2023

新高考数学临门12卷

阮国勇　李鸿昌　主编

夯实基础题

重视能力题

突破创新题

展望预测题

原创卷6套+仿真卷6套

清华大学出版社

新高考数学临门12卷

清华大学出版社

新高考数学临门 12 卷

阮国勇　李鸿昌　主编

清华大学出版社
北　京

图书在版编目（CIP）数据

新高考数学临门 12 卷/阮国勇，李鸿昌主编. —北京：清华大学出版社，2023.4
ISBN 978-7-302-63242-9

Ⅰ. ①新…　Ⅱ. ①阮… ②李…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ. ①G634.503

中国国家版本馆 CIP 数据核字（2023）第 057273 号

责任编辑：汪　操
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　邮　　编：100084
社 总 机：010-83470000　　邮　　购：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：420mm×297mm　　印　张：11　　字　　数：319 千字
版　　次：2023 年 4 月第 1 版　　印　　次：2023 年 4 月第1 次印刷
定　　价：49.00 元（全两册）

产品编号：101784-01

编 委 会

前 言

2022年7月到2023年4月，编委团队进行了3次新高考数学模拟试卷的研发工作，并将试卷提供给很多新高考省份的学生用于模拟测试，试卷深受好评。其间，还组织了相关线上测试，同样受到广大师生好评，这激发了我们出版一本新高考数学试卷的想法。经我提议，编委团队决定出版，以期更好地服务新高考考生。

本书一共精心设计了12套试卷(6套原创卷、6套仿真卷)，每一套试卷都经过了充分讨论，认真筛选。本书除试卷外，还配备了答题卡和参考答案。这12套试卷主要用于新高考地区考生最后两个月的冲刺，故名为《新高考数学临门12卷》。

值得一提的是，编委团队的第二次线上测试的试卷被《数理化解题研究》期刊收录，于2023年第3期发表；《新高考数学临门12卷》中的“原创卷6”也被《教学考试》期刊录用，即将于2023年第4期或第5期发表。

《新高考数学临门12卷》有如下特点：

(1) 按照新课程标准命题，突出主干、重点内容，加强对基础知识与关键能力考查；

(2) 试题背景材料紧密联系国家经济发展和生产生活实际，引导考生形成正确的价值观；

(3) 融合考查学生的想象能力、运算能力、图像分析能力和阅读理解能力等方面，尤其注重对数学抽象、数学建模等核心素养的培养；

(4) 创新试题设计，引导并培养学生的创新精神，更好地提高学生的思维水平。

本书主要供即将于2023年6月参加高考的新高考地区学生使用，当然也可以供2024年新高考考生用于自主测评，摸清学习状况。

本书得以顺利出版，要特别感谢编委团队每一位老师的无私付出，还要感谢父母教导我做事贵在坚持的理念，更要感谢清华大学出版社对本书的精心排版和细心审稿，尤为感谢李鸿昌老师以及我的家人的鼎力支持，愿本书能助广大考生一臂之力，希望他们高考中取得好成绩。

阮国勇

2023年4月

目 录

2023届新高考数学原创卷 02

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若集合 $M=\{x\mid x^2\leqslant 4\}$，$N=\{x\mid 2^x>1\}$，则 $M\cap N=$(　　)。

A. $\{x\mid -2\leqslant x<0\}$　B. $\{x\mid 1<x\leqslant 2\}$

C. $\{x\mid 0<x\leqslant 2\}$　D. $\{x\mid -1<x\leqslant 2\}$

2. 若 $(1-\mathrm{i})z=2$，则 $|\bar{z}|=$(　　)。

A. 1　B. $\sqrt{2}$　C. 2　D. $\sqrt{5}$

3. 在 $\triangle ABC$ 中，D 为 BC 中点，连接 AD，设 E 为 AD 中点，且 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$，$\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{n}$，则 $\overrightarrow{CB}=$(　　)。

A. $4\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{m}$　B. $-4\boldsymbol{n}+2\boldsymbol{m}$

C. $-4\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}$　D. $4\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}$

4. 2010年，考古学家对良渚古城水利系统中一条水坝的建筑材料(草裹泥)上提取的草茎遗存进行碳14年代学检测，检测出碳14的残留量约为初始量的55.2%，据此推测水坝建成的年代是(参考数据：碳14的半衰期为5730年，$\log_2 5\approx 2.322$，$\log_2 69\approx 6.1085$)(　　)。

A. 公元前2850年　B. 公元前2880年

C. 公元前2904年　D. 公元前2920年

5. 数学家希尔伯特在1990年提出了孪生素数猜想：存在无穷多个素数 p，使得 $p+2$ 是素数。当 p 和 $p+2$ 都是素数时，称素数对 $(p,p+2)$ 为孪生素数。那么从3~43这41个整数中随机取2个不同的数，则这2个数是孪生素数的概率为(　　)。

A. $\dfrac{5}{C_{41}^2}$　B. $\dfrac{6}{C_{41}^2}$　C. $\dfrac{7}{C_{41}^2}$　D. $\dfrac{8}{C_{41}^2}$

6. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega\in\mathbf{N}^*,\dfrac{\pi}{12}<\varphi<\dfrac{\pi}{4}\right)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增，且其图像关于直线 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 对称，则 $f\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=$(　　)。

A. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　B. $\dfrac{1}{2}$　C. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

7. 设 $a=\sin\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{23}{48}$，$c=\ln 1.65$，则(　　)。

A. $a<b<c$　B. $b<a<c$

C. $c<a<b$　D. $a<b<c$

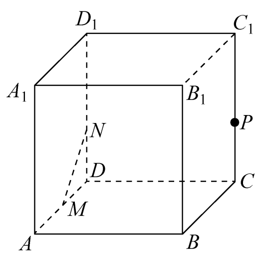
8. 已知正三棱柱的高为 h，其各顶点都在同一球面上，若该球的表面积为 48π，且 $2\sqrt{2}\leqslant h\leqslant 6$，则该正三棱柱体积的取值范围是(　　)。

A. $\left[\dfrac{27\sqrt{3}}{2},24\sqrt{3}\right]$　B. $\left[\dfrac{27\sqrt{3}}{2},15\sqrt{6}\right]$

C. $[15\sqrt{6},24\sqrt{3}]$　D. $[15\sqrt{6},27\sqrt{3}]$

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

9. 如图所示，已知在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，M，N 分别为棱 AD，DD_1 的中点，P 为棱 CC_1 上一点，则(　　)。



