# 第3章

# 方　程　组

# 本章要点总结

1. $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解
   - 初等行变换法：通过初等行变换，找出最简同解方程组，进而求解
   - 特征向量法：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 0 对应的特征向量为方程 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解
   - 线性相关法：如$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}\Rightarrow[1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 为方程$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解
   - 特解构造法：$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0$ 时，$\boldsymbol{\gamma}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\gamma}_i$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解

2. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的含义
   - ① 矩阵：$r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n$；若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均非零矩阵，则均不可逆
   - ② 行列式：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式$|\boldsymbol{A}|=0$
   - ③ 方程组：$\boldsymbol{B}$ 的列向量是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解
   - ④ 向量组：$\boldsymbol{A}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关
   - ⑤ 特征值：$\boldsymbol{A}$ 存在特征值 $\lambda=0$，且若 $r(\boldsymbol{B})=k$，则 $\lambda=0$ 至少存在 $k$ 重根

3. 各版块的关系见表 3-1。

**表　3-1**

| 行列式 | $r(\boldsymbol{A})$ | 矩阵 | $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ | $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$（有解时） | 向量组 | 特征值 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert\boldsymbol{A}\rvert=0$ | $r(\boldsymbol{A})<n$ | 不可逆 | 有非零解 | 无穷多解 | 线性相关 | 含 0 |
| $\lvert\boldsymbol{A}\rvert\neq 0$ | $r(\boldsymbol{A})=n$ | 可逆 | 仅有零解 | 唯一解 | 线性无关 | 不含 0 |

4. $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解
   - 等价条件
     - 仅有零解$\Leftrightarrow$
       - 矩阵：$r(\boldsymbol{A})=n$
       - 矩阵：$\boldsymbol{A}$ 可逆（$\boldsymbol{A}$ 为方阵）
       - 行列式：$|\boldsymbol{A}|\neq 0$（$\boldsymbol{A}$ 为方阵）
       - 向量组：$\boldsymbol{A}$ 的列（或行）向量组线性无关
       - 特征值：0 不为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
     - 有非零解$\Leftrightarrow$
       - 矩阵：$r(\boldsymbol{A})<n$
       - 矩阵：$\boldsymbol{A}$ 不可逆（$\boldsymbol{A}$ 为方阵）
       - 行列式：$|\boldsymbol{A}|=0$（$\boldsymbol{A}$ 为方阵）
       - 向量组：$\boldsymbol{A}$ 的列（或行）向量组线性相关
       - 特征值：0 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值
   - 基础解系三大条件
     - 个数 $n-r(\boldsymbol{A})$
     - 有非零解
     - 线性无关

5. $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解
   - 三种情况
     - 无解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})\neq r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$
     - 有解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})$
       - 有唯一解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})=n$
       - 有无穷多解 $\Leftrightarrow r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{\beta})<n$
   - 构造新解的方法
     - 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一组解，$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$
     - 则
       - $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解， $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$
       - $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解， $k_1+k_2+\cdots+k_s=0$
   - 克拉默法则
     - 线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$
     - 如果系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则
     - $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$
     - 其中 $D_j$ 是把 $D$ 中第 $j$ 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式
   - $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的解
     - 特殊：若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆方阵，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$
     - 普适：
       - $\boldsymbol{A}_{mn}[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{Ax}_2=\boldsymbol{\beta}_2\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{Ax}_m=\boldsymbol{\beta}_m\end{cases}$
       - 增广矩阵 $[\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{B}]$ 批量求解 $\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{\beta}_i$，进而得 $\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m]$

6. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 的含义：
   - $\boldsymbol{C}$ 的列向量可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性表示
   - 同型方阵 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$
     - 且 $\boldsymbol{C}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均可逆
     - 且 $\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 的列向量组等价

7. 同解方程组
   - ① $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 行向量组等价
   - ② 重要的同解方程组：$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为同解方程组
   - 此时有 $r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A})$

8. 由解反求系数阵的方法
   - 设 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的线性无关的解
   - 则系数阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量为方程 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

9. 线性无关解的个数
   - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$：最多 $n-r(\boldsymbol{A})$ 个线性无关解
   - $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$：最多 $n-r(\boldsymbol{A})+1$ 个线性无关解

10. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解
    - ① $\boldsymbol{A}$ 的列向量均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解（此时有 $|\boldsymbol{A}|=0$）
    - ② 伴随阵的秩 $r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases} n, & r(\boldsymbol{A})=n \\ 1, & r(\boldsymbol{A})=n-1 \\ 0, & r(\boldsymbol{A})<n-1 \end{cases}$

## 专题 12　$Ax=0$ 的解

### 【考法 1】　判断齐次方程解的情况

**重要结论**

$$Ax=0\begin{cases}\text{只有零解}\Leftrightarrow r(A)=n\\ \text{有非零解}\Leftrightarrow r(A)<n\end{cases}$$

**例题 1**　设 $A$ 为 $4\times5$ 的矩阵，$r(A)=4$，$B$ 为 $4\times2$ 矩阵，则下列命题中不正确的是(　　)。

A. $\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}x=0$ 只有零解　　B. $[A\ \vdots\ B]x=0$ 必有无穷多解

C. $\forall b$，$\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}x=b$ 有唯一解　　D. $\forall b$，$[A\ \vdots\ B]x=b$ 必有无穷多解

**解**　因为 $r\begin{pmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=4$，$r(A\ \vdots\ B)=4$，由齐次线性方程解的判定知，A、B 选项均成立。又 $r(A\ \vdots\ B\ \vdots\ b)=r(A\ \vdots\ B)=4<7$，可见 D 也成立，但 $r\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}\\B^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 与 $r\begin{bmatrix}A^{\mathrm{T}}&\vdots&b\\B^{\mathrm{T}}&&\end{bmatrix}$ 不一定相等，因此 C 选项不正确，故选 C。

### 【考法 2】　特征值为 0 对应的特征向量

**重要结论**

$\lambda=0$ 对应的特征向量 $\xi$ 为方程 $Ax=0$ 的非零解。

**例题 2**　已知 $A$ 是三阶实对称不可逆矩阵，且 $A\begin{bmatrix}1&1\\-1&2\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1\\-2&2\\2&1\end{bmatrix}$，则齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解为________。

**解**　记 $\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$，$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$，由已知条件，知 $A\alpha_1=2\alpha_1$，$A\alpha_2=\alpha_2$，则 $\alpha_1$，$\alpha_2$ 分别是矩阵 $A$ 对应特征值为 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=1$ 的特征向量。

由 $A$ 不可逆，知 $|A|=0$，于是 $\lambda_3=0$ 是 $A$ 的特征值。设矩阵 $A$ 关于特征值 $\lambda_3=0$ 的特征向量为 $\alpha_3$，由于实对称矩阵不同的特征值对应的特征向量正交，所以可取 $\alpha_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ 是方程 $Ax=0$ 的一个解。又因为 $A$ 可对角化，且有 2 个非零特征值，所以 $r(A)=2$。$Ax=0$ 基础解系中向量的个数为 1，故 $Ax=0$ 的通解为 $k\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$，其中 $k$ 为任意常数。

