

连续控制系统的时域分析与设计

在建立控制系统的数学模型之后,就可以进行控制系统的分析和设计。常用的系统分析的方法有时域分析法、根轨迹法和频域法等。相较之下,时域分析法是研究系统响应随时间的变化规律,具有清晰、直观、准确的特点,并且含有系统时间响应的全部信息。本章利用时域分析的方法,根据连续控制系统的数学模型,对系统的暂态性能、稳态性能、稳定性等进行分析,评价系统的性能,并对系统进行时域设计。

3.1 连续系统暂态性能分析

3.1.1 典型输入信号

根据第 2 章的介绍,可以发现连续系统的输出响应与系统的输入信号有关。而实际中的输入信号是多样的,且许多输入信号会随时间发生变化或者是无法预测的。但是只有在相同的输入信号下,才能分析和评价一个系统的性能。所以,我们需要选择一些典型的输入信号,作为分析与设计系统的基础。

在分析和设计系统时,选取的典型输入信号一般应能够反映系统在实际场景中的性能。同时,它的数学表达式应尽量简单清晰且比较容易模拟或者实验验证,这样才能完成理论和实验的计算和分析。在控制系统中,典型输入信号有以下几种。

1. 脉冲信号

如图 3-1(a)所示,脉冲信号的数学表达式为

$$r(t) = R \cdot \delta(t) \quad (3-1)$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[R \cdot \delta(t)] = R \quad (3-2)$$

其中, R 为一个常数。当 $R=1$ 时,信号称为单位脉冲信号。函数 $\delta(t)$ 为狄拉克函数。该函数在除零以外的点取值都等于零,而其在整个定义域上的积分等于 1。所以,从理论上说,它在零点的取值为无穷大。

单位脉冲信号只有数学上的定义,在现实生活中并不存在。但是脉冲电压信号、瞬间的物理量(如瞬间冲击力)等,可以利用脉冲信号来近似表达。

2. 阶跃信号

如图 3-1(b)所示,阶跃信号的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ R \cdot 1(t), & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-3)$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[R \cdot 1(t)] = \frac{R}{s} \quad (3-4)$$

其中, R 为一个常数。当 $R=1$ 时, 信号称为单位阶跃信号, 记为 $\epsilon(t)$ 。

当系统的输入的增加或减少持续不变, 或者系统突然出现常值的干扰等情况时, 都可以利用阶跃信号来进行表达。

3. 斜坡信号(等速度信号)

如图 3-1(c)所示, 斜坡信号的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Rt, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[Rt] = \frac{R}{s^2} \quad (3-6)$$

其中, R 为一个常数。当 $R=1$ 时, 信号称为单位斜坡信号。

斜坡信号是一种随时间的变化率为常数的信号, 它等于阶跃信号对时间的积分。一些实际系统的输入信号类似于斜坡信号, 比如跟踪系统中跟踪直线飞行目标的输入信号或者数控机床系统中加工斜面的输入信号。

4. 抛物线信号(加速度信号)

如图 3-1(d)所示, 抛物线信号的数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}Rt^2, & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}Rt^2\right] = \frac{R}{s^3} \quad (3-8)$$

其中, R 为一个常数。当 $R=1$ 时, 信号称为单位抛物线信号。

抛物线信号等于斜坡信号对时间的积分。一般来说, 在分析和设计航天飞行器时, 系统的输入信号选取的是抛物线信号。

5. 正弦信号

如图 3-1(e)所示, 正弦信号的数学表达式为

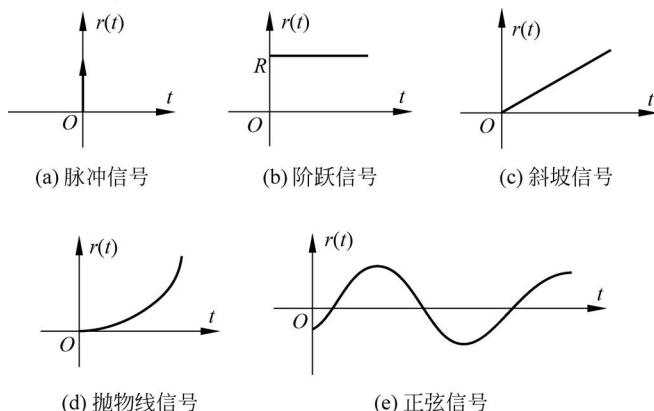


图 3-1 典型输入信号

$$r(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ A \sin(\omega t + \varphi), & t \geq 0 \end{cases} \quad (3-9)$$

其拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[A \sin(\omega t + \varphi)] = A \frac{\omega \cos \varphi + s \sin \varphi}{s^2 + \omega^2} \quad (3-10)$$

其中, A 为振幅, ω 为角频率, φ 为初始相角(弧度)。

如果一个系统的信号是正弦信号,则说明系统承受的输入作用是周期性变化的。例如,电源电压、机械振动的噪声等都可以利用正弦信号来表达。系统将不同频率的正弦函数输入的稳态响应称为频率响应。用它来分析和设计自动控制系统就是频域分析,详见第 5 章内容。

在进行系统分析和设计时,一般选取系统在正常工作条件下最常见的和最不利的输入信号形式。例如,当系统的实际输入信号是一个冲击输入量时,采用脉冲信号作典型输入信号更符合实际;当系统的输入为突然变化的信号时,采用阶跃信号作为典型输入信号更合适;当系统经常受到随时间逐渐缓慢变化的输入作用时,采用斜坡信号作为典型输入信号;当系统的输入呈周期性变化时,正弦信号适合作为典型输入信号。

由于上述的单位脉冲信号、单位阶跃信号、单位斜坡信号和单位抛物线信号彼此之间存在着导数和积分的关系。而对于线性定常系统来说,输入作用之间存在着导数(或积分)关系,输出响应之间也存在着相应的导数(或积分)关系。另外,对于同一个线性控制系统而言,尽管得到不同的输出响应,其动态过程表征的系统性能却是一致的。因此分析系统动态性能时,只要选取其中的一种能代表系统在大多数实际状况、易于实现又便于进行系统分析和设计的典型输入信号 $r(t)$,研究在其作用下的时间响应 $y(t)$ 即可。

3.1.2 暂态性能指标

由于不稳定系统的动态响应随时间的变化而增长,所以只有对稳定的连续控制系统的分析才有意义。连续控制系统的暂态性能指标通常是指在零初始条件下,当系统的给定输入为单位阶跃信号时,稳定的系统的时间响应(阶跃响应)的特点和性能。

连续控制系统的阶跃响应分为衰减振荡和单调上升两种情况,如图 3-2 所示。衡量系统性能的暂态性能指标主要有以下几种。

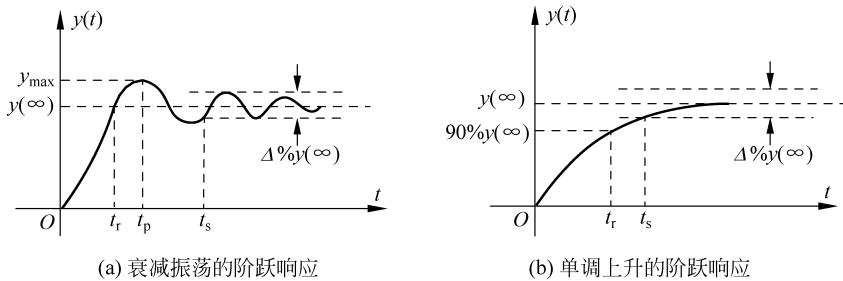


图 3-2 连续控制系统的阶跃响应

1. (最大)超调量 $\sigma\%$

系统的(最大)超调量为系统阶跃响应的最大值 $y_{\max}$ 超过终值(稳态值) $y(\infty)$ 的差值与终值 $y(\infty)$ 之比的百分数,即

$$\sigma\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% \quad (3-11)$$

(最大)超调量 $\sigma\%$ 反映了在调节过程中系统的输出量 $y(t)$ 与终值 $y(\infty)$ 的最大偏差,直接说明了系统的平稳性。只有在系统的阶跃响应是衰减振荡的情况下,系统才会有超调量 $\sigma\%$ 这个暂态性能指标。当系统的阶跃响应是单调上升时,系统永远无法得到阶跃响应的最大值,所以一般认为系统不存在超调量,或者说超调量为0。

一般来说,系统的调节和设计应该是超调量越小越好。但系统存在少许超调量,可以增加系统的快速性。所以在一些系统中会存在一些超调。比如,在电动机调速系统中,允许电动机的速度有少许的超调可使得电动机速度跟踪特性增强。

2. 超调时间 t_p

系统的超调时间为系统阶跃响应到达最大值 $y_{\max}$ 的时间,记为 t_p 。一般来说,系统的超调时间都为系统阶跃响应的第一个峰值时间,所以超调时间又称为峰值时间。

超调时间反映了系统的响应速度。超调时间越短,说明系统的响应速度越快。与超调量一样,只有在系统的阶跃响应是衰减振荡的情况下,系统才会有超调时间。

3. 上升时间 t_r

系统的上升时间为系统阶跃响应从初始值0开始,第一次达到终值 $y(\infty)$ 的时间,记为 t_r 。而对于一个阶跃响应为单调上升的系统来说,其上升时间为系统阶跃响应从初始值0开始,达到终值 $y(\infty)$ 的90%的时间,即

$$y(t_r) = 90\%y(\infty) \quad (3-12)$$

上升时间与超调时间一样都反映了系统的响应速度。上升时间越短,说明系统的响应速度越快。

4. 调节时间 t_s

系统的调节时间为系统阶跃响应达到并稳定在终值的 $y(\infty)$ 的 $\Delta\%$ 时间,记为 t_s 。即

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta\%y(\infty), \quad t \geq t_s \quad (3-13)$$

其中, Δ 为给定的误差带(允许误差范围),通常为2或5。当对系统的稳态要求不是很高时,可以取5;反之,取2。调节时间又称为过渡过程时间,它反映的是一个系统动态过程的持续时间,是从总体上反映一个系统的快速性。

由于上述的暂态性能指标之间相互有联系,所以一般常用(最大)超调量 $\sigma\%$ 和调节时间 t_s 来作为评价系统性能的主要暂态性能指标。除了上述4个指标,系统性能还可以用延迟时间 t_d 和衰减比 n 等来评价。延迟时间 t_d 为系统阶跃响应从初始值0开始,达到终值 $y(\infty)$ 的50%的时间;衰减比 n 为系统阶跃响应曲线上同方向的两个相邻波峰之比。

3.1.3 一阶系统的暂态性能分析

系统的暂态性能分析是基于对系统的微分方程、传递函数或状态方程求解,来计算和分析系统的暂态性能指标。下面对简单一阶系统进行暂态性能分析。

假设一阶系统的微分方程和闭环传递函数为

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kr(t) \quad (3-14)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1} \quad (3-15)$$

其中, T 为一阶系统的时间常数; K 为一阶系统的放大系数。

那么在零初始条件下, 一阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{K}{(Ts + 1)s} = K \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right) \quad (3-16)$$

根据拉普拉斯逆变换, 可得一阶系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3-17)$$

所以一阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-3 所示, 其终值 $y(\infty) = K$, 且曲线呈单调上升, 故只有上升时间 t_r 和调节时间 t_s 可以作为系统的暂态性能指标。

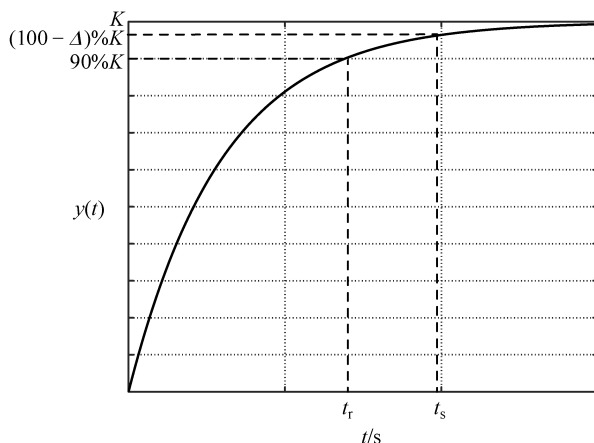


图 3-3 一阶系统的单位阶跃响应曲线

1. 上升时间 t_r

根据式(3-12), 可以得到一阶系统的上升时间为

$$K(1 - e^{-\frac{t_r}{T}}) = 90\%K \quad (3-18)$$

即

$$t_r = T \ln 10 = 2.3T \quad (3-19)$$

2. 调节时间 t_s

根据式(3-13), 可以得到一阶系统的调节时间为

$$|K(1 - e^{-\frac{t_s}{T}}) - K| = \Delta\%K \quad (3-20)$$

即

$$t_s = T \ln \frac{1}{\Delta\%} = \begin{cases} 3T, & \Delta = 5 \\ 4T, & \Delta = 2 \end{cases} \quad (3-21)$$

通过对上述两个一阶系统的暂态性能指标的计算, 可以发现两者的数值大小都与一阶系统的时间常数 T 有关。 T 越大, 系统的响应速度越慢; T 越小, 系统的响应速度越快。所以, 为了提高一阶系统整体的快速性以使得系统能快速跟踪系统的输入信号, 可以减小一

阶系统的时间常数 T 。

例 3-1 一阶系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{5}{0.1s+1}$ 。如图 3-4 所示,现采取负反馈的方式,使得系统的调节时间($\Delta=5$)减小到原来的 $1/5$,且原放大系数不变。试确定闭环系统中的参数 K_C 、 K_H 的取值。

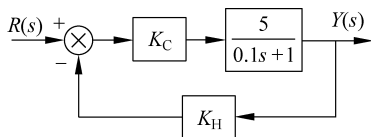


图 3-4 例 3-1 的一阶闭环系统

解: 由题得系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_C \frac{5}{0.1s+1}}{1 + K_C K_H \frac{5}{0.1s+1}} = \frac{\frac{5K_C}{5K_C K_H + 1}}{\frac{0.1}{5K_C K_H + 1}s + 1}$$

根据题意,可以得到原开环系统的时间常数 $T=0.1$,放大系数 $K=5$ 。所以,原系统的调节时间 $t_s=3T=0.3$ 。而闭环系统的 t_s^* 和放大系数 K^* 为

$$\begin{cases} t_s^* = 3 \times \frac{0.1}{5K_C K_H + 1} = 0.2t_s = 0.06 \\ K^* = \frac{5K_C}{5K_C K_H + 1} = K = 5 \end{cases}$$

解得闭环系统中的参数 $K_C=5$, $K_H=0.16$ 。

3.1.4 典型二阶系统的暂态性能分析

假设典型二阶系统的微分方程和闭环传递函数为

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = r(t) \quad (3-22)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-23)$$

其中, T 为典型二阶系统的时间常数; ζ 为典型二阶系统的阻尼比; ω_n 为典型二阶系统的无阻尼自然振荡频率,且 $\omega_n=1/T$ 。

根据典型二阶系统的闭环传递函数可以得到典型二阶系统的特征方程为

$$D(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3-24)$$

则典型二阶系统的特征根(闭环极点)为

$$p_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n \quad (3-25)$$

那么在零初始条件下,典型二阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} \quad (3-26)$$

根据式(3-25)和式(3-26),可以发现系统的单位阶跃响应主要与系统的特征根有关。而系统的特征根又主要取决于系统的阻尼比 ζ 。所以,根据阻尼比 ζ 的取值分情况讨论系

统的单位阶跃响应和系统的暂态性能指标。

1. 过阻尼状态($\zeta > 1$)

当阻尼比 $\zeta > 1$ 时,典型二阶系统有两个小于 0 且不相等的实数根,其 s 平面图如图 3-5 所示。

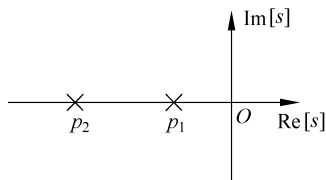


图 3-5 过阻尼状态下典型二阶系统的 s 平面图

假设

$$\begin{cases} p_1 = -\zeta\omega_n + \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n = -\frac{1}{T_1} \\ p_2 = -\zeta\omega_n - \sqrt{\zeta^2 - 1}\omega_n = -\frac{1}{T_2} \end{cases} \quad (3-27)$$

其中, T_1 和 T_2 为过阻尼条件下典型二阶系统的两个时间常数,且 $T_2 < T_1, 1/T_1 T_2 = \omega_n^2$ 。

那么过阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_1}} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{T_2}} \end{aligned} \quad (3-28)$$