A. 直线 MN 与 CD_1 所成的角为 90°

B. 直线 MN 与 DC_1 所成的角为 60°

C. 三棱锥 $N\text{-}MDP$ 的体积为定值

D. 二面角 $P\text{-}BD\text{-}C$ 的正切值为 $\dfrac{PC}{BC}$

10. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2$，则(　　)。

A. $f(x)$ 有两个极值点

B. 点 $(1,-2)$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称中心

C. 函数 $g(x)=f(x)+2$ 有三个零点

D. 过点 $(3,-3)$ 可作两条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切

11. 已知 O 为坐标原点，抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点为 F，设过 F 的直线交 C 于 A，B 两点，点 M 坐标为 $(4,0)$，则(　　)。

A. $|OA||OB|<|AB|$

B. $|AF||BF|=|AB|$

C. $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$

D. $\angle AOB+\angle AMB<\pi$

12. 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，若 $f'(x)+f(x)=\dfrac{x-\ln x}{\mathrm{e}^x}$，$f'(1)=0$，则下列结论正确的是(　　)。

A. $f'(\pi)+f(\pi)>0$

B. $f(2)>\mathrm{e}f(1)$

C. 方程 $f'(x)+f(x)=\dfrac{2022}{2023}$ 有唯一的实数解

D. $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. $\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为________。

14. 已知圆 C 经过点 $(2,2)$，且圆心在直线 $y=2x$ 上，直线 $3x-4y=0$ 与圆 C 相切，则圆 C 的方程为________。

15. 已知曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 与 $y=\ln x$ 的两条公切线的斜率分别为 k_1，k_2，则 $k_1k_2=$________。

16. 设椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的上顶点为 B，左、右焦点分别为 F_1，F_2，设 BF_1 交 C 于点 A。若 $\cos\angle BAF_2=\dfrac{7}{9}$，则 C 的离心率为________。

四、解答题：本题共6小题，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10分)记 $\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $B=2A$。

(1) 若 $a=b\cos C+a\cos B$，求角 A 的值；

(2) 证明：$b^2-a^2=ac$。

18. (12分)记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_n=2a_n-n$。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 证明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}<3$。

19.（12分）2022年11月20日，卡塔尔足球世界杯正式开幕，世界杯上的中国元素随处可见。从体育场建设到电力保障，从赛场内的裁判到赛场外的吉祥物……中国制造为卡塔尔世界杯提供了强有力的支持。国内也再次掀起足球热潮。某地足球协会组建球队参加业余比赛。该足球队教练组对球员的使用是依据数据分析，为了考查球员甲对球队的贡献，作出如下数据统计（甲参加过的比赛均分出了胜负）：

	球队负	球队胜	总计
甲参加	3	29	32
甲未参加	7	11	18
总计	10	40	50

（1）据此能否有97.5%的把握认为球队胜利与甲球员参赛有关？

（2）根据以往的数据统计，乙球员能够胜任边锋、中锋、后腰以及后卫四个位置，且出场率分别为0.2，0.4，0.3，0.1。当出任边锋、中锋、后腰以及后卫时，球队输球的概率依次为0.4，0.3，0.4，0.2，则：

① 当乙球员参加比赛时，求球队某场比赛输球的概率；

② 当乙球员参加比赛时，在球队输了某场比赛的条件下，求乙球员担任边锋的概率；

③ 如果你是教练员，应用概率统计有关知识，该如何使用乙球员？

附注：

α	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_α	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

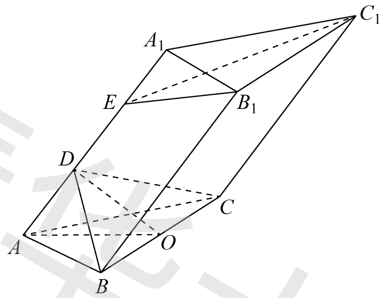
$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$。

20.（12分）如图所示，三棱柱 $ABC\text{-}A_1B_1C_1$ 中，$AB=AC$，侧面 BB_1C_1C 是矩形，O 为 BC 的中点，点 D，E 在侧棱 AA_1 上，且 D 为 AE 的中点。

（1）证明：$\angle DAB=\angle DAC$；

（2）若 $AB=BC=2\sqrt{3}$，$A_1A=5$，$AD=\dfrac{9}{5}$，且________，求平面 B_1C_1E 与平面 BCD 所成的锐二面角的余弦值。

在①$OD\perp A_1A$，②$\cos\angle DAB=\dfrac{3\sqrt{3}}{10}$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并求解。



21.（12分）已知函数 $f(x)=x-\ln x$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，其中 $0<x_1<x_2$。

（1）证明：$x_1x_2<1$；

（2）试探究：当 $\dfrac{x_2}{x_1}$ 逐渐增大时，x_1+x_2 的变化情况。

22.（12分）设 DE 是双曲线 C：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 的一条弦且 DE 垂直于 x 轴，A，B 分别是 C 的左、右顶点，直线 AE 和 BD 相交于点 P，点 P 的轨迹为曲线 Γ。

（1）求曲线 Γ 的方程；

（2）已知圆 $x^2+y^2=1$ 上一点 S 处的切线交曲线 C 于 M，N 两点，O 为坐标原点，$\triangle MON$ 的面积为3，求点 S 的坐标。

因为四边形 $OAPB$ 为平行四边形，所以

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2,y_1+y_2)=\left(-\frac{8km}{3+4k^2},\frac{6m}{3+4k^2}\right)$，即点 P 的坐标为 $\left(-\frac{8km}{3+4k^2},\frac{6m}{3+4k^2}\right)$。

又因为点 P 在椭圆上，所以 $\frac{\left(-\frac{8km}{3+4k^2}\right)^2}{4}+\frac{\left(\frac{6m}{3+4k^2}\right)^2}{3}=1$，整理得 $4m^2=3+4k^2$。

而 $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\,\frac{\sqrt{\Delta}}{3+4k^2}=\sqrt{1+k^2}\,\frac{4\sqrt{3}\sqrt{3+4k^2-m^2}}{3+4k^2}$，原点 O 到直线 AB 的距离为 $d=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}$，故平行四边形 $OAPB$ 的面积 $S=2S_{\triangle AOB}=|AB|\cdot d=\frac{4\sqrt{3}|m|\sqrt{3+4k^2-m^2}}{3+4k^2}=3$。