## 【考法 3】 利用 $AB=O$ 求解相关问题

### 重要结论

$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的含义 $\begin{cases} ①矩阵：r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant n；若\ \boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\ 均非零矩阵，则均不可逆 \\ ②\ 行列式：方阵\ \boldsymbol{A}\ 的行列式\ |\boldsymbol{A}|=0 \\ ③\ 方程组：\boldsymbol{B}\ 的列向量是方程组\ \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\ 的解 \\ ④\ 向量组：\boldsymbol{A}\ 的列向量组与\ \boldsymbol{B}\ 的行向量组线性相关 \\ ⑤\ 特征值：\boldsymbol{A}\ 存在特征值\ \lambda=0，且若\ r(\boldsymbol{B})=k，则\ \lambda=0\ 至少存在\ k\ 重根 \end{cases}$

**例题 3** 已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 $[a,b,c]$，$a,b,c$ 不全为零，矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$（$k$ 为常数），且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$。求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解。

**解** 由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知，$\boldsymbol{B}$ 的每一列均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，且 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3$。

(1) 若 $k\neq 9$，则 $r(\boldsymbol{B})=2$，于是 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$，显然 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 1$，故 $r(\boldsymbol{A})=1$。可见此时 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含解向量的个数为 $3-r(\boldsymbol{A})=2$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第一、第三列线性无关，可作为其基础解系，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}3\\6\\k\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。

(2) 若 $k=9$，则 $r(\boldsymbol{B})=1$，从而 $1\leqslant r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$。

若 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$k_1$ 为任意常数。

若 $r(\boldsymbol{A})=1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组为 $ax_1+bx_2+cx_3=0$，不妨设 $a\neq 0$，则其通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\begin{bmatrix}-\dfrac{b}{a}\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-\dfrac{c}{a}\\0\\1\end{bmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数。

**例题 4** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　　）。

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

B. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

C. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关

D. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关

**解** 设 $\boldsymbol{A}$ 按列分块为 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]$，由 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，知 $\boldsymbol{B}$ 至少有一列非零，设 $\boldsymbol{B}$ 的第 $j$ 列 $[b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj}]^{\mathrm{T}}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{AB}$ 的第 $j$ 列为 $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{nj}\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}$，即 $b_{1j}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2j}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nj}\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$，因为常数 $b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{nj}$ 不全为零，故知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关。再由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 取转置得 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{O}$，利用已证结果可知 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$ 的列向量组线性相关，即 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关，故选 A。

说明：本题也可从秩的角度理解。

**例题 5**　设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=[1,1,-2]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=[2,1,1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=[2,t,1]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，则（　　）。

A. $t\neq1$ 时，必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　B. $t\neq1$ 时，必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

C. $t=1$ 时，必有 $r(\boldsymbol{A})=1$　　D. $t=1$ 时，必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$

**解**　由题可知 $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\boldsymbol{O}$。

$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\begin{bmatrix}1&2&2\\1&1&t\\-2&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&2\\0&-1&t-2\\0&5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&t-1\end{bmatrix}。$$

(1) 当 $t\neq1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=3$. 由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant3$，$r(\boldsymbol{A})=0$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，故选 B。

(2) 当 $t=1$ 时，$r(\boldsymbol{B})=2$，由于 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，所以 $r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant3$，故 $r(\boldsymbol{A})\leqslant1$。

## 专题 13　$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解

### 【考法 1】　利用伴随矩阵求齐次方程的解

**重要结论**

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 的解}\begin{cases}①\ \boldsymbol{A}\text{ 的列向量均为 }\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 的解(此时有 }|\boldsymbol{A}|=0)\\ ②\ \text{伴随阵的秩 }r(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & r(\boldsymbol{A})=n\\1, & r(\boldsymbol{A})=n-1\\0, & r(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}\end{cases}$$

**例题 1**　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________。

**解**　对 $\boldsymbol{A}$ 实施初等行变换，有

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-1&1\\3&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&-5&5\\0&-5&5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&-2\\0&1&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$，于是 $r(\boldsymbol{A})=2$。根据伴随矩阵与矩阵秩之间的关系有 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，从而 $3-r(\boldsymbol{A}^*)=2$，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含有 2 个线性无关的向量。

因为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解向量，特别地，$[1,2,3]^{\mathrm{T}}$，$[2,-1,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关解，故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k_1[1,2,3]^{\mathrm{T}}+k_2[2,-1,1]^{\mathrm{T}}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数。

**例题 2**　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是四维非零列向量组，$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。已知方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $k[1,0,2,0]^{\mathrm{T}}$，则方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为（　　）。

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$

**解**　由 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系仅含 1 个解向量，知 $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $r(\boldsymbol{A})=3$，所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

的基础解系应含 3 个解向量，故排除 D 选项。

又由题设有$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4][1,0,2,0]^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$，即$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关，所以排除 A、B 选项，故选 C。

## 【考法 2】 利用代数余子式不为零，确定线性无关

**重要结论**

若方阵 $\boldsymbol{A}$ 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$，则①除 $i$ 行之外的所有行向量线性无关；②除 $j$ 列之外的所有列向量线性无关。

证明：以 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，且 $A_{12}\neq 0$ 为例。$A_{12}\neq 0\Rightarrow M_{12}\neq 0\Rightarrow\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$。

所以列向量组 $\begin{bmatrix}a_{21}\\ a_{31}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}$ 线性无关，其延长组 $\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a_{13}\\ a_{23}\\ a_{33}\end{bmatrix}$ 必线性无关。故第 2 列之外的所有列向量线性无关。同理，可证除第 1 行之外的所有行向量线性无关。

**例题 3** 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{4\times 4}$ 不可逆，$a_{12}$ 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为(　　)。

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

**解** 因为 $\boldsymbol{A}$ 不可逆所以$|\boldsymbol{A}|=0$。

$\because A_{12}\neq 0$，$\therefore r(\boldsymbol{A})=3$，$\therefore r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\therefore \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系有 3 个线性无关的解向量。

$\because \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\mathbf{0}$，$\therefore \boldsymbol{A}$ 的每一列都是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解。

又$\because A_{12}\neq 0$，$\therefore \boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\therefore \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，故选 C。

**例题 4** 设四阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{4\times 4}$ 不可逆，$a_{12}$ 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，$\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组，$\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，则$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为(　　)。

A. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　B. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

C. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$　　D. $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$

**解** $\because \boldsymbol{A}$ 不可逆，$\therefore |\boldsymbol{A}|=0$。

$\because A_{12}\neq 0$，$\therefore r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=3$，$\therefore r(\boldsymbol{A}^*)=1$，$\therefore \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的基础解系有 3 个线性无关的解向量。

又$\because A_{12}\neq 0$，$\therefore \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_4^{\mathrm{T}}$ 线性无关，$\therefore (\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3+k_3\boldsymbol{\alpha}_4$，故选 D。

## 【考法 3】 结合反求矩阵 A 得出基础解系

**重要结论**

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}$

**例题 5** 设三阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$有二重特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，且$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵。

(1) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的通解为________。

(2) 方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的通解为________。

**解** (1) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3$,知

$$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\boldsymbol{0}=0\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix},$$

故 $\lambda_3=0$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,$\boldsymbol{\beta}_3=[1,2,-1]^{\mathrm{T}}$ 是其对应的特征向量。易知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2。