根据拉普拉斯逆变换,可得过阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{1}{T_1}t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-\frac{1}{T_2}t}, \quad t \geq 0 \quad (3-29)$$

由此可以得出

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} (e^{-\frac{1}{T_1}t} - e^{-\frac{1}{T_2}t}) > 0, \quad t > 0 \\ y(\infty) = 1, \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0, \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (3-30)$$

所以,过阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-6 所示,可以看出,曲线在 $t=0$ 时刻与横轴相切。并且随着时间 t 的增加,曲线单调上升。当 t 趋于无穷大时,曲线的终值为 1。

过阻尼状态下典型二阶系统的暂态性能指标难以利用数值解法求解得到。通常的解法是利用主导极点法将系统简化为一阶系统,然后对简化后的一阶系统,计算其暂态性能指标。这个方法将在 3.1.5 节进行介绍。

2. 临界阻尼状态($\zeta = 1$)

当阻尼比 $\zeta = 1$ 时,典型二阶系统有两个相等的实数根 $p_{1,2} = -\omega_n$,其 s 平面图如图 3-7 所示。

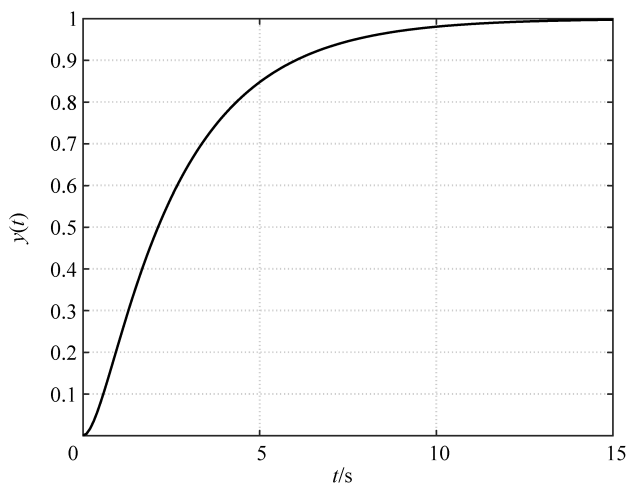
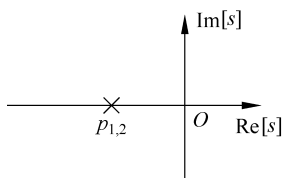


图 3-6 过阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线

图 3-7 临界阻尼状态下典型二阶系统的 s 平面图

那么临界阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{(s + \omega_n)^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n} \quad (3-31)$$

根据拉普拉斯逆变换,可得临界阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \omega_n t e^{-\omega_n t} + e^{-\omega_n t} = 1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t}, \quad t \geq 0 \quad (3-32)$$

由此可以得出

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} > 0, \quad t > 0 \\ y(\infty) &= 1, \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0, \frac{dy(t)}{dt} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 \end{aligned} \quad (3-33)$$

所以,临界阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-8 所示,可以看出,曲线在 $t=0$ 时刻与横轴相切。并且随着时间 t 的增加,曲线单调上升。当 t 趋于无穷大时,曲线的终值为 1。

与过阻尼状态下典型二阶系统一样,直接计算临界阻尼状态下的典型二阶系统的暂态性能指标比较困难,所以同样也是利用主导极点法计算其暂态性能指标。

3. 欠阻尼状态 ($0 < \zeta < 1$)

当阻尼比 $0 < \zeta < 1$ 时,典型二阶系统有两个具有负实部的共轭复数根

$$\begin{cases} p_1 = -\zeta\omega_n + j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \\ p_2 = -\zeta\omega_n - j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \end{cases} \quad (3-34)$$

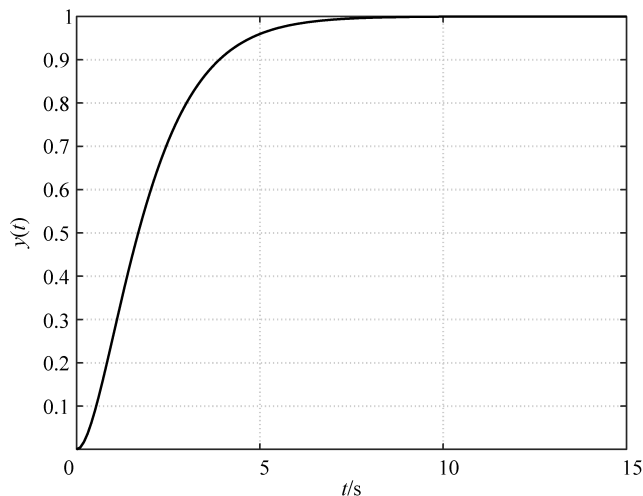
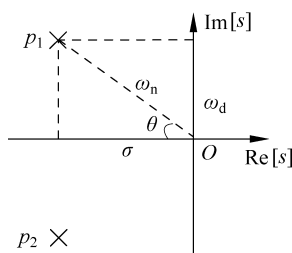


图 3-8 临界阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线

其 s 平面图如图 3-9 所示。


 图 3-9 欠阻尼状态下典型二阶系统的 s 平面图

那么欠阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (1 - \zeta^2)\omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{(s + \zeta\omega_n) + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n)^2} \\
 &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n)^2} - \frac{\frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + (\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n)^2} \quad (3-35)
 \end{aligned}$$

根据拉普拉斯逆变换,可得欠阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应为

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) - \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} [\sqrt{1 - \zeta^2} \cos(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t) + \zeta \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t)] \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\sqrt{1 - \zeta^2}\omega_n t + \arccos \zeta) \\
 &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \theta), \quad t \geq 0 \quad (3-36)
 \end{aligned}$$

其中, $\sigma = \zeta\omega_n$ 称为系统的阻尼系数, 它表明系统暂态分量的衰减速度; $\omega_d = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n$ 称为系统的阻尼振荡频率; 角度 $\theta = \arccos\zeta$ 。参数 ζ 、 ω_n 、 σ 、 ω_d 、 φ 与系统的特征根之间的关系如图 3-9 所示。

欠阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-10 所示, 可以看出, 随着时间 t 的增加, 曲线衰减振荡。当 t 趋于无穷大时, 曲线的终值为 1。同时, 曲线 $1 \pm (e^{-\zeta\omega_n t} / \sqrt{1-\zeta^2})$ 是系统单位阶跃响应曲线 $y(t)$ 的包络线。由图 3-10 可知, 响应曲线总是包含在一对包络线之内。

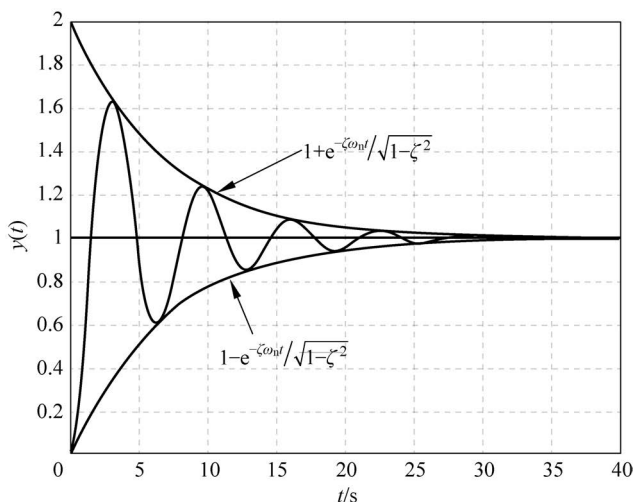


图 3-10 欠阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线

由于系统的单位阶跃响应曲线是衰减振荡的, 系统的暂态性能指标有超调时间、超调量、上升时间和调节时间 4 个。接下来逐一分析各个指标。

1) 超调时间 t_p

由于系统的单位阶跃响应的微分为

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{\sigma}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \theta) - \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \theta) \quad (3-37)$$

如图 3-10 所示, 可以发现系统单位阶跃响应取最大值的超调时间 t_p 是曲线第一次达到峰值的时间, 即令 $\frac{dy(t)}{dt} = 0$ 的大于 0 的时间 t 中最小的时间 t_p , 可得

$$\begin{aligned} \sigma \sin(\omega_d t + \theta) &= \omega_d \cos(\omega_d t + \theta) \\ \tan(\omega_d t + \theta) &= \frac{\omega_d}{\sigma} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n}{\zeta\omega_n} = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} = \tan\theta \\ \omega_d t &= 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \end{aligned} \quad (3-38)$$

2) 超调量 $\sigma\%$

由式(3-36)可知, 系统的单位阶跃响应的终值为 $y(\infty) = 1$, 而响应的最大值

$$\begin{aligned}
 y_{\max} = y(t_p) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t_p} \sin(\omega_d t_p + \theta) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma \frac{\pi}{\omega_d}} \sin\left(\omega_d \frac{\pi}{\omega_d} + \theta\right) \\
 &= 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \sin\theta
 \end{aligned} \quad (3-39)$$

又因为 $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \zeta^2}$, 所以

$$y_{\max} = 1 + e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (3-40)$$

根据式(3-11)的定义可得

$$\sigma\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \times 100\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% \quad (3-41)$$

3) 上升时间 t_r

由于在欠阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应是衰减振荡的, 所以上升时间为系统的单位阶跃响应从初始值 0 开始, 第一次达到终值 $y(\infty)$ 的时间, 那么

$$\begin{aligned}
 y(t) &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \theta) = 1 \\
 \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \theta) &= 0 \\
 \omega_d t + \theta &= 0, \pi, 2\pi, \dots \Rightarrow t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}
 \end{aligned} \quad (3-42)$$

4) 调节时间 t_s

根据式(3-13), 可以得到系统的调节时间为

$$|y(t) - y(\infty)| = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t} |\sin(\omega_d t + \theta)| \leq \Delta\%, \quad t \geq t_s \quad (3-43)$$

不难发现, 式(3-43)是一个超越方程, 利用数值解法求解困难。所以, 对于调节时间一般采用近似的手段来求解。显然, 为了确保系统的实际性能符合要求, 实际调节时间应该比根据近似手段得到的调节时间小, 那么

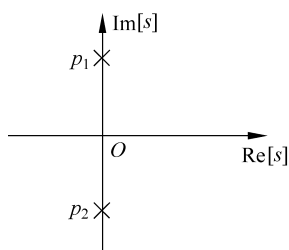
$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t_s} |\sin(\omega_d t_s + \theta)| &\leq \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\sigma t_s} = \Delta\% \\
 t_s &= -\frac{1}{\sigma} \ln(\sqrt{1-\zeta^2} \Delta\%)
 \end{aligned} \quad (3-44)$$

当 $0 < \zeta < 0.9$ 时, 调节时间可以近似为

$$t_s = \begin{cases} \frac{3.5}{\zeta\omega_n}, & \Delta = 5 \\ \frac{4.5}{\zeta\omega_n}, & \Delta = 2 \end{cases} \quad (3-45)$$

4. 无阻尼状态 ($\zeta = 0$)

当阻尼比 $\zeta = 0$ 时, 典型二阶系统有两个纯虚数根 $p_1 = j\omega_n, p_2 = -j\omega_n$, 其 s 平面图如图 3-11 所示。

图 3-11 无阻尼状态下典型二阶系统的 s 平面图

那么无阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega_n^2} \quad (3-46)$$

根据拉普拉斯逆变换,可得无阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = 1 - \cos(\omega_n t), \quad t \geq 0 \quad (3-47)$$

所以,无阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-12 所示,可以看出,随着时间 t 的增加,曲线等幅振荡。这时系统处于临界稳定。所以,不需要讨论系统的暂态性能指标。

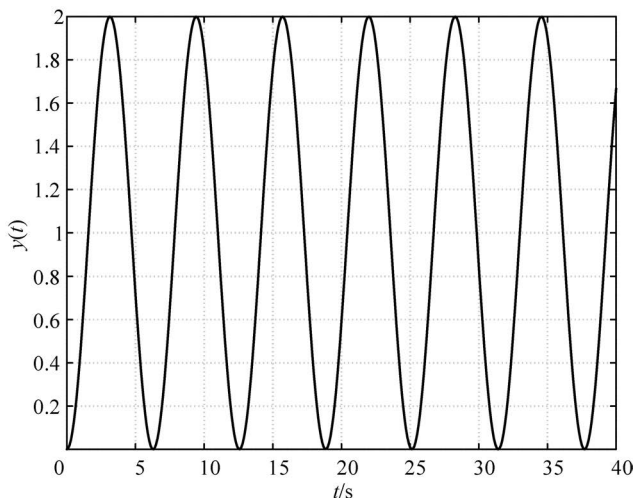


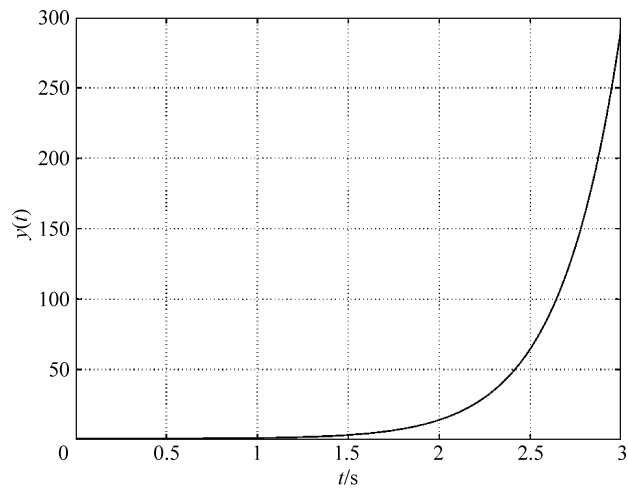
图 3-12 无阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线

5. 负阻尼状态($\zeta < 0$)

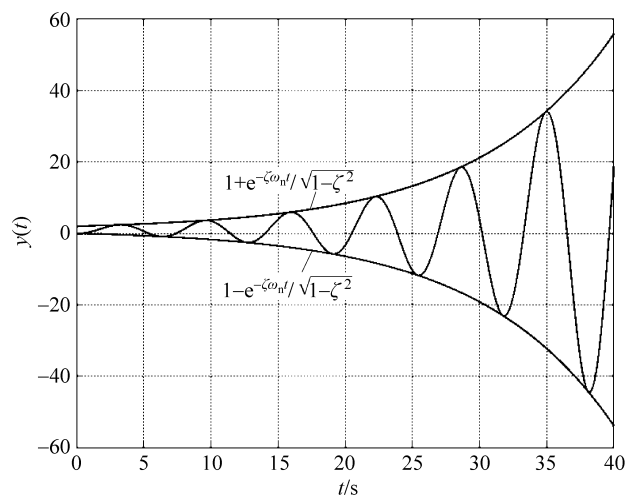
当阻尼比 $\zeta < 0$ 时,典型二阶系统的特征根具有正实部,即 $\text{Re}(p_{1,2}) > 0$ 。负阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线如图 3-13 所示,可以看出曲线是发散的(如图 3-13(a)所示)或振荡发散的(如图 3-13(b)所示),所以系统不稳定。这样的系统在实际场景中无法使用,故不讨论其响应和系统的暂态性能指标。

例 3-2 连续控制系统的结构如图 3-14 所示。若系统的暂态性能指标 $\sigma\% = 10\%$, $t_s = 2\text{s}(\Delta = 5)$,试确定系统中的参数 K 和 K_H 。

解: 由题得系统的闭环传递函数为



(a) $\zeta < -1$ 或 $\zeta = -1$



(b) $0 < \zeta < -1$

图 3-13 负阻尼状态下典型二阶系统的单位阶跃响应曲线

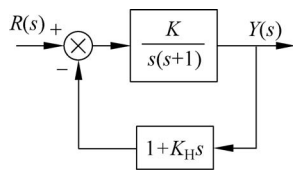


图 3-14 例 3-2 的系统方块图

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + (1 + K_H s) \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + (1 + KK_H)s + K}$$

可以得到系统的无阻尼自然振荡频率 $\omega_n = \sqrt{K}$ rad/s; 阻尼比 $\zeta = \frac{1 + KK_H}{2\omega_n} = \frac{1 + KK_H}{2\sqrt{K}}$ 。

根据题意, $\sigma\% = 10\%$, $t_s = 2s$, 那么

$$\begin{cases} e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\% = 10\% \\ \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 2 \end{cases}$$

解得 $\zeta \approx 0.591$; $\omega_n \approx 2.961 \text{ rad/s}$, 故

$$K = \omega_n^2 \approx 8.768, \quad K_H = \frac{2\omega_n\zeta - 1}{K} \approx 0.285$$

