或垂直,否则两波片构成的序列将产生四个出射光束。

在每块晶体中,光束被标示为寻常光(o)或异常光(e)。因此,四个光程长度与通过该双元件延迟器的透射有关

以琼斯矩阵的视角,理想延迟器是用酉矩阵描述的一种装置。酉矩阵有两个正交本征偏振,它们描述了两种与入射光偏振态相同的出射偏振态。依据本征矢量是线偏振的、圆偏振的还是椭圆偏振的,延迟器被称为线性延迟器、圆延迟器或椭圆延迟器。该酉矩阵还具有两个幺模特征值 $e^{-i\phi_1}$ 和 $e^{-i\phi_2}$,它们描述了两个本征偏振的相位变化。延迟量是特征值相位差, $\delta = |\phi_1 - \phi_2|$ 。由于幺模特征值,琼斯矩阵在延迟上是周期性的,延迟量每隔一个波长重复一次,因为在矩阵中

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (17.1)$$

其中 y 分量延迟了 δ 弧度。注意这个定义适用于理想延迟器和酉矩阵。延迟和二向衰减的组合,例如来自偏振光线追迹,会产生具有非正交本征偏振的非齐次矩阵。一种做法是把琼斯矩阵分解成厄米部分和酉部分,这可以通过多种方式实现,其中包括极分解、矩阵对数、Lu-Chipman 分解(适用米勒矩阵),它们得到相似但不相同的延迟量、快轴和慢轴。

延迟器和延迟量的另一种描述是这样一类器件或相互作用,它们会致使偏振态以庞加莱球旋转的方式改变;旋转角度为延迟量,庞加莱球的旋转轴为快轴和慢轴^[6]。延迟器米勒矩阵是用于斯托克斯参量的旋转矩阵。

延迟在光学系统中是非常重要的,因为:

- (1) 延迟是可测量的,用偏振仪和干涉仪测量;
- (2) 将偏振特性分为二向衰减和延迟有助于简化偏振像差的描述和理解;
- (3) 当存在延迟像差时,不同的入射偏振态产生不同的波前像差;它们有不同的干涉图,形成不同的点扩散函数。

将延迟的概念扩展到三维偏振光线追迹矩阵是很复杂的。由于入射光和出射光不一定共线,偏振光线追迹矩阵的特征矢量通常不在入射和出射的横平面内,因此不能代表实际的偏振态。17.4 节给出了明确定义的 3×3 偏振光线追迹矩阵的延迟计算算法,该算法需要用从物空间到像空间所有光线段的全部传播矢量集来确定延迟。当处理诸如延迟这样棘手的概念时,应详细说明使用的精确算法,来帮助沟通并减少误解。

光路有延迟、二向衰减、振幅和相位变化。为了使讨论目标明确,本章主要研究纯延迟器及其矩阵。它们是具有正交本征矢量的齐次矩阵。具有非正交本征矢量的非齐次矩阵,

涉及非对齐的二向衰减和延迟的组合。这些组合可以表示为一个纯延迟器和一个纯二向衰减器的乘积,并且正如 Lu 和 Chipman 所描述的那样^[7],延迟被很好地定义为纯延迟器的延迟。通常,通过光学系统的倾斜光线是略微非齐次的,因此,这是偏振光线追迹中的一个重要关注点,但它并不会使我们的研究复杂化。

17.1.1 固有延迟计算的目的

与过光学系统的光线路径相关的偏振相位变化有两个组成部分:

(1) 固有延迟: 由物理过程引起的相位延迟(光程差),例如通过双折射材料传播或表面反射或折射时引起的与偏振相关的相位变化。

(2) 一种几何变换,由于坐标选择(用于确定相位)而产生的。

通常,正入射时的理想反射表示为琼斯矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,详见 17.6.1 节。然而,在正入射时,镜面如何区分 x 偏振光和 y 偏振光呢? 17.6.1 节讨论了这个琼斯矩阵背后的基本原理以及这一悖论的解决方法。

延迟计算算法需要将几何变换(类似旋光的几何旋转和/或反转)从固有延迟中分离出来。17.2.5 节描述了一个平行转移矩阵 Q ,它确定了一般光线路径序列的局部坐标系正则基,从而表征了几何变换。 Q 是用来从几何变换中分离延迟的中间计算。

17.2 几何变换

描述沿任意方向传播的琼斯矢量需要用局部坐标,它可以在物空间和像空间^[8]之间旋转和/或反转,且与任何延迟无关。为了描述这些坐标效应,本节定义了平行转移矩阵,并将其应用于局部坐标几何变换的描述。这将致使 s 偏振和 p 偏振在正入射时简并。

17.2.1 局部坐标的旋转: 偏振仪视角

我们的理念是尽可能多地在全局坐标中进行计算。但在局部坐标背景下进行平行讨论,有助于理解几何变换和固有延迟这个主题,因为它给出了对根本问题的深入理解。在一对右手局部坐标下定义琼斯矩阵,一套坐标与入射琼斯矢量相关联,另一套坐标与出射琼斯矢量相关联。齐次琼斯矩阵 J (具有正交本征偏振 w_1 和 w_2) 的延迟,可以从矩阵特征值(ξ_1 和 ξ_2) 的相位差计算得到

$$\delta = |\arg(\xi_1) - \arg(\xi_2)| \quad (17.2)$$

其中, $Jw_1 = \xi_1 w_1$ 和 $Jw_2 = \xi_2 w_2$ ^[9]。

如图 17.2(a) 所示,考虑用琼斯矩阵或米勒矩阵偏振测量仪测量一个空的样品室(具有单位琼斯矩阵)。琼斯矩阵偏振测量仪在空气中进行测量时应得到单位矩阵。

如图 17.2(b) 所示,通过将 PSA 旋转 θ ,出射局部坐标相对于入射局部坐标旋转了一个角 θ 。然后,测得的琼斯矩阵变成了一个旋转矩阵,而不是单位矩阵,

$$J(\theta) = R(\theta)I = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (17.3)$$

它的特征值为

$$\xi_1 = \exp(i\theta), \quad \xi_2 = \exp(-i\theta) \quad (17.4)$$

它的特征矢量或本征偏振为左右旋圆偏振

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \quad (17.5)$$

注意 $\mathbf{J}(\theta)$ 与圆延迟器形式相似(式(5.48))。除非出射局部坐标方向与入射局部坐标方向平行,否则非偏振元件显现出具有“圆延迟”

$$\delta = |\arg(\xi_1) - \arg(\xi_2)| = 2\theta \quad (17.6)$$

其中 θ 是局部坐标旋转角。然而,很显然,旋转 PSA 坐标不能在一个空样品室中引入左右旋圆偏振光之间的光程差。这里,“固有”延迟为零,没有光程差存在。几何变换是 θ 角旋转。由此可见,偏振测量仪测得的延迟如何依赖于入射和出射局部坐标的相对选择。本章的主要目的是理解适用于偏振光线追迹计算的类似问题。

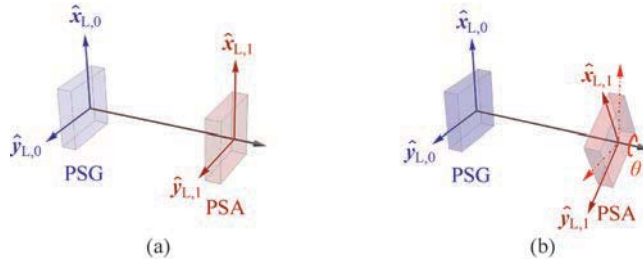


图 17.2 偏振测量仪在空气中进行测量,(a)偏振态分析器(PSA)与偏振态发生器(PSG)对齐,(b)PSA 旋转到任意方向。通过旋转 PSA,琼斯矩阵的出射局部坐标也旋转。空样品测得的延迟具有 2θ 的“圆延迟量”

现在,考虑用这个带有旋转 PSA 的偏振测量仪来测量一个延迟器 $\mathbf{U}$ (酉)的琼斯矩阵,

$$\mathbf{J}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} \quad (17.7)$$

由式(17.2)和式(17.7)计算出的延迟与旋转角度 θ 有关。对于延迟量为 δ 的圆延迟器,偏振仪测得的延迟量为 PSA 角 θ 的函数

$$\delta_{\text{测量}} = 2\arg \left[\cos\left(\frac{\delta}{2} + \theta\right) + i \left| \sin\left(\frac{\delta}{2} + \theta\right) \right| \right] = \delta + 2\theta \quad (17.8)$$