所以方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k[1,2,-1]^{\mathrm{T}}$($k$ 为任意常数)。

(2) $\boldsymbol{A}$ 矩阵的列向量为方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。下面求解矩阵 $\boldsymbol{A}$。

令 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为$\boldsymbol{\beta}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$。由 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵,知$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_3=0$,即

$$x_1+2x_2-x_3=0$$

解得$\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=(1,0,1)^{\mathrm{T}}$,为 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 对应的特征向量。

对$\boldsymbol{\beta}_1$,$\boldsymbol{\beta}_2$ 正交化,得$\boldsymbol{\eta}_1=\boldsymbol{\beta}_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$。

$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\beta}_2-\frac{[\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_1]}{[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_1]}\boldsymbol{\beta}_1=\frac{1}{5}(1,2,5)^{\mathrm{T}}。$$

单位化,得$\boldsymbol{\gamma}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}_2=\dfrac{1}{\sqrt{30}}(1,2,5)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\gamma}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^{\mathrm{T}}$。

令 $\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3]$,则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵,

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{5}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}&0\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}。$$

由于 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O}$,$\boldsymbol{A}$ 的列向量中线性无关的$\boldsymbol{\alpha}_1$,$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=0$ 有两个基础解,故所求通解为 $k_1(5,-2,1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,1,1)^{\mathrm{T}}$($k_1$,$k_2$ 为任意常数)。

说明:本题也可用"abb"模型法快速求出矩阵 $\boldsymbol{A}$(方法说明参考专题 34)。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0,1,1,又因为$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3\Rightarrow(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)(1,2,-1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}(1,2,-1)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$,所以 0 对应的单位化特征向量为$\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$,所以

$$\boldsymbol{A}-b\boldsymbol{E}=(a-b)\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}\Rightarrow\boldsymbol{A}=(0-1)\boldsymbol{\xi}_1\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}=-\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}+\boldsymbol{E}$$

$$=-\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\-1&-2&1\end{bmatrix}+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&-\frac{1}{3}&\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}&\frac{1}{3}&\frac{5}{6}\end{bmatrix}$$

**【考法4】 结合基础解系的条件**

**重要结论**

基础解系三大条件$\begin{cases}个数\ n-r(\boldsymbol{A})\\有非零解\\线性无关\end{cases}$。

**例题6** 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$，$a_{12}$ 的代数余子式 $A_{12}\neq 0$，且$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{P}$ 为 2 阶可逆矩阵，则下列说法中为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 基础解系的有(　　)个。

① $[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$ 的列向量组　　② $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$ 的列向量组

③ $[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]$的等价向量组　　④ $[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]$的等价向量组

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

**解** ①②为所求基础解系，选 B，理由如下。

(1) 确定基础解系中解向量的个数。

$A_{12}\neq 0$ 可得出 $r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$，又因为$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 2$，即 $r(\boldsymbol{A})=2$，

所以 $r(\boldsymbol{A}^*)=1$。故 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 基础解系中应有 2 个线性无关的解向量。

(2) 确定解。

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$，所以 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=\boldsymbol{0}$，

即$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解。

(3) 寻找线性无关的解。

$A_{12}\neq 0$ 可得出，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关。又因为$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$，所以$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[-\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3]$，可经过列变换化为$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]$，故 $r(\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=2$，所以$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 也线性无关。

所以向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与向量组$\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均可为方程组 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

(4) 初等列变换后依然是基础解系。

$\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵，所以 $r(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)=r[(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3)\boldsymbol{P}]=2$，故$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$ 的列向量组线性无关。

$\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$，即$[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$ 的列向量组也是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

同理，$[\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]\boldsymbol{P}$ 的列向量组也是 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系。

(5) 基础解系的等价向量组不一定是基础解系。

由于无法确定基础解系等价向量组中向量的个数(例如$\boldsymbol{\alpha}_1$ 与$\boldsymbol{\alpha}_1,2\boldsymbol{\alpha}_1$ 向量组等价，但向量个数不相等)，所以基础解系的等价向量组不一定是基础解系，故说法③④均错误。故选 B。

## 专题14 利用基础解系的性质

**【考法1】 利用基础解系三大条件求解相关问题**

**重要结论**

基础解系三大条件$\begin{cases}个数\ n-r(\boldsymbol{A})\\有非零解\\线性无关\end{cases}$。

**例题1** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=t_1\boldsymbol{\alpha}_1+t_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=t_1\boldsymbol{\alpha}_2+t_2\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=t_1\boldsymbol{\alpha}_3+t_2\boldsymbol{\alpha}_4$，$\boldsymbol{\beta}_4=t_1\boldsymbol{\alpha}_4+t_2\boldsymbol{\alpha}_1$，也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其中 $t_1,t_2$ 为实常数，

则 $t_1,t_2$ 应满足关系(　　)。

A. $t_1\neq\pm t_2$　　B. $t_1=t_2$　　C. $t_1=-t_2$　　D. $t_1=\pm t_2$

**解** 由$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系及齐次线性方程组解的性质知,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解,要使$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系,只需要线性无关。

$$[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]\begin{bmatrix}t_1&0&0&t_2\\t_2&t_1&0&0\\0&t_2&t_1&0\\0&0&t_2&t_1\end{bmatrix}$$

因为$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,且$\begin{vmatrix}t_1&0&0&t_2\\t_2&t_1&0&0\\0&t_2&t_1&0\\0&0&t_2&t_1\end{vmatrix}=t_1^4-t_2^4$,

当 $t_1^4-t_2^4\neq0$,即 $t_1\neq\pm t_2$ 时,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关,故选 A。

### 【考法 2】　利用解与基础解系的关系求解相关问题

**重要结论**

基础解系可线性表示任意解$\boldsymbol{\xi}$,即$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\xi}_n$。

**例题 2** 设$\boldsymbol{\xi}_1=[0,1,2,3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\xi}_2=[3,2,1,0]^{\mathrm{T}}$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系,其中 $\boldsymbol{A}$ 是四阶方阵,则下列选项中是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的一个特解是(　　)。

A. $[1,2,-3,1]^{\mathrm{T}}$　　B. $[1,0,2,1]^{\mathrm{T}}$

C. $[1,2,1,3]^{\mathrm{T}}$　　D. $[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$

**解** 根据齐次线性方程组解的性质,看四个选项中哪个向量能由基础解系$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性表示。

记$\boldsymbol{\beta}_1=[1,2,-3,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_2=[1,0,2,1]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_3=[1,2,1,3]^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}_4=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$,作矩阵$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]$,并对其实施初等行变换,得

$$[\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2\ \vdots\ \boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]=\left[\begin{array}{cc:cccc}0&3&1&1&1&1\\1&2&2&0&2&2\\2&1&-3&2&1&3\\3&0&1&1&3&4\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{cc:cccc}1&0&\frac{4}{3}&-\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&\frac{4}{3}\\0&1&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\0&0&-3&3&-1&0\\0&0&0&-3&0&0\end{array}\right]$$

由此可知,$\boldsymbol{\beta}_4=\frac{4}{3}\boldsymbol{\xi}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\xi}_2$,即$\boldsymbol{\beta}_4$ 也是一个解向量,$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 不能由基础解系$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性表示,不是解向量,故选 D。