3.1.5 高阶系统暂态性能近似分析

1. 高阶系统的单位阶跃响应

假设高阶系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (3-48)$$

其中, $a_i (i=0, 1, 2, \cdots, n)$ 和 $b_j (j=0, 1, 2, \cdots, m)$ 是与高阶系统结构与参数有关的常数。

对式(3-48)分子、分母因式分解, 则

$$G(s) = \frac{k \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)} \quad (3-49)$$

其中, $z_i (i=1, 2, \cdots, m)$ 为高阶系统的零点; $p_j (j=1, 2, \cdots, n)$ 为高阶系统的闭环极点; k 为高阶系统的根轨迹放大系数。

假设高阶系统的闭环极点均为单极点, 那么高阶系统的单位阶跃响应的拉普拉斯变换为

$$Y(s) = G(s)R(s) = \frac{k \prod_{i=0}^m (s - z_i)}{\prod_{i=0}^n (s - p_i)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{A_0}{s} + \sum_{i=0}^n \frac{A_i}{s - p_i} \quad (3-50)$$

其中, A_0 为系统阶跃响应 $Y(s)$ 在极点 $s=0$ 处的留数, 即 $A_0 = \frac{b_0}{a_0}$; A_i 为系统阶跃响应 $Y(s)$ 在极点 $s=p_i$ 处的留数, 即

$$A_i = \lim_{s \rightarrow p_i} (s - p_i)Y(s) \quad (3-51)$$

根据拉普拉斯逆变换, 可得高阶系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = A_0 + \sum_{i=0}^n A_i e^{p_i t} \quad (3-52)$$

若是高阶系统的闭环极点中有若干实极点 $-\lambda_i$ 和若干对共轭复数极点 $-\sigma_i \pm j\omega_{di}$, 则系统的阶跃响应为

$$y(t) = A_0 + \sum_{p_i = -\lambda_i} A_i e^{-\lambda_i t} + \sum_{p_i = -\sigma_i \pm j\omega_{di}} A_i e^{-\sigma_i t} \cos(\omega_{di} t + \theta_i) \quad (3-53)$$

显然因为高阶系统的暂态性能指标与系统参数之间没有明确的关系,也没有规律,所以利用数值法求解式(3-53)的系统阶跃响应来获取系统的暂态性能指标是一件非常困难的事情。在实际工程中,常常采用忽略一些次要因素,即对高阶系统降阶,利用“主导极点”对应的典型二阶系统,近似地简化分析和估计性能指标。实践证明,这种简化是有实际价值的。

2. 主导极点

分析高阶系统的单位阶跃响应表达式,可以发现高阶系统的闭环极点 p_i 与零点 z_i 在 s 域上的分布具有多种形式。对于一个闭环稳定的控制系统来说,它的闭环极点均位于 s 域的左半部,但是每一个极点与虚轴的距离会有所不同。闭环极点离虚轴越远, λ_i 与 σ_i 越大, $y(t)$ 表达式中的暂态分量就会衰减得越快,当 $y(t)$ 达到最大值和稳态值时几乎已经衰减完毕,因此对超调量 $\sigma\%$ 和上升时间 t_r 影响不大;反之,那些离虚轴很近的闭环极点, λ_i 与 σ_i 越小,这些暂态分量的衰减速度缓慢,所以说超调量 $\sigma\%$ 和上升时间 t_r 主要取决于这些极点所对应的分量。因此,一般可将相对远离虚轴的极点所引起的分量忽略不计,而保留那些离虚轴较近的极点所引起的分量。通常与距离最靠近虚轴的极点实部比值超过 5 倍的闭环极点,就可忽略不计。

从 $y(t)$ 的表达式还可以看出,各暂态分量的具体值还取决于 A_i 的大小。有些分量虽然衰减慢,但是 A_i 很小,所以影响也较小。而有些分量衰减得比较快,但是 A_i 很大,所以影响仍然很大。一般来说,若某极点远离虚轴与其他零、极点,则该极点不仅衰减速度快,而且极点对应的 A_i 很小。所以可将 A_i 很小的分量忽略不计,而保留那些 A_i 很大的分量。

另外,若某极点邻近有一个零点,则该极点对应的 A_i 就小。因此,若某极点邻近有一个零点,也可忽略该极点引起的暂态分量。

综上所述,对于一个稳定的高阶系统,靠近虚轴又远离闭环零点的极点对应的暂态分量大而且衰减最慢,系统的暂态性能主要就是由这样的极点决定的,这样的极点通常称为系统的主导极点。图 3-15 所示是不同系统的 s 域零极点图,其中虚框中的极点可以作为主导极点。总的来说,高阶系统的闭环主导极点可以取一对,也可以取 3 个。这个要根据系统的实际情况来具体分析。

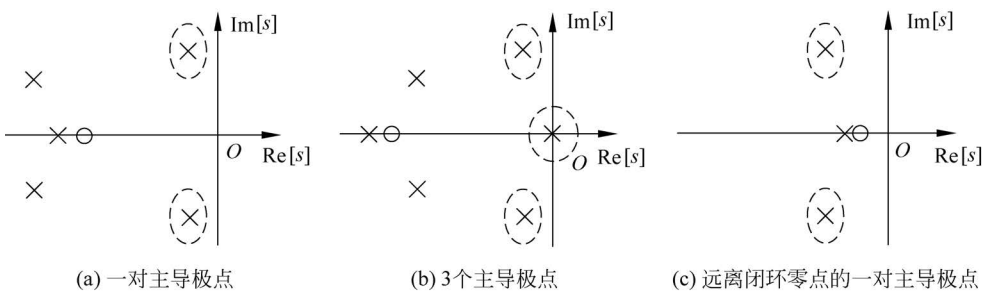


图 3-15 主导极点

另外选取闭环主导极点的个数和种类也与简化的目的有关。如果简化的目的是推导暂态性能指标解析表达式,那么可以保留一个或两个极点作为主导极点。如果系统是单调过程,则可以保留一个或两个实数极点作为主导极点。

3. 高阶系统的近似单位阶跃响应

根据假设的主导极点的数量和类型来逐一分析。若主导极点为 $p = -\lambda$, 则系统的近似

阶跃响应为

$$y(t) \approx A_0 + A_1 e^{-\lambda t}, \quad A_1 = \lim_{s \rightarrow -\lambda} (s + \lambda) Y(s) \quad (3-54)$$

若主导极点为 $p_1 = -\lambda_1, p_2 = -\lambda_2$, 则系统的近似阶跃响应为

$$y(t) \approx A_0 + A_1 e^{-\lambda_1 t} + A_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad A_1 = \lim_{s \rightarrow -\lambda_1} (s + \lambda_1) Y(s), \quad A_2 = \lim_{s \rightarrow -\lambda_2} (s + \lambda_2) Y(s) \quad (3-55)$$

若主导极点为一对共轭复数 $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_d$, 则系统的近似阶跃响应为

$$y(t) = A_0 + 2A_1 e^{-\sigma t} \cos(\omega_d t + \theta_d), \quad A_1 \text{ 为复数 } \lim_{s \rightarrow -\sigma + j\omega_d} (s + \sigma - j\omega_d) Y(s) \text{ 的模} \quad (3-56)$$

其中, 角度 θ_d 满足

$$\begin{aligned} \theta_d &= \angle \frac{k \prod_{i=1}^m (p_1 - z_i)}{p_1 \prod_{i=2}^n (p_1 - p_i)} = \sum_{i=1}^m \angle(p_1 - z_i) - \angle p_1 - \angle(p_1 - p_2) - \sum_{i=3}^n \angle(p_1 - p_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \angle(p_1 - z_i) - (\pi - \eta) - \frac{\pi}{2} - \sum_{i=3}^n \angle(p_1 - p_i) = -\frac{3\pi}{2} + \eta + \theta_f \end{aligned} \quad (3-57)$$

其中, η 为 $\angle p_1 = \arcsin \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2}}$ 的阻尼角, 即 $\angle p_1 + \eta = \pi$ 。 θ_f 是主导极点 p_1 和所有附加奇点(闭环主导极点以外的非主导极点和闭环零点)所构成向量的幅角之间的运算, 称为附加相角。

将式(3-57)代入式(3-56)可得

$$y(t) = A_0 - 2A_1 e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \eta + \theta_f) \quad (3-58)$$

所以, 对于近似为二阶系统的高阶系统来说, 其可以看作在典型二阶系统中增加了附加奇点。附加奇点不影响系统的固有特性, 即不改变其固有的衰减正弦振荡, 不改变衰减速率, 不改变振荡频率, 但会影响包络线位置和振荡的初相角。

例 3-3 对于三阶闭环系统 $G(s) = \frac{96(s+0.25)}{(s+6)(s^2+2s+4)}$, 求其单位阶跃响应。

解: 系统有 1 个闭环零点和 3 个闭环极点: $z_1 = -0.25; p_1 = -6, p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}j$ 。

所以系统的主导极点为共轭复数 $p_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}j$ 。

根据式(3-58), 系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = A_0 - 2A_1 e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t + \eta + \theta_f) = 1 - 9.885 e^{-t} \sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3} + \theta_f\right)$$

$$A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G(s) \cdot \frac{1}{s} = 1$$

$$\lim_{s \rightarrow -1+\sqrt{3}j} (s+1-\sqrt{3}j)G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{-6\sqrt{3}j-33}{7} \Rightarrow A_1 = \left| \frac{-6\sqrt{3}j-33}{7} \right| = 4.9425$$

由图 3-16 可知,

$$\alpha = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} \approx \arcsin 0.3273 \approx \frac{\pi}{9.42}$$

$$\beta = \pi - \arcsin \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{57}} \approx \pi - \arcsin 0.9177 \approx \pi - \frac{\pi}{2.70} = \frac{1.7\pi}{2.70}$$

$$\theta_f = \beta - \alpha = \frac{\pi}{1.91}$$

所以系统的单位阶跃响应为

$$y(t) = 1 - 9.885e^{-t} \sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{1.91}\right) = 1 - 9.885e^{-t} \sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{0.86}\right)$$

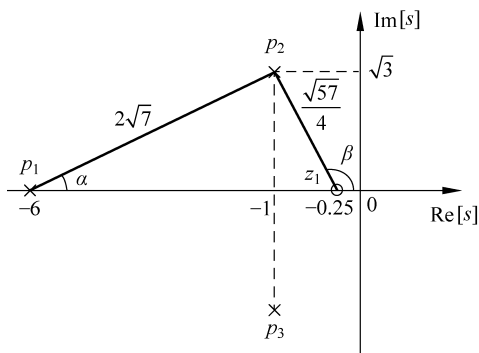


图 3-16 系统 θ_f 示意图

如果零点离主导极点较远,则无须考虑附加奇点,可以直接将高阶系统近似为二阶系统。

4. 高阶系统的暂态性能指标分析

针对上面得到的近似单位阶跃响应,就可以对系统进行暂态性能指标分析。对于系统的主导极点是一个实极点的情况,可以发现得到的近似单位阶跃响应和一阶系统类似。所以可以根据一阶系统的计算公式来分析高阶系统的暂态性能指标。

对于系统的主导极点是两个实极点或 3 个以上极点的情况,就不能利用一阶系统的近似计算公式了。在这种情况下,如果只是要求计算高阶系统的暂态性能指标,可以用后面介绍的 MATLAB 软件精确计算。

对于系统的主导极点是一对共轭复数极点的情况,可以发现得到的近似单位阶跃响应和欠阻尼状态下的典型二阶系统类似。所以可以根据欠阻尼状态下典型二阶系统的计算公式来分析高阶系统的暂态性能指标。

除此之外,在分析系统的暂态性能指标时,还需考虑一些零点对于系统的影响。比如说,若是有一对零极点的距离很近,那么这个很靠近极点的零点对于该极点有“抵消”的影响。这样的一对零极点称为偶极子。可以这样说,形成偶极子的闭环极点可以忽略不计。若在虚轴附近有零点,则该零点会使得系统的超调时间 t_p 减少,超调量 $\sigma\%$ 增大。并且随着该零点离虚轴的距离越靠近,其作用越显著。

3.2 连续系统稳态性能分析

3.2.1 控制系统误差与稳态误差的定义

假设闭环系统的系统方块图如图 3-17 所示。当系统的输入信号 $R(s)$ 与系统的反馈信号 $B(s)$ 之间存在差异时,系统的比较装置就会输出一个误差信号

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s) \quad (3-59)$$

在这个误差信号 $E(s)$ 的作用下,闭环系统开始工作,产生一个使得输出值趋于期望值的动作或者控制信号。通常这个误差信号 $E(s)$ 简称为闭环系统的误差(偏差)。

除了上述从系统的输入信号出发的定义方式,误差还可以利用系统的输出信号来定义:误差为系统输出的期望值与输出的实际值之间的差值。前者所定义的误差,可以利用一定的手段在实际系统中进行测量,具有实际的物理意义;而后者所定义的误差,在实际系统中又是无法测量的,只有数学意义。但是,可以利用如图 3-18 所示的等效转换,将后者定义的误差表示出来。其中, $R'(s)$ 代表输出量的期望值。因而 $E'(s)$ 是从输出端定义的非单位负反馈系统的误差。同时, $E(s)$ 和 $E'(s)$ 满足关系

$$E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)} \quad (3-60)$$

在此说明,本书中描述的误差 $E(s)$ 是由系统的输入信号定义的。对于一个单位负反馈控制系统来说, $R'(s)$ 代表输出量的期望值就是输入量 $R(s)$ 。在这种情况下,两种定义误差的方法是一致的。

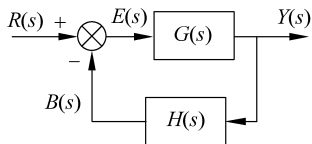


图 3-17 闭环系统的结构方块图

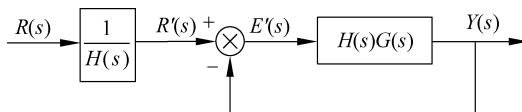


图 3-18 闭环系统的等效单位负反馈系统方块图

假设系统的误差传递函数为

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} \quad (3-61)$$

那么误差 $E(s)$ 的时域表达式为

$$e(t) = \mathcal{L}^{-1}[E(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G_e(s)R(s)] = e_{ts}(t) + e_{ss}(t) \quad (3-62)$$

一般地,误差信号 $e(t)$ 包含暂态分量 $e_{ts}(t)$ 和稳态分量 $e_{ss}(t)$ 两部分。由于控制系统的设计要求之一为系统必须能够稳定,所以当时间趋于无穷时,暂态分量 $e_{ts}(t)$ 必定会趋于 0。因此,控制系统的稳态误差是指误差信号 $e(t)$ 的稳态分量 $e_{ss}(\infty)$,简写为 e_{ss} 。控制系统的稳态误差 e_{ss} 是度量系统控制准确度(控制精度)的一种指标,通常也被称为稳态性能。

对于一个实际的控制系统,由于系统结构、输入信号的类型和形式等不同,所以控制系统的稳态输出量与输入量不一定能够实时保持一致,并且在某些复杂扰动信号的作用下难以恢复到原平衡位置。除此之外,控制系统存在的摩擦、间隙、不灵敏区、零位输出等非线性因素都会造成一定的稳态误差。因此,实际的控制系统是必然会存在稳态误差的。故控制系统设计的要求之一,是在保证系统稳定的前提下尽量减小系统的稳态误差,或者使稳态误

差小于某一容许值。

3.2.2 终值定理法

1. 拉普拉斯变换中的终值定理

设 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, 且 $sF(s)$ 在 s 右半平面及虚轴上没有极点, 则

$$f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (3-63)$$

通过这个终值定理, 就可以把在时间 t 趋于无穷大时的稳态误差 e_{ss} 转换到 s 域中来计算。故所谓的终值定理法就是通过拉普拉斯变换中的终值定理来求解稳定误差 e_{ss} 。

2. 终值定理法

设 $sE(s)$ 除了在原点外的 s 右半平面及虚轴上没有极点, 那么系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \quad (3-64)$$

根据式(3-64)就可以对满足条件的系统计算出其稳态误差。但是这个方法不能反映稳态分量 $e_{ss}(t)$ 随时间 t 的变化规律, 具有一定的局限性。

例 3-4 已知某负反馈系统的开环传递函数为 $H(s)G(s) = \frac{6}{s(s+5)}$, 其中 $H(s) = 2$ 。当系统的输入信号为斜坡信号 $r(t) = 3t$ 时, 求从输入端定义的稳态误差 e_{ss} 和从输出端定义的 e'_{ss} 。