对于延迟量为 δ 的线性延迟器,测得的延迟量与 PSA 角 θ 的函数关系为

$$\delta_{\text{测量}} = 2\arctan \left(\frac{\sqrt{1 - \left(\cos \frac{\delta}{2} \cdot \cos\theta\right)^2}}{\cos \frac{\delta}{2} \cdot \cos\theta} \right) \quad (17.9)$$

17.2.2 非偏振光学系统

为了确定物理延迟或固有延迟,需要一个坐标系来确定在没有延迟的情况下入射和出射偏振态之间的关系。因此,引入非偏振光学系统的概念来定义在没有二向衰减和延迟的情况下的偏振关系;然后,根据非偏振关系定义二向衰减和延迟。这个坐标系在偏振方面

起的作用,类似于几何光学中的近轴光线追迹。在近轴光学中,点源在出瞳处产生球面波,所有光线都到达理想像点。然后,将像差定义为实际光线路径与近轴光学的偏差。近轴光学为像差提供了一个基本的坐标系。

在非偏振光学系统中,在反射和折射时,没有偏振态的改变,只有方向的改变。它与菲涅耳振幅系数等于 $1(a_s=a_p=1)$ 时等效。入射偏振椭圆是任意的,它绕 s 基矢量翻折,并以相同的椭圆和相同的折转后的长轴继续传播。对于折射,偏振态的螺旋性保持不变,右旋圆偏振光折射为右旋圆偏振光。对于反射,螺旋性反转,右旋圆偏振光或右旋椭圆偏振光反射为左旋圆偏振光或左旋椭圆偏振光,与传播方向的改变有关。因此,对于非偏振光学系统,偏振态在反射时仅发生一系列旋转和螺旋性改变。图 17.3 显示了左旋椭圆偏振光通过道夫棱镜的传播,该棱镜作为一个非偏振光系统进行了光线追迹。在入射端面处,偏振椭圆随传播方向偏转,没有其他改变。光线传播到底面,在那里它反射为右旋椭圆偏振光。最后,它沿着折射方向再次偏转并离开道夫棱镜。如果所有菲涅耳系数都等于 1,这就是偏振态的演化。

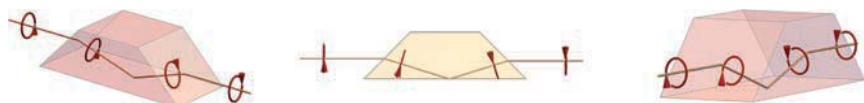


图 17.3 偏振光通过一个非偏振的光学系统(道夫棱镜),经过一系列折转,或旋转和反转,但在其他方面是不变的

17.2.3 矢量的平移

在本节中,光线路径通过光学系统的几何变换将用平移进行探索,其中倾斜光线特别值得注意。矢量在球面上的平移是矢量沿一系列大圆圆弧移动的过程,矢量与每条圆弧的夹角为常数^[10-11],如图 17.4 所示。路径在顶点处从第一个圆弧变换到第二个圆弧(诸如此类),顶点处的矢量角度沿第二个圆弧时保持不变,以此类推,依次经过如箭头所示的圆弧序列。本节介绍一个传播球或 k 球,用于表示光线段序列的传播矢量集。

追踪单一光线通过具有 N 个界面的透镜系统,考虑入射传播矢量 $\hat{k}_1$ (第一光线段)与出射传播矢量 $\hat{k}_e$ (最终光线段)平行的特殊情形,但光线经过光学系统折射时其传播方向 $\hat{k}_q$ 发生了多次改变。这个 $\hat{k}_q$ 集合可以表示为单位 k 球上由大圆圆弧连接的点。由于 $\hat{k}_1 = \hat{k}_e$,弧形成一个封闭的球面多边形。为第一光线段在横平面上任意选取一对正交的局部坐标矢量。当这对局部坐标按照平移通过系统,如图 17.4 所示,在出射传播矢量上的平移变换后的局部坐标相对于初始局部坐标旋转了一个弧度角,这个角等于球面多边形的立体角^[12]。

考虑如图 17.4 所示的单位 k 球上 k 矢量序列的例子,光线沿着 $\hat{k}_1$ 传播,折射到 $\hat{k}_2$,然后折射到 $\hat{k}_3$,沿着 $\hat{k}_4 = \hat{k}_1$ 出射。在 $\hat{k}_1$ 的横平面上,定义了任意一对正交右手局部基矢量,可用于描述入射琼斯矢量的局部坐标。这对局部坐标可以由如图 17.4 所示的平行移动通过光学系统。 A 点切平面上的矢量 (x_A, y_A) ,从 A 点($\hat{k}_1 = \hat{k}_1 = (0, 0, 1)$)平移到 B 点

$(\hat{k}_2 = (1, 0, 1)/\sqrt{2})$, (x_A, y_A) 变为 $(x'_A, y'_A) = (x_B, y_B)$, 它在 B 点的切平面上。然后, 矢量 (x_B, y_B) 从 B 点平行移动到 C 点 $(\hat{k}_3 = (0.5, 0.5, 1/\sqrt{2}))$, (x_B, y_B) 变为 $(x'_B, y'_B) = (x_C, y_C)$ 。最后, 矢量回到 A 点, 其中 $\hat{k}_e = \hat{k}_4 = (0, 0, 1)$, (x_C, y_C) 变为 (x'_C, y'_C) , 其不等于 (x_A, y_A) 。如果传播矢量通过光学系统后改变它的方向, 矢量在其横平面上的总旋转等于潘恰拉特南(Pancharatnam)相位^[13-14]或贝里(Berry)相位^[15]。

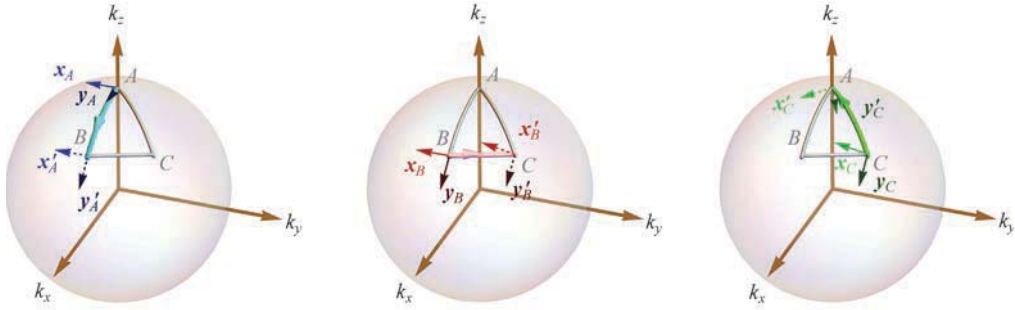


图 17.4 入射局部基矢量通过点 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ 的平行移动

入射传播矢量 $\hat{k}_i = \hat{k}_1$ 是 $(0, 0, 1)$, 经过三次折射后, 出射传播矢量 $\hat{k}_e = \hat{k}_4$ 也是 $(0, 0, 1)$ 。因此, 传播矢量被映射到点 A 、 B 和 C , 并返回到 k 球上的 A 点。由于 $\hat{k}_1 = \hat{k}_4$, 人们可能会很天真地为入射空间和出射空间选择相同的局部坐标。然而, 这个光线路径的几何变换是一个 12.35° 的旋转, 这是一个类似圆延迟的效果。如图 17.5 所示, 球面三角形 ABC 所对应的立体角为 12.35° 几何旋转。任何入射的线偏振光都将平行地传播出射, 但其偏振在横平面上旋转 12.35° 。除光程长度, 左旋圆偏振光和右旋圆偏振光之间还会有 $12.35/360$ 波的相移。由于迎着光束看时偏振态逆时针旋转, 左旋圆偏振光的相位超前, 右旋圆偏振光的相位滞后。

图 17.6 显示了一个通过三棱镜系统的类似折射序列的简单例子。通过棱镜的传播矢量集与图 17.4 非常相似, 但它所对应的是一个立体角为 2.8° 的更小的球面三角形。请注意, 透镜的边缘类似棱镜。透镜中的倾斜光线也以类似的方式传播, 如图 17.4 所示, 其中 k 矢量序列按顺时针或逆时针方向移动。