### 【考法 3】　基础解系的等价向量组不一定是基础解系

**重要结论**

基础解系的等价向量组不一定是基础解系。

**例题 3** 已知$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系,则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的基础解系还可以表示为(　　)。

A. $P_{3\times3}[\xi_1,\xi_2,\xi_3]$的三个列向量，其中 $P_{3\times3}$ 为可逆矩阵

B. $[\xi_1,\xi_2,\xi_3]Q_{3\times3}$ 的三个列向量，其中 $Q_{3\times3}$ 为可逆矩阵

C. $\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 的一个等价向量组

D. 一个可由$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性表示的向量组

**解** 因$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性无关，且 $Q$ 可逆，故 $r([\xi_1,\xi_2,\xi_3]Q)=3$，则$[\xi_1,\xi_2,\xi_3]Q$ 的三个列向量仍线性无关，又 $A\xi_i=0(i=1,2,3)$，故 $A[\xi_1,\xi_2,\xi_3]=O$，两边右乘 $Q$，得 $A[\xi_1,\xi_2,\xi_3]Q=O$，即$[\xi_1,\xi_2,\xi_3]Q$ 的三个列向量仍为 $Ax=0$ 的解向量，且线性无关的解向量个数为 3，所以它们为 $Ax=0$ 的基础解系，故选 B。

A 选项错误：$P\xi_i$ 不一定是 $Ax=0$ 的解向量，即 $A(P\xi_i)\neq 0$。

C 选项错误：因与$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 等价的向量组，其向量个数可以超过 3 个，且线性相关，因而$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 的一个等价向量组不一定是基础解系。

D 选项错误：一个可由$\xi_1,\xi_2,\xi_3$ 线性表示的向量组，其向量个数可能不是 3，也无法保证其线性无关。

## 专题 15 $Ax=b$ 的解

### 【考法 1】 判别非齐次方程的解(具体矩阵)

**重要结论**

$$Ax=\beta\text{ 解的情况}\begin{cases}\text{无解}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A,\beta)\\ \text{有解}\Leftrightarrow r(A)\neq r(A,\beta)\begin{cases}\text{有唯一解}\Leftrightarrow r(A)=r(A,\beta)=n\\ \text{有无穷多解}\Leftrightarrow r(A)=r(A,\beta)<n\end{cases}\end{cases}。$$

**例题 1** 设方程组$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=b_1\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b_2\\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+a_3^2x_3=b_3\end{cases}$，其中 $a_i\neq a_j\ (i\neq j)$，则下列说法中正确的是(　　)。

A. 此方程组无解　　　　B. 此方程组有唯一解

C. 此方程组有无穷多解　　　　D. 其解的情况与 $b_1$、$b_2$、$b_3$ 的值有关

**解** 设方程组的系数矩阵为 $A$。因为$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\ a_1&a_2&a_3\\ a_1^2&a_2^2&a_3^2\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant3}(a_j-a_i)$，且 $a_i\neq a_j$。

所以$|A|\neq0$，故方程组有解，并且是唯一解。故选 B。

### 【考法 2】 判别非齐次方程的解(抽象矩阵)

**例题 2** 设 $A$ 是 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，且 $A$ 的行向量组线性无关，$B$ 是 $n\times(n-m)$矩阵，$B$ 的列向量组线性无关，且 $AB=O$，已知$\eta$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解，证明：$By=\eta$ 有唯一解。

证明：由题设条件知，$r(A)=m$，$r(B)=n-m$。又 $AB=O$，故 $B$ 的每一列都是$Ax=0$ 的解，且是 $n-m$ 个线性无关解。因 $r(A_{m\times n})=m$，$Ax=0$ 基础解系由 $n-m$ 个线性无关解组成，故 $B$ 的列向量组$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，已知$\eta$ 是 $Ax=0$ 的一个解，$\eta$ 可由基础解系 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-m}$

线性表示，且表示法唯一，即线性方程组 $\boldsymbol{By}=\boldsymbol{\eta}$ 有唯一解。

**例题 3** 设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 为三维列向量，矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}]$，$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\alpha}]$，若 $|\boldsymbol{A}|=1$，$\boldsymbol{B}^*$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的伴随矩阵，则非齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$（　　）。

A. 有唯一解　　B. 有无穷多解

C. 无解　　D. 是否有解与 $\boldsymbol{\beta}$ 有关

**解** 经过多次列变换有：

$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}]\to[2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}]\to[2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\alpha}]\to[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}]$，

所以 $|\boldsymbol{A}|\neq0\Rightarrow|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}|\neq0$。

经过列变换有：$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\alpha}]\to[9\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\alpha}]$（将第 2 列的 $-2$ 倍与第 3 列的 4 倍加至第 1 列）。

进一步列变换有 $\boldsymbol{B}\to[9\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+2\boldsymbol{\alpha}]\to[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}]\to[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$，

所以 $|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\alpha}|\neq0\Rightarrow|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|\neq0\Rightarrow|\boldsymbol{B}|\neq0$ 所以矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为三阶满秩矩阵。

从而有 $\boldsymbol{B}^*$ 也是三阶满秩矩阵。此时必有 $r(\boldsymbol{B}^*)=r(\boldsymbol{B}^*,\boldsymbol{\beta})=3$。故方程具有唯一解，故选 A。

### 【考法 3】 利用克拉默法则求解非齐次方程组

**重要结论**

克拉默法则
- 线性方程组 $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \quad\vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$ 如果系数行列式 $D=|\boldsymbol{A}|\neq0$，则 $x_1=\dfrac{D_1}{D},x_2=\dfrac{D_2}{D},\cdots,x_n=\dfrac{D_n}{D}$
- 其中 $D_j$ 是把 $D$ 中第 $j$ 列元素换成方程组右端的常数列所得的行列式

**例题 4** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$，其中 $a_i\neq a_j(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解是 $\boldsymbol{x}=$________。

**解** $|\boldsymbol{A}|$ 为 $n$ 阶范德蒙行列式，由题设有 $i\neq j$ 时 $a_i\neq a_j$，则 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\neq0$，由克拉默法则知，方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有唯一解。下面求出该唯一解。因

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{bmatrix},\quad|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix}1&a_1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&a_2&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&a_n&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix},$$

则 $D_1=|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，$D_2=\begin{vmatrix}1&1&a_1^2&\cdots&a_1^{n-1}\\1&1&a_2^2&\cdots&a_2^{n-1}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&a_n^2&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}=0$。同理，可求得 $D_3=\cdots=D_n=0$，故其解为

$$x_1=\frac{D_1}{|A^{\mathrm{T}}|}=\frac{D_1}{D_1}=1, x_2=\frac{D_2}{|A^{\mathrm{T}}|}=\frac{0}{|A^{\mathrm{T}}|}=0,\cdots,x_n=\frac{D_n}{|A^{\mathrm{T}}|}=\frac{0}{|A^{\mathrm{T}}|}=0,$$

即 $\boldsymbol{x}=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 为所求的唯一解。

## 专题 16 同解与公共解

### 【考法 1】 利用一个重要的同解方程组

**重要结论**

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解。

证明：① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则必有 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。

② 若 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=0\Rightarrow(\boldsymbol{Ax})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ax})=0\Rightarrow\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$。

**例题 1** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，则对于线性方程组(Ⅰ)$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和(Ⅱ)$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，正确的结论为(　　)。