综上可知，平行四边形 $OAPB$ 的面积为定值 3。

22.【答案】(1)见解析；(2)2

【解析】(1)由题意得 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{2ax^2-2}{x}$。

① 当 $a\leqslant0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

② 当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{\sqrt{a}}{a}$ 或 $x=-\frac{\sqrt{a}}{a}$(舍)。

当 $x\in\left(0,\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

综上所述，当 $a\leqslant0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递减，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a},+\infty\right)$ 上单调递增。

(2)由题意知 $f(x)=ax^2-2\ln x-2\geqslant2(1-a)x$，整理得 $ax^2+2ax\geqslant2\ln x+2x+2$，即 $a(x^2+2x)\geqslant2(\ln x+x+1)$。

因为 $x>0$，所以原命题等价于 $a\geqslant\frac{2(\ln x+x+1)}{x^2+2x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立。

令 $g(x)=\frac{2(\ln x+x+1)}{x^2+2x}$，则 $g'(x)=\frac{-2(x+1)(2\ln x+x)}{(x^2+2x)^2}$，令 $h(x)=2\ln x+x$，因为 $h'(x)=\frac{2}{x}+1>0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

又 $h\left(\frac{1}{2}\right)=-2\ln2+\frac{1}{2}<0$，$h(1)=1>0$，故存在唯一的 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $h(x_0)=0$，即 $\ln x_0=-\frac{x_0}{2}$。

当 $0<x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，故当 $x=x_0$ 时，函数 $g(x)$ 有极大值，也即为最大值，$g(x)_{\max}=\frac{2(\ln x_0+x_0+1)}{x_0^2+2x_0}=\frac{x_0+2}{x_0(x_0+2)}=\frac{1}{x_0}$，故 $a\geqslant\frac{1}{x_0}$，又 $\frac{1}{x_0}\in(1,2)$，$a\in\mathbf{Z}$，故整数 a 的最小值为 2。

2023 届新高考数学原创卷(02)参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	D	C	B	A	B	A	BC	ABC	BD	ACD

1.【答案】C

【解析】因为 $M=\{x|-2\leqslant x\leqslant2\}$，$N=\{x|x>0\}$，所以 $M\cap N=\{x|0<x\leqslant2\}$。故选 C。

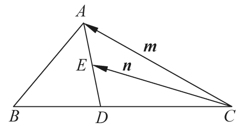
2.【答案】B

【解析】因为 $z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=1+\mathrm{i}$，所以 $\bar{z}=1-\mathrm{i}$，$|\bar{z}|=\sqrt{2}$。故选 B。

3.【答案】D

【解析】由题意作图如下，则

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CA})=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$，故 $\overrightarrow{CB}=4\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CA}$，即 $\overrightarrow{CB}=4\boldsymbol{n}-2\boldsymbol{m}$。故选 D。



4.【答案】C

【解析】设样本中碳 14 的初始含量为 k，衰减率为 $p(0<p<1)$，经过 x 年后，残余量为 y。根据问题的实际意义，则 $y=k(1-p)^x(k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq0$；$0<p<1$；$x\geqslant0)$。

由碳 14 的半衰期为 5730 年得 $k(1-p)^{5730}=\frac{1}{2}k$，于是 $1-p=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}}$，所以 $y=k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$。

由样本中碳 14 的残余量约为初始值的 55.2%可知，$k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}=\frac{55.2}{100}k$，即 $\frac{x}{5730}=\log_{\frac{1}{2}}\frac{55.2}{100}=\log_2\frac{100}{55.2}=\log_2\frac{1000}{552}=\log_2\frac{125}{69}=3\log_2 5-\log_2 69\approx0.8575$，所以 $x\approx5730\times0.8575\approx4913$。

因为 2010 年之前的 4913 年是公元前 2904 年，所以推测此水坝大概是公元前 2904 年建成的。故选 C。

5.【答案】B

【解析】根据孪生素数的定义，利用枚举法。从 3～43 的整数中，孪生素数有(3,5),(5,7),(11,13),(17,19),(29,31),(41,43)，则这两个数是孪生素数的概率 $P=\frac{6}{C_{41}^2}$，共 6 个。故选 B。

6.【答案】A

【解析】由 $f(x)$ 图像关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称得 $\frac{\pi}{12}\omega+\varphi=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\omega+k\pi(k\in\mathbf{Z})$。由 $\frac{\pi}{12}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ 得 $\frac{\pi}{12}<\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\omega+k\pi<\frac{\pi}{4}$，解得 $3+12k<\omega<5+12k$。①

又 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{12}\right)$ 上单调递增，则 $\frac{\pi}{12}\omega+\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$，而 $\frac{\pi}{12}<\varphi<\frac{\pi}{4}$，所以 $3<\omega<5$。②

由①②及 $k\in\mathbf{Z}$，$\omega\in\mathbf{N}^*$ 可知 $k=0$，$\omega=4$，从而 $\varphi=\frac{\pi}{6}$。

因此 $f(x)=\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$，故 $f\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$。

故选 A。

7.【答案】B

【解析】由于 $b=\frac{23}{48}=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3$，故构造函数 $f(x)=\sin x-\left(x-\frac{1}{6}x^3\right)(x>0)$，则 $f'(x)=\cos x-1+\frac{1}{2}x^2$，$f''(x)=x-\sin x$。因为 $f'''(x)=1-\cos x>0$，所以 $f''(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f''(x)>f''(0)=0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f'(x)>f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，故 $f(x)>f(0)=0$。

因此 $\sin x>x-\frac{1}{6}x^3$，所以 $\sin\frac{1}{2}>\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{23}{48}$，即 $a>b$。

由以上 $f''(x)>0$ 可知 $x>\sin x$，而 $\ln1.65=\ln\sqrt{1.65^2}=\ln\sqrt{2.7225}>\ln\sqrt{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}>\sin\frac{1}{2}$，故 $c>a$。