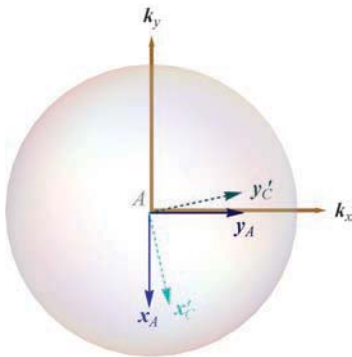


图 17.5 (x_A, y_A) 和 (x'_C, y'_C) 之间的旋转量等于球面三角形 ABC 的立体角



图 17.6 三棱镜的折射传播矢量, 它们在 k 球上形成一个类似如图 17.4 所示的球面多边形

如果琼斯矩阵或偏振测量仪的初始局部坐标和出射局部坐标被选取为相互平行,光路似乎具有“圆延迟”。然而,如果一个偏振测量仪逆时针旋转 12.35° ,如图 17.2(b)所示,用早期的琼斯偏振测量仪计算或测量的琼斯矩阵将是一个单位矩阵,就像没有物理延迟的非偏振系统所期望的那样。

17.2.4 反射时矢量的平移

本节描述反射时平移的修正。反射与折射的区别在于,在反射过程中,圆偏振光会改变螺旋性^①。如图 17.7 所示,考虑一个三反射镜系统的例子。三个反射镜的排列使准直光束在每个反射镜上的入射角为 45° 。设每次反射都是理想的非偏振反射,使每次反射时入射偏振椭圆进入和出射保持不变,从而以相同的椭圆率离开光学系统。

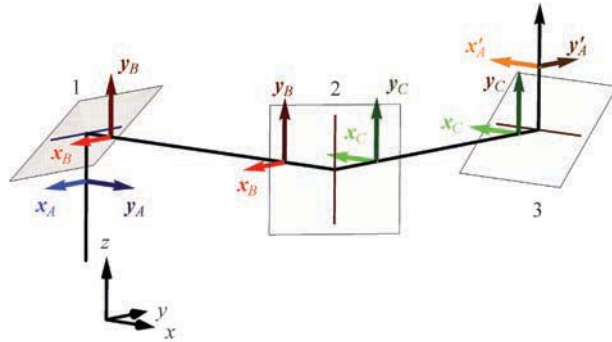


图 17.7 一个三反射镜系统,绘制了入射局部基矢量(蓝色箭头)以及传播通过该非偏振光学系统的局部基矢量(红色、绿色和橙色箭头)。当一束准直光束沿 z 轴进入系统时,光束也沿 z 轴出射

入射传播矢量 $\hat{k}_1 = \hat{k}_1$ 是 $(0, 0, 1)$, 经过三次反射, 出射的传播矢量 $\hat{k}_4$ 也是 $(0, 0, 1)$, $\hat{k}_2 = (1, 0, 0)$ 和 $\hat{k}_3 = (0, 1, 0)$ 。将传播矢量映射到 k 球上的 A, B, C 点, 如图 17.8 所示。给第一光线段选取任意右手局局部基矢量, 其中 x_A 与 s 偏振对齐, y_A 与 p 偏振对齐。入射局部基矢量(蓝色箭头)沿大圆弧从 A 点平行移动到 B 点, 在 B 点反射, $\hat{k}_1$ 反射到 $\hat{k}_2$, 其中一个基矢量(x'_A 或 y'_A)由于反射而反转。我们的约定反转了 p 偏振, 因此, y'_A 被反转为 y_B (图 17.8, 从图(a)到图(b))。矢量对 x_B 和 y_B (红色箭头)平行移动到 C 点, 在 C 点 p 偏振矢量 x'_B 反转为 x_C (图 17.8, 从图(b)到图(c))。然后, 矢量对 x_C 和 y_C (绿色箭头)平行移动回 A 点, 在那里发生最后一次反射。在 A 点, p 偏振(y'_C)反转为 y''_A , 如图 17.9 所示。

因此, 这条光线路径的几何变换是一个 90° 的旋转, 这涉及球面三角形 ABC 所对应的立体角, 以及奇数次反射的反转。如图 17.9 所示, (x_A, y_A) 与 (x'_A, y'_A) 之间存在 90° 旋转和反转。

由于局部坐标的这种旋转, 即使镜子是非偏振的, 图 17.7 中入射的 y 偏振光(蓝色)射出系统时会变为 x 偏振光(橙色)。如果用偏振态发生器和偏振态分析器相互平行的偏振

^① 这里考虑正入射附近和小于布儒斯特角情形。在布儒斯特角之外, 螺旋性的变化是相反的。

测量仪来测量这个非偏振系统,那么由于奇数次反射产生的反转,将会测量到 180° 的圆延迟。但是这里测得的延迟纯粹是由局部坐标变换造成的。为了测量固有延迟,分析器应该相对发生器旋转 90° ,它的局部坐标需要因反转进行校正。这个 90° 是此传播矢量序列的 Berry 相位。

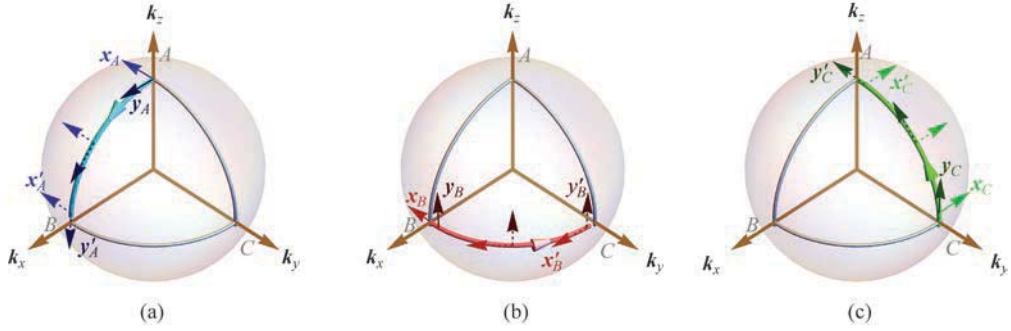


图 17.8 通过如图 17.7 所示三反射镜系统的局部坐标对 (x_A, y_A) , 在第一次反射后(从图(a)到图(b))、第二次反射后(从图(b)到图(c))和最后一次反射前的演变

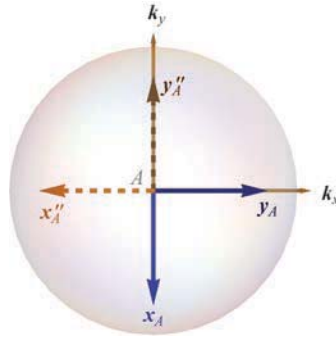


图 17.9 相对于初始局部坐标 (x_A, y_A) , 出射局部坐标 (x''_A, y''_A) (虚线箭头) 经历了 90° 旋转加上反转

17.2.5 平移矩阵 Q

为了计算 Berry 相位,对于有 N 个光线截断点的光学系统中的光线传播,采用一种矩阵算法处理平移效应。将第 q 个光线截断点处的平移矩阵 Q_q 定义为一个 3×3 光线追迹实酉矩阵,并假设每个光线截断点为非偏振的。

对于折射来说, Q_q 是绕 $\hat{k}_{q-1} \times \hat{\eta}_q$ ($\hat{s}$ 矢量) 的旋转,旋转角(光线偏折角) χ 由斯涅耳定律求出

$$n \sin \theta = n' \sin \theta', \quad \chi = |\theta' - \theta| \quad (17.10)$$

式中 (n, n') 为折射率, (θ, θ') 为折射前后的角度。设 E_{q-1} 为从 $q-1$ 表面出射并入射到 q 表面的偏振态,于是,对于非偏振界面,折射偏振态为 $E_q = Q_q E_{q-1}$ 。 Q_q 用于折射,将入射偏振椭圆 E_{q-1} 相对于传播矢量旋转为相同的椭圆 E_q , E_q 位于 $\hat{k}_q$ 的横平面上。同样地,

反射的 $\mathbf{Q}_q$ 是绕 $\hat{\mathbf{s}}$ 矢量的旋转, 将 $\hat{\mathbf{k}}_{q-1}$ 转变为 $\hat{\mathbf{k}}_q$, 再加上反转, 它将入射的右手坐标系转变为左手坐标系。

一个 $\mathbf{Q}_q$ 矩阵序列从一个给定的入射 s-p 基到相应的出射 s-p 基进行矢量平移。除了这种几何变换, $\mathbf{Q}_q$ 没有偏振效应, 这完全是非偏振的。

一条光线通过 N 个界面组成的系统, 其累积平移光线追迹矩阵为

$$\mathbf{Q}_{\text{总}} = \prod_{q=1}^N \mathbf{Q}_{N-q+1} = \mathbf{Q}_N \mathbf{Q}_{N-1} \cdots \mathbf{Q}_q \cdots \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_1 \quad (17.11)$$

