

第1章 ▷▷ 电磁波的发现

这一章

将围绕“电磁波是如何发现的”这一核心问题而展开：

第一，介绍历史上通过观察和实验获得的电磁知识，尤其是电磁三大定律；

第二，介绍矢量分析，尤其是不同坐标系下矢量的相互转化、三个重要的矢量算子，以及一系列重要矢量恒等式；

第三，通过介绍东、西方科学发展历史，比较东、西方学术传统，阐释电磁理论建立背后的源动力；

第四，通过分析电磁三大定律，提炼出更为本质的物理概念，再利用矢量分析工具，建立统领电磁规律的麦克斯韦方程；

第五，利用麦克斯韦方程，预言电磁波的存在及传播速度，进而预言光就是一种电磁波；

第六，通过利用计算机模拟电磁波传播过程，介绍计算电磁学中一种重要的数值方法——时域有限差分法；

第七，利用麦克斯韦方程阐释电磁场和电磁波的性质。

电磁波的发现固然起于电磁现象的观察，但根本之处是凭借想象力。想象力植根于社会文化之中，取决于多种因素，诸如知识之积累，学术之传统，价值之取向。本章主旨便是勾勒出电磁波发现的数理背景及学术传统，展示矢量分析的力量和电磁理论的“高瞻远瞩”，电磁波计算机仿真的具体与形象，揭示电磁波的性质。

1.1 物理背景

电磁知识是麦克斯韦(Maxwell, 1831—1879)构建电磁理论的基础。麦克斯韦之前，人类就已获得大量的电磁知识。这些知识大致可分为两类：一类主要是凭借对

自然界直接观察获得,主要发生在库仑定律发现以前;一类是凭借一定的哲学观念,通过有目的的实验获得,主要发生在库仑定律发现以后。

1.1.1 库仑定律发现以前

在库仑定律发现以前,人类获知的电磁现象并不是很多,主要有各类静电现象、静磁现象、闪电、指南针、磁偏角等。下面将分别列出这些电磁现象在中西方被发现的年代,以示中西方在这一时期对电磁认识的具体进程。

古代中国大概在公元前百年间发现了摩擦起电及静电吸引现象,然后便是各种可摩擦起电材料以及静电火花、爆裂声现象的不断发现和详尽记载,到宋代学者沈括(1031—1095)对闪电熔化金属,而不熔木料的观察,以及明代学者方以智(1611—1671)在其《物理小识(卷二):风雨雷咤类·野火塔光》中,据雷电击墙杆而出声的细致观察,推测天上闪电和静电火花为同类。这些大致便是电学知识在古代中国的发展。至于磁方面,古代中国认识得更早,有文字记载的是公元前3世纪《吕氏春秋·季秋纪·精通篇》:“慈石召铁,或引之也。”后有药物学家用磁石做各种药物实验,到唐代中晚期之前已有称为“司南”的磁性指向器发现,以及宋代学者沈括名著《梦溪笔谈》对指南针制作及磁偏角的阐述。

西方对电磁的认识更早,可追溯到古希腊米利都的泰勒斯(Thales of Miletus,公元前640—公元前546)已知道摩擦的琥珀会吸引轻小物体,磁石可吸铁。但此后对电磁的认识一直停留于此。直到12世纪,欧洲才用磁针指南,至少晚古代中国100余年。至于对磁偏角的认识,在西方是由哥伦布在1492年航海中发现的,晚古代中国400余年。

由此可见,在库仑定律发现以前,古代中国对电磁现象的认识并不弱于西方,尤其是对磁偏角的认识,充分表明古代中国学者具有高品质的观察能力。然而也可以看出,仅靠简单直接地对自然的观察,是很难获得更丰富、更深入的电磁知识的。

1.1.2 库仑定律发现以后

自牛顿(Newton,1642—1727)创立力学三大定律及万有引力定律之后,通过有目的的实验建立定量物理规律已成为西方研究世界的锐利武器。可惜这一锐利武器未被中国学者重视和运用,因而也就未能在电磁领域继续有所创获。下面要讲述的便是西方利用这一锐利武器在电磁领域先后发现的库仑定律、安培定律,以及法拉第定律。