解: 由题得系统的误差传递函数为

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} = \frac{s(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

由于输入信号为 $r(t) = 3t$, 那么

$$R(s) = \frac{3}{s^2}$$

则

$$sE(s) = sG_e(s)R(s) = \frac{3(s+5)}{(s+2)(s+3)}$$

因为 $sE(s)$ 有两个位于 s 左半平面的极点 $p_1 = -2, p_2 = -3$, 所以其满足终值定理法的条件, 即

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3(s+5)}{(s+2)(s+3)} = 2.5$$

根据式(3-60), 可以得到

$$sE'(s) = \frac{sE(s)}{H(s)} = \frac{3(s+5)}{2(s+2)(s+3)}$$

所以

$$e'_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE'(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{3(s+5)}{2(s+2)(s+3)} = 1.25$$

3.2.3 系统类型

当系统的结构方块图如图 3-17 所示时, 系统的稳态误差 e_{ss} 计算公式为

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s) \quad (3-65)$$

根据式(3-65),可以发现控制系统的稳态误差 e_{ss} 与系统的输入信号 $R(s)$ 和开环传递函数 $G(s)H(s)$ 有关。对于不同形式的给定典型输入信号 $R(s)$,系统是否会产生稳态误差,反映了系统对不同输入信号的跟踪能力,而这种跟踪能力只取决于系统结构、参数。下面将通过开环传递函数 $G(s)H(s)$ 来定义系统类型。

分子阶次为 m 、分母阶次为 n 的系统的开环传递函数通常可表示为

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} \quad (3-66)$$

其中, K 为系统的开环增益; T_i 和 T_j 为系统的时间常数; v 为系统开环传递函数中所含的积分个数,按照积分环节的数量 v 就可以对系统进行分类,以便反映系统对典型输入信号的跟踪能力。比如 $v=0$,称为 0 型系统; $v=1$,称为 I 型系统; $v=2$,称为 II 型系统。随着系统类型 v 增加,系统的控制精度提高,但是稳定性能变差。一般地,当 $v>2$ 时,除复合控制系统外,系统难以稳定。因此除航天控制系统外,III 型及 III 型以上的系统极少使用。

式(3-66)在 s 趋于 0 时,除 K 和 s^v 项以外,分子分母中的每一项都为 1,系统开环增益 K 直接与稳态误差相关。这种通过系统的开环传递函数中所含积分个数来分类的方法,可以根据已知的输入信号形式,快速判断系统是否存在稳态误差以及稳态误差的大小。将如式(3-66)所示的开环传递函数代入式(3-65),可得

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s) = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [s^{v+1} R(s)]}{\lim_{s \rightarrow 0} s^v + K} \quad (3-67)$$

可以发现,影响系统的稳态误差的因素有系统类型 v 、系统开环增益 K 和系统的输入信号 $R(s)$ 的类型和幅值。

3.2.4 误差系数法

误差系数法是一种在无扰动作用和输入信号是 3 种典型输入信号(阶跃信号、斜坡信号和抛物线信号)的情况下,对系统进行快速计算稳态误差的方法。

假设系统的 $sE(s)$ 满足终值定理法的条件,且无扰动作用。下面通过描述不同类型的系统在 3 种典型输入信号作用下的稳态误差,来进一步定义误差系数。

1. 阶跃信号输入

由于阶跃信号表达式的拉普拉斯变换如式(3-4)所示,所以系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{1 + H(s)G(s)} \\ &= \frac{R}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s)} = \frac{R}{1 + K_p} \end{aligned} \quad (3-68)$$

其中,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s) \quad (3-69)$$

称为系统的稳态位置误差系数。

对于 0 型系统,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = K, \quad v = 0 \\ e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} = \frac{R}{1 + K} \end{array} \right. \quad (3-70)$$

对于 $v \geq 1$ 的 I 型系统或 II 型系统,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_p = \lim_{s \rightarrow 0} H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = \infty, \quad v \geq 1 \\ e_{ss} = \frac{R}{1 + K_p} = 0 \end{array} \right. \quad (3-71)$$

2. 斜坡信号输入

由于斜坡信号表达式的拉普拉斯变换如式(3-6)所示,所以系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s + sH(s)G(s)} \\ &= \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s + \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s)} = \frac{R}{K_v} \end{aligned} \quad (3-72)$$

其中,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s) \quad (3-73)$$

称为系统的稳态速度误差系数。

对于 0 型系统,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} = 0, \quad v = 0 \\ e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \infty \end{array} \right. \quad (3-74)$$

对于 I 型系统,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{\prod_{i=1}^{n-1} (T_i s + 1)} = K, \quad v = 1 \\ e_{ss} = \frac{R}{K_v} = \frac{R}{K} \end{array} \right. \quad (3-75)$$

对于 $v \geq 2$ 的 II 型系统或高于 II 型的系统

$$\left\{ \begin{array}{l} K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = \infty, \quad v \geq 2 \\ e_{ss} = \frac{R}{K_v} = 0 \end{array} \right. \quad (3-76)$$

3. 抛物线信号输入

由于抛物信号表达式的拉普拉斯变换如式(3-8)所示,所以系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{R}{s^2 + s^2 H(s)G(s)} \\ &= \frac{R}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2 + \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s)} = \frac{R}{K_a} \end{aligned} \quad (3-77)$$

其中,

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) \quad (3-78)$$

称为系统的稳态加速度误差系数。

对于 0 型系统和 I 型系统,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks^2 \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = 0, \quad v \leq 1 \\ e_{ss} = \frac{R}{K_a} \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (3-79)$$

对于 II 型系统,

$$\left\{ \begin{array}{l} K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks^2 \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^2 \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = K, \quad v = 2 \\ e_{ss} = \frac{R}{K_a} = \frac{R}{K} \end{array} \right. \quad (3-80)$$

对于 $v \geq 3$ 的高于 II 型的系统

$$\left\{ \begin{array}{l} K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 H(s)G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks^2 \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^v \prod_{i=1}^{n-v} (T_i s + 1)} = \infty, \quad v > 2 \\ e_{ss} = \frac{R}{K_a} = 0 \end{array} \right. \quad (3-81)$$

表 3-1 总结了系统类型、稳态误差系数、输入信号和稳态误差之间的关系。在使用该表

时,需要注意:

- (1) 系统必须是稳定的;
- (2) 该系统的输入信号只能是阶跃信号、斜坡信号和抛物线信号或者其线性组合作用下的系统;
- (3) 表 3-1 中的 K 为系统的开环增益;
- (4) 表 3-1 中的稳态误差是按照输入端定义;
- (5) 系统是在无扰动作用下的。

表 3-1 典型输入信号作用下的系统稳态误差 e_{ss}

系统类型	稳态误差系数			系统稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	$r(t)=R(t)$	$r(t)=Rt$	$r(t)=Rt^2/2$
0 型	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
I 型	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
II 型	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$
III 型	∞	∞	∞	0	0	0

例 3-5 一个稳定的系统的开环传递函数为 $H(s)G(s)=\frac{10(s+2)}{s(s+1)}$, 当输入信号为 $r(t)=1+3t+t^2$ 时, 试用误差系数法求解系统的稳态误差。

解: 由题得系统的开环传递函数化为尾一形式为

$$H(s)G(s)=\frac{20(0.5s+1)}{s(s+1)}$$

故 $v=1$, 所以系统是一个 I 型系统, 且开环增益 $K=20$ 。系统的稳态误差系数分别为 $K_p=\infty, K_v=20, K_a=0$ 所以阶跃信号输入 $r_1(t)=1(t)$ 时的系统稳态误差为 $e_{ss1}=0$; 斜坡信号输入 $r_2(t)=3t$ 时的系统稳态误差为 $e_{ss2}=R/K=0.15$; 抛物线信号输入 $r_3(t)=t^2$ 时的系统稳态误差为 $e_{ss2}\rightarrow\infty$ 。

由叠加原理, 可得系统总的稳态误差为

$$e_{ss}=e_{ss1}+e_{ss2}+e_{ss3}\rightarrow\infty$$

表 3-1 提供了系统给定稳态误差终值时的计算关系, 但未提供稳态下误差随时间变化的信息, 也就是说, 稳态误差随时间的变化规律无法由计算误差终值获得。该问题需要用动态误差系数法解决。有兴趣的读者可查阅其他资料, 这里不再讨论。

3.2.5 扰动作用下的稳态误差分析

之前讨论的问题都是系统在给定输入作用下计算误差信号和稳态误差。但是, 在实际的控制系统中, 系统除了需要承受输入信号的作用外, 还会受到各种扰动作用。比如, 飞行器系统中的阻力和温控系统中的环境温度等。这些扰动将破坏系统输出和给定输入间的对应关系, 使得系统的输出值偏离期望值, 造成误差。

一般来说, 给定输入作用下产生的误差通常称为系统给定误差, 简称误差; 而扰动作用

下产生的误差通常称为系统扰动误差。所以控制系统希望尽可能减小系统扰动误差。因此系统扰动误差的大小反映了系统的抗干扰能力。

带有扰动的反馈控制系统的系统方块图如图 3-19 所示,那么可以得到

$$\begin{cases} E(s) = R(s) - Y(s)H(s) \\ Y(s) = [G_1(s)E(s) + N(s)]G_2(s) \end{cases} \quad (3-82)$$

所以,

$$E(s) = R(s) - G_1(s)G_2(s)H(s)E(s) - G_2(s)H(s)N(s) \quad (3-83)$$

故系统在参考输入和扰动输入作用下的误差信号的拉普拉斯变换为

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s) - \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) \quad (3-84)$$

定义

$$G_e(s) = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3-85)$$

为系统的给定误差传递函数。

$$G_{eN}(s) = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3-86)$$

为系统的扰动误差传递函数,那么式(3-84)可以表示为

$$E(s) = G_e(s)R(s) + G_{eN}(s)N(s) \quad (3-87)$$

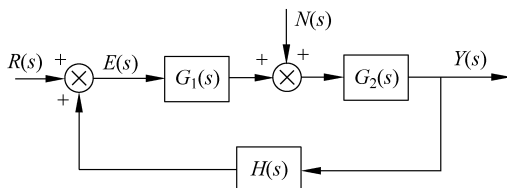


图 3-19 带有扰动的反馈控制系统的系统方块图

由此可以发现,系统的误差信号是由给定误差和扰动误差两部分构成的。可以通过分别计算两个误差来求得系统的总误差。计算系统在给定输入作用下的稳态误差可以利用之前介绍的终值定理法和误差系数法得到。由于不满足误差系数法的条件,计算系统在扰动作用下的稳态误差就只能采用终值定理法。

假设在如图 3-19 所示的系统中, $G_1(s)$ 、 $G_2(s)$ 、 $H(s)$ 为时间常数形式,即

$$G_1(s) = \frac{K_1 B_1(s)}{s^{v_1} A_1(s)}, \quad G_2(s) = \frac{K_2 B_2(s)}{s^{v_2} A_2(s)}, \quad H(s) = \frac{K_3 B_3(s)}{s^{v_3} A_3(s)} \quad (3-88)$$

其中, K_1 、 K_2 、 K_3 为传递系数; v_1 、 v_2 、 v_3 为积分环节数。

假设扰动输入为

$$n(t) = \frac{A}{l!} t^l \quad (3-89)$$

其拉普拉斯变换为

$$N(s) = \mathcal{L}[n(t)] = \frac{A}{s^{l+1}} \quad (3-90)$$

则根据式(3-84),扰动误差信号 $E_N(s)$ 为

$$\begin{aligned} E_N(s) &= -\frac{G_2(s)H(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}N(s) \\ &= -\frac{AK_2K_3s^{v_1}A_1(s)B_2(s)B_3(s)}{s^{l+1}[s^{v_1+v_2+v_3}A_1(s)A_2(s)A_3(s)+K_1K_2K_3B_1(s)B_2(s)B_3(s)]} \end{aligned} \quad (3-91)$$

假设系统中, $sE_N(s)$ 满足终值定理法的条件, 那么

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} sE_N(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{AK_2K_3s^{v_1}A_1(s)B_2(s)B_3(s)}{s^l[s^{v_1+v_2+v_3}A_1(s)A_2(s)A_3(s)+K_1K_2K_3B_1(s)B_2(s)B_3(s)]} \quad (3-92)$$

根据式(3-92), 可以得到如表 3-2 所示的结果。可以看出, 系统扰动作用下的稳态误差基本上只与扰动信号的类型、扰动作用点之前的传递函数 $G_1(s)$ 的积分环节数 v_1 、传递系数 K_1 有关。而给定输入下的稳态误差与给定输入信号类型、系统整个开环传递函数 $G_1(s)G_2(s)H(s)$ 的积分环节数和传递系数有关。所以在进行系统设计时, 通常在 $G_1(s)$ 中增加积分环节数 v_1 或增大传递系数 K_1 。这样既能够抑制给定输入引起的稳态误差, 又能够抑制扰动输入引起的稳态误差。

表 3-2 扰动作用下的系统稳态误差 e_{ssn}

扰动输入 $N(s)$	$G_1(s)、G_2(s)、H(s)$ 中所含积分环节数 $v_1、v_2、v_3$			系统稳态误差 e_{ssn}
$l=0$ 阶跃信号 $n(t)=A(t)$	$v_1=0$	$v_2=0$	$v_3=0$	$-\frac{AK_2K_3}{1+K_1K_2K_3}$
		$v_2 \neq 0$ 或 $v_3 \neq 0$		$-\frac{A}{K_1}$
	$v_1 \geq 1$			0
$l=1$ 斜坡信号 $n(t)=At$	$v_1=0$			∞
	$v_1=1$			$-\frac{A}{K_1}$
	$v_1 \geq 2$			0
$l=2$ 抛物线信号 $n(t)=At^2/2$	$v_1 \leq 1$			∞
	$v_1=2$			$-\frac{A}{K_1}$
	$v_1 \geq 3$			0

例 3-6 系统的方块图如图 3-20 所示。若系统的输入为 $r(t)=rt$, 扰动输入为 $n(t)=at^2$ 。求系统总的稳态误差。

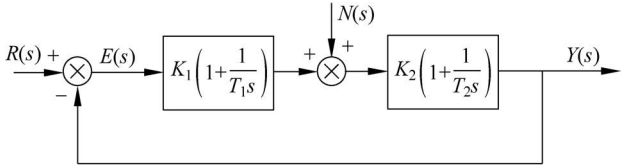


图 3-20 例 3-6 的系统方块图

解：由题得系统的开环传递函数为

$$G_1(s)G_2(s)H(s) = \frac{K_1 K_2 (1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{s^2 T_1 T_2}$$

对于给定输入来说,系统为一个Ⅱ型系统,故 $K_a = \frac{K_1 K_2}{T_1 T_2}$ 。当系统的输入为 $r(t) = rt$ 时,

$$e_{\text{ssr}} = 0$$

对于扰动作用来说, $v_1 = 1$ 。那么当系统的扰动输入为 $n(t) = at^2$ 时,

$$e_{\text{ssn}} \rightarrow \infty$$

那么系统在给定斜坡输入和抛物线干扰的共同作用下,总的稳态误差为

$$e_{\text{ss}} = e_{\text{ssr}} + e_{\text{ssn}} \rightarrow \infty$$

3.3 连续系统状态方程的求解与分析

3.3.1 定常齐次状态方程的解

假设 n 维线性定常系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), & t \geq t_0 \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3-93)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{u}$ 为 r 维输入向量; $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶常数系统矩阵; $\mathbf{B}$ 为 $n \times r$ 阶常数输入矩阵。

对控制系统的动态响应进行分析,其实就是对系统的状态响应 $\mathbf{x}(t)$ 进行研究,讨论系统状态随时间的变化规律。

当输入变量 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 时,式(3-93)为定常齐次状态方程

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \quad (3-94)$$

此时系统无输入控制作用,处于由初始状态引起的自由运动状态,因此定常齐次状态方程的解也称为自由响应。

如果假设系统的初始状态 $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$,设式(3-94)的解为向量幂级数

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t - t_0) + \mathbf{b}_2(t - t_0)^2 + \cdots + \mathbf{b}_k(t - t_0)^k + \cdots \quad (3-95)$$