这相当于沿单位球体滑动平移基矢量, 如图 17.4 所示那样。对于入射偏振态 $\mathbf{E}_0$, 在没有任何二向衰减或延迟的情况下, 系统的出射偏振态为

$$\mathbf{E}_N = \mathbf{Q}_{\text{总}} \mathbf{E}_0 \quad (17.12)$$

$\mathbf{E}_N$ 为实际出射偏振态提供了一种参考偏振态,

$$\mathbf{E}'_N = \mathbf{P}_{\text{总}} \mathbf{E}_0 \quad (17.13)$$

折射 $\mathbf{Q}_q$ 只是 $\hat{\mathbf{k}}_{q-1}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}_q$ 的函数

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q &= \mathbf{O}_{\text{out},q} \mathbf{I} \mathbf{O}_{\text{in},q}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{s}_{x,q} & \hat{p}'_{x,q} & \hat{k}_{x,q} \\ \hat{s}_{y,q} & \hat{p}'_{y,q} & \hat{k}_{y,q} \\ \hat{s}_{z,q} & \hat{p}'_{z,q} & \hat{k}_{z,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{s}_{x,q} & \hat{s}_{y,q} & \hat{s}_{z,q} \\ \hat{p}_{x,q} & \hat{p}_{y,q} & \hat{p}_{z,q} \\ \hat{k}_{x,q-1} & \hat{k}_{y,q-1} & \hat{k}_{z,q-1} \end{pmatrix} \\ &= (\hat{s}_q \hat{p}'_q \hat{k}_q) (\hat{s}_q \hat{p}_q \hat{k}_{q-1})^T \end{aligned} \quad (17.14)$$

其中 $\mathbf{I}$ 是 3×3 单位矩阵, 并且列矢量定义为

$$\hat{s}_q = \frac{\hat{k}_{q-1} \times \hat{\eta}_q}{|\hat{k}_{q-1} \times \hat{\eta}_q|}, \quad \hat{p}_q = \hat{k}_{q-1} \times \hat{s}_q, \quad \hat{p}'_q = \hat{k}_q \times \hat{s}_q \quad (17.15)$$

注意, 当琼斯矩阵为单位矩阵(非偏振矩阵)时, 式(17.14)本质上是偏振光线追迹矩阵 $\mathbf{P}$ (在第 9 章(偏振光线追迹计算)中介绍)。同样, 反射的 $\mathbf{Q}_q$ 是

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_q &= \begin{pmatrix} \hat{s}_{x,q} & \hat{p}'_{x,q} & \hat{k}_{x,q} \\ \hat{s}_{y,q} & \hat{p}'_{y,q} & \hat{k}_{y,q} \\ \hat{s}_{z,q} & \hat{p}'_{z,q} & \hat{k}_{z,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{s}_{x,q} & \hat{s}_{y,q} & \hat{s}_{z,q} \\ \hat{p}_{x,q} & \hat{p}_{y,q} & \hat{p}_{z,q} \\ \hat{k}_{x,q-1} & \hat{k}_{y,q-1} & \hat{k}_{z,q-1} \end{pmatrix} \\ &= (\hat{s}_q - \hat{p}'_q \hat{k}_q) (\hat{s}_q \hat{p}_q \hat{k}_{q-1})^T \end{aligned} \quad (17.16)$$

其中, 对角矩阵中的负号表示反射的 $\mathbf{Q}_q$ 引入了反转。

例 17.1 折光反射镜的 $\mathbf{Q}$ 矩阵

考虑一个表面法线沿 $\hat{\eta} = (-1, 0, 1)/\sqrt{2}$ 的反射镜, 一条光线沿 $\hat{k}_0 = (0, 0, 1)$ 入射到反射镜上。计算反射镜的 $\mathbf{Q}$ 。

使用 $\hat{s} = (0, -1, 0)$, $\hat{p} = (1, 0, 0)$, $\hat{p}' = (0, 0, -1)$, $\hat{k} = (1, 0, 0)$,

$$\mathbf{Q} = (-\hat{p}' \quad -\hat{s} \quad \hat{k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例 17.2 道夫棱镜的 Q 矩阵

另一个几何变换的例子是道夫棱镜。图 17.10 为非偏振反射的道夫棱镜。当一个道夫棱镜围绕入射光方向旋转时,出射 x 偏振的旋转是棱镜的两倍。由于内反射超过临界角,入射 y 偏振发生反转,如图 17.11 所示。道夫棱镜产生半波延迟,快轴沿棱镜底面。

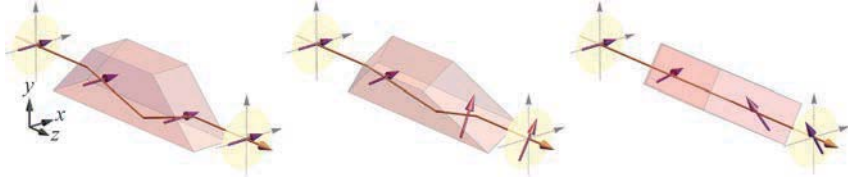


图 17.10 水平偏振光传播通过一个道夫棱镜,棱镜围绕入射方向旋转 0° 、 30° 和 60° 。然后,所得偏振态围绕出射方向旋转 0° 、 60° 和 120°

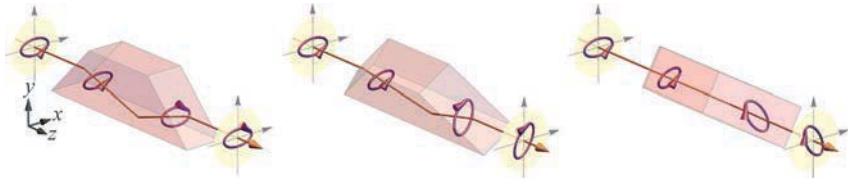


图 17.11 椭圆偏振光传播通过一个道夫棱镜,棱镜围绕入射方向旋转 0° 、 30° 和 60° 。所得偏振椭圆的主轴旋转 0° 、 60° 和 120° ,螺旋性发生改变

在第 9 章导出的或从偏振测量仪测得的 $\mathbf{P}$ 矩阵包含物理延迟量和几何变换。为了从 $\mathbf{P}$ 中提取物理延迟量,通过应用 $\mathbf{Q}$ 的逆来去除几何变换。对于有 N 个界面的光学系统,任意入射局部坐标 $\hat{\mathbf{x}}_{L,0}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_{L,0}$,

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_{\text{总}} \hat{\mathbf{x}}_{L,0} = \hat{\mathbf{x}}_{L,N}, \mathbf{Q}_{\text{总}}^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{L,N} = \hat{\mathbf{x}}_{L,0} \\ \mathbf{Q}_{\text{总}} \hat{\mathbf{y}}_{L,0} = \hat{\mathbf{y}}_{L,N} \Rightarrow \mathbf{Q}_{\text{总}}^{-1} \hat{\mathbf{y}}_{L,N} = \hat{\mathbf{y}}_{L,0} \\ \mathbf{Q}_{\text{总}} \hat{\mathbf{k}}_0 = \hat{\mathbf{k}}_N, \mathbf{Q}_{\text{总}}^{-1} \hat{\mathbf{k}}_N = \hat{\mathbf{k}}_0 \end{cases} \quad (17.17)$$

其中 $\hat{\mathbf{x}}_{L,N}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_{L,N}$ 为 $\mathbf{Q}_{\text{总}}$ 作用后出射空间中的几何变换坐标。假定这里的矢量 $\hat{\mathbf{x}}_{L,0}$ 和 $\hat{\mathbf{y}}_{L,0}$ 是在第一光线段横平面上的任意一对正交矢量。式(17.17)也把入射和出射传播矢量用 $\mathbf{Q}_{\text{总}}$ 关联了起来。对于一套给定的右手入射局部坐标系 $(\hat{\mathbf{x}}_{L,0}, \hat{\mathbf{y}}_{L,0}, \hat{\mathbf{k}}_0)$,几何变换坐标 $(\hat{\mathbf{x}}_{L,N}, \hat{\mathbf{y}}_{L,N}, \hat{\mathbf{k}}_N)$ 构成右手坐标系,除非光线在它的光线路径中有奇数次的反射。