1. 库仑定律

法国物理学家库仑(Coulomb,1736—1806)在1784—1785年设计了一个扭秤实

验。扭秤的结构示于图 1.1。在细金属丝下悬挂一根秤杆。它的一端有一小球 A, 另一端有平衡体 P, 在 A 旁还置有另一与它一样大小的固定小球 B。为了研究带电体之间的作用力, 先使 A、B 各带一定的电荷, 这时秤杆会因 A 端受力而偏转。转动悬丝上端的旋钮, 使小球回到原来位置。这时悬丝扭力矩等于施于小球 A 上电力的力矩。

库仑正是通过这一实验总结出库仑定律: 在真空中, 两个静止的点电荷 q_1 和 q_2 之间的相互作用力的大小与 q_1 和 q_2 的乘积成正比, 与它们之间的距离 r 的平方成反比; 作用力的方向沿着它们的连线, 同号电荷相斥, 异号电荷相吸。即

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} \quad (1.1.1)$$

其中: q_1 和 q_2 是两个静止点电荷的电量, 单位为库仑(C);

\mathbf{F}_{12} 是 q_1 对 q_2 的作用力; $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ 是从 q_1 指向 q_2 的单位距离矢量; ϵ_0 是真空介电常数, 由精确实验可测定为 $\epsilon_0 = 8.8541878178 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2)$, 其中 N 表示力的单位牛顿, m 表示长度的单位米。此定律与牛顿的万有引力定律的形式极其相似。

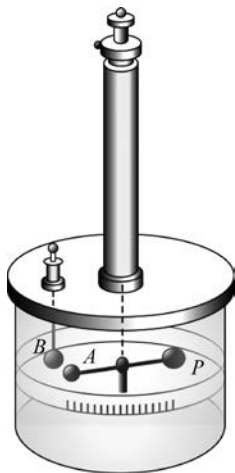


图 1.1 库仑扭秤

2. 安培定律

在康德哲学的影响下, 丹麦学者奥斯特(Oersted, 1777—1851)深信电与磁之间存在着联系, 并一直设法找到这种联系。1820年4月, 奥斯特在讲授电、伽伐尼电池、磁的课程时, 做了一个实验: 他在一条细铂丝两端加上伽伐尼电池, 铂丝放在一个带玻璃罩的指南针上, 结果发现, 在通电和断电的瞬间, 指南针上的磁针被扰动了。尽管效应很弱, 但奥斯特觉得很寻常。事后, 奥斯特使用更大的电池做了许多同样的实验, 终于证实“电流的磁效应是围绕着电流, 呈圆形的”, 并于1820年7月公布了“电冲击对磁针影响的实验”的四页纸论文, 宣布了这一发现。

奥斯的发现立刻引起了许多学者的重视和更深入的研究, 其中最为著名的便是毕奥(Biot, 1774—1862)、萨伐尔(Savart, 1791—1841)和安培(Ampère, 1775—1836)。毕奥和萨伐尔通过对奥斯特实验的分析、改进得出定量结论: 载流导线对磁极的作用力与其间垂直距离的平方成反比, 以及弯折载流导线对磁极作用力大小与折线夹角的关系。毕奥-萨伐尔的实验观测结论经法国数学家拉普拉斯(Laplace, 1749—1827)的数学提炼得出如下现代形式的毕奥-萨伐尔-拉普拉斯定律, 即电流元 $I d\mathbf{l}$ 在距离 r 处产生的磁感应强度(即磁通量密度)矢量 $d\mathbf{B}$ 为

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (1.1.2)$$

其中： μ_0 是磁导率，其值为 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ ； $d\mathbf{B}$ 的单位为特斯拉(T)。