将这个解代入式(3-94),可得

$$\begin{aligned} & \mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2(t - t_0) + 3\mathbf{b}_3(t - t_0)^2 + \cdots + k\mathbf{b}_k(t - t_0)^{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{b}_0 + \mathbf{b}_1(t - t_0) + \mathbf{b}_2(t - t_0)^2 + \cdots + \mathbf{b}_k(t - t_0)^k + \cdots] \end{aligned} \quad (3-96)$$

等式两边同幂次项的系数应相等,即

$$\begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{A}\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2\mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_3 = \frac{1}{3}\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = \frac{1}{3!}\mathbf{A}^3\mathbf{b}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_k = \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k\mathbf{b}_0 \end{cases} \quad (3-97)$$

将初始条件 $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$ 代入式(3-95), 有 $\mathbf{b}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, 所以式(3-94)的解为

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k + \cdots \right] \mathbf{x}(t_0) \quad (3-98)$$

依照标量指数函数 $e^{a(t-t_0)} = 1 + a(t-t_0) + \frac{1}{2!}a^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}a^k(t-t_0)^k + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}a^k(t-t_0)^k$ 的级数表现形式, 将式(3-98) 右端方括号的矩阵级数记为矩阵指数函数, 即

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}(t-t_0) + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k + \cdots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k(t-t_0)^k \end{aligned} \quad (3-99)$$

与矩阵 $\mathbf{A}$ 一样, $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 是一个 $n \times n$ 阶矩阵, 且规定 $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$ 。并且, 可以证明, 对于任意的矩阵 $\mathbf{A}$ 该矩阵级数绝对收敛。而对于 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, 有 $e^{\mathbf{A}t} = e^0 = \mathbf{I}$ 。

所以, 定常齐次状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) \quad (3-100)$$

式(3-100)表明, 线性定常系统自由运动的状态 $\mathbf{x}(t)$ 可以看作是由它的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 通过矩阵指数 $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 的转移作用而得到。

3.3.2 状态转移矩阵

1. 状态转移矩阵的定义

由 3.3.1 节的介绍可知, 如果假设初始时刻为 t_0 , $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 那么定常齐次状态方程的解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0, \quad t \geq t_0 \quad (3-101)$$

当 $t = t_0$ 时, 满足

$$e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = e^{\mathbf{A}0} = \mathbf{I} \quad (3-102)$$

如果把 $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 看作一个时变的变换矩阵, 那么它起到了状态转移的作用。即通过变换将 t_0 时刻的状态向量 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到 t 时刻的状态向量 $\mathbf{x}(t)$ 。因此, 矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}(t-t_0)}$ 也称为状态转移矩阵, 通常表示为

$$\Phi(t-t_0) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \quad (3-103)$$

根据以上定义, 在任意初始条件下, 系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ 的响应可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) \quad (3-104)$$

特别是当 $t_0 = 0$ 时, 有

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) \quad (3-105)$$

而

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k \quad (3-106)$$

所以说,状态转移矩阵包含了系统自由运动的全部信息。若获得了系统的状态转移矩阵,则可以完全掌握系统的自由运动情况。

求解高阶微分方程时,对初始条件的处理是相当困难的。通常都是假定初始条件 $t=0, \mathbf{x}(0)=0$,再计算系统的输出响应。从上述分析可以看出,利用状态转移矩阵的组合特性,可以由任意指定的初始时刻的状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 求得状态响应 $\mathbf{x}(t)$ 。也就是说,状态方程的求解,在时间上可以任意分段求取,这也是状态空间法的一个优点。

2. 状态转移矩阵的性质

为表达简便,后面的讨论中若不作说明,均为初始时刻 $t_0=0$,状态转移矩阵为 $\Phi(t)$ 的情况。从状态转移矩阵的定义式出发,可以得到以下重要性质,它们对于 $e^{\mathbf{A}t}$ 的计算和分析系统的运动特性都有重要的作用。

(1) 性质一:

$$\dot{\Phi}(t) = \mathbf{A} \cdot \Phi(t) = \Phi(t) \cdot \mathbf{A} \quad (3-107)$$

证明: 线性定常系统状态转移矩阵的定义为

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \cdots$$

对上式求导得

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \mathbf{A}^k t^{k-1} + \cdots \\ &= \mathbf{A} \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} + \cdots \right) = \mathbf{A} \cdot \Phi(t) \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &= \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \cdots + \frac{1}{(k-1)!} \mathbf{A}^k t^{k-1} + \cdots \\ &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \cdots + \frac{\mathbf{A}^{k-1}}{(k-1)!} t^{k-1} + \cdots \right) \mathbf{A} = \Phi(t) \cdot \mathbf{A} \end{aligned}$$

(2) 性质二:

$$\Phi(0) = \mathbf{I} \quad (3-108)$$

证明: 将 $t=0$ 代入

$$\Phi(t) = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \cdots$$

即可得证。结合性质一,还可以得出 $\dot{\Phi}(0) = \mathbf{A}$ 。

(3) 性质三:

$$\Phi(t_1 \pm t_2) = \Phi(t_1) \cdot \Phi(\pm t_2) = \Phi(\pm t_2) \cdot \Phi(t_1) \quad (3-109)$$

证明: 按照线性定常系统状态转移矩阵的定义可得

$$\begin{aligned} \Phi(t_1) \cdot \Phi(t_2) &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t_1 + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t_1^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t_1^k + \cdots \right) \cdot \\ &\quad \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t_2 + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 t_2^2 + \cdots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t_2^k + \cdots \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \mathbf{I} + \mathbf{A}(t_1 + t_2) + \mathbf{A}^2 \left(\frac{t_1^2}{2!} + t_1 t_2 + \frac{t_2^2}{2!} \right) + \\
 &\quad \mathbf{A}^3 \left(\frac{t_1^3}{3!} + \frac{1}{2!} t_1^2 t_2 + \frac{1}{2!} t_1 t_2^2 + \frac{t_2^3}{3!} \right) + \dots \\
 &= \mathbf{I} + \mathbf{A}(t_1 + t_2) + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 (t_1 + t_2)^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 (t_1 + t_2)^3 + \dots = \Phi(t_1 + t_2)
 \end{aligned}$$

同理可证该性质的其他表达式。这一性质表明了状态转移矩阵的分解性,并由此易推出

$$[\Phi(t)]^k = \Phi(kt)$$

(4) 性质四:

$$[\Phi(t)]^{-1} = \Phi(-t) \quad (3-110)$$

证明:由性质三和性质二,有

$$\Phi(t) \cdot \Phi(-t) = \Phi(t-t) = \Phi(0) = \mathbf{I}$$

即 $\Phi(t)$ 和 $\Phi(-t)$ 互为逆矩阵。该性质表明了线性定常系统的状态转移矩阵(或矩阵指数函数)的逆矩阵总是存在的,因此它必是非奇异矩阵,即使矩阵 $\mathbf{A}$ 是奇异矩阵。

(5) 性质五:

$$\Phi(t_2 - t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \cdot \Phi(t_1 - t_0) \quad (3-111)$$

证明:由式(3-104)有

$$\mathbf{x}(t_2) = \Phi(t_2 - t_1) \mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_2 - t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

$$\mathbf{x}(t_1) = \Phi(t_1 - t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

所以可得等式

$$\Phi(t_2 - t_0) \mathbf{x}(t_0) = \Phi(t_2 - t_1) \Phi(t_1 - t_0) \mathbf{x}(t_0)$$

性质五得证。该性质表明系统的状态转移具有传递性,即 $t_0 \sim t_2$ 的状态转移,可分段为 $t_0 \sim t_1$ 的转移和 $t_1 \sim t_2$ 的转移两部分。

(6) 性质六:当且仅当 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$,即矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 可交换时,有

$$\mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \mathrm{e}^{\mathbf{B}t} = \mathrm{e}^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} \quad (3-112)$$

证明:当矩阵 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的维数相同时,有

$$\begin{aligned}
 \mathrm{e}^{\mathbf{A}t} \mathrm{e}^{\mathbf{B}t} &= \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots + \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t^k + \dots \right) \cdot \left(\mathbf{I} + \mathbf{B}t + \frac{1}{2!} \mathbf{B}^2 t^2 + \dots + \frac{\mathbf{B}^k}{k!} t^k + \dots \right) \\
 &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})t + \left(\frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \frac{1}{2!} \mathbf{B}^2 \right) t^2 + \\
 &\quad \left(\frac{1}{3!} \mathbf{A}^3 + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 \mathbf{B} + \frac{1}{2!} \mathbf{AB}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{B}^3 \right) t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}
 \mathrm{e}^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})t + \frac{1}{2!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 t^2 + \frac{1}{3!} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^3 t^3 + \dots \\
 &= \mathbf{I} + (\mathbf{A} + \mathbf{B})t + \frac{1}{2!} (\mathbf{A}^2 + \mathbf{AB} + \mathbf{BA} + \mathbf{B}^2) t^2 + \\
 &\quad \frac{1}{3!} (\mathbf{A}^3 + \mathbf{ABA} + \mathbf{BA}^2 + \mathbf{A}^2 \mathbf{B} + \mathbf{AB}^2 + \mathbf{B}^2 \mathbf{A} + \mathbf{BAB} + \mathbf{B}^3) t^3 + \dots
 \end{aligned}$$

比较两式可以看出,当且仅当 $\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{B}\mathbf{A}$ 时,性质六得证。

(7) 性质七:

$$\mathcal{L}[\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \quad (3-113)$$

证明: 对状态转移矩阵取拉普拉斯变换, 可得

$$\mathcal{L}[\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} t^k\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \mathcal{L}[t^k] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \cdot \frac{k!}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}}$$

用在上式两边 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 左乘, 得

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathcal{L}[\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}] = (s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{s^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^{k+1}}{s^{k+1}} = \frac{\mathbf{A}^0}{s^0} = \mathbf{I}$$

显然, 性质七得证。该性质也表明, 无论系统矩阵 $\mathbf{A}$ 是否奇异, 多项式矩阵 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 必非奇异。

(8) 性质八: 非奇异变换将系统矩阵 $\mathbf{A}$ 变换为 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$, 状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 有同样的变换, 即

$$\bar{\Phi}(t) = \mathbf{T}^{-1}\Phi(t)\mathbf{T} \quad (3-114)$$

其中, $\bar{\Phi}(t)$ 为在新状态空间的状态转移矩阵, 即 $\bar{\Phi}(t) = \mathbf{e}^{\bar{\mathbf{A}}t}$ 。

证明: 由 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ 和 $\bar{\Phi}(t) = \mathbf{e}^{\bar{\mathbf{A}}t}$, 且 $(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^k = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{T}$, 可得

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}(t) &= \mathbf{e}^{\bar{\mathbf{A}}t} = \mathbf{e}^{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{T}) \\ &= \mathbf{T}^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{A}^k \right) \mathbf{T} = \mathbf{T}^{-1}\Phi(t)\mathbf{T} \end{aligned}$$

(9) 性质九: 对角矩阵 $\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$ 的状态转移矩阵也是对角矩阵, 即

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \dots, e^{\lambda_n t}] \quad (3-115)$$

证明: 对于对角矩阵 $\mathbf{A} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, 显然有

$$\mathbf{A}^k = \text{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k]$$

代入到式(3-106)中, 即得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \text{diag}[\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k] t^k \\ &= \text{diag}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_1^k t^k, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_2^k t^k, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_n^k t^k\right] \end{aligned}$$

对于标量无穷级数, 有

$$e^{\lambda_i t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda_i^k t^k$$

性质九得证。

(10) 性质十: 约当矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}_{n \times n}$ 的状态转移矩阵是右上三角阵, 即

$$e^{At} = e^{\lambda t} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3-116)$$

性质十也可与性质九类似地根据矩阵指数函数 e^{At} 的定义证明。

需注意,虽然对线性定常系统来说,矩阵指数函数 $e^{A(t-t_0)}$ 与状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 等价,但是两者在概念上有着本质差异。矩阵指数函数 $e^{A(t-t_0)}$ 只代表一个数学函数。而状态转移矩阵 $\Phi(t-t_0)$ 具有一般性,它不仅适用于线性连续定常系统,而且适用于离散系统、时变系统。所以用状态转移矩阵的概念可写出各种系统解的统一形式。

3. 状态转移矩阵的计算方法

对于线性定常系统来说,矩阵指数函数 e^{At} 与状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 等价,所以常见的计算情况有以下几种。

1) 按定义求解

根据式(3-106)直接计算矩阵指数函数 e^{At} ,虽然这个方法简单,但是一般难以得到的解析结果。所以它适用于利用计算机进行计算。

例 3-7 设系统矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$,按定义求解系统的矩阵指数函数 e^{At} 。

解: 将系统矩阵 A 代入式(3-106),得

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{1}{2!}(At)^2 + \frac{1}{3!}(At)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(At)^k + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}t + \frac{1}{2!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^2 t^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^3 t^3 + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}^4 t^4 \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}t + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}t^2 + \\ &\quad \frac{1}{3!} \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ -14 & -15 \end{bmatrix}t^3 + \frac{1}{4!} \begin{bmatrix} -14 & -15 \\ 30 & 31 \end{bmatrix}t^4 \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2!}2t^2 + \frac{1}{3!}6t^3 - \frac{1}{4!}14t^4 + \cdots & t - \frac{1}{2!}3t^2 + \frac{1}{3!}7t^3 - \frac{1}{4!}15t^4 + \cdots \\ -2t + \frac{1}{2!}6t^2 - \frac{1}{3!}14t^3 + \frac{1}{4!}30t^4 + \cdots & 1 - 3t + \frac{1}{2!}7t^2 - \frac{1}{3!}15t^3 + \frac{1}{4!}31t^4 + \cdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

通过级数求和可以得到闭合解

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

但是在一般情况下,很难求得闭合解。所以,这个方法更适合利用计算机进行数值计算。

2) 拉普拉斯变换法求解

由式(3-113)可知,系统的矩阵指数函数 e^{At} 可以通过系统的预解矩阵 $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ 的拉普拉斯逆变换得到。但是这种方法需要求解系统的预解矩阵 $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$,这是对是一个非常数矩阵求逆运算。所以,这个方法不适合计算较高阶次系统的矩阵指数函数。

例 3-8 设系统矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$,利用拉普拉斯变换法求解系统的矩阵指数函数 e^{At} 。

解: 由题意得

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ -4 & s-3 \end{bmatrix}$$

故系统的预解矩阵为

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s-4)(s+1)} \begin{bmatrix} s-3 & 1 \\ 4 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.2}{s-4} + \frac{0.8}{s+1} & \frac{0.2}{s-4} - \frac{0.2}{s+1} \\ \frac{0.8}{s-4} - \frac{0.8}{s+1} & \frac{0.8}{s-4} + \frac{0.2}{s+1} \end{bmatrix}$$

求拉普拉斯逆变换,得

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} 0.2e^{4t} + 0.8e^{-t} & 0.2e^{4t} - 0.2e^{-t} \\ 0.8e^{4t} - 0.8e^{-t} & 0.8e^{4t} + 0.2e^{-t} \end{bmatrix}$$

3) 利用特征值规范型求解

根据线性定常系统状态转移矩阵的性质九或性质十,特征值规范型的系统矩阵 $\mathbf{A}$ 对应了相应的矩阵指数函数 e^{At} 。所以,可以通过非奇异变换,先将系统矩阵 $\mathbf{A}$ 变换为标准的特征值规范型矩阵的形式。这样就可以在新状态空间中得到具有对角线型或者约当型的矩阵指数函数。然后,再根据线性定常系统转移矩阵的性质八,实施逆变换,就能得到原状态空间的状态转移矩阵。如图 3-21 表示了利用特征值规范型求解矩阵指数函数 e^{At} 的原理。

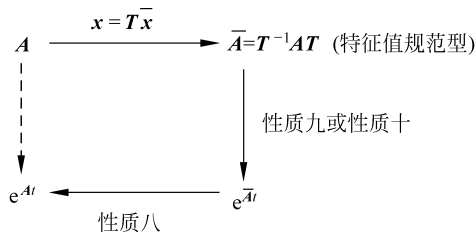


图 3-21 利用特征值规范型求解矩阵指数函数 e^{At}

例 3-9 设系统矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$,利用特征值规范型求系统的矩阵指数函数 e^{At} 。

解: 由题得系统的特征方程为

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -2 & \lambda+3 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

所以系统的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ 。

设非奇异矩阵 $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 \quad \mathbf{t}_2]$,其中 $\mathbf{t}_1$ 对应于特征值 λ_1 的特征向量, $\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix}$; $\mathbf{t}_2$ 对应