A. (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，(Ⅰ)的解也是(Ⅱ)的解

B. (Ⅱ)的解是(Ⅰ)的解，但(Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解

C. (Ⅰ)的解不是(Ⅱ)的解，(Ⅱ)的解也不是(Ⅰ)的解

D. (Ⅰ)的解是(Ⅱ)的解，但(Ⅱ)的解不是(Ⅰ)的解

**解** 如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是(Ⅰ)的解，则 $\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，等式两边左乘 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{x}_0$ 是(Ⅱ)的解。如果 $\boldsymbol{y}_0$ 是(Ⅱ)的解，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay}_0=\boldsymbol{0}$，等式两边左乘得 $\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}$，得 $\boldsymbol{y}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ay}_0=0$，即 $(\boldsymbol{Ay}_0)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Ay}_0)=0$，或 $\|\boldsymbol{Ay}_0\|=0$，故 $\boldsymbol{Ay}_0=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{y}_0$ 是(Ⅰ)的解。

综上所述，线性方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)同解。故选 A。

### 【考法 2】 方程组同解，则系数阵行向量组等价

**重要结论**

① 齐次方程组同解的充要条件为系数阵行向量组等价。

② 非齐次方程组同解的充要条件为增广矩阵行向量组等价。

③ $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}$ 行向量组等价，$\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 行向量组等价。

如何理解①②？

求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解时，将系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换得到最简行阶梯矩阵 $\boldsymbol{A}_1$，此时得到同解 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的同解方程组 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$。由于 $\boldsymbol{A}_1$ 是由 $\boldsymbol{A}$ 初等行变换得到，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}_1$ 行向量组等价。由此可理解结论①。同理，可理解结论②。

如何理解③？

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 同解。所以系数阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}$ 行向量组等价。同理可理解 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 行向量组等价。

**例题 2** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵，如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解，则(　　)。

A. 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\-\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解

B. 方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解

C. 方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解

D. 方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 同解

**解**

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解，表示对应系数矩阵行等价。所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可经过行变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 也可经过行变换化为矩阵 $\boldsymbol{A}$。

A 选项正确：$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 经过行变化可化为 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$。所以 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 行等价。即方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解。

B 选项错误：令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，易知方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 不一定同解。

C 选项错误：取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，显然此时方程组 $\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 不同解。

D 选项错误：利用行变换可得 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$

利用行变换可得 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$。

但无法得出 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 行等价。所以 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 不一定同解。

**例题 3** 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $2n$ 维列向量，如果方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解，下列说法正确的有(　　)个。

① 方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\beta}$ 一定有解。

② 方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 同解。

③ 方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 同解。

④ 方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ 同解。

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

**解**

说法①错误：设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，

则 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 的秩为 3，增广矩阵 $\left[\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}\right]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的秩为 4，

此时方程组 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\beta}$ 无解。

说法②错误：利用行变换可得 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$，

利用行变换可得 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}$ 但是 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$ 不一定行等价，故不一定同解。

说法③正确：利用行变换可得 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$，

所以方程组 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解。

说法④正确：利用行变换可得 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}$，

$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix}$，故方程组 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解。

故选 B。

## 【考法 3】 方程公共解

**例题 4** 设四元齐次方程组(Ⅰ)为 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$，且已知另一四元齐次线性方程组(Ⅱ)的一个基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = [2, -1, a+2, 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = [-1, 2, 4, a+8]^{\mathrm{T}}$。

(1) 求方程组(Ⅰ)的一个基础解系。

(2) 当 $a$ 为何值时，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解。

**解** (1) 对方程组(Ⅰ)的系数矩阵作初等行变换，有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}。$$

系数矩阵的秩为 2，故基础解系由 $4-2=2$ 个线性无关解向量组成，选 $x_3, x_4$ 为自由未知量，分别取 $x_3=1, x_4=0$ 及 $x_3=0, x_4=1$，求得方程组的两个线性无关解。

$$\boldsymbol{\beta}_1 = [5, -3, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = [-3, 2, 0, 1]^{\mathrm{T}}。$$

由此可得方程组(Ⅰ)的基础解系为 $\boldsymbol{\beta}_1 = [5, -3, 1, 0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2 = [-3, 2, 0, 1]^{\mathrm{T}}$。

(2) 根据齐次线性方程组的解的结构，方程组(Ⅱ)的通解为

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ a+2 \\ 1 \end{bmatrix} + k_2\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ a+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2k_1 - k_2 \\ -k_1 + 2k_2 \\ (a+2)k_1 + 4k_2 \\ k_1 + (a+8)k_2 \end{bmatrix}。$$

方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)有非零公共解，即方程组(Ⅱ)的有些解也是(Ⅰ)的解，把(Ⅱ)的通解表达式代入方程组(Ⅰ)，整理后得 $\begin{cases} (a+1)k_1 = 0 \\ (a+1)k_1 - (a+1)k_2 = 0 \end{cases}$ (＊)。

要使方程组(Ⅰ)(Ⅱ)有非零公共解，只需要关于 $k_1, k_2$ 的方程组(＊)有非零解。

所以，当 $a \neq -1$ 时，由(＊)式知 $k_1 = k_2 = 0$，方程组(Ⅰ)与(Ⅱ)无非零公共解；当 $a = -1$ 时，无论 $k_1, k_2$ 为何值，(＊)式恒成立，(Ⅱ)的通解满足方程组(Ⅰ)，即方程组(Ⅱ)的全部解都是(Ⅰ)的解，

故 $a=-1$ 时，$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2=k_1\begin{bmatrix}2\\-1\\1\\1\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\2\\4\\7\end{bmatrix}$ 是方程组（Ⅰ）、（Ⅱ）的全部非零公共解（$k_1,k_2$ 为不全为零的任意常数）。

## 专题 17 化为方程组

### 【考法 1】 利用方程组反求系数矩阵

**重要结论**

若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2)=\boldsymbol{0}$，则有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm T}\\\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\text{ 的列向量为 }\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm T}\\\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 的解}$$

**例题 1** 要使 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,1,2]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[1,1,-1]^{\mathrm T}$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则系数矩阵为（　　）。

A. $\begin{bmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\end{bmatrix}$　　B. $\begin{bmatrix}2&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix}-1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}$　　D. $\begin{bmatrix}0&1&-1\\4&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}$

**解** 方法 1：排除法。$\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 对应的分量不成比例，所以 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个线性无关的解，故 $n-r(\boldsymbol{A})\geqslant 2$。由 $n=3$ 知 $r(\boldsymbol{A})\leqslant 1$。

再看 A 选项，矩阵的秩为 1；B 和 C 选项，矩阵的秩为 2；D 选项，矩阵的秩为 3。故本题选 A。

方法 2：严格求解。

因为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有解 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$，即 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{O}$，则

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm T}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm T}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^{\mathrm T}\text{ 的列向量为 }\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm T}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 的解。}$$

系数矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{\xi}_1^{\mathrm T}\\\boldsymbol{\xi}_2^{\mathrm T}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ 可取基础解系 $[1,-1,0]^{\mathrm T}$。

故 $\boldsymbol{A}^{\mathrm T}$ 的列向量均为 $[1,-1,0]^{\mathrm T}$ 的倍数，即 $\boldsymbol{A}$ 的行向量均为 $[1,-1,0]$ 的倍数，故选 A。