安培在物理思想上走得更远：认为磁的本质是电流，一个磁体是由无数小电流环在有序排列下形成的。因此安培认为研究电流元之间的相互作用更为根本。通过四个杰出的示零实验，安培得出了类似于式(1.1.2)的公式，即在真空中，电流元 $I_1 d\mathbf{l}_1$ 对电流元 $I_2 d\mathbf{l}_2$ 的作用力可表示为

$$d\mathbf{F}_{12} = I_2 d\mathbf{l}_2 \times d\mathbf{B} \quad (1.1.3)$$

其中，

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\mathbf{l}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_{12}}{r_{12}^2} \quad (1.1.4)$$

并且证实下述安培环路定律：磁感应强度沿任何闭合环路 L 的线积分，等于穿过这个环路所有电流的代数和的 μ_0 倍，即

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \sum I \quad (1.1.5)$$

这里，电流 I 的正负规定如下：当穿过回路 L 的电流方向与回路 L 的环绕方向服从右手法则时， I 为正；反之，为负。

3. 法拉第定律

奥斯特发现电能产生磁，那么磁能否产生电呢？众多学者对此问题都进行了种种探索，但多年未有突破。英国物理学家法拉第(Faraday, 1791—1867)经过十余年的不断努力，在无数失败之后，终于在1831年夏，在如图1.2所示的实验中发现了寻找已久的电磁感应现象。

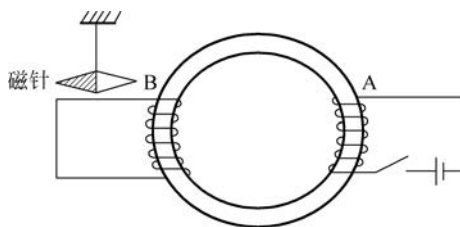


图 1.2 法拉第电磁感应实验

具体而言，在图1.2的实验中，法拉第发现：当把与电池、开关相连的线圈A的开关合上，使线圈A中的电流从零增大到某恒定值的瞬间，在闭合线圈B附近的磁针偏转、振动，并且最终停在原来的位置上；当把线圈A的开关断开，其中的电流从恒定值减小为零的瞬间，在闭合线圈B附近的磁针反向偏转、振动，并且最终停在原来的位置上。

法拉第领悟到：电磁感应现象是一种在变化和运动过程中出现的非恒定的暂态效应。他随后做了几十个产生感应电流的实验，并概括成五类：①变化着的电流；②变化着的磁场；③运动的恒定电流；④运动的磁铁；⑤在磁场中运动的导体。

法拉第同时代的德国物理学家诺依曼(Neumann, 1798—1895)在1845年发表的论文中，首次给出了法拉第电磁感应定律的定量表达式：

$$\epsilon_{\text{EMF}} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.1.6)$$

其中, $\epsilon_{\text{EMF}}^{\text{①}}$ 是感应电动势, 是一个表示产生电流能力大小的量, 其准确定义见注释^①。

1.2 数学背景

大量物理现象的发现为麦克斯韦构建电磁理论提供了充足的材料, 但仅此是不够的。麦克斯韦的想象要能切实地飞翔, 还需数学这个强有力的工具。麦克斯韦生活的时代, 数学知识已相当丰厚, 其中牛顿的微积分已为人所熟知。不过, 建立完备电磁理论最为有力的数学工具, 是从英国数学家哈密顿(Hamilton, 1805—1865)的四元数思想发展而来的, 具体来说, 是由美国耶鲁大学数学物理教授吉布斯(Gibbs, 1839—1903)和英国学者赫维赛德(Heaviside, 1850—1925)分别独立创立的矢量分析。下面便从矢量定义开始, 讲述矢量分析的基本内容。

1.2.1 矢量定义

物理世界中有很多量仅用大小来描述是不够的, 还必须标明其方向。为了准确表述这种既有大小, 又有方向的物理量, 数学上创造了矢量, 通常记成 \mathbf{A} 。在几何上, 用一个带有方向的线段表示。线段的长度代表矢量大小, 指向代表矢量方向。平行、长度相等、指向一致的有向线段代表着同一矢量。在三维空间中, 任何矢量都可表示为在三个互相垂直的单位基矢量上的投影。因此, 代数上要表示一个三维空间矢量一般需三个数。例如, 在直角坐标系下, 单位基矢量为 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$, 将一个任意矢量 \mathbf{A} 在 x, y, z 三轴上的投影记为 A_x, A_y, A_z 。这样矢量 \mathbf{A} 可记为