综上，$c>a>b$。故选 B。

8.【答案】A

【解析】设正三棱柱底面三角形的棱长为 a，其外接球的半径为 R，由题意知 $4\pi R^2=48\pi$，所以 $R^2=12$。

根据几何关系可知 $\left(\frac{h}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2=R^2$，即 $\frac{h^2}{4}+\frac{a^2}{3}=12$，故 $a^2=3\left(12-\frac{h^2}{4}\right)$，所以三棱柱的体积为 $V=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2h=\frac{3\sqrt{3}}{16}h(48-h^2)$，则 $V'(h)=\frac{9\sqrt{3}}{16}(16-h^2)$，又 $2\sqrt{2}\leqslant h\leqslant6$，所以 $V(h)$ 在 $[2\sqrt{2},4]$ 上单调递增，在 $[4,6]$ 上单调递减，故 $V(h)_{\max}=V(4)=24\sqrt{3}$。

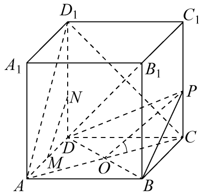
因为 $V(2\sqrt{2})=15\sqrt{6}$，$V(6)=\frac{27}{2}\sqrt{3}$，所以 $V(h)_{\min}=V(6)=\frac{27}{2}\sqrt{3}$。故选 A。

9.【答案】BC

【解析】如图所示，连接 AD_1，则 $AD_1 /\!/ MN$。因为 $\triangle ACD_1$ 是正三角形，所以直线 AD_1 与 CD_1 所成的角为 $60°$，即直线 MN 与 CD_1 所成的角为 $60°$，选项 A 错误。

连接 BC_1，则 $AD_1/\!/BC_1$，故 $MN/\!/BC_1$。因为 $\triangle BC_1D$ 是正三角形，所以直线 BC_1 与 DC_1 所成的角为 $60°$，即直线 MN 与 DC_1 所成的角为 $60°$，选项 B 正确。

设正方体的棱长为 a，则点 P 到平面 MND 的距离为 a，所以 $V_{N-MDP}=V_{P-MND}=\frac{1}{3}S_{\triangle MND}\cdot a=\frac{a^3}{6}$ 为定值，选项 C 正确。



连接 BD，AC，设 $BD\cap AC=O$，则 $BD\perp OC$，易知 $BD\perp CP$，且 $CP\cap OC=C$。所以 $BD\perp$ 平面 POC，故 $BD\perp OP$，因此 $\angle POC$ 是 P-BD-C 的平面角，故 $\tan\angle POC=\frac{PC}{OC}=\frac{\sqrt{2}PC}{BC}$，选项 D 错误。

故选 BC。

10.【答案】ABC

【解析】$f'(x)=3x(x-2)$，所以 $f(x)$ 有两个极值点 $x=0$ 和 $x=2$，选项 A 正确。

因为函数 $y=f(x+1)+2=(x+1)^3-3(x+1)^2+2=x^3-3x$ 为奇函数，所以函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(1,-2)$ 中心对称，选项 B 正确。

因为 $g(x)=x^3-3x^2+2$，所以 $g(-1)=-2$，$g(0)=2$，$g(2)=-2$，$g(3)=2$，则在区间 $(-1,0)$，$(0,2)$，$(2,3)$ 上各有一个零点，共 3 个零点，C 选项正确。

设过点 $(3,-3)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相切于点 (x_0,y_0)，则切线的斜率为 $k=3x_0^2-6x_0=\frac{y_0+3}{x_0-3}$，整理得 $2x_0^3-12x_0^2+18x_0-3=0$。

令 $h(x)=2x^3-12x^2+18x-3$，则 $h'(x)=6(x-1)\cdot(x-3)$，所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递增，在 $(1,3)$ 上单调递减，在 $(3,+\infty)$ 上单调递增。

因为 $h(0)=-3$，$h(1)=5$，$h(3)=-3$，$h(4)=5$，所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,1)$，$(1,3)$，$(3,4)$ 上各有一个零点，共 3 个零点，故方程 $2x_0^3-12x_0^2+18x_0-3=0$ 有 3 个根，即过点 $(3,-3)$ 可做 3 条直线与曲线 $y=f(x)$ 相切，选项 D 错误。故选 ABC。

11.【答案】BD

【解析】当 $AB\perp x$ 轴时，$A(1,2)$，$B(1,-2)$，此时 $|OA||OB|=5>4=|AB|$，选项 A 错误。

因为 $\frac{1}{|AF|}+\frac{1}{|BF|}=\frac{2}{p}=1$，所以 $|AF||BF|=|AF|+|BF|=|AB|$，选项 B 正确。

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，l_{AB}：$x=ty+1$，联立 $\begin{cases}y^2=4x,\\x=ty+1,\end{cases}$ 得 $y^2-4ty-4=0$，故 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$，从而 $x_1+x_2=t(y_1+y_2)+2=4t^2+2$，$x_1x_2=\frac{y_1^2}{4}\cdot\frac{y_2^2}{4}=\frac{(y_1y_2)^2}{16}=1$。

因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=1-4=-3<0$，所以 $\angle AOB\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，即 $\cos\angle AOB<0$，由余弦定理知 $|OA|^2+|OB|^2<|AB|^2$，选项 C 正确。

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1-4,y_1)\cdot(x_2-4,y_2)=x_1x_2-4(x_1+x_2)+16+y_1y_2=5-16t^2$，当 $t^2>\frac{5}{16}$ 时，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}<0$，此时 $\angle AMB\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以 $\angle AOB+\angle AMB>\pi$，选项 D 错误。故选 BD。

12.【答案】ACD

【解析】因为 $x>\ln x$，所以 $f'(x)+f(x)>0$，故 $f'(\pi)+f(\pi)>0$，选项 A 正确。

令 $g(x)=f'(x)+f(x)=\frac{x-\ln x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{1-x-\frac{1}{x}+\ln x}{e^x}=\frac{\ln(ex)-\ln e^x-\frac{1}{x}}{e^x}<0$（这是因为 $e^x>ex$），所以 $g(x)=f'(x)+f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

又当 $x\to0$ 时，$g(x)\to+\infty$；当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to0$，所以方程 $g(x)=\frac{2022}{2023}$ 有唯一实数解，选项 C 正确。

由 $f'(x)+f(x)=\frac{x-\ln x}{e^x}$ 知 $[f(x)\cdot e^x]'=x-\ln x$。

令 $F(x)=f(x)\cdot e^x$，则 $F'(x)=x-\ln x>0$，故 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。因此 $F(2)>F(1)$，即 $e^2f(2)>ef(1)$，即 $ef(2)>f(1)$，选项 B 错误。