注意：本题若求满足条件的所有 $2\times3$ 矩阵（或 $3\times3$ 矩阵），可写成以下形式。

如果 $\boldsymbol{A}$ 为 $2\times3$ 的矩阵，则通式为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k_1&-k_1&0\\k_2&-k_2&0\end{bmatrix}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意实数。

如果 $\boldsymbol{A}$ 为 $3\times3$ 的矩阵，则通式为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k_1&-k_1&0\\k_2&-k_2&0\\k_3&-k_3&0\end{bmatrix}$，其中 $k_1,k_2,k_3$ 为任意实数。

**【考法2】 利用 $Ax=b$ 求解 $AX=B$**

**重要结论**

$$
\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}\begin{cases}\text{特殊：若 } \boldsymbol{A} \text{ 是可逆方阵，则 } \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}。\\ \text{普适：}\begin{cases}\boldsymbol{A}_{mn}[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m]=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m]\Rightarrow\begin{cases}\boldsymbol{Ax}_1=\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{Ax}_2=\boldsymbol{\beta}_2\\ \quad\vdots\\ \boldsymbol{Ax}_m=\boldsymbol{\beta}_m\end{cases}。\\ \text{增广矩阵}[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}]\text{批量求解 }\boldsymbol{Ax}_i=\boldsymbol{\beta}_i\text{，进而得 }\boldsymbol{X}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_m]\end{cases}\end{cases}
$$

**例题 2** 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1\\1&a&1\\1&1&a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-1\\a&-1\\a^2&-1\end{bmatrix}$，如果矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，但解不唯一。

(1) 求常数 $a$。

(2) 对于(1)中的常数 $a$，求矩阵方程的解。

**解** (1) 如果矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有解，但解不唯一，则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B})<3$。

$$
[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc:cc}a&1&1&1&-1\\1&a&1&a&-1\\1&1&a&a^2&-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&1&a&a^2&-1\\1&a&1&a&-1\\a&1&1&1&-1\end{array}\right]
$$

$$
\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&1&a&a^2&-1\\0&a-1&1-a&a-a^2&0\\0&1-a&1-a^2&1-a^3&a-1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&1&a&a^2&-1\\0&a-1&1-a&a(1-a)&0\\0&0&(a-1)(a+2)&(a-1)(a+1)^2&1-a\end{array}\right],
$$

于是 $a=1$。

(2) 当 $a=1$ 时，$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}]\to\left[\begin{array}{ccc:cc}1&1&1&1&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right]$，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ 的同解方程组为

$x_1+x_2+x_3=1$，即$\begin{cases}x_1=-x_2-x_3+1\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}$

或 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=k_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-k_1+k_2+1\\k_1\\k_2\end{bmatrix}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数。

非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\-1\end{bmatrix}$ 的同解方程组为

$$
\begin{cases}x_1=-x_2-x_3-1\\x_2=x_2\\x_3=x_3\end{cases}
$$

或 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=l_1\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+l_2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1-l_2-1\\l_1\\l_2\end{bmatrix}$，其中 $l_1,l_2$ 为任意常数。

故 $AX=B$ 的解为 $X=\begin{bmatrix}-k_1+k_2+1 & -l_1-l_2-1\\ k_1 & l_1\\ k_2 & l_2\end{bmatrix}$，其中 $k_1,k_2,l_1,l_2$ 为任意常数。

### 【考法 3】 待定系数求解矩阵

**例题 3** 设 $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}$，当 $a,b$ 为何值时，存在矩阵 $C$ 使得 $AC-CA=B$，并求矩阵 $C$。

**解** 设 $C=\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}$，由于 $AC-CA=B$，故

$$\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}，即\begin{bmatrix}x_1+ax_3 & x_2+ax_4\\ x_1 & x_2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1+x_2 & ax_1\\ x_3+x_4 & ax_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{bmatrix}。$$

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0\\ -ax_1+x_2+ax_4=1\\ x_1-x_3-x_4=1\\ x_2-ax_3=b\end{cases}\quad(1)$$

由于矩阵 $C$ 存在，故方程组(1)有解。对(1)的增广矩阵进行初等行变换，有：

$$\left[\begin{array}{cccc:c}0 & -1 & a & 0 & 0\\ -a & 1 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 1 & -a & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -a & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\end{array}\right]。$$

由方程组有解，故 $a+1=0,b=0$，即 $a=-1,b=0$，此时存在矩阵 $C$ 使得 $AC-CA=B$。

当 $a=-1,b=0$ 时，增广矩阵变为 $\left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$，$x_3,x_4$ 为自由变量，令 $x_3=1,x_4=0$，代入相应齐次方程组，得 $x_2=-1,x_1=1$。令 $x_3=0,x_4=1$，代入相应齐次方程组，得 $x_2=0,x_1=1$。

故 $\boldsymbol{\xi}_1=[1,-1,1,0]^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{\xi}_2=[1,0,0,1]^{\mathrm T}$，令 $x_3=0,x_4=0$，得特解 $\boldsymbol{\eta}=[1,0,0,0]^{\mathrm T}$，方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}=[k_1+k_2+1,-k_1,k_1,k_2]^{\mathrm T}$，所以 $C=\begin{bmatrix}k_1+k_2+1 & -k_1\\ k_1 & k_2\end{bmatrix}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数。

### 【考法 4】 利用 $AX=B$ 求解初等变换矩阵

**例题 4** 设 $a$ 是常数，且矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & a\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 7 & -a\end{bmatrix}$ 可经过初等列变换化为矩阵 $B=\begin{bmatrix}1 & a & 2\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$。

(1)求 $a$。(2)求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 $P$。

**解** (1) 由于矩阵的初等变换不改变矩阵的秩，故 $r(A)=r(B)$。

对矩阵 $A,B$ 作初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&3&-3a\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&a\\0&1&-a\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&0&2-a\end{bmatrix},$$

显然 $r(\boldsymbol{A})=2$，要使 $r(\boldsymbol{B})=2$，必有 $2-a=0\Rightarrow a=2$。

（2）将矩阵 $\boldsymbol{B}$ 按列分块为 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3]$，矩阵方程 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的解可化为解三个同系数的非齐次线性方程组：$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}_j$，$j=1,2,3$。对下列矩阵施以初等行变换得

$$[\boldsymbol{A}\vdots\boldsymbol{B}]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{array}\right]$$

易知，齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_0=[-6,2,1]^{\mathrm{T}}$，三个非齐次线性方程组的特解分别为 $\boldsymbol{\eta}_1=[3,-1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2=[4,-1,0]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3=[4,-1,0]^{\mathrm{T}}$。

因此，三个非齐次线性方程组的通解为

$$\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=k_2\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_3=k_3\begin{bmatrix}-6\\2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix},$$

从而可得可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3-6k_1&4-6k_2&4-6k_3\\-1+2k_1&-1+2k_2&-1+2k_3\\k_1&k_2&k_3\end{bmatrix}$，其中 $k_2\neq k_3$。

### 【考法5】 利用正交建立方程

**例题 5** 已经知4维列向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$ 为非零向量，且与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均正交，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=$________。