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \quad (1.2.1)$$

也可以简记为 (A_x, A_y, A_z) 。注意, 这样的记法也可以表示直角坐标系下的点的坐标, 所以要注意区分。应理解为, 在表示矢量时, (A_x, A_y, A_z) 表示从原点 O 出发, 指向点 $A(A_x, A_y, A_z)$ 的带方向的线段, 但是由于矢量的可平移性, 这个矢量 \mathbf{A} 可以出现在三维空间的任意一点。

^① ϵ_{EMF} 的下标 EMF 是 electromotive force 的缩写, 早期用来描述电池的电动势。在一块开路电池内, 由化学能转化而来的电场 \mathbf{E}_i 与正负电极上累积电荷产生的电场 \mathbf{E} 相互抵消, 而 \mathbf{E}_i 从负电极到正电极的路径积分定义为 $\epsilon_{\text{EMF}} = \int_2^1 \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l} = -\int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ 。因为 $\int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} + \int_2^1 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$, 所以, $\epsilon_{\text{EMF}} = \int_1^2 \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = V_{12} = V_1 - V_2$, 因而 ϵ_{EMF} 是一个电路能够产生电流的势能源, 也被看作电源的电压升。

1.2.2 矢量运算

要使矢量成为分析物理现象的有力工具,除了数学定义,还要给出能反映物理本质的矢量运算。设有两个矢量 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} ,在直角坐标系中记为

$$\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_z \quad (1.2.2a)$$

$$\mathbf{B} = \hat{x}B_x + \hat{y}B_y + \hat{z}B_z \quad (1.2.2b)$$

通过分析物理现象不难得出,将它们的加减法定义为下列形式是合适的:

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \hat{x}(A_x \pm B_x) + \hat{y}(A_y \pm B_y) + \hat{z}(A_z \pm B_z) \quad (1.2.3)$$

此可用图 1.3(a),(b)形象地表示。

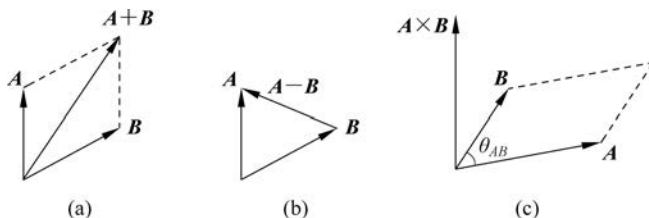


图 1.3 矢量加减法及叉乘示意图

从物理现象中还可抽象出两种非常有用的乘法。一种称为点乘,也称内积,定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1.2.4)$$

不难验证

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta_{AB} \quad (1.2.5)$$

其中, θ_{AB} 是 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 之间的夹角。可见,若非零矢量 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$,说明 $\mathbf{A} \perp \mathbf{B}$;反之亦成立。

点乘运算满足交换律和分配律:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1.2.6b)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \quad (1.2.6c)$$

另一种称为叉乘,定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{x}(A_y B_z - A_z B_y) + \hat{y}(A_z B_x - A_x B_z) + \hat{z}(A_x B_y - A_y B_x) \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

叉乘可用图 1.3(c)形象地表示。矢量 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的大小等于 $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta_{AB}$,即由 \mathbf{A} 和

\mathbf{B} 组成的平行四边形的面积；它的方向符合右手螺旋法则，即当右手的手指由 \mathbf{A} 转向 \mathbf{B} 时，大拇指所指方向就是 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ 的方向。若 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ，说明 $\mathbf{A} // \mathbf{B}$ ，反之亦成立。

叉乘运算满足分配律，但不满足交换律：

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (1.2.8a)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (1.2.8b)$$

矢量还有两种很有用的运算：穿过面 S 的面通量 $\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ 和环绕某一闭合曲线 l 的环量 $\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$ 。