于特征值 λ_2 的特征向量 $\mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix}$ 。

由方程

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{t}_1 &= \lambda_1 \mathbf{t}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}\mathbf{t}_2 &= \lambda_2 \mathbf{t}_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

可得

$$\mathbf{t}_1 = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{bmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

所以

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

变换后的对角阵为

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

最终可以得到系统的矩阵指数函数为

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} \mathbf{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

这与例 3-7 的结果一致。

值得说明的是,例 3-9 中的 $\mathbf{A}$ 为友矩阵,可以直接将变换矩阵 $\mathbf{T}$ 写为范德蒙特矩阵形式,与上述变换矩阵一致。

另外,当系统矩阵 $\mathbf{A}$ 共有 l 个块,即

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{A}_l \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3-117)$$

其中, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \cdots, \mathbf{A}_l$ 为不同的对角块或约当块。可以得到系统的矩阵指数函数

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & e^{\mathbf{A}_2 t} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & e^{\mathbf{A}_l t} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (3-118)$$

例 3-10 设系统矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, 求系统的矩阵指数函数 $\mathbf{e}^{\mathbf{A}t}$ 。

解: 由题得矩阵 $\mathbf{A}$ 可以表示为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}$, 其中 $\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ 。

那么根据式(3-116)和式(3-118)可以直接得到

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

4) 利用凯莱-哈密顿定理求解

根据凯莱-哈密顿(Cayley-Hamilton)定理, 矩阵 $\mathbf{A}$ 满足其自身的特征方程, 即如果矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征多项式为 $\varphi(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0$, 则有

$$\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_1\mathbf{A} + a_0\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

于是, $\mathbf{A}^n$ 可表示为 $\mathbf{A}^{n-1}, \cdots, \mathbf{A}, \mathbf{I}$ 的线性组合, 即

$$\mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I}$$

同理, 对于 $\mathbf{A}^{n+1}$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{n+1} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^n = -a_{n-1}\mathbf{A}^n - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - a_1\mathbf{A}^2 - a_0\mathbf{A} \\ &= -a_{n-1}(-a_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-2} - \cdots - a_1\mathbf{A} - a_0\mathbf{I}) - a_{n-2}\mathbf{A}^{n-1} - \cdots - a_1\mathbf{A}^2 - a_0\mathbf{A} \\ &= (a_{n-1}^2 - a_{n-2})\mathbf{A}^{n-1} + (a_{n-1}a_{n-2} - a_{n-2})\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + (a_{n-1}a_1 - a_0)\mathbf{A} + a_{n-1}a_0\mathbf{I} \end{aligned}$$

即 $\mathbf{A}^{n+1}$ 也可表示为 $\mathbf{A}^{n-1}, \cdots, \mathbf{A}, \mathbf{I}$ 的线性组合。以此类推, $\mathbf{A}_k (k \geq n)$ 都可表示为 $\mathbf{A}^{n-1}, \cdots, \mathbf{A}, \mathbf{I}$ 的线性组合。于是有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}(\mathbf{A}t)^2 + \frac{1}{3!}(\mathbf{A}t)^3 + \cdots + \frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k + \cdots \\ &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\mathbf{A}^k \end{aligned} \quad (3-119)$$

其中, $\alpha_k(t), k=0, 1, 2, \cdots, n-1$ 为待定系数。

(1) 矩阵 $\mathbf{A}$ 有互异的 n 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n, \alpha_k(t)$ 由下式决定:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \quad (3-120)$$

这是由于当矩阵 $\mathbf{A}$ 有互异的 n 个特征根 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 由式(2-76), 有

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n]\mathbf{T}^{-1}$$

注意到 $\mathbf{A}^k = (\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1})^k = \mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^k\mathbf{T}^{-1}$ 的事实, 由式(3-119), 有

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^{\mathbf{A}t} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{A}^{n-1} \\ &= \alpha_0(t)\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1} + \alpha_1(t)\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{T}^{-1} + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\mathbf{T}\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\mathbf{T}^{-1} \end{aligned} \quad (3-121)$$

另一方面, 由线性定常系统状态转移矩阵性质八和性质九, 有

$$\mathbf{e}^{\mathbf{A}t} = \mathbf{T}\text{diag}[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]\mathbf{T}^{-1} \quad (3-122)$$

对照式(3-121)和式(3-122),可得

$$\begin{aligned} \text{diag}[e^{\lambda_1 t} \quad e^{\lambda_2 t} \quad \cdots \quad e^{\lambda_n t}] &= \alpha_0(t) \mathbf{I} + \alpha_1(t) \text{diag}[\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \cdots \quad \lambda_n] + \\ &\quad \alpha_2(t) \text{diag}[\lambda_1^2 \quad \lambda_2^2 \quad \cdots \quad \lambda_n^2] + \cdots + \\ &\quad \alpha_{n-1}(t) \text{diag}[\lambda_1^{n-1} \quad \lambda_2^{n-1} \quad \cdots \quad \lambda_n^{n-1}] \end{aligned}$$

即

$$\begin{cases} e^{\lambda_1 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_1 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1} \\ e^{\lambda_2 t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} = \alpha_0(t) + \alpha_1(t)\lambda_n + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1} \end{cases} \quad (3-123)$$

或写成列向量形式

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} \quad (3-124)$$

两边左乘方阵的逆阵,即得式(3-120)所示的求取待定系数的计算式。

(2) 当矩阵 $\mathbf{A}$ 有 n 重特征根 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = \lambda$, 但矩阵 $\mathbf{A}$ 只有一个独立的特征向量 $\mathbf{t}_1$ 时, $\alpha_k(t)$ 由下式决定:

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{(n-1)(n-2)\cdots 2}{(n-2)!}\lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\lambda^{n-3} \\ 0 & 1 & 2\lambda & \cdots & (n-1)\lambda^{n-2} \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \cdots & \lambda^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ \frac{1}{(n-2)!}t^{n-2}e^{\lambda t} \\ \vdots \\ \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix} \quad (3-125)$$

因为 $\bar{\mathbf{A}}$ 为约当阵, 所以式(3-125)可以利用状态转移矩阵的性质十(即式(3-116)), 类似式(3-120)的推导过程得到, 这里不再详细展开。

当矩阵 $\mathbf{A}$ 既具有重特征值又具有单特征值时, 可由上面两种情况的组合求得 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

例 3-11 应用凯莱-哈密顿定理求解例 3-7 的 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

解: 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, 求得 $\mathbf{A}$ 的两个特征值为 $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$ 。由式(3-120), 有

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

再根据式(3-119), 可求得

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \alpha_0(t)\mathbf{I} + \alpha_1(t)\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

这与例 3-7 的结果一致。

3.3.3 定常系统的状态响应及输出响应

前面是对定常系统的齐次方程的探讨,得到了初始状态引起的自由响应。现在讨论更一般化的定常系统的非齐次状态方程的求解问题。

1. 定常系统的非齐次状态方程及输出方程的求解

假设定常系统的非齐次状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3-126)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{u}$ 为 r 维输入向量; $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶常数系统矩阵; $\mathbf{B}$ 为 $n \times r$ 阶常数输入矩阵。

将式(3-126)改写为等式右边只关于外部输入 $\mathbf{u}(t)$ 的式子,然后在等式两边同乘 e^{-At} , 可得

$$e^{-At} [\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{A}\mathbf{x}(t)] = e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3-127)$$

即

$$\frac{d}{dt} [e^{-At} \mathbf{x}(t)] = e^{-At} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3-128)$$

对式(3-128)在区间 $[t_0, t]$ 上求积分,可得

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt} [e^{-A\tau} \mathbf{x}(\tau)] d\tau = \int_{t_0}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-129)$$

即

$$e^{-At} \mathbf{x}(t) = e^{-At_0} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-130)$$

对等式两边同乘 e^{At} , 可得

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)} \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-131)$$

利用状态转移矩阵的形式表示,则

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t - t_0) \mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau) \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (3-132)$$

观察式(3-132),可以发现等式右边的第一项是由初始状态引起的自由运动,又称零输入响应;第二项是在零初始状态下由外部输入 $\mathbf{u}(t)$ 引起的强迫运动,又称为零状态响应。这说明系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。正是由于受控项的存在,使得系统的动态特性变得可控。即通过改变外部输入 $\mathbf{u}(t)$ 使系统状态 $\mathbf{x}(t)$ 的运动轨迹满足要求。

设定常系统的输出方程为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (3-133)$$

其中, $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{u}$ 为 r 维输入向量; $\mathbf{y}$ 为 m 维输出向量; $\mathbf{C}$ 为 $m \times n$ 阶常数输出矩阵; $\mathbf{D}$ 为 $m \times r$ 阶常数直接传递矩阵。

将式(3-132)代入到这个系统的输出方程(3-133)中,即可得到系统的输出响应为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t-t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t [\mathbf{C}\Phi(t-\tau)\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t-\tau)]\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (3-134)$$

例 3-12 若线性定常系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

求系统在初始条件为 $\mathbf{x}(0) = [x_1(0) \ x_2(0)]^T$ 下的单位阶跃信号作用下的状态响应。

解: 由例 3-9 的结果可知,系统的状态转移矩阵为

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

由式(3-132)可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \\ &\quad \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} [2x_1(0) + x_2(0)]e^{-t} - [x_1(0) + x_2(0)]e^{-2t} \\ -[2x_1(0) + x_2(0)]e^{-t} + 2[x_1(0) + x_2(0)]e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} d\tau \\ \int_0^t -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} d\tau \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} [2x_1(0) + x_2(0)]e^{-t} - [x_1(0) + x_2(0)]e^{-2t} \\ -[2x_1(0) + x_2(0)]e^{-t} + 2[x_1(0) + x_2(0)]e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + [2x_1(0) + x_2(0) - 1]e^{-t} - [x_1(0) + x_2(0) - \frac{1}{2}]e^{-2t} \\ -[2x_1(0) + x_2(0) - 1]e^{-t} + [2x_1(0) + 2x_2(0) - 1]e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. 典型输入信号下的系统状态响应

当输入为几种特定信号时,状态响应的表示式可以简单化。下面分别给出输入为脉冲信号、阶跃信号和斜坡信号时的状态响应。

1) 脉冲信号 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}\delta(t)$ ($\mathbf{R}$ 为 r 维常数向量)下的状态响应

当初始时刻 $t_0 = 0$ 时,有

$$\int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = e^{At} \int_0^+ e^{-A\tau} \mathbf{B}\mathbf{R}\delta(\tau)d\tau = e^{At} e^{-A0} \left(\int_0^+ \delta(\tau)d\tau \right) \mathbf{B}\mathbf{R} = e^{At} \mathbf{B}\mathbf{R}$$

所以在脉冲信号下,系统的状态响应为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} [\mathbf{x}(0) + \mathbf{B}\mathbf{R}] \quad (3-135)$$

2) 阶跃信号 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}u(t)$ ($\mathbf{R}$ 为 r 维常数向量)下的状态响应

当初始时刻 $t_0 = 0$,这时有

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau &= e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{R} \mathbf{u}(\tau) d\tau = e^{At} \left(\int_0^t e^{-A\tau} u(\tau) d\tau \right) \mathbf{B} \mathbf{R} \\
&= e^{At} \left(\int_0^t e^{-A\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \mathbf{R} = e^{At} [(-\mathbf{A})^{-1} e^{-A\tau}]_0^t \mathbf{B} \mathbf{R} \\
&= e^{At} (-\mathbf{A})^{-1} (e^{-At} - \mathbf{I}) \mathbf{B} \mathbf{R} = \mathbf{A}^{-1} (e^{At} - \mathbf{I}) \mathbf{B} \mathbf{R}
\end{aligned}$$

所以在阶跃信号下,系统的状态响应为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1} (e^{At} - \mathbf{I}) \mathbf{B} \mathbf{R} \quad (3-136)$$

这时,要求系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵存在。

3) 斜坡信号 $\mathbf{u}(t) = \mathbf{R}r(t)$ ($\mathbf{R}$ 为 r 维常数向量, $r(t) = t$) 下的状态响应

当初始时刻 $t_0 = 0$, 这时有

$$\begin{aligned}
\int_0^t e^{A(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau &= e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} \mathbf{B} \mathbf{R} r(\tau) d\tau = e^{At} \left(\int_0^t \tau e^{-A\tau} d\tau \right) \mathbf{B} \mathbf{R} \\
&= e^{At} \{ [(-\mathbf{A})^2]^{-1} e^{-A\tau} (-A\tau - \mathbf{I}) \} \Big|_0^t \mathbf{B} \mathbf{R} = e^{At} [\mathbf{A}^{-2} e^{-A\tau} (-A\tau - \mathbf{I})]_0^t \mathbf{B} \mathbf{R} \\
&= e^{At} \mathbf{A}^{-2} [e^{-At} (-At - \mathbf{I}) - (-\mathbf{I})] \mathbf{B} \mathbf{R} = [\mathbf{A}^{-2} (e^{At} - \mathbf{I}) - \mathbf{A}^{-1} t] \mathbf{B} \mathbf{R}
\end{aligned}$$

所以在斜坡信号下,系统的状态响应为

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}(0) + [\mathbf{A}^{-2} (e^{At} - \mathbf{I}) - \mathbf{A}^{-1} t] \mathbf{B} \mathbf{R} \quad (3-137)$$

显然,这时也要求系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵存在。

例 3-13 已知系统的状态方程为

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \end{cases}$$

当输入为阶跃信号 $u(t) = 2(t \geq 0)$, 初始状态 $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 1$ 时,求输出响应 $y(t)$ 。

解: 由状态方程可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \quad 1 \quad 0]$$

故

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+3 & 0 & 1 \\ 0 & s+3 & -1 \\ -1 & 1 & s \end{bmatrix}$$

故系统的预解矩阵为

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s+3)(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s^2 + 3s + 1 & 1 & s+3 \\ 1 & s^2 + 3s + 1 & -s-3 \\ -s-3 & s+3 & s^2 + 6s + 9 \end{bmatrix}$$

进行拉普拉斯逆变换,得

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} & e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 4e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

输入为阶跃信号 $u(t)=2$, 初始状态 $\mathbf{x}(0)=[0 \ 0 \ 1]^T$, 所以直接利用式(3-136), 可得

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{At} \mathbf{x}(0) + \mathbf{A}^{-1} (e^{At} - \mathbf{I}) \mathbf{B} R \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} & e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 4e^{-t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \\ &\quad \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -9 \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} - 1 & e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} + e^{-3t} - 1 & 2e^{-t} - 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} & 4e^{-t} - 2e^{-2t} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -e^{-t} + e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \\ 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3e^{-t} - 3e^{-2t} - e^{-3t} + 1 \\ -3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t} + 1 \\ -6e^{-t} + 3e^{-2t} + 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -e^{-3t} + 1 \\ -e^{-3t} + 1 \\ 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据题目所给的条件和式(3-134), 可得输出响应为

$$y(t) = -\frac{1}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$$

例 3-14 已知线性连续定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [1 \ 1] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

其中, $\mathbf{x}(t)$ 为系统的状态, $u(t)$ 为控制输入, $y(t)$ 为系统输出。当 $u(t)=\delta(t)$ 时, 系统的输出 $y(t)=3e^t+2e^{3t}$, 求系统的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 。

解: 由状态方程可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \ 1]$$

故

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s-4 \end{bmatrix}$$

故系统的预解矩阵为

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{(s-1)(s-3)} \begin{bmatrix} s-4 & 1 \\ -3 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{s-1} - \frac{1}{s-3} & -\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-3} \\ \frac{3}{s-1} - \frac{3}{s-3} & -\frac{1}{s-1} + \frac{3}{s-3} \end{bmatrix}$$

进行拉普拉斯逆变换,得

$$\mathbf{e}^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\mathbf{e}^t - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^t + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{3t} \\ \frac{3}{2}\mathbf{e}^t - \frac{3}{2}\mathbf{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^t + \frac{3}{2}\mathbf{e}^{3t} \end{bmatrix}$$

当 $u(t) = \delta(t)$, 初始状态为 $\mathbf{x}(0)$ 时, 由式(3-135)系统的状态响应为

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{e}^{At}\mathbf{x}(0) + \mathbf{e}^{At}\mathbf{B}$$