令 $F(x)=f(x)\cdot e^x$，则 $f(x)=\frac{F(x)}{e^x}$，$f'(x)=\frac{F'(x)-F(x)}{e^x}$。

令 $h(x)=F'(x)-F(x)$，则

$h'(x)=1-\frac{1}{x}-(x-\ln x)=\ln(ex)-\ln e^x-\frac{1}{x}<0$，

所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

又 $f'(1)+f(1)=\frac{1}{e}$，且 $f'(1)=0$，知 $f(1)=\frac{1}{e}$。

因此当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=F'(1)-F(1)=1-ef(1)=0$，即 $f'(x)<0$。所以 $f(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，选项 D 正确。故选 ACD。

13.【答案】15

【解析】由题意知二项展开式的通项为 $C_6^r x^{\frac{6-r}{2}}(-1)^r x^{-r}=(-1)^r C_6^r x^{\frac{6-3r}{2}}$，令 $r=2$，则常数项为 $(-1)^2C_6^2=15$。

14.【答案】$(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 或 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$

【解析】由题意可设圆心为 $C(a,2a)$，则圆 C 的方程为 $(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2$。

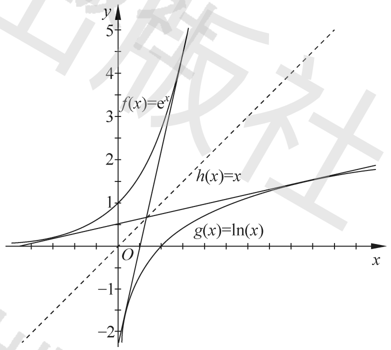
因为直线 $3x-4y=0$ 与圆 C 相切，所以 $\frac{|3a-4\times2a|}{\sqrt{3^2+4^2}}=r$，即 $|a|=r$。

因为圆 C 经过点 $(2,2)$，所以 $(2-a)^2+(2-2a)^2=a^2$，化简得 $a^2-3a+2=0$，解得 $a=1$ 或 $a=2$，所以圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-2)^2=1$ 或 $(x-2)^2+(y-4)^2=4$。

15.【答案】1

【解析】设曲线 $y=e^x$ 与 $y=\ln x$ 的两条公切线为 l_1，l_2，对应的斜率分别为 k_1，k_2。不妨设 $k_1>k_2$，设 l_1 的倾斜角为 θ。因为指数函数 $y=e^x$ 和对数函数 $y=\ln x$ 互为反函数，所以它们的图像关于直线 $y=x$ 对称。

如图所示，根据图像的对称性可知，直线 l_1，l_2 也关于直线 $y=x$ 对称，所以 l_2 的倾斜角为 $\frac{\pi}{2}-\theta$。因此，$k_1k_2=\tan\theta\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=1$。



16.【答案】$\frac{\sqrt{3}}{3}$

【解析】由 $\begin{cases}y=\frac{b}{c}(x+c),\\b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$ 化简得 $(a^2+c^2)y^2-2bc^2y-b^4=0$，所以 $by_A=\frac{-b^4}{a^2+c^2}$，故 $y_A=\frac{-b^3}{a^2+c^2}$。①

设 $\angle BAF_2=\alpha$，由 $\cos\alpha=\frac{7}{9}$ 得 $\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{7}{9}$，解得 $\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{8}$，即 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$。

由焦点三角形的面积公式知 $S_{\triangle AF_1F_2}=b^2\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}b^2$，又 $S_{\triangle AF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2||y_A|=c|y_A|=-cy_A$，所以 $\frac{\sqrt{2}}{4}b^2=-cy_A$，即 $y_A=-\frac{\sqrt{2}b^2}{4c}$。②

由①②得 $\frac{\sqrt{2}}{4c}=\frac{b}{a^2+c^2}$，得 $4bc=\sqrt{2}(b^2+2c^2)$，则 $b^2-2\sqrt{2}bc+2c^2=0$，即 $(b-\sqrt{2}c)^2=0$，故 $b=\sqrt{2}c$。

所以 $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{c^2}{c^2+b^2}=\frac{c^2}{c^2+2c^2}=\frac{1}{3}$，故 $e=\frac{\sqrt{3}}{3}$。

17.【答案】(1)$\frac{\pi}{4}$；(2)见解析

【解析】(1)由 $a=b\cos C+a\cos B$ 及正弦定理可得 $\sin A=\sin B\cos C+\sin A\cos B$，即 $\sin(B+C)=\sin B\cos C+\sin A\cos B$，展开整理得 $(\sin A-\sin C)\cos B=0$。

由此可得 $\cos B=0$，或者 $\sin C=\sin A$。

当 $B=\frac{\pi}{2}$ 时，由 $B=2A$ 得 $A=\frac{\pi}{4}$。

当 $\sin C=\sin A$ 时，$A=C$。

又 $B=2A$，$A+B+C=\pi$，所以 $A+2A+A=\pi$，故 $A=\frac{\pi}{4}$。

综上所述，A 的值为 $\frac{\pi}{4}$。

(2)方法 1：$B=2A$ 等价于 $\sin B=2\sin A\cos A$，即 $b=a\frac{b^2+c^2-a^2}{bc}$。

若设 $b^2-a^2=kc$，则可以约去 c，于是 $b=a\frac{k+c}{b}$，即 $b^2=ak+ac$，与 $b^2-a^2=kc$ 对比可得 $k=a$，所以 $b^2-a^2=ac$。

方法 2：先证明 $\sin(B+A)\sin(B-A)=\sin^2B-\sin^2A$。

$\sin(B+A)\sin(B-A)=(\sin B\cos A+\cos B\sin A)\cdot(\sin B\cos A-\cos B\sin A)$

$=\sin^2B\cos^2A-\cos^2B\sin^2A$

$=\sin^2B(1-\sin^2A)-(1-\sin^2B)\sin^2A$

$=\sin^2B-\sin^2A$。

现在来证明该题，由以上结论及正弦定理可得

$B=2A\Leftrightarrow B-A=A\Leftrightarrow\sin(B-A)=\sin A$

$\Leftrightarrow\sin C\sin(B-A)=\sin A\sin C$

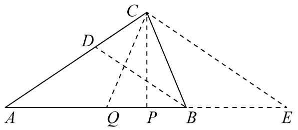
$\Leftrightarrow\sin(B+A)\sin(B-A)=\sin A\sin C$