1.2.3 坐标系

深入研究空间中的矢量特征，需要建立坐标系。而且，不同的坐标系会导致研究难易、结果繁简的不同。本节首先介绍一般曲线坐标系，然后分述常用的三类坐标系及其之间坐标及矢量的转换。

1. 一般曲线坐标系

考虑三维空间。如果在这个空间的任意点 P 可以用三个数字 (u_1, u_2, u_3) 唯一确定地描述，那么，这三个数字就称为点 P 的坐标。每个坐标确定这个三维空间的一个曲面，三个坐标则确定了这三个曲面的交点。由这个空间的原点 $(0, 0, 0)$ 指向点 P 的矢量，我们称为矢径 \mathbf{r} 。在每个坐标上的微小变化都会引起矢径 \mathbf{r} 的变化，那么这个坐标系的基矢量可以这样得到：

$$\mathbf{h}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}, \quad \mathbf{h}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}, \quad \mathbf{h}_3 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \quad (1.2.9)$$

进一步地，我们可以通过归一化得到单位基矢量：

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = \frac{\mathbf{h}_1}{h_1}, \quad \hat{\mathbf{u}}_2 = \frac{\mathbf{h}_2}{h_2}, \quad \hat{\mathbf{u}}_3 = \frac{\mathbf{h}_3}{h_3} \quad (1.2.10)$$

其中，用来归一化的系数，即基矢量的长度，称为拉梅系数 (Lamé coefficient)，也称为度量系数 (metric coefficient)^①：

$$h_1 = |\mathbf{h}_1|, \quad h_2 = |\mathbf{h}_2|, \quad h_3 = |\mathbf{h}_3| \quad (1.2.11)$$

^① 对于一般坐标系而言，在空间中两点之间的距离需要用度量张量 (metric tensor) 来表示： $ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 + \dots$ (参见 <http://mathworld.wolfram.com/MetricTensor.html>)。也就是说，各张量的分量为坐标微分单元前面的乘性系数。在正交坐标系中， $g_{ij} = \delta_i^j$ (见式 (1.2.14)) 此时无需用度量张量表述，只需要用拉梅系数 $h_i = \sqrt{g_{ii}}$ 表述。

可以看出,上述基矢量 \mathbf{h}_i (或 $\hat{\mathbf{u}}_i$) 切于 u_j ($j \neq i$) 的等值曲面 $u_j = C$, 这样定义得到的基矢量称为协变基矢量。我们同样可以定义垂直于 $\hat{\mathbf{u}}_i$ ($i = 1, 2, 3$) 的等值曲面 $u_i = C$ 的基矢量, 即逆变基矢量 $\hat{\mathbf{u}}^i$, 可由协变基矢量表达为

$$\frac{\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2}{g} = \hat{\mathbf{u}}^3, \quad \frac{\hat{\mathbf{u}}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_3}{g} = \hat{\mathbf{u}}^1, \quad \frac{\hat{\mathbf{u}}_3 \times \hat{\mathbf{u}}_1}{g} = \hat{\mathbf{u}}^2 \quad (1.2.12)$$

其中,

$$g = (\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2) \cdot \hat{\mathbf{u}}_3 \quad (1.2.13)$$

如图 1.4 所示, 由该定义, 我们可以知道

$$\hat{\mathbf{u}}_i \cdot \hat{\mathbf{u}}^j = \delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1.2.14)$$

其中, δ_i^j 称为克罗内克 (Kronecker) 符号。不难验证, 任意矢量 \mathbf{A} 可记为

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \hat{\mathbf{u}}_1 A_1 + \hat{\mathbf{u}}_2 A_2 + \hat{\mathbf{u}}_3 A_3 \\ &= \hat{\mathbf{u}}^1 A^1 + \hat{\mathbf{u}}^2 A^2 + \hat{\mathbf{u}}^3 A^3 \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

其中, A_i 和 A^i 分别称为矢量 \mathbf{A} 在协变基矢量 $\hat{\mathbf{u}}_i$ 和逆变基矢量 $\hat{\mathbf{u}}^i$ 上的分量 (component),

$$A_i = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}_i, \quad A^i = \mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{u}}^i \quad (1.2.16)$$