$\mathbf{Q}_{\text{总}}$ 代表了一条沿 $\hat{\mathbf{k}}_0$ 入射沿 $\hat{\mathbf{k}}_N$ 出射的光线通过一个非偏振光学系统的偏振光线追迹;由于 $\mathbf{Q}_{\text{总}}$ 只跟踪光线传播过程中的几何变换而没有偏振变化,所以它相当于通过非偏振光学系统进行光线追迹。

$\mathbf{Q}_{\text{总}}$ 给出了测量光学系统偏振变化所需的参考基准,与 17.2.2 节开头讨论的用于定义波前像差的近轴光学的作用相当。除了反射和折射,还可以计算光栅、全息图和散射的 $\mathbf{Q}_q$ 。如果 $\hat{\mathbf{k}}_{q-1}$ 和 $\hat{\mathbf{k}}_q$ 在界面同一侧,则使用反射算法计算 $\mathbf{Q}_q$ 。如果两个传播矢量在两侧,则使用 $\mathbf{Q}_q$ 的折射算法。在这两种情形中,目标都是使偏振椭圆通过界面,而不改变偏振,只改变方向。

17.3 正则局部坐标

Q_q 序列提供了一种方法,来定义沿光线路径从物空间到像空间的一组连续的坐标矢量^①。初始正交右手坐标系矢量 $(\hat{x}_{L,0}, \hat{y}_{L,0})$ 是在物空间横平面上任意选取的。在第一个界面之后,下一组坐标矢量是

$$(\hat{x}_{L,1}, \hat{y}_{L,1}) = (Q_1 \hat{x}_{L,0}, Q_1 \hat{y}_{L,0}) \quad (17.18)$$

通过 $Q_q, q=2,3,4,\dots$ 的连续矩阵乘法,坐标矢量沿着光线路径传递,定义出每个光线段的坐标矢量。坐标矢量是正则化的,因为在没有二向衰减和延迟的情况下,当一个人射偏振态 $\hat{x}_{L,0}$ 通过系统时将经历一系列偏振态 $\hat{x}_{L,2}, \hat{x}_{L,3}, \hat{x}_{L,4}, \dots$, 这在这些坐标集之间给出了一个明确的和有意义的联系。

$(\hat{x}_{L,q}, \hat{y}_{L,q}, \hat{k}_q)$ 可能是右手坐标系或左手坐标系,取决于系统中反射的次数。图 17.12 显示了入射的 $(\hat{x}_{L,0}, \hat{y}_{L,0})$ 、反射的 $(\hat{x}_{L,r,1}, \hat{y}_{L,r,1})$ 和透射的 $(\hat{x}_{L,t,1}, \hat{y}_{L,t,1})$ 坐标矢量对,它们计算自 Q_r 和 Q_t , 其中入射坐标矢量为

$$\hat{x}_{L,0} = \frac{\hat{k}_0 \times \hat{\eta}_1}{|\hat{k}_0 \times \hat{\eta}_1|}, \quad \hat{y}_{L,0} = \hat{k}_0 \times \hat{x}_{L,0} \quad (17.19)$$

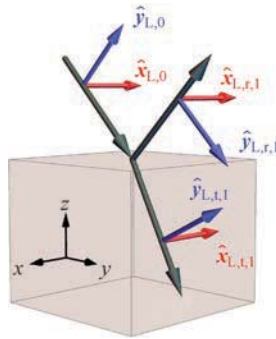


图 17.12 由平移矩阵计算的入射、反射和透射坐标矢量。 $(\hat{x}_{L,0}, \hat{y}_{L,0}, \hat{k}_0)$ 是右手入射坐标矢量,

$(\hat{x}_{L,r,1}, \hat{y}_{L,r,1}, \hat{k}_{r,1})$ 是左手反射坐标矢量, $(\hat{x}_{L,t,1}, \hat{y}_{L,t,1}, \hat{k}_{t,1})$ 是右手透射坐标矢量

注意 $(\hat{x}_{L,0}, \hat{y}_{L,0}, \hat{k}_0)$ 和 $(\hat{x}_{L,t,1}, \hat{y}_{L,t,1}, \hat{k}_{t,1})$ 构成右手坐标矢量集,而 $(\hat{x}_{L,r,1}, \hat{y}_{L,r,1}, \hat{k}_{r,1})$ 构成左手坐标矢量集。下标 r 代表反射, t 代表透射。

图 17.13 中的双反射镜例子展示了物空间($i=0$)中的 $(\hat{x}_{L,i}, \hat{y}_{L,i})$ 以及沿每个光线段的几何变换(使用一组 Q_q)。注意这个例子中的 $(\hat{x}_{L,0}, \hat{y}_{L,0}) = (\hat{s}_1, \hat{p}_1)$ 。可以看出,物空间中的右手坐标系矢量在第一次反射后变为左手坐标系,在第二次反射后变为右手坐标系。

① 坐标矢量可能不是用于构建 P 或 Q 矩阵的局部坐标 $(\hat{s}, \hat{p}, \hat{k})$ 矢量。在本书中, $(\hat{s}, \hat{p}, \hat{k})$ 始终是一个右手坐标系,与琼斯矩阵的定义保持一致。坐标矢量可以是左手坐标系,因为它们表示给定的坐标矢量如何经由 Q 矩阵计算的非偏振光学系统进行变换。

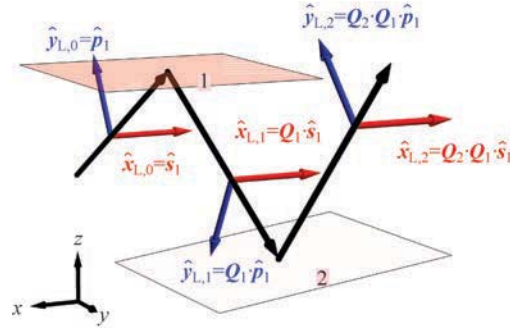


图 17.13 双反射镜系统。红色实线表示第一个镜面处的 s 矢量及其沿每个光线段使用 Q 的几何变换。蓝线表示物空间中的 p 矢量及其几何变换

17.4 固有延迟计算

本节介绍计算由 P 矩阵表示的光线路径固有延迟的算法。固有延迟不包含几何变换，其中几何变换由 Q 矩阵描述。

17.4.1 固有延迟的定义

固有延迟或延迟是与光线路径相关的源自物理过程的偏振相关光程差的积累。延迟是由偏振相关的相位变化产生的，例如反射或折射中的 s 和 p 相位差，通过波片、双折射材料的传播，或与衍射光栅的相互作用。延迟对于局部或全局坐标的选择是不变的。

17.5 从 P 中分离几何变换

尽管入射和出射的传播矢量不同，平移矩阵使得光线路径的延迟可被唯一定义。式(17.11)中的 $Q_{\text{总}}$ 给出了两个横平面上的正则局部坐标之间的关系，它追踪了坐标矢量通过光学系统的变换。当沿第一光线段在横平面上指定了任意偏振态 $\mathbf{v}$ 时，相应的偏振态通过非偏振系统传播并出射为 $Q_{\text{总}}\mathbf{v}$ 。 $Q_{\text{总}}^{-1}$ 将把出射空间中的坐标矢量通过逆几何变换映射回初始坐标矢量。在 $P_{\text{总}}$ 上执行此运算，将实际出射偏振态映射回到入射横平面上，在入射态的坐标中

$$\mathbf{M}_{\text{总}} = Q_{\text{总}}^{-1} \mathbf{P}_{\text{总}} \quad (17.20)$$

因此， $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 是一个偏振光线追迹矩阵，其出射坐标矢量与入射坐标矢量对齐，因为出射偏振态已经被“展开”(具有一种可能的反射反转)。 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 的入射横平面和出射横平面平行且都正交于 $\hat{\mathbf{k}}_0$ ，因为 $\mathbf{M}_{\text{总}} \hat{\mathbf{k}}_0 = \hat{\mathbf{k}}_0$ 。 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 包含了光线路径的二向衰减和固有延迟，即来自于所有薄膜和其他相互作用的偏振贡献。由于计算 Q 需要所有光线段的 $\hat{\mathbf{k}}_i$ ，对于未知的“黑盒子”光学系统，不能从 P 中分离出固有延迟。如果只知道入射和出射光线的性质而不知道内部的光线方向，则不能计算 Q 和固有延迟。

数学小贴士 17.1 矩阵的极分解

矩阵 $\mathbf{M}$ 的极分解计算出厄米矩阵 $\mathbf{H}$ 和西矩阵 $\mathbf{U}$, 二者相乘等于 $\mathbf{M}$ 。厄米矩阵具有非负的实特征值, 并代表一个理想的二向衰减器。西矩阵具有单位特征值, 代表理想延迟器。由于矩阵一般不能交换, 极分解可以按两种顺序进行: 西矩阵在前、厄米矩阵在后, 厄米矩阵在前、西矩阵在后。计算出的矩阵取决于所选的分解顺序,