**解** 以 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}$ 为行向量作矩阵 $\boldsymbol{A}$。因 $\boldsymbol{\beta}_i$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交，故 $\boldsymbol{\beta}_i(i=1,2,3,4)$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量。由于 $r(\boldsymbol{A})=3$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系只含一个解向量，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 为非零向量，有 $1\leqslant r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)\leqslant n-r(\boldsymbol{A})=4-3=1$，则 $r(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4)=1$。

## 专题18 构造特解或通解

### 【考法1】 构造特解

**重要结论**

特解构造法。$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，则 $\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=0\text{ 时},\boldsymbol{\gamma}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\gamma}_i\text{ 为 }\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}\text{ 的解}\\\sum\limits_{i=1}^{n}k_i=1\text{ 时},\boldsymbol{\gamma}=\sum\limits_{i=1}^{n}k_i\boldsymbol{\gamma}_i\text{ 为 }\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}\text{ 的解}\end{cases}$。

**例题 1** 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是 4 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的 4 个解向量，且$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3=[2,0,2,4]^{\mathrm{T}}$，如果系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $r(\boldsymbol{A})=2$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为(　　)。

A. $k_1[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}+k_2[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}+[2,0,2,4]^{\mathrm{T}}$

B. $k_1[1,0,-1,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}+[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$

C. $k_1[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}+k_2[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}+[1,2,3,4]^{\mathrm{T}}$

D. $k_1[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}+k_2[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}+[2,3,4,5]^{\mathrm{T}}$

**解** 由 $r(\boldsymbol{A})=2$，得 $n-r(\boldsymbol{A})=4-2=2$，即 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系中含线性无关的向量的个数为 2。

因为 $\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)]=\boldsymbol{\beta}$，所以$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3)=[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解。

又 $\boldsymbol{A}[2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)]=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{A}[(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)]=\boldsymbol{0}$，

所以 $2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)-3(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=[1,0,-1,-2]^{\mathrm{T}}$ 与$(\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3)-(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的两个解，且线性无关，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为 $k_1[1,0,-1,-2]^{\mathrm{T}}+k_2[1,-2,-1,0]^{\mathrm{T}}+[1,1,1,1]^{\mathrm{T}}$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数，故选 B。

**例题 2** 设$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 都是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量，有以下向量：

① $2\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$； ② $2\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2+\boldsymbol{\beta}_3$； ③$\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2+\frac{1}{4}\boldsymbol{\beta}_3$；

④ $\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-2\boldsymbol{\beta}_3$； ⑤ $2\boldsymbol{\beta}_1-4\boldsymbol{\beta}_2+2\boldsymbol{\beta}_3$； ⑥ $\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2-\boldsymbol{\beta}_3$。

其中齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量的个数分别有(　　)。

A. 2 个，2 个　　B. 2 个，3 个

C. 3 个，2 个　　D. 3 个，3 个

**解** $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，对于$\boldsymbol{\beta}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{\beta}_i$，有：

(1) 系数和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量；

(2) 系数和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量。

6 个向量中，①③满足系数和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解向量有 2 个。

④⑤满足系数和 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量有 2 个。故选 A。

### 【考法 2】 构造通解

**重要结论**

$$\text{向量方程}\begin{cases}k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}\Rightarrow[k_1,k_2,\cdots,k_n]^{\mathrm{T}}\text{ 为方程}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\text{ 的解}\\k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}\Rightarrow[k_1,k_2,\cdots,k_n]^{\mathrm{T}}\text{ 为方程}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}\text{ 的解}\end{cases}。$$

**例题 3** 已知三阶方阵 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]$，若方程组 $Ax=\beta$ 的通解是 $[1,-2,0]^T+k[2,1,1]^T$，$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta-5\alpha_3]$，求方程组 $Bx=\beta+\alpha_3$ 的通解。

**解** 由题可知 $\alpha_1-2\alpha_2=\beta$，$2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\mathbf{0}$，$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$。

$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta-5\alpha_3]=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2-5\alpha_3]$，$\beta+\alpha_3=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$，

$Bx=\beta+\alpha_3\Leftrightarrow[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2-5\alpha_3]x=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$。

① 先求非齐次特解。$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2-5\alpha_3]\begin{bmatrix}1\\-2\\1\\0\end{bmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3$。

所以，$\eta=[1,-2,1,0]^T$ 是 $Bx=\beta+\alpha_3$ 的特解。

② 再求齐次通解。

$B=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2-5\alpha_3]\Rightarrow r(B)=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=2$，故齐次方程 $Bx=\mathbf{0}$ 的基础解系中有 $4-r(B)=2$ 个解。又因为 $[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2-5\alpha_3]\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$，$[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_1-2\alpha_2-5\alpha_3]\begin{bmatrix}1\\3\\6\\1\end{bmatrix}=\mathbf{0}$，可得 $Bx=\mathbf{0}$ 的基础解系为 $\xi_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\0\end{bmatrix}$，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\3\\6\\1\end{bmatrix}$。

综合①②可得，非齐次方程 $Bx=\beta+\alpha_3$ 的通解是 $\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2$，其中 $k_1,k_2$ 为任意常数。

## 专题 19 列满秩、行满秩

### 【考法 1】 行满秩矩阵，非齐次方程必有解

**重要结论**

行满秩矩阵，非齐次方程必有解。

证明：对行满秩矩阵 $A$ 有 $r(A)=r(A,\beta)=$ 行数，所以 $Ax=\beta$ 必有解。

**例题 1** 设 $A$ 为 $n\times m$ 矩阵，且 $m\neq n$。若 $AA^T=E_n$，则（　　）。

A. $Ax=\mathbf{0}$ 只有零解

B. $Ax=b$ 必有解

C. $A^Tx=b$ 必有解

D. 若 $m$ 维列向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关，则 $A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_s$ 必线性无关

**解** 由 $AA^T=E_n$ 可知，$n=r(AA^T)\leqslant r(A)\leqslant n$。

于是，$A$ 为行满秩矩阵，$A^T$ 为列满秩矩阵。由于 $A^T$ 的列向量组线性无关，故 $A^Tx=\mathbf{0}$ 只有零解。由于 $A$ 为行满秩矩阵，故 $r(A)=$ 行数。又因为 $r(A,b)=$ 行数，所以 $r(A)=r(A,b)=$ 行数。故选 B。

下面说明选项 A、C、D 不正确。

考虑 $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$，则 $Ax=\mathbf{0}$ 有非零解 $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$，而 $A^Tx=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 无解，选项 A、C 不正确。

取$\beta_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$,$\beta_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$,$\beta_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$,则$\beta_1,\beta_2,\beta_3$线性无关。但是$A\beta_3=\mathbf{0}$,故$A\beta_1,A\beta_2,A\beta_3$线性相关,选项D不正确。

### 【考法2】 列满秩矩阵有同解方程组

**重要结论**

若矩阵$\boldsymbol{A}$列满秩,则①$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$同解;②$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$。

证明:一方面,方程组$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的解一定是$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$的解。另一方面,若矩阵$\boldsymbol{A}$列满秩,则$\boldsymbol{Ay}=\mathbf{0}$只有零解,所以$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}\Rightarrow \boldsymbol{y}=\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$必成立,故

方程组$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$的解一定是$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的解。

所以矩阵$\boldsymbol{A}$列满秩时有$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$同解。