$\Leftrightarrow\sin^2B-\sin^2A=\sin A\sin C$

$\Leftrightarrow b^2-a^2=ac$。

方法 3：如图所示，设 BD 是 B 的角平分线，又 $B=$

$2A$，故$\angle A=\angle ABD=\angle DBC$。由$\triangle ABC\backsim\triangle BDC$得$\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{BD}=\frac{BC}{CD}$，即$\frac{b}{a}=\frac{c}{BD}=\frac{a}{CD}$，所以$BD=\frac{ac}{b}$，$CD=\frac{a^2}{b}$，$AD=AC-CD=b-\frac{a^2}{b}$。



作AB边上的高CP，设点B关于CP的对称点为Q，延长AB至E，使得$AP=PE$。由$\triangle ABD\backsim\triangle AEC$得$\frac{BD}{EC}=\frac{AB}{AE}$，即得$\frac{\frac{ac}{b}}{b}=\frac{c}{a+c}$，故$b^2-a^2=ac$。

18.【答案】(1)$a_n=2^n-1$；(2)见解析

【解析】(1)当$n=1$时，$a_1=S_1=2a_1-1$，解得$a_1=1$。

当$n\geqslant 2$时，由$S_n=2a_n-n$得$S_{n-1}=2a_{n-1}-(n-1)$，两式相减得$a_n=2a_{n-1}+1$，故$a_n+1=2(a_{n-1}+1)$，且$a_1+1=2$，所以$\{a_n+1\}$是首项为2、公比为2的等比数列。

则$a_n+1=2\times 2^{n-1}=2^n$，即$a_n=2^n-1$。

(2)当$n=1$时，$\frac{1}{a_1}=1<3$。

当$n\geqslant 2$时，先证明$\frac{n}{2^n-1}<\frac{n+1}{2^n}$。

方法1：利用糖水不等式。

因为当$n\geqslant 2$时，$0<\frac{n}{2^n-1}<1$，所以$\frac{n}{2^n-1}<\frac{n+1}{(2^n-1)+1}=\frac{n+1}{2^n}$。

方法2：作差法。

因为当$n\geqslant 2$时，$n+1<2^n$，所以$\frac{n}{2^n-1}-\frac{n+1}{2^n}=\frac{n+1-2^n}{(2^n-1)\cdot 2^n}<0$。

设数列$\left\{\frac{n+1}{2^n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，则

$T_n=\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$，

$\frac{1}{2}T_n=\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$，

则$\frac{1}{2}T_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$，即$T_n=3-\frac{n+3}{2^n}<3$。

因为当$n\geqslant 2$时，$\frac{n}{2^n-1}<\frac{n+1}{2^n}$，所以$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}<T_n<3$。

综上，对任意的正整数n，都有$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+\cdots+\frac{n}{a_n}<3$。

19.【答案】(1)有；(2)①0.34；②$\frac{4}{17}$；③多担当后卫

【解析】(1)由列联表中的数据可得

$$K^2=\frac{50\times(3\times 11-7\times 29)^2}{32\times 18\times 10\times 40}\approx 6.27>5.024,$$

所以有97.5%的把握认为球队胜利与甲球员参与有关。

(2)①设A_1表示“乙球员担当边锋”，A_2表示“乙球员担当中锋”，A_3表示“乙球员担当后腰”，A_4表示“乙球员担当后卫”，B表示“球队输掉某场比赛”，则

$P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)+P(A_3)P(B|A_3)+P(A_4)P(B|A_4)=0.2\times 0.4+0.4\times 0.3+0.3\times 0.4+0.1\times 0.2=0.34$。

② $P(A_1|B)=\frac{P(A_1B)}{P(B)}=\frac{P(A_1)\cdot P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.2\times 0.4}{0.34}=\frac{4}{17}$。

③ 因为$P(A_2|B)=\frac{P(A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_2)\cdot P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.4\times 0.3}{0.34}=\frac{6}{17}$。

$P(A_3|B)=\frac{P(A_3B)}{P(B)}=\frac{P(A_3)\cdot P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.3\times 0.4}{0.34}=\frac{6}{17}$。

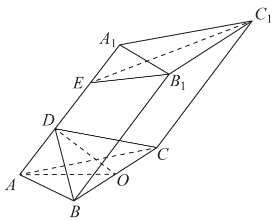
$P(A_4|B)=\frac{P(A_4B)}{P(B)}=\frac{P(A_4)\cdot P(B|A_4)}{P(B)}=\frac{0.1\times 0.2}{0.34}=\frac{1}{17}$。

所以$P(A_1|B)\colon P(A_2|B)\colon P(A_3|B)\colon P(A_4|B)=4\colon 6\colon 6\colon 1$。

因此，应该多让乙球员担当后卫，来扩大赢球场次。

20.【答案】(1)见解析；(2)见解析

【解析】解法一：(1)连接AO，因为侧面BB_1C_1C是矩形，所以$B_1B\perp BC$。



因为$AD/\!/B_1B$，所以$AD\perp BC$。

因为$AB=AC$，O为BC的中点，所以$AO\perp BC$，又因为AD，$AO\subset$平面DAO，$AD\cap AO=A$，所以$BC\perp$平面DAO。

因为$DO\subset$平面DAO，所以$BC\perp DO$，从而$DB=DC$，又因为$AB=AC$，$DA=DA$，所以$\triangle DAB\cong\triangle DAC$，从而$\angle DAB=\angle DAC$。

(2)若选①：

方法一：连接A_1O，则由$BC\perp$平面DAO得$BC\perp A_1O$。

因为$AB=AC$，$AB=BC=2\sqrt{3}$，所以$BO=\sqrt{3}$，$AO=3$。

因为$A_1A=5$，$AD=\frac{9}{5}$，所以$A_1D=\frac{16}{5}$。

因为$OD\perp A_1A$，所以$OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{9-\frac{81}{25}}=\frac{12}{5}$，故$A_1O=\sqrt{A_1D^2+DO^2}=\sqrt{\frac{256}{25}+\frac{144}{25}}=4$，所以$A_1A^2=25=16+9=A_1O^2+AO^2$，故$A_1O\perp AO$，从而$A_1O$，$AO$，$BO$两两垂直，故可以$O$为坐标原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OA_1}$的方向为$x$，$y$，$z$轴的正方向，建立空间直角坐标系$O\text{-}xyz$，如图1所示，则$O(0,0,0)$，$A(3,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,-\sqrt{3},0)$，$A_1(0,0,4)$，所以$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{AA_1}=(-3,0,4)$，$\overrightarrow{B_1A_1}=\overrightarrow{BA}=(3,-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=\overrightarrow{CB}=(0,2\sqrt{3},0)$，