系统的输出响应为

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{e}^{At}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\mathbf{e}^{At}\mathbf{B}$$

$$\text{其中, } \mathbf{C}\mathbf{e}^{At}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\mathbf{e}^t - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^t + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{3t} \\ \frac{3}{2}\mathbf{e}^t - \frac{3}{2}\mathbf{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^t + \frac{3}{2}\mathbf{e}^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{3t}$$

$$\text{设 } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}, \text{ 则}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{e}^{At}\mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{3}{2}\mathbf{e}^t - \frac{1}{2}\mathbf{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^t + \frac{1}{2}\mathbf{e}^{3t} \\ \frac{3}{2}\mathbf{e}^t - \frac{3}{2}\mathbf{e}^{3t} & -\frac{1}{2}\mathbf{e}^t + \frac{3}{2}\mathbf{e}^{3t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \\ &= (3q_1 - q_2)\mathbf{e}^t + (-2q_1 + 2q_2)\mathbf{e}^{3t} - \mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{3t} \end{aligned}$$

所以, 由题意得

$$y(t) = (3q_1 - q_2)\mathbf{e}^t + (-2q_1 + 2q_2)\mathbf{e}^{3t} - \mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{3t} = 3\mathbf{e}^t + 2\mathbf{e}^{3t}$$

等式两边对应系数相等

$$\begin{cases} 3q_1 - q_2 = 4 \\ -2q_1 + 2q_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{得: } \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

3.4 连续控制系统的稳定性分析

3.4.1 稳定性基本概念

控制系统的稳定性是指控制系统偏离平衡状态后, 能够在一定的时间内自动恢复到平衡状态的能力。稳定性是一个控制系统最基本的结构特性。在一般情况下, 稳定是控制系

统正常工作的前提。

直观上,判断系统是否稳定的方法是通过观察系统受到扰动作用后输出响应是否可以达到平衡状态。在扰动作用下,系统状态偏离了平衡状态,而当扰动被撤销后,如果系统的输出响应经过足够长的时间后,最终能够回到原先的平衡状态,则称此系统是稳定的;反之,如果系统的输出响应逐渐增加直至趋于无穷,或者进入振荡状态,则系统是不稳定的。

按照严格的定义,系统稳定性可分类为基于输入输出描述的外部稳定性和基于状态空间描述的内部稳定性。在一定条件下,外部稳定性和内部稳定性才存在等价关系。应用于线性定常系统的稳定性分析方法有很多,比如劳斯判据、赫尔维茨稳定判据、奈奎斯特稳定判据等。然而,对于非线性系统和线性时变系统,这些稳定性分析方法实现起来可能非常困难,甚至是不可能的。所以,主要是利用李雅普诺夫稳定性理论来分析。

1. 外部稳定性

在零初始条件下,如果系统在有界输入 $u(t)$ 的作用下,系统的输出 $y(t)$ 也是有界的,则称此系统是外部稳定的,也就是有界输入-有界输出稳定的,简称为 BIBO (Bounded-Input Bounded-Output) 稳定。实质上,它指的是一个系统在一定输入作用下的输出稳定性,可以比较直观地满足对稳定性的工程意义需求。外部稳定性主要由系统的结构属性决定。对于一个线性定常连续系统,外部稳定的充分必要条件是系统的特征根都具有负实部。其分析和证明过程如下。

设线性定常连续系统的微分方程为

$$\begin{aligned} & a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 \dot{y} + a_0 y \\ & = b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 \dot{u} + b_0 u \end{aligned} \quad (3-138)$$

则系统的特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-139)$$

设特征方程有 k 个实根 λ_i 和 r 对共轭复根 $\sigma_j \pm j\omega_{dj}$, 则系统的脉冲响应为

$$y(t) = \sum_{i=1}^k C_i e^{\lambda_i t} + \sum_{j=1}^r e^{\sigma_j t} (A_j \cos \omega_{dj} t + B_j \sin \omega_{dj} t) \quad (3-140)$$

其中, A_j 、 B_j 、 C_i 为常数。值得说明的是,这里在初始条件为零时,单位脉冲响应相当于在扰动信号作用下系统的输出信号偏离了原平衡工作点,而后扰动消失后的输出响应。

从式(3-140)可以发现:

(1) 若 λ_i 和 σ_j 均为负数,则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ 。所以当所有特征根均为负实部时,系统是稳定的。

(2) 若 λ_i 和 σ_j 中有一个或者多个为正数,则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ 。所以当特征根中有一个或者多个为正实部时,系统是不稳定的。

(3) 若 λ_i 和 σ_j 中有一个或者多个为零,而其他的 λ_i 和 σ_j 均为负数,则有 $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ 为一个常数或等幅正弦振荡。所以当特征根中有一个或者多个为零实部,而其他特征根为负实部时,系统是临界稳定的,这是处于稳定和不稳定的临界状态。在外界扰动的作用下和系统参数的微小波动下,这种临界稳定状态是很难维持的,因此在实际中是观察不到的。

综上所述,可以发现线性定常系统外部稳定的充要条件是:系统的全部特征根或者闭环极点都具有负实部,或者说都位于 s 平面的左半部。

2. 内部稳定性

在输入变量 $u(t)$ 为零的条件下,线性定常系统的状态方程即自治状态方程为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}, \quad t \geq t_0 \quad (3-141)$$

其中, $\mathbf{x}(t)$ 为 n 维状态向量; $\mathbf{A}$ 为 $n \times n$ 阶系统矩阵。如果在非零初始状态 $\mathbf{x}_0$ 引起的系统自由运动 $\mathbf{x}(t) (t_0 < t < \infty)$ 有界,即

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k < \infty \quad (3-142)$$

并满足渐近属性,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = 0 \quad (3-143)$$

则称该线性定常系统是内部稳定的。内部稳定性表达了在外界的扰动作用被撤销后,系统由初始偏差状态恢复到原平衡状态的能力。

系统的内部稳定性描述的是系统自由运动时的状态稳定性,它通过输出方程进一步体现系统的输出稳定性,并且它可以揭示出系统稳定性的本质属性。因为系统内部稳定性是建立在系统状态空间模型描述的基础上。所以它是一种对单变量、多变量、线性、非线性、定常、时变、连续、离散等类型的系统分析稳定性都适用的方法。

系统的外部稳定性反映了输出的稳定性,内部稳定性反映了系统内部状态的稳定性。两者的关系为若一个系统为内部稳定,则系统必为外部稳定,即 BIBO 稳定;但是若一个系统为外部稳定,即 BIBO 稳定,则不能保证系统必为内部稳定。

3.4.2 劳斯判据

根据系统外部稳定的充要条件判断系统是否稳定,需要知道系统的全部特征根在 s 平面的分布。但直接求解高阶特征方程得到特征根是很困难的。实际上,判定系统是否稳定并不需要知道每个特征根的具体数值,只需知道所有特征根是否都具有负实部。因此,为了寻求不必求解出特征根而直接判断系统稳定的方法,产生了一系列稳定性判据。1877 年,由 Edward Routh 提出的劳斯(Routh)判据,就是在时域分析中一个比较简单而有效的稳定判据。劳斯判据根据控制系统特征方程的系数,应用代数方法判断系统特征根的分布。它不但能提供线性定常系统稳定与否的信息,还能指出在 s 右半平面和虚轴上的特征根个数。

设线性连续定常系统的特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-144)$$

式中所有系数均为实数,且 $a_n > 0$ 。

劳斯判据是用劳斯表第一列系数的符号变化来判别系统的外部稳定性。劳斯表如下所示:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$
s^{n-4}	d_1	d_2	d_3	d_4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
s^0	r_1				

其中, $a_i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ 是特征方程 $D(s)=0$ 中的各项系数。 b_i 计算方法为

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}, \\ b_2 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}, \\ b_3 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix} = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}, \quad \dots \end{aligned}$$

直至其余 b_i 全部为 0。 c_i 计算方法为

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}, \\ c_2 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}, \\ c_3 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} = \frac{b_1 a_{n-7} - b_4 a_{n-1}}{b_1}, \quad \dots \end{aligned}$$

直至其余 c_i 全部为 0。按照上述的规律接着计算 $d_i, e_i, \dots$, 直至最后一行的系数 $r_1 = a_0$ 。

如上所示, 劳斯表共有 $n+1$ 行。从第 s^{n-2} 行(第 3 行)开始, 每一行的系数 $b_i, c_i, d_i, \dots$ 用前两行系数交叉相乘的方法计算, 直至最后一行(第 $n+1$ 行)。完整的劳斯表呈每两行递减一个系数的倒三角形。

根据劳斯判据, 由特征方程(3-144)所表征的线性连续定常系统稳定的充分必要条件是: 劳斯表第一列系数全部为正数。如果劳斯表第一列系数出现小于或等于零的数值, 则系统不稳定, 而且系统正实部特征根的个数等于劳斯表第一列系数的符号变化次数。

例 3-15 已知系统的特征方程为 $s^4 + 7s^3 + 18s^2 + 21s + 10 = 0$ 。试用劳斯判据判断系统的稳定性。

解: 根据题目列出系统的劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 18 & 10 \\ s^3 & 7 & 21 & 0 \\ s^2 & 105/7 & 10 & \\ s^1 & 1715/105 & 0 & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

可以发现, 劳斯表的第一列全为正, 故系统是稳定的。

在列劳斯表时, 为了简化运算, 可以利用一个正数遍乘同一行中的所有元素, 而不影响判别结果。例如, 在计算 b_i 时, 为了降低运算的复杂度, 可以只考虑 a_{n-1} 的符号, 而不除以数值 a_{n-1} 。按照这个思路, 重新计算例 3-15 的劳斯表, 可得

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 18 & 10 \\ s^3 & 7 & 21 & 0 \\ s^2 & 7 \times 18 - 1 \times 21 = 105 & 7 \times 10 - 1 \times 0 = 70 & \\ s^1 & 105 \times 21 - 7 \times 70 = 1715 & 0 & \\ s^0 & 10 & & \end{array}$$

通过这个重新计算的劳斯表也能获得同样的结论。

例 3-16 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}$, 试用劳斯判据确定使闭环系统稳定时开环放大倍数 K 的取值范围。

解: 由题得系统的闭环传递函数为

$$G_c(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}}{1 + 1 \cdot \frac{K}{s(s+1)(s+2)(s+3)}} = \frac{K}{s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K}$$

故系统的特征方程为

$$D(s) = s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + K = 0$$

写出系统的劳斯表为

s^4	1	11	K
s^3	6	6	0
s^2	10	K	
s^1	$6 - 3K/5$	0	
s^0	K		

根据劳斯判据, 若使得闭环系统稳定, 则需使得

$$\begin{cases} 6 - 3K/5 > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K < 10$$

所以, 开环放大倍数 K 的取值范围为 $0 < K < 10$ 。

例 3-17 已知系统的特征方程为 $2s^3 + 4s^2 + 3s + 8 = 0$ 。试用劳斯判据判断系统的稳定性。若系统不稳定则指出正实部特征根个数。

解: 根据题目列出系统的劳斯表为

s^3	2	3
s^2	4	8
s^1	-1	
s^0	8	

可以发现, 劳斯表的第一列中不全为正, 故系统是不稳定的。因为劳斯表第一列系数符号变化两次, 即由 4 变为 -1, 又由 -1 变为 8, 所以系统有两个正实部的特征根。

在应用劳斯判据时, 可能会遇到两种特殊情况: 一种是劳斯表中某行的第一列系数为 0 而该行其余系数不全为 0; 另一种是劳斯表中某行系数全为 0, 致使劳斯表的计算无法继续进行。在这两种情况下, 系统都是不稳定的。如要了解根的性质, 解决的措施如下:

(1) 如果劳斯表中某一行的第一列系数为 0, 而该行其余系数不全为 0, 可用一个很小的正数 (也可以是负数) ϵ 来代替为 0 的这个系数, 据此计算出劳斯表中其余各系数, 然后再用劳斯判据分析系统的正实部特征根个数。

例 3-18 已知系统的特征方程为 $s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 1 = 0$ 。试用劳斯判据判断系

统的稳定性。若系统不稳定,则指出正实部特征根个数。

解:根据题目列出系统的劳斯表为

s^5	1	2	1
s^4	2	4	1
s^3	ϵ	1/2	
s^2	$(4\epsilon - 1)/\epsilon$	1	
s^1	$(-2\epsilon^2 + 4\epsilon - 1)/(8\epsilon - 2)$		
s^0	1		

假设 ϵ 是一个很小的正数,所以 $(4\epsilon - 1)/\epsilon < 0$, $(-2\epsilon^2 + 4\epsilon - 1)/(8\epsilon - 2) > 0$ 。因此,劳斯表第一列系数符号变化两次。所以系统是不稳定的,且有两个正实部的特征根。

(2) 如果劳斯表中某一行系数全为 0,则说明系统的特征方程中存在大小相等、符号相反即对称于 s 平面坐标原点的特征根(例如,大小相等、符号相反的实根;共轭纯虚根;对称于虚轴的两对共轭复根等)。为了计算出全 0 行下面各行系数,可用全 0 行的上一行系数构成辅助多项式 $F(s)$ 。即设劳斯表中全 0 行为 s^{k-1} 行, s^k 行的系数分别为 $t_1, t_2, t_3, \dots$ 。那么辅助多项式为

$$F(s) = t_1 s^k + t_2 s^{k-2} + t_3 s^{k-4} + \dots \quad (3-145)$$

一般来说,辅助多项式 $F(s)$ 的阶数一般为偶数,与对称于 s 平面坐标原点的特征根个数相对应。对 $F(s)$ 求导

$$\frac{d}{ds}F(s) = t_1 k s^{k-1} + t_2 (k-2) s^{k-3} + t_3 (k-4) s^{k-5} + \dots \quad (3-146)$$

用求导所得多项式的各项系数,即 $t_1 k, t_2 (k-2), t_3 (k-4), \dots$ 去取代全零行中为 0 的系数,即可继续把劳斯表计算完毕。

这种方法不仅可根据第一列系数符号的变化次数来确定该不稳定系统右半平面根的个数,还可以根据求解辅助方程 $F(s)=0$,得到那些系统的特征方程中存在大小相等、符号相反即对称于 s 平面坐标原点的特征根。

例 3-19 已知系统的特征方程为 $s^5 + 2s^4 + 24s^3 + 48s^2 - 25s - 50 = 0$ 。试用劳斯判据判断系统的稳定性。若系统不稳定,则指出正实部特征根个数。

解:根据题目列出系统的劳斯表为

s^5	1	24	-25
s^4	2	48	-50
s^3	0	0	

由此列表可以发现 s^3 行的系数全为 0。所以为了列出后续的劳斯表,构造辅助多项式

$$F(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50$$

对辅助多项式进行求导

$$\frac{d}{ds}F(s) = 8s^3 + 96s$$

用上式中的系数 8 和 96 代替 s^3 行的系数,并列出后续的劳斯表:

$$\begin{array}{rrrr}
s^5 & 1 & 24 & -25 \\
s^4 & 2 & 48 & -50 \\
s^3 & 8 & 96 & \\
s^2 & 24 & -50 & \\
s^1 & 338/3 & & \\
s^0 & -50 & &
\end{array}$$

劳斯表第一列中不全为正,且第一列系数符号变化一次。所以系统是不稳定的,且有一个正实部的特征根。求解辅助方程 $F(s) = 2s^4 + 48s^2 - 50 = 0$ 可知,原系统中的特征根有 $p_{1,2} = \pm 1, p_{3,4} = \pm 5j$ 。

3.4.3 赫尔维茨稳定判据

1895年,Adolf Herwitz 提出了赫尔维茨(Herwitz)判据。这同样是一个分析线性定常系统稳定性的代数判据。赫尔维茨判据通过对系统多项式的系数进行代数运算来判定多项式方程是否有不稳定根(正实部根),从而判断系统的稳定性。

设线性连续定常系统的特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \quad a_n > 0 \quad (3-147)$$

其中, $a_n > 0$ 是一个一般规定。若 $a_n < 0$, 则可以通过对式(3-147)两边同时乘以 -1 , 使得等式满足规定要求。

构造赫尔维茨行列式

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_{n-1}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n \\ a_{n-3} & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad \cdots \\
\Delta_n &= \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & \cdots & 0 \\ a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & \cdots & 0 \\ a_{n-9} & a_{n-8} & a_{n-7} & a_{n-6} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{vmatrix}_{n \times n} \quad (3-148)
\end{aligned}$$