**例题2** 设$\boldsymbol{A}$为$m\times s$矩阵,$\boldsymbol{B}$为$s\times n$矩阵,且$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$,求证方程组$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的基础解系等价。

证明:设$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的基础解系为$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$。易知$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的解必为$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$的解。

又因为$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$的基础解系中向量的个数$n-r(\boldsymbol{A})=n-r(\boldsymbol{AB})=n-r$。

所以$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$也是$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$的一组基础解系。

所以方程组$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$的基础解系等价。

### 【考法3】 左乘列满秩矩阵,秩不变

**重要结论**

若矩阵$\boldsymbol{A}$列满秩,则$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$。

**例题3** 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n$,则下列结论不正确的是(　　)。

A. 若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$　　B. 对任意矩阵$\boldsymbol{B}$,有$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$

C. 存在$\boldsymbol{B}$,使得$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$　　D. 对任意矩阵$\boldsymbol{B}$,有$r(\boldsymbol{BA})=r(\boldsymbol{B})$

**解**

选项A正确。因为$r(\boldsymbol{A})=n$,所以议程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$只有零解,而由$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$得$\boldsymbol{B}$的列向量为方程组$\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$的解,故若$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$,则$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$。

选项B正确。令$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$,$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$为两个方程组。若$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$,则$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$;反之,若$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$,因为$r(\boldsymbol{A})=n$,所以方程组$\boldsymbol{Ay}=\mathbf{0}$只有零解,于是$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$,即方程组$\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$与$\boldsymbol{ABx}=\mathbf{0}$为同解方程组,故$r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{B})$。

选项C正确。因为$r(\boldsymbol{A})=n$,所以$\boldsymbol{A}$经过有限次初等行变换化为$\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,即存在$\boldsymbol{P}$使得$\boldsymbol{PA}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n\\\boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,令$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{E}_n\quad \boldsymbol{O}]\boldsymbol{P}$,则$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$。

也可以换一种方式理解:$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵,$r(\boldsymbol{A})=n$,所以$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$为行满秩矩阵。$r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}})=r(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=n$,方程组$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$必有解。故存在$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$使得$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}$成立。所以$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$。

选项 D 错误。令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=[1\quad 1]$，$r(\boldsymbol{A})=1$，但 $r(\boldsymbol{BA})=0\neq r(\boldsymbol{B})=1$，故选 D。

## 扩展阅读

### 方程组的几何意义

方程组的几何意义是什么？

**1. 先考察非齐次方程的解**

(1) 2 个变量的情况。

将方程组$\begin{cases}x_1+x_2=5\\x_1-x_2=1\end{cases}$变形为$\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}$形式，不难看出点$(x,y)$既满足直线方程 $x+y=5$，又满足直线方程 $x-y=1$。所以方程组$\begin{cases}x+y=5\\x-y=1\end{cases}$的解对应点$(x,y)$就是两条直线的交点。

平面上两条直线的关系为有唯一交点（相交）、无穷交点（共线）、没有交点（平行），分别对应二元一次方程组有唯一解、无穷解、无解。

(2) 3 个变量的情况。

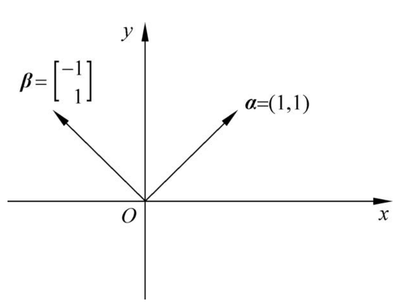
三个变量的方程代表什么？

将方程组$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=1\\x_1-x_2-2x_3=0\\2x_1+x_2-x_3=1\end{cases}$变形为$\begin{cases}x+2y+z=1\\x-y-2z=0\\2x+y-z=1\end{cases}$，不难看出方程的解对应点$(x,y,z)$，同时满足三个平面方程 $x+2y+z=1$，$x-y-2z=0$，$2x+y-z=1$。所以方程的解对应点是 3 个空间平面的交点。

空间上三个平面的关系为有唯一交点、无穷交点（有共同的交线）、没有交点（平行），分别对应方程组有唯一解、无穷解、无解。

**2. 再考察齐次方程的解**

从两个变量出发，$\begin{cases}x_1+x_2=0\\2x_1+2x_2=0\end{cases}$方程可化为$\begin{cases}x+y=0\\2x+2y=0\end{cases}$，方程组等价于 $x+y=0$，系数矩阵的行向量为$\boldsymbol{\alpha}=(1,1)$，而方程的基础解系可取$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，通解为$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=k\boldsymbol{\beta}$。如果将系数矩阵的行向量及方程的基础解系画在同一坐标系内，则两个向量相互垂直。



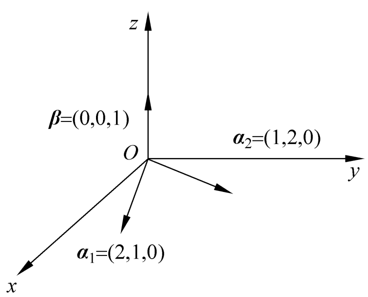

可以得出结论。方程组的解向量，一定与系数矩阵中所有行向量均垂直。

如果换成方程组$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_1-x_2=0\end{cases}$，其可化为$\begin{cases}x+y=0\\x-y=0\end{cases}$，行向量为$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1)$，方程组的解向量一定与$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1)$均垂直。但在平面内，无法找出一个向量与这两个向量均垂直，所以方程组无解。

下面再考虑三维的情况。

方程组$\begin{cases}2x_1+x_2=0\\x_1+2x_2=0\end{cases}$可化为$\begin{cases}2x+y=0\\x+2y=0\end{cases}$，一方面，运用方程组理论不难得出方程的通解为$k[0,0,1]^{\mathrm{T}}$；另一方面，通过解向量的垂直特性，也可得出基础解系。具体方法如下。

在空间直角坐标系中画出行向量$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$。解向量一定与这两个向量垂直。由于行向量均在$xOy$平面上，所以解向量一定平行于$\boldsymbol{\beta}=(0,0,1)$，将解向量写成列向量的形式为$\boldsymbol{\beta}=(0,0,1)^{\mathrm{T}}$。这与求解方程组得出的结果一致。




综上，得出一个非常重要的结论：方程组的解向量，一定与系数矩阵中所有行向量均垂直。换句话说，方程组的解向量，一定处于与系数矩阵中所有行向量均垂直的向量空间内。

### 3. 最后，方程组 $z=0$ 的解在哪里

方程组的行向量为$(0,0,1)$就是图中的$\boldsymbol{\beta}$，由此可见，方程组的解向量均在$xOy$平面上。

此外，你有没有发现，上面的前一个例子中$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$构建系数矩阵，$\boldsymbol{\beta}=(0,0,1)$是解向量。而在这个例子中却反过来，$\boldsymbol{\beta}=(0,0,1)$成了系数矩阵，$\boldsymbol{\alpha}_1=(2,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0)$变成了解向量。

这里发生了这样一个有趣的现象：同样的向量，既可是解向量，也可是系数矩阵的向量。那么，当一个向量放在你面前，它到底是系数矩阵的向量还是解向量？换言之，是庄周梦见了蝴蝶，还是蝴蝶梦见了庄周？