则$\overrightarrow{B_1E}=\overrightarrow{B_1A_1}+\overrightarrow{A_1E}=\overrightarrow{B_1A_1}-\frac{7}{25}\overrightarrow{AA_1}=\left(\frac{96}{25},-\sqrt{3},-\frac{28}{25}\right)$。

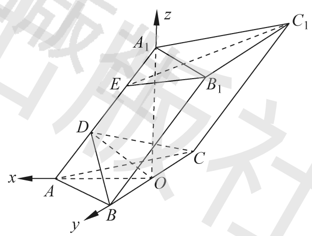


图 1

取$\boldsymbol{n}_1=(7,0,24)$，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\end{cases}$所以$\boldsymbol{n}_1=(7,0,24)$为平面$B_1C_1E$的一个法向量。

设平面B_1C_1E与平面BCD所成的锐二面角的平面角为$\theta(0<\theta<90^\circ)$，因为$\overrightarrow{AA_1}=(-3,0,4)$为平面$BCD$的一个法向量，则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{AA_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AA_1}|}{|\boldsymbol{n}_1||\overrightarrow{AA_1}|}=\frac{3}{5}$，即平面$B_1C_1E$与平面$BCD$所成的锐二面角的余弦值为$\frac{3}{5}$。

方法二：因为$AB=AC$，$AB=BC=2\sqrt{3}$，所以$BO=\sqrt{3}$，$AO=3$。

因为$AD=\frac{9}{5}$，$OD\perp A_1A$，所以$OD=\sqrt{AO^2-AD^2}=\sqrt{9-\frac{81}{25}}=\frac{12}{5}$。

由(1)可得$AA_1\perp BC$，$OD\perp BC$，因为$OD\perp A_1A$，所以OD，BC，AA_1两两垂直，故可以O为坐标原点、$\overrightarrow{OD}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AA_1}$的方向为x，y，z轴的正方向，建立空间直角坐标系$O\text{-}xyz$，如图2所示，则$O(0,0,0)$，$B(0,\sqrt{3},0)$，$C(0,-\sqrt{3},0)$，$D\left(\frac{12}{5},0,0\right)$，$E\left(\frac{12}{5},0,\frac{9}{5}\right)$，$B_1(0,\sqrt{3},5)$，$C_1(0,-\sqrt{3},5)$，所以$\overrightarrow{EB_1}=\left(-\frac{12}{5},\sqrt{3},\frac{16}{5}\right)$，$\overrightarrow{C_1B_1}=(0,2\sqrt{3},0)$，取$\boldsymbol{n}_1=(4,0,3)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{C_1B_1}=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{B_1E}=0,\end{cases}$所以$\boldsymbol{n}_1=(4,0,3)$为平面$B_1C_1E$的一个法向量。

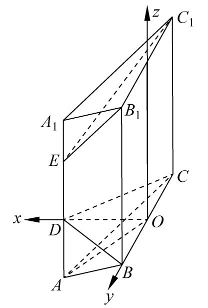


图 2

设平面B_1C_1E与平面BCD所成的锐二面角的平面角为$\theta(0<\theta<90^\circ)$，因为$\boldsymbol{n}_2=(0,0,1)$为平面$BCD$的一个法向量，则$\cos\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\overrightarrow{AA_1}\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AA_1}|}{|\boldsymbol{n}_1||\overrightarrow{AA_1}|}=\frac{3}{5}$，即平面$B_1C_1E$与平面$BCD$所成的锐二面角的余弦值为$\frac{3}{5}$。

若选②：

因为$\cos\angle DAB=\frac{3\sqrt{3}}{10}$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=\frac{9}{5}$，所以$BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot CD\cos\angle DAB=12+\frac{81}{25}-2\times 2\sqrt{3}\times\frac{9}{5}\times\frac{3\sqrt{3}}{10}=\frac{219}{25}$，即$BD^2+AD^2=\frac{219}{25}+\frac{81}{25}=12=AB^2$，故$AD\perp BD$。

由(1)可得$AD\perp CD$，从而$AD\perp$平面BCD，进而$AD\perp OD$。

下同上述(2)中的方法一、方法二。

解法二：(1) 因为侧面 BB_1C_1C 是矩形，所以 $\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，即 $\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=0$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$，即 $|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle DAB=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cos\angle DAC$。

因为 $AB=AC$，$DA=DA$，$\angle DAB,\angle DAC\in(0,\pi)$，所以 $\angle DAB=\angle DAC$。

(2)若选①：

因为 $AD=DE=\frac{9}{5}$，$OD\perp A_1A$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO})=0$，即 $\overrightarrow{AD}\cdot\left[\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\right]=0$，所以 $\frac{81}{25}-\frac{9}{5}\times2\sqrt{3}\cos\angle DAB=0$，解得 $\cos\angle DAB=\frac{3\sqrt{3}}{10}$。

如图 3 所示，连接 OE，则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{EB_1}=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$，所以

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EB_1}$

$=(2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{14}{9}\overrightarrow{AD}^2+\frac{11}{9}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=0$，即 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EC_1}$。

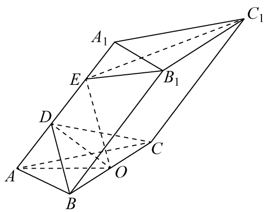


图 3

同理可得 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EB_1}$，从而 $\overrightarrow{OE}$ 为平面 EB_1C_1 的一个法向量。

设平面 B_1C_1E 与平面 BCD 所成的锐二面角的平面角为 $\theta(0<\theta<90°)$，因为 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，$OD\perp A_1A$，所以 $\overrightarrow{AD}$ 为平面 BCD 的一个法向量，因为 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AD}=(2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{81}{25}$，$|\overrightarrow{OE}|=\sqrt{(2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2}=3$，所以 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OE},\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{OE}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3}{5}$，即平面 B_1C_1E 与平面 BCD 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$。

若选②：

因为 $\cos\angle DAB=\frac{3\sqrt{3}}{10}$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=\frac{9}{5}$，所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AB}|\cos\angle DAB=\frac{9}{5}\times2\sqrt{3}\times\frac{3\sqrt{3}}{10}=\frac{81}{25}$，则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{AD}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AO})=\overrightarrow{AD}\cdot[\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})]=0$，即 $OD\perp A_1A$。