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{H} = \mathbf{H}'\mathbf{U} \quad (17.21)$$

注意, 在两个极分解中, $\mathbf{U}$ 是相同的, 但厄米分量改变了。

极分解由 $\mathbf{M}$ 的奇异值分解计算得到,

$$\mathbf{M} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \quad (17.22)$$

第一个分解是

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\mathbf{H} = \mathbf{W}\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{W}\mathbf{V}^{-1}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1} \quad (17.23)$$

第二个是

$$\mathbf{M} = \mathbf{H}'\mathbf{U} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{V}^{-1}, \quad \mathbf{H}' = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda}\mathbf{W}^{-1}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{W}\mathbf{V}^{-1} \quad (17.24)$$

为了计算固有延迟, 下一步是将 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 的延迟和二向衰减分离。对 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 进行极分解得到纯延迟矩阵和纯二向衰减矩阵的乘积; 然后, 可以分别对每一个进行数据约简。给出了两种方法: ①极分解可以直接应用于 3×3 的 $\mathbf{M}_{\text{总}}$, 或②由 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 计算出一个 2×2 的琼斯矩阵, 并采用参考文献[16]中的方法。17.5.1 节介绍了第一种方法, 17.5.2 节展示了第二种方法。

17.5.1 用于 P 的固有延迟算法, 方法 1

将极分解应用到偏振光线追迹矩阵 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 中, 得到光线路径的二向衰减和延迟矩阵,

$$\mathbf{M}_{\text{总}} = \mathbf{M}_{\text{总},R}\mathbf{M}_{\text{总},D} = \mathbf{M}'_{\text{总},D}\mathbf{M}_{\text{总},R} \quad (17.25)$$

式中, $\mathbf{M}_{\text{总},R}$ 是一个延迟(西)矩阵, $\mathbf{M}_{\text{总},D}$ 和 $\mathbf{M}'_{\text{总},D}$ 是物空间中表示的二向衰减矩阵(非负定厄米矩阵)。 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 的延迟是 $\mathbf{M}_{\text{总},R}$ 的延迟。 $\mathbf{M}_{\text{总},R}$ 有三个特征矢量

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \hat{\mathbf{k}}_0) \quad (17.26)$$

和三个对应特征值

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (17.27)$$

至少有一个特征值是单位值, 这里选为 $\xi_3 = 1$, 这个特征值将入射传播矢量 $\hat{\mathbf{k}}_0$ 与旋转后的出射传播矢量联系起来, 这个出射传播矢量现在与 $\hat{\mathbf{k}}_0$ 平行。

正如所料, 延迟量(δ)是由横平面上的两个特征值 ξ_1 和 ξ_2 计算得到的, 是它们的相位差,

$$\delta = \arg(\xi_2) - \arg(\xi_1) \quad (17.28)$$

假设 $\arg(\xi_2) > \arg(\xi_1)$ 。如果 δ 小于 $\pi/2$, 快轴与较小的特征值相关联。如果 δ 大于 $\pi/2$, 复数的矩阵乘法无法追踪哪个偏振态是快态或慢态, 因为笛卡儿($x + iy$)形式的一系列复数的乘积其相位限制在 $-\pi < \phi \leq \pi$ 范围内。

当 $\mathbf{P}_{\text{总}}$ 为齐次时, 无需对 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 进行极分解; $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 和 $\mathbf{M}_{\text{总},R}$ 具有相同的特征值和本征偏振。然后, 式(17.28)给出了 $\mathbf{P}_{\text{总}}$ 的延迟, 其中 ξ_1 和 ξ_2 是 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 的本征值。

17.5.2 用于 P 的固有延迟算法, 方法 2

本节给出了固有延迟的另一种算法。由非齐次 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 得到 2×2 的琼斯矩阵 $\mathbf{J}$, 由 $\mathbf{J}$ 计算延迟。首先, 对 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 进行基的西变换, 使最后一行和最后一列的元素中只有 (3×3) 元素为非零。

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{U} \mathbf{M}_{\text{总}} \mathbf{U}^\dagger = \begin{pmatrix} & & 0 \\ \mathbf{J} & & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.29)$$

$\mathbf{U}$ 绕 $\hat{\mathbf{k}}_0 \times \hat{\mathbf{z}}$ 轴逆时针旋转 $\theta = \arccos(\hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \hat{\mathbf{z}})$, 使 $\hat{\mathbf{k}}_0$ 旋转到 $\hat{\mathbf{z}}$ 。对于 $\hat{\mathbf{k}}_0 = (\hat{\mathbf{k}}_x, \hat{\mathbf{k}}_y, \hat{\mathbf{k}}_z)$,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{H} \begin{pmatrix} k_x^2 \cos\theta + k_y^2 & k_x(\cos\theta - k_y) & -\sqrt{H} k_x \sin\theta \\ k_x k_y (\cos\theta - 1) & k_x^2 + k_y^2 \cos\theta & -\sqrt{H} k_y \sin\theta \\ \sqrt{H} k_x \sin\theta & \sqrt{H} k_y \sin\theta & H \cos\theta \end{pmatrix} \quad (17.30)$$

其中 $H = k_x^2 + k_y^2$ 。 $\mathbf{S}_R$ 的左上角 2×2 子矩阵是琼斯矩阵 $\mathbf{J}$ 。 $\mathbf{J}$ 的延迟, 也是 $\mathbf{P}_{\text{总}}$ 的延迟, 由一个相当复杂的方程给出:

$$\delta = 2 \arccos \left(\frac{|\operatorname{tr}(\mathbf{J}) + \frac{\det(\mathbf{J})}{|\det(\mathbf{J})|} \operatorname{tr}(\mathbf{J}^\dagger)|}{2\sqrt{\operatorname{tr}(\mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}) + 2|\det(\mathbf{J})|}} \right) \quad (17.31)$$

式(17.31)比较复杂, 因为在使用反余弦计算延迟量之前, 需要去掉 $\mathbf{J}$ 的二向衰减。极分解 $\mathbf{J}$ (参考文献[16]中的 $\mathbf{J}_R$) 得到的酉矩阵(延迟器)有两个本征偏振 ($\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$)。这些本征偏振可以写成三个元素的电场矢量, 它们在入射空间中提供了一个正则基集,

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{w}'_1, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{U}^\dagger \mathbf{w}'_2, \quad \hat{\mathbf{k}}_0 \quad (17.32)$$

其中 $\mathbf{w}'_1 = (w_{x,1}, w_{y,1}, 0)$ 和 $\mathbf{w}'_2 = (w_{x,2}, w_{y,2}, 0)$ 。在出射空间, 对应的正则基集是

$$\mathbf{v}'_1 = \mathbf{Q} \mathbf{v}_1 = \mathbf{Q} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{w}'_1, \quad \mathbf{v}'_2 = \mathbf{Q} \mathbf{v}_2 = \mathbf{Q} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{w}'_2, \quad \hat{\mathbf{k}}_N \quad (17.33)$$

当光线路径的偏振对应一个偏振器, 在这种特殊情况下延迟是未定义的, 没有第二个光束, 因此, 第二束光的相位是不确定的。如果 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{P}_{\text{总}}$ 描述了一个偏振器, 则式(17.31)中的

$\frac{\det(\mathbf{J})}{|\det(\mathbf{J})|}$ 是不确定的。

17.5.3 延迟范围

光程差和延迟量可以取零到无穷大之间的任意值。然而, 在琼斯算法和米勒算法中, 前几节中的延迟算法使用反余弦来计算延迟量, 并返回一个以 π (半波) 为模的值。这种情况类似于电场的相位, 它通常用模 2π 表示, 而光程长度可以取任意值。因此, 经常需要知道延迟器的阶数, 也就是光程差的波数。不幸的是, 复数的矩阵乘法不能保留这个阶数。通过延迟量展开或其他方法将延迟量计算扩展到 2π 以外的方法的进一步讨论, 不在本节的范围内^[17-18], 但在第 26 章中有论述(多阶延迟器和不连续性之谜)。

17.6 例子

本节解决了第9章(偏振光线追迹计算)介绍的正入射反射琼斯矩阵的悖论。琼斯矩阵的这个问题是使用 3×3 矩阵还是 2×2 矩阵进行偏振光线追迹的争论之一。下面给出了使用齐次矩阵的简单例子;此时, $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 的特征值可以直接用于计算延迟。