上述介绍了在空间中建立一般曲线坐标系的过程。从此过程可以看出, 其中的基矢量并不一定是互相垂直的。只有当由三个坐标确定的三个曲面相互正交时, 其确定的基矢量才是相互垂直的, 这种情况我们称之为正交坐标系。在一个右手正交坐标系中,

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3, \quad \hat{\mathbf{u}}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{u}}_1, \quad \hat{\mathbf{u}}_3 \times \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_2 \quad (1.2.17)$$

并且,

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_3 = \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = 0 \quad (1.2.18)$$

$$\hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 = \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 = \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}_3 = 1 \quad (1.2.19)$$

在一个正交坐标系下, 有向曲线的微分增量可表示为

$$d\mathbf{l} = \hat{\mathbf{u}}_1 h_1 du_1 + \hat{\mathbf{u}}_2 h_2 du_2 + \hat{\mathbf{u}}_3 h_3 du_3 \quad (1.2.20)$$

有向曲面的微分增量可以表示为

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{u}}_1 h_2 h_3 du_2 du_3 + \hat{\mathbf{u}}_2 h_1 h_3 du_1 du_3 + \hat{\mathbf{u}}_3 h_1 h_2 du_1 du_2 \quad (1.2.21)$$

体积的微分增量可表示为

$$dV = dl_1 dl_2 dl_3 = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3 \quad (1.2.22)$$

显而易见, 直角坐标系就是一种右手正交坐标系。下面我们再介绍两种较为常用的正交坐标系: 圆柱坐标系和球坐标系。

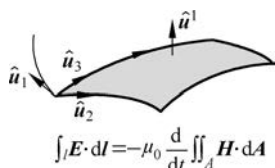


图 1.4 协变及逆变基矢量示意图

2. 圆柱坐标系

在圆柱坐标系(图 1.5)中,有

$$(u_1, u_2, u_3) = (\rho, \phi, z) \quad (1.2.23)$$

即一个点 $P(\rho_0, \phi_0, z_0)$ 是三个曲面 $\rho = \rho_0, \phi = \phi_0, z = z_0$ 的交点。由前述定义可知,在该点的单位基矢量 $\hat{\rho}_P$ 切于曲面 $\phi = \phi_0$ 和 $z = z_0$; 同理, $\hat{\phi}_P$ 切于曲面 $\rho = \rho_0$ 和 $z = z_0$;

\hat{z}_P 切于曲面 $\rho = \rho_0$ 和 $\phi = \phi_0$ 。通过简单的推导我们可以知道,在圆柱坐标系下,

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1 \quad (1.2.24)$$

所以圆柱坐标系下一个微分线元、面积元、体积元可以分别表示为

$$dl = \hat{\rho}d\rho + \hat{\phi}\rho d\phi + \hat{z}dz \quad (1.2.25a)$$

$$ds_\rho = \hat{\rho}d\phi dz, \quad ds_\phi = \hat{\phi}d\rho dz, \quad ds_z = \hat{z}\rho d\rho d\phi \quad (1.2.25b)$$

和

$$dV = \rho d\rho d\phi dz \quad (1.2.25c)$$

直角坐标系与圆柱坐标系有如下关系:

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi \quad (1.2.26)$$

以及

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad (1.2.27)$$

它们基矢量的转换关系可以通过例题 1.1 的几何方法或者 1.2.4.1 节中例题 1.3 中的代数方法得到。

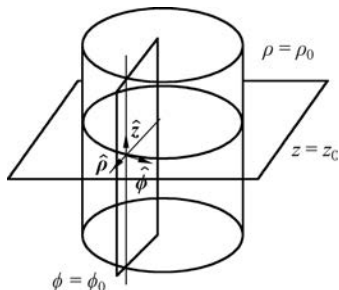


图 1.5 圆柱坐标系及其基矢量

例题 1.1 求圆柱坐标系到直角坐标系的坐标基矢量及相应各分量的转换关系(图 1.6)。

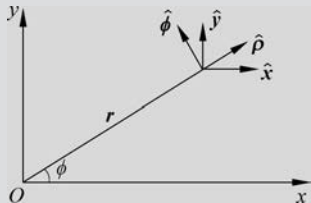


图 1.6 z 为常数的曲面上圆柱坐标系和直角坐标系的坐标基矢量

解 考虑矢量 \mathbf{A} 在直角坐标系下表示为 $\mathbf{A} = \hat{x}A_x + \hat{y}A_y + \hat{z}A_{z_Rect}$, 在圆柱坐标系下表示为 $\mathbf{A} = \hat{\rho}A_\rho + \hat{\phi}A_\phi + \hat{z}A_{z_Cyl}$ 。由于这两套坐标基矢量都是线性不相关的,所以很容易知道这两种表述的 z 分量是相同的,不妨都记作 A_z 。下面我们考虑与 z 为常数曲面相切的分量之间的关系。

由图 1.6 可知,

$$\begin{cases} \hat{\rho} = \hat{x}(\hat{\rho} \cdot \hat{x}) + \hat{y}(\hat{\rho} \cdot \hat{y}) = \hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi \\ \hat{\phi} = \hat{x}(\hat{\phi} \cdot \hat{x}) + \hat{y}(\hat{\phi} \cdot \hat{y}) = -\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi \end{cases} \quad (\text{e1.1.1})$$

故

$$\begin{aligned} \hat{\rho} A_{\rho} + \hat{\phi} A_{\phi} &= (\hat{x} \cos \phi + \hat{y} \sin \phi) A_{\rho} + (-\hat{x} \sin \phi + \hat{y} \cos \phi) A_{\phi} \\ &= \hat{x} (A_{\rho} \cos \phi - A_{\phi} \sin \phi) + \hat{y} (A_{\rho} \sin \phi + A_{\phi} \cos \phi) \\ &= \hat{x} A_x + \hat{y} A_y \end{aligned} \quad (\text{e1.1.2})$$

因此

$$A_x = A_{\rho} \cos \phi - A_{\phi} \sin \phi, A_y = A_{\rho} \sin \phi + A_{\phi} \cos \phi, A_{z_{\text{Cyl}}} = A_{z_{\text{Rect}}} \quad (\text{e1.1.3})$$

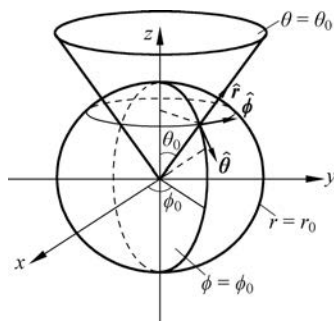


图 1.7 球坐标系及其基矢量

3. 球坐标系

在球坐标系中,有

$$(u_1, u_2, u_3) = (r, \theta, \phi) \quad (1.2.28)$$

即一个点 $P(r_0, \theta_0, \phi_0)$ 是三个曲面 $r = r_0, \theta = \theta_0, \phi = \phi_0$ 的交点。其基矢量 $\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}$ 如图 1.7 所示。

球坐标系的度量系数如下:

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta \quad (1.2.29)$$

所以球坐标系下,一个微分线元、面积元、体积元可以分别表示为

$$d\mathbf{l} = \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\phi} r \sin \theta d\phi \quad (1.2.30a)$$

$$d\mathbf{S}_r = \hat{r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi, \quad d\mathbf{S}_{\theta} = \hat{\theta} r \sin \theta dr d\phi, \quad d\mathbf{S}_{\phi} = \hat{\phi} r dr d\theta \quad (1.2.30b)$$

和

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (1.2.30c)$$

直角坐标与球坐标有如下关系:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (1.2.31)$$

以及

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos \frac{z}{r}, \quad \phi = \arctan \frac{y}{x} \quad (x \neq 0) \quad (1.2.32)$$

球坐标系与直角坐标系坐标基矢量的转换关系为