因为 $\overrightarrow{AA_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，所以 $\overrightarrow{AD}$ 为平面 BCD 的一个法向量，连接 OE，则 $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AO}=2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{EB_1}=\overrightarrow{EA_1}+\overrightarrow{A_1B_1}=\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$，所以 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{EB_1}=(2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot\left(\frac{7}{9}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{14}{9}\overrightarrow{AD}^2+\frac{11}{9}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，则 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EC_1}$。

同理可得 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{EB_1}$，从而 $\overrightarrow{OE}$ 为平面 EB_1C_1 的一个法向量。

设平面 B_1C_1E 与平面 BCD 所成的锐二面角的平面角为 $\theta(0<\theta<90°)$，因为 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AD}=(2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{81}{25}$，$|\overrightarrow{OE}|=\sqrt{\left(2\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)^2}=3$，所以 $\cos\theta=|\cos\langle\overrightarrow{OE},\overrightarrow{AD}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{OE}||\overrightarrow{AD}|}=\frac{3}{5}$，即平面 B_1C_1E 与平面 BCD 所成的锐二面角的余弦值为 $\frac{3}{5}$。

21.【答案】(1)见解析；(2)增大

【解析】因为 $f(x)=x-\ln x$，所以 $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}(x>0)$。

令 $f'(x)=0$，得 $x=1$。当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)>0$。

所以 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $x=1$ 是 $f(x)$的极小值。

(1) 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 知 $0<x_1<1<x_2$，所以 $0<x_1<1$，$0<\frac{1}{x_2}<1$，又 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，所以 $x_1x_2<1\Leftrightarrow x_1<\frac{1}{x_2}\Leftrightarrow f(x_1)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)\Leftrightarrow f(x_2)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$。

令 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)(x>1)$，即 $g(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x(x>1)$，则

$$g'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0。$$

所以 $g(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，故 $g(x)>g(1)=$

0，因此 $f(x_2)-f\left(\frac{1}{x_2}\right)>0$，即 $x_1x_2<1$。

(2) 由 $f(x_1)=f(x_2)$ 知 $x_1-\ln x_1=x_2-\ln x_2$，所以 $x_2-x_1=\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}$。

令 $\frac{x_2}{x_1}=m$，则 $m>1$，故 $x_2-x_1=\ln m$ 且 $x_2=mx_1$。

所以 $mx_1-x_1=\ln m$，解得 $x_1=\frac{\ln m}{m-1}$，$x_2=\frac{m\ln m}{m-1}$，故 $x_1+x_2=\frac{(m+1)\ln m}{m-1}$。

设 $h(m)=\frac{(m+1)\ln m}{m-1}(m>1)$，则 $h'(m)=\frac{m-\frac{1}{m}-2\ln m}{(m-1)^2}=\frac{g(m)}{(m-1)^2}>0$，所以 $h(m)$在$(1,+\infty)$上单调递增，因此当$\frac{x_2}{x_1}$逐渐增大时，x_1+x_2 也逐渐增大。

22.【答案】(1)$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

(2)$\left(\pm\sqrt{\frac{11}{21}},\pm\sqrt{\frac{10}{21}}\right)$，$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{7}},\pm\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$

【解析】设 $D(x_0,y_0)$，$E(x_0,-y_0)$，因为 $A(-2,0)$，$B(2,0)$，所以直线 AE 的方程为 $x=\frac{x_0+2}{-y_0}y-2$ ①，

直线 BD 的方程为 $x=\frac{x_0-2}{y_0}y+2$ ②。

联立①②，由$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=1$得

$$\frac{x^2-4}{y^2}=\frac{x_0^2-4}{-y_0^2}=\frac{x_0^2-4}{\left(1-\frac{x_0^2}{4}\right)3}=-\frac{4}{3},$$

整理得$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。

因此，曲线 Γ 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$。

(2) 设 $S(x_0,y_0)$，则圆 $x^2+y^2=1$ 在 S 处的切线方程为 $x_0x+y_0y=1$，设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，联立

$$\begin{cases}x_0x+y_0y=1,\\3x^2-4y^2=12,\end{cases}$$

得$(3y_0^2-4x_0^2)x^2+8x_0x-4-12y_0^2=0$，则

$$x_1+x_2=\frac{-8x_0x}{3y_0^2-4x_0^2},\quad x_1x_2=\frac{-(4+12y_0^2)}{3y_0^2-4x_0^2}。$$

设$\triangle MON$ 的面积为 $S_\triangle$，则

$$S_\triangle=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$$

$$=\frac{1}{2|y_0|}|x_1\cdot y_0y_2-x_2\cdot y_0y_1|$$

$$=\frac{1}{2|y_0|}|x_1(1-x_0x_2)-x_2(1-x_0x_1)|$$

$$=\frac{1}{2|y_0|}|x_1-x_2|$$

$$=\frac{1}{2|y_0|}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$$

$$=\frac{1}{2|y_0|}\sqrt{\frac{64x_0^2+4(3y_0^2-4x_0^2)(4+12y_0^2)}{(3y_0^2-4x_0^2)^2}}$$

$$=\frac{1}{2|y_0|}\cdot\frac{4\sqrt{3}\sqrt{y_0^2+3y_0^4-4x_0^2y_0^2}}{|3y_0^2-4x_0^2|}$$

$$=\frac{2\sqrt{3}\sqrt{7y_0^2-3}}{|7y_0^2-4|}。$$

又$\sqrt{7y_0^2-3}=t(t>0)$，则 $S_\triangle=\frac{2\sqrt{3}t}{|t^2-1|}=3$，平方整理得 $3t^4-10t^2+3=0$，即$(3t^2-1)(t^2-3)=0$，解得 $t^2=\frac{1}{3}$ 或 $t^2=3$。

当 $t^2=\frac{1}{3}$ 时，$y_0^2=\frac{10}{21}$，$x_0^2=\frac{11}{21}$；当 $t^2=3$ 时，$y_0^2=\frac{6}{7}$，$x_0^2=\frac{1}{7}$。

因此，点 S 的坐标为 $\left(\pm\sqrt{\frac{11}{21}},\pm\sqrt{\frac{10}{21}}\right)$，$\left(\pm\sqrt{\frac{1}{7}},\pm\sqrt{\frac{6}{7}}\right)$。