17.6.1 正入射的理想反射

考虑从反射镜正入射时的理想(100%)反射。由于反射镜在正入射时是非偏振的,所以延迟为零;s偏振和p偏振没有区别,它们简并了。当不同的线偏振态反射时,由于反射而引起的相位滞后必须保持相同。对于 $\hat{\mathbf{k}}_0 = (0, 0, 1)$ 和 $\boldsymbol{\eta} = (0, 0, 1)$ 的 $\mathbf{P}$ 矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17.34)$$

其中 x 偏振光和 y 偏振光的电场反射时没有产生相位差,而传播矢量的方向从 z 翻转到 $-z$ 。对角线元素为 -1 ,这是由于在外反射时发生了 π 相移。对于右旋圆偏振入射光,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.35)$$

产生了相同的电场矢量。但由于传播矢量变为 $(0, 0, -1)$,反射光为左旋圆偏振光。同样地,对于线偏振入射光,

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = e^{i\pi} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17.36)$$

从全局的角度来看,它产生了在同一平面上振荡的相同的电场矢量。而在相应的琼斯矩阵中,入射角 θ 映射为 $-\theta$,因为是右手局部坐标系。请注意,在式(17.36)中,电场的 x 分量和 y 分量之间没有引入相对相位变化。

这与反射的标准琼斯矩阵 $\mathbf{J}_f$ 非常不同^[19-20],

$$\mathbf{J}_f = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.37)$$

$\mathbf{J}_f$ 似乎包括 x 和 y 偏振分量之间的 π 相移(-1)。在 $\mathbf{J}_f$ 中,这个相移有两个目的:①它将右旋圆偏振光反射为左旋圆偏振光,反之亦然;②它将入射线偏振光方向从 θ 改变为 $-\theta$,例如 45° 到 135° ,这适合于反射后保持右手局部坐标的情况。

为了保持所有琼斯矩阵的右手局部坐标(图17.14),反射的琼斯矩阵必须在其中一个对角元素中包含 -1 。因此,琼斯反射矩阵具有与半波线性延迟器相同的形式。这就是反射琼斯矩阵的悖论。负号并不表示物理半波线性延迟,它表示局部坐标的翻转。

这个正入射反射的局部坐标变换可以用 $\mathbf{Q}$ 矩阵清晰地表示出来,

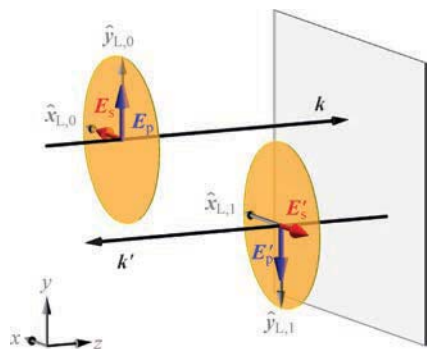


图 17.14 对于正入射时的理想反射,入射和出射右手局部坐标 $(\hat{x}_{L,0}, \hat{y}_{L,0})$ 和 $(\hat{x}_{L,1}, \hat{y}_{L,1})$, s 和 p 矢量为 (E_s, E_p) 和 (E'_s, E'_p) 。在这个特定的局部坐标选取中, $\hat{x}_L$ 分量在反射后被翻转

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (17.38)$$

负号现在和传播矢量联系在一起,它恰当地属于传播矢量,而不是与电场分量之一相关联。应用式(17.28)和式(17.38),计算出理想回射的延迟为零,这是必要的。

17.6.2 一个镀铝的三反射镜系统例子

将图 17.7 的三反射镜系统作为一个真实的光学系统进行分析,而不是一个非偏振的光学系统,其中包含折射率为 $0.77+6.06i$ 的镀铝反射镜的影响。光以 45° 的入射角进入每一面镜子。表 17.1 列出了每个表面的传播矢量、 P 矩阵和 Q 矩阵,用第 9 章(偏振光线追迹计算)的方法计算得到。出射传播矢量 $\hat{k}_4$ 与入射传播矢量 $\hat{k}_1$ 相同,它们都沿着 z 轴。

表 17.1 通过镀铝三反射镜系统的光线传播矢量、 P 和 Q

q	$\hat{k}$	P	Q
1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.947+0.219i & 0 \\ -0.849+0.415i & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -0.849+0.415i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.947+0.219i \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.947+0.219i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.849+0.415i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

系统的 $\mathbf{P}$ 矩阵是 $\mathbf{P}_{\text{总}} = \begin{bmatrix} 0 & -0.549+0.705i & 0 \\ -0.365+0.788i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。这显示了在入射和

出射传播矢量相同的情况下,入射 x 偏振光如何以 y 偏振光出射以及入射 y 偏振光如何以 x 偏振光出射。该光线路径的二向衰减为 0.0285。第二和第三反射镜的二向衰减大小相等,但它们的方向相差 90° ,因此它们相互抵消为零。因此,总二向衰减等于第一面反射镜的贡献。关于二向衰减计算算法,请参见 9.4 节(采用奇异值分解法计算二向衰减)。

对应的 $\mathbf{Q}$ 矩阵为 $\mathbf{Q}_{\text{总}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。图 17.7 显示了每个理想反射如何通过 $\mathbf{Q}$ 矩阵变

换入射坐标矢量 $(\hat{\mathbf{x}}_A, \hat{\mathbf{y}}_A)$ 。如 17.2.4 节所示,入射坐标矢量 $(\hat{\mathbf{x}}_A, \hat{\mathbf{y}}_A, \hat{\mathbf{k}}_1)$ 旋转 90° 并反转为 $(\hat{\mathbf{x}}_A'', \hat{\mathbf{y}}_A'', \hat{\mathbf{k}}_4)$ 。因此,入射和出射空间之间的琼斯矩阵基矢量的一个正则对为 $(\hat{\mathbf{x}}_A, \hat{\mathbf{y}}_A) = (-\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{x}})$ 和 $(\hat{\mathbf{x}}_A'', \hat{\mathbf{y}}_A'') = (-\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}})$ 。这种正则对不是唯一的;通过旋转两个空间的基集,可得到其他正则对。由于反射的反转,当系统反射次数为奇数时,由 $\mathbf{Q}$ 矩阵进行的坐标矢量变换改变手性,当系统反射次数为偶数时,坐标矢量保持手性。 $(\hat{\mathbf{x}}_A'', \hat{\mathbf{y}}_A'', \hat{\mathbf{k}}_4)$ 是测量系统固有延迟的偏振态分析器(17.2.1 节)的正则坐标矢量集。

$\mathbf{P}_{\text{总}}$ 乘以 $\mathbf{Q}_{\text{总}}^{-1}$ 抵消了几何变换。系统的 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 为

$$\mathbf{M}_{\text{总}} = \mathbf{Q}_{\text{总}}^{-1} \mathbf{P}_{\text{总}} = \begin{pmatrix} -0.365+0.788i & 0 & 0 \\ 0 & -0.549+0.705i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (17.39)$$

由于 $\mathbf{P}_{\text{总}}$ 是齐次的,所以通过计算 $\mathbf{M}_{\text{总}}$ 的本征值来确定系统的延迟

$$\xi_1 = 0.868e^{i2.005}, \quad \xi_2 = 0.8938e^{i2.232}, \quad \xi_3 = 1 \quad (17.40)$$

与这些本征值相关的本征偏振态是

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = \hat{\mathbf{k}}_0 = (0, 0, 1) \quad (17.41)$$

系统的延迟为

$$\delta = \arg(\xi_2) - \arg(\xi_1) = 0.227 \quad (17.42)$$

快轴方向沿着全局 $\hat{\mathbf{x}}$ 轴。

用这种方法计算的延迟不包含任何几何变换的影响。类似于上面描述的二向衰减的抵消,这个固有延迟等于第一面反射镜的贡献,因为后面两个正交反射镜的延迟抵消了。

由第一面反射镜的琼斯矩阵计算的延迟为

$$\xi_1 = 0.945e^{-i0.455}, \quad \xi_2 = 0.972e^{i2.914} \Rightarrow \delta = \arg(\xi_2) - \arg(\xi_1) = 3.369 = 193.0^\circ \quad (17.43)$$

快轴方向沿着 $\mathbf{y}_{L,0}$, 这是全局 $\hat{\mathbf{x}}$ 轴。由于琼斯算法使用右手局部坐标进行数据约简,因此琼斯算法得到的延迟和偏振光线追迹矩阵的延迟相差 π 。

17.7 总结

本章首先严格分析了延迟,这个概念对于波片来说很容易定义,但是对于通过光学系统的光线路径却很难推广。延迟是通过光学系统的偏振相关光程长度,它产生的偏振变换可

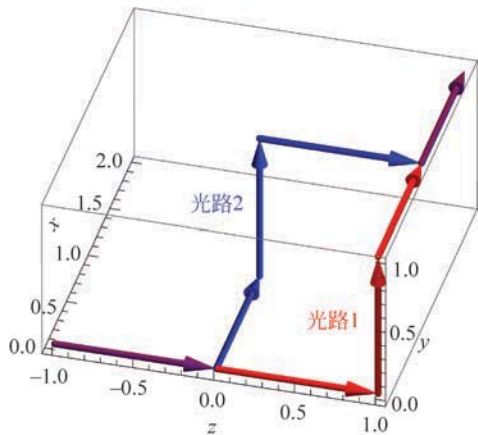
准确描述为庞加莱球上的偏振态旋转,这个概念在第 6 章(米勒矩阵)进行了深入研究。光线路径的偏振光线追迹矩阵 $\mathbf{P}$ 描述了由于二向衰减、延迟和几何变换而引起的偏振态变化。光线的平移矩阵 $\mathbf{Q}$ 描述了相关的非偏振光学系统,因此它只跟踪几何变换。第 18 章(倾斜像差)中有对非偏振系统的进一步讨论,倾斜像差是整个波前从入瞳到出瞳几何变换的函数形式。

为了计算固有延迟,需要去掉几何变换, $\mathbf{M} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{P}$, $\mathbf{M}$ 是计算延迟的基本方程,没有由于坐标矢量选择不当而产生的“伪圆延迟”。 $\mathbf{M}$ 还跟踪了由于反射而引起的偏振态的反转,从而阐明了反射琼斯矩阵中麻烦的负号的含义。 $\mathbf{M}_R$ ($\mathbf{M}$ 极分解后的西矩阵部分)的特征值之差给出了固有延迟,它不是由 $\mathbf{P}$ 单独计算的。非常值得强调的是通过一个内部光路未知的“黑盒子”光学系统,不能确定其光线的固有延迟。

与反射和局部坐标相关的负号是不可靠的! 我们已经花费篇幅解释了每一个“负号”,建议读者在这方面要非常小心。

17.8 习题集

- 17.1 延迟和固有延迟有什么区别?
- 17.2 为什么左手坐标系基矢量集是有用的?(17.3 节)。
- 17.3 用偏振测量仪模拟琼斯矩阵测量,该偏振测量仪的偏振态发生器旋转 $\pi/6$, 针对下列元件: a. 线性延迟器 $\mathbf{LR}(\delta, 0)$ 和 b. 圆延迟器 $\mathbf{CR}(\delta)$ 。测得的延迟与物理延迟有何不同?
- 17.4 考虑一个马赫-曾德尔干涉仪,其一束光通过点 $(0, 0, -1)$, $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 1)$ 和 $(2, 1, 1)$, 第二束光通过 $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$ 和 $(1, 1, 1)$, 如下图所示。求两条光路的平移矩阵。当线偏振光入射时,出射光是平行还是正交的? 用式(17.11) ($\mathbf{Q}_{\text{总}}$) 比较两条光路。



- 17.5 利用式(17.31), 计算下列琼斯矩阵的延迟:

$$\text{a. } \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} - i & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{i}{6} \end{bmatrix} \quad \text{b. } \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{8} & \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{8} \\ -\sin \frac{\pi}{8} & \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{8} \end{bmatrix}$$

$$\text{c. } \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -3-\sqrt{3}-i & -3+\sqrt{3}+i \\ -3+\sqrt{3}+i & -3-\sqrt{3}-i \end{bmatrix}$$

17.6 解释正入射时理想反射的琼斯矩阵和偏振光线追迹矩阵之间的区别。

17.7 a. 如果一束光只经过 17.2.4 节所述的三反射镜系统中的前两个镜子,那么 $\mathbf{Q}_{\text{总}}$ 是多少?

b. 如果我们在三反射镜系统之后增加第四面回射反射镜,让光束从镜子 1、2、3、4 返回镜子 3、2、1,会怎么样?

17.8 给定一条光线的 $\mathbf{k}_1$ 、 $\mathbf{k}_2$ 、 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$,如果光线反过来($-\mathbf{k}_2$ 成为入射方向, $-\mathbf{k}_1$ 是出射方向),那么 $\mathbf{P}'$ 和 $\mathbf{Q}'$ 是什么? 同时,解释它们是如何与 $\mathbf{P}$ 和 $\mathbf{Q}$ 相关的。

17.9 求下列矩阵的奇异值分解和两种极分解。证明两种极分解的延迟是相同的。

$$\text{a. } \mathbf{M}_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i/2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b. } \mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c. } \mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \cos 1 & \frac{-\sin 1}{3} \\ \sin 1 & \frac{\cos 1}{3} \end{pmatrix}$$

17.10 考虑延迟器 $\mathbf{LR}(\delta, 0)$ 的琼斯矩阵测量,使用偏振测量仪使其 PSA 旋转 θ 。测

得的琼斯矩阵为 $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix}$ 。证明测得的延迟为 $\delta_{\text{测量}} =$

$2\arctan \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta\cos^2(\delta/2)}}{\cos\theta\cos(\delta/2)}$ 。建议将琼斯矩阵转换为泡利矩阵的形式来解决这个问题。

17.9 参考文献

- [1] R. A. Chipman, Polarization analysis of optical systems, Proc. SPIE 891 (1988): 10.
- [2] G. Yun, K. Crabtree, and R. A. Chipman, Three-dimensional polarization ray-tracing calculus I. Definition and diattenuation, Appl. Opt. 50 (2011): 2855-2865.
- [3] R. C. Jones, A new calculus for the treatment of optical systems, J. Opt. Soc. Am. 31 (1941): 488-493, 493-499, 500-503; 32 (1942): 486-493; 37 (1947): 107-110, 110-112; 38 (1948): 671-685; 46 (1956): 126-131.
- [4] W. A. Shurcliff, Polarized Light, Harvard University Press (1962).
- [5] E. Hecht, Optics, Addison-Wesley (2002).
- [6] W. A. Shurcliff, Polarized Light, Harvard University Press (1962).
- [7] S. Lu and R. A. Chipman, Homogeneous and inhomogeneous Jones matrices, J. Opt. Soc. Am. A 11 (1994): 766-773.
- [8] P. Torok, P. Varga, Z. Laczik, and G. R. Booker, Electromagnetic diffraction of light focused through a planar interface between materials of mismatched refractive indices: An integral representation, J.

- Opt. Soc. Am. A 12 (1995): 325-332.
- [9] C. Brosseau, Fundamentals of polarized Light, A Statistical Optics Approach, New York: John Wiley & Sons (1998).
 - [10] D. W. Henderson and D. Taimina, Experiencing Geometry, 3rd edition, Chapter 8, NJ: Pearson (2004).
 - [11] R. Penrose, The Road to Reality, section 14.2, NY: Knopf (2005).
 - [12] J. M. Leinaas and J. Myrheim, On the theory of identical particles, Il Nuovo Cimento B 37 (1) (1977): 1-23.
 - [13] S. Pancharatnam, Generalized theory of interference, and its applications, Proc. Indian Acad. Sci. A 44 (1956): 247.
 - [14] R. Bhandari and J. Samuel, Observation of topological phase by use of a laser interferometer, Phys. Review Lett. 60 (1988): 1211.
 - [15] M. V. Berry, The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light, J. Mod. Opt. 34 (1987): 1401.
 - [16] S. Lu and R. A. Chipman, Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition, J. Opt. Soc. Am. A 13 (1996): 1106-1113.
 - [17] D. Bone, Fourier fringe analysis: The two-dimensional phase unwrapping problem, Appl. Opt. 30 (1991): 3627-3632.
 - [18] A. Collaro, G. Franceschetti, F. Palmieri and M. S. Ferreira, Phase unwrapping by means of genetic algorithms, J. Opt. Soc. Am. A 15 (1998): 407-418.
 - [19] G. R. Fowles, Introduction to Modern Optics, Dover Publications (1975).
 - [20] A. Macleod, Phase matters, SPIE's OE Magazine, June/July 29-31 (2005).