如上所示, n 阶赫尔维茨行列式 Δ_n 的主对角线上的元素依次为 $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, \cdots, a_1, a_0$ 。每列元素是以主对角线元素为基准, 往下按注脚每次递减 2 的顺序排列, 往上按注脚每次递增 2 的逆序排列。注脚大于 n 或小于 0 的系数均为 0。另外, 低阶赫尔维茨行列式是 Δ_n 的各阶顺序主子式。

在赫尔维茨判据中, 系统稳定的充要条件为系统的各阶赫尔维茨行列式 $\Delta_i (i=1, 2, \cdots, n)$ 大于 0。

在赫尔维茨判据的基础上, 林纳德-奇帕特(Lienard-Chipard)判据证明, 在特征多项式的系数为正的条件下, 若所有奇数阶赫尔维茨行列式均为正, 则所有偶数阶赫尔维茨行列式也为正; 反之亦然。即系统稳定的充分必要条件是

$$\begin{aligned} \Delta_i > 0, i=2,4,6,\cdots,n-1 \quad (\text{若 } n \text{ 为奇数}) \\ \text{或 } \Delta_i > 0, i=1,3,5,7,\cdots,n-1 \quad (\text{若 } n \text{ 为偶数}) \end{aligned} \quad (3-149)$$

例 3-20 已知系统的特征方程为 $2s^4 + s^3 + 6s^2 + 11s + 5 = 0$ 。试用赫尔维茨判据判断系统的稳定性。

解：由题得系统特征多项式的系数都为正，且

$$\Delta_1 = 1 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 11 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 11 \end{vmatrix} = -181 < 0$$

不满足林纳德-奇帕特判据的充要条件，所以系统不稳定。

3.4.4 李雅普诺夫第一法

按照系统内部稳定性的思想，系统稳定性问题表述的是系统受到外界干扰，平衡工作状态被破坏后，系统偏差调节过程的收敛性。

李雅普诺夫稳定性理论讨论的是动态系统各平衡态附近的局部稳定性问题。它是一种具有普遍性的稳定性理论，不仅适用于线性定常系统，而且适用于非线性系统、时变系统等。在现代控制系统的分析与设计中得到了广泛的应用与发展。

1. 系统的平衡状态

由于稳定性是无外界输入作用的动态系统在自由运动下的特性，因此这种无外界输入作用的动态系统也可以称为自治系统。假设线性定常自治系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}}_e(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}_e(t) = 0 \quad (3-150)$$

则称 $\mathbf{x}_e$ 为该系统的平衡状态(平衡点)。平衡状态的各分量相对于时间不再发生变化。若对于一个已知系统的状态方程，令 $\dot{\mathbf{x}}(t) = 0$ 所得到的解 $\mathbf{x}$ 便是一种平衡状态。

通常情况下，一个系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 并不是唯一的。对于线性定常系统，其平衡状态为 $\mathbf{A}\mathbf{x}_e = 0$ 的解的个数与矩阵 $\mathbf{A}$ 密切相关。若矩阵 $\mathbf{A}$ 非奇异时，系统存在唯一的平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ ，即系统存在一个位于状态空间原点的平衡状态；若矩阵 $\mathbf{A}$ 奇异时，则系统的平衡状态不唯一，但是其中一个状态为 $\mathbf{x}_e = 0$ 。

如果平衡状态在状态空间中是彼此孤立的，则称它们为孤立平衡状态。任何一个孤立的平衡状态都可以通过坐标变换转换成零平衡状态，而坐标变换又不会改变系统的稳定性。所以为了讨论方便又不失一般性，一般选取零平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 作为平衡状态来研究系统的稳定性。

例 3-21 已知自治系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 \end{cases}$$

求系统的平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 。

解：由题意得平衡状态满足方程

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$$

解该方程,可以得到系统的平衡状态为

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. 李雅普诺夫第一法的定义

李雅普诺夫第一法又称间接法,是利用系统状态方程的解的特性来判断系统稳定性的方法。它适用于线性系统及可线性化的非线性系统。

对于线性系统,其平衡状态稳定性只取决于系统的结构和参数,而与系统的初始条件及外界扰动作用无关。且对于一个初始状态为 $\mathbf{x}(t)|_{t=t_0} = \mathbf{x}(t_0)$ 的线性定常系统 $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ 来说,自由响应为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}(t_0) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \mathbf{x}(t_0) \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \right] \mathbf{x}(t_0) \end{aligned} \quad (3-151)$$

要使得 $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_e = 0$, 需满足 $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ 的特征根全都在 s 左半平面。

故平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 为稳定的充要条件是系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都具有负实部,即所有特征根都位于 s 左半平面。

对于可近似线性化的非线性系统(在平衡点邻域存在偏导数),则可通过线性化处理,取其一次偏导近似得到线性化方程,再根据其特征根来判断系统的局部稳定性。具体的求解方法可以查阅其他资料,这里不再讨论。

例 3-22 系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + kx_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases}$$

试分析系统平衡状态的稳定性。

解: 由题意得,系统的平衡状态满足

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + kx_2 = 0 \\ \dot{x}_2 = -x_1 = 0 \end{cases}$$

解该方程,可以得到系统的平衡状态为

$$\mathbf{x}_e = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

由李雅普诺夫第一法可知,系统平衡状态的稳定性是系统矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都具有负实部。而

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s+1 & -k \\ 1 & s \end{vmatrix} = s^2 + s + k = 0$$

的特征根 $s_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4k}}{2}$ 与 k 的取值范围有关。

(1) 当 $k \leq 0$ 时,特征根为一正一负(或一正一零)的实数根,所以系统平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 不稳定;

(2) 当 $0 < k \leq 0.25$ 时,特征根为两个负的实数根,所以系统平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 稳定;

(3) 当 $k > 0.25$ 时,特征根为具有负实部的共轭复数根,所以系统平衡状态 $\mathbf{x}_e$ 稳定。

3.5 连续控制系统的时域设计

例 3-23 如图 3-22 所示为磁盘驱动读取系统。为了正确读取到磁盘磁道上的正确信息,需要将磁头定位到正确的位置。如图 3-23 所示,建立系统方块图,可以发现该系统存在扰动作用。这是由于系统受到物理振动、磁盘主轴轴承的磨损和摆动以及元器件老化引起的参数变化等因素的影响。试分析在单位阶跃输入的作用下放大器增益 K_a 对于系统的动态响应、稳态误差以及抑制扰动能力的影响。

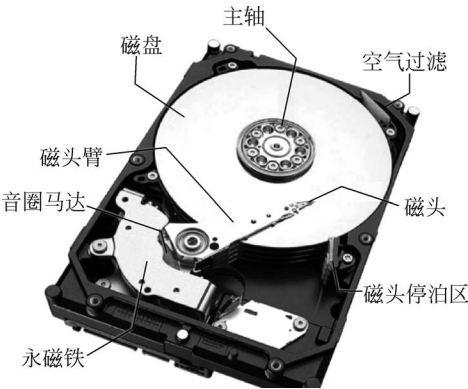


图 3-22 磁盘驱动读取系统示意图

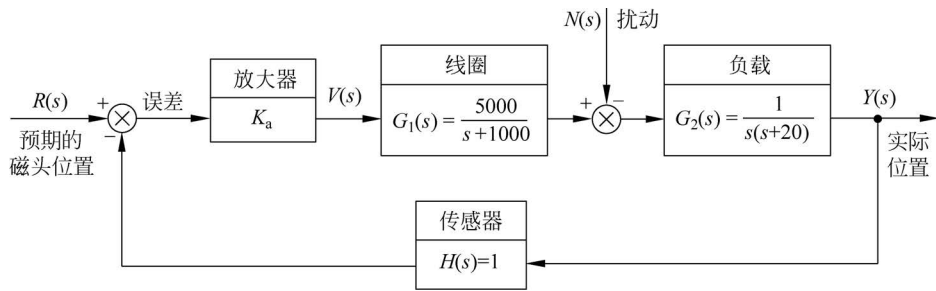


图 3-23 磁盘驱动读取系统方块图

解: 由题意得,系统在 $R(s)$ 和 $N(s)$ 同时作用下的输出为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s) H(s)} R(s) - \frac{G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s) H(s)} N(s) \\ &= \frac{5000 K_a}{s(s+1000)(s+20) + 5000 K_a} R(s) - \frac{s+1000}{s(s+1000)(s+20) + 5000 K_a} N(s) \end{aligned}$$

系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 1020s^2 + 20000s + 5000K_a = 0$$

构造劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 20000 \\ s^2 & 1020 & 5000K_a \end{array}$$

$$\begin{array}{l} s^1 \quad \frac{1.02 \times 10^6 - 250K_a}{51} \\ s^0 \quad 5000K_a \end{array}$$

为了使得闭环系统稳定,则

$$\begin{cases} \frac{1.02 \times 10^6 - 250K_a}{51} > 0 \\ 5000K_a > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < K_a < 4080$$

所以,使闭环系统稳定的 K_a 的范围为 $0 < K_a < 4080$ 。

系统误差信号为

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1 + K_a G_1(s) G_2(s) H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1 + K_a G_1(s) G_2(s) H(s)} N(s) \\ &= \frac{s(s+1000)(s+20)}{s(s+1000)(s+20) + 5000K_a} R(s) + \frac{s+1000}{s(s+1000)(s+20) + 5000K_a} N(s) \end{aligned}$$

故当系统的输入为 $r(t)=1(t)$ 时,利用终值定理法,系统给定输入引起的稳态误差为

$$e_{ssr} = \lim_{s \rightarrow 0} s E(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s(s+1000)(s+20)}{s(s+1000)(s+20) + 5000K_a} \cdot \frac{1}{s} = 0$$

对于扰动作用来说,假设当系统的扰动输入为 $n(t)=1(t)$ 时,利用终值定理法,系统扰动输入引起的稳态误差为

$$e_{ssn} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s+1000}{s(s+1000)(s+20) + 5000K_a} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{5K_a}$$

所以系统的总稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = \frac{1}{5K_a}$$

为了减少系统的稳定误差,抑制扰动的作用,放大器增益 K_a 应该越大越好。利用 MATLAB 进行系统的动态响应仿真如图 3-24 所示,可以发现,放大器增益 K_a 越大,系统在单位阶跃和单位扰动的共同作用下的动态响应的振荡越明显,同时系统的超调量越大。所以为了进一步优化系统,使系统的动态响应能够既满足快速又不振荡的要求,可以在系统中增加一个速度传感器。新的系统方块图如图 3-25 所示。

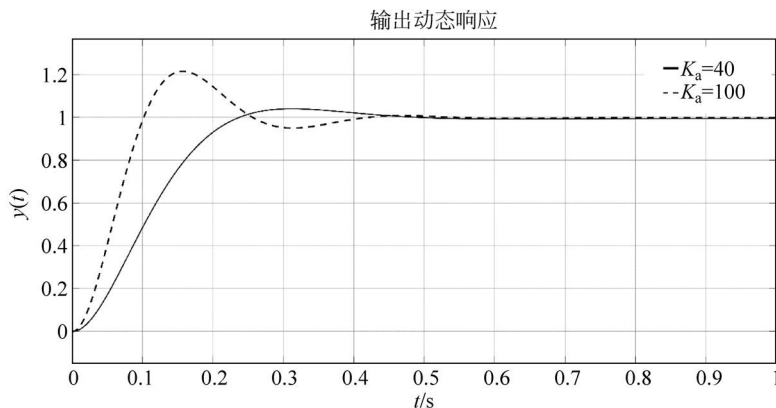


图 3-24 $K_a=40$ 和 $K_a=100$ 时系统的动态响应曲线

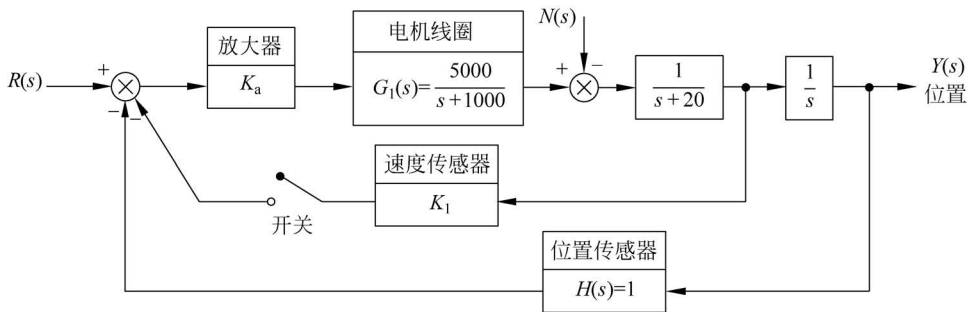


图 3-25 带速度反馈的磁盘驱动读取系统方块图

当系统中的速度传感器前的开关闭合时,系统中增加了速度传感器,其反馈值为 K_1 。此时的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_a G_1(s) G_2(s)}{1 + [K_a G_1(s) G_2(s)] (H(s) + K_1 s)}$$

所以系统的闭环特征方程为

$$s^3 + 1020s^2 + (20000 + 5000K_a K_1)s + 5000K_a = 0$$

构造劳斯表

s^3	1	$20000 + 5000K_a K_1$
s^2	1020	$5000K_a$
s^1	$\frac{51(20000 + 5000K_a K_1) - 250K_a}{51}$	
s^0	$5000K_a$	

为了使得闭环系统稳定,则

$$\begin{cases} \frac{51(20000 + 5000K_a K_1) - 250K_a}{51} > 0 \\ 5000K_a > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K_a > 0 \\ 4000 + 1000K_a K_1 > K_a \end{cases}$$

所以,在 $K_a > 0$ 的条件下, K_a 的值不能过大, K_1 的值不能过小,即满足上述不等式。

当 $K_1 = 0.1$, $K_a = 100$ 时,利用 MATLAB 进行系统的动态响应仿真如图 3-26 所示。

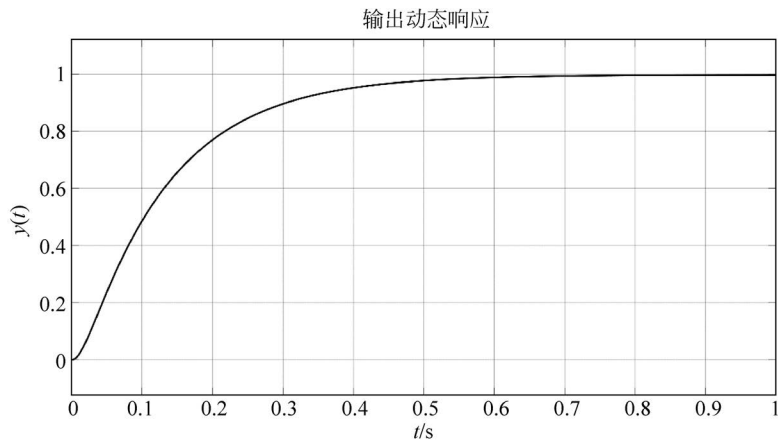


图 3-26 $K_1 = 0.1$, $K_a = 100$ 时系统的动态响应曲线

根据响应曲线,可以发现系统在单位阶跃和单位扰动的共同作用下的动态响应的超调量为0,调节时间为 $0.393s(\Delta=5)$ 。

例 3-24 哈勃太空望远镜如图 3-27 所示。哈勃太空望远镜于 1990 年 4 月 14 日发射至离地球 61km 的太空轨道,它的发射与应用将空间技术发展推向了一个新的高度。望远镜的 2.4m 镜头拥有所有镜头中最光滑的表面,其指向系统能在 644km 以外将视野聚集在一枚硬币上。望远镜的偏差在 1993 年 12 月的一次太空任务中得到了大范围的校正。哈勃太空望远镜指向系统简化方块图如图 3-28 所示。



图 3-27 哈勃太空望远镜示意图

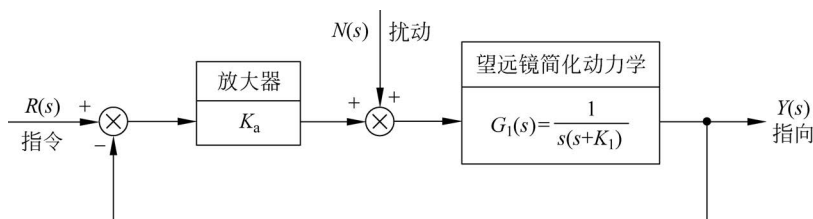


图 3-28 哈勃太空望远镜指向系统简化方块图

指向系统的时域设计目的是选择放大器增益 K_a 和具有增益调节的测速反馈系数 K_1 , 使得系统能够满足以下性能:

- (1) 在阶跃输入的作用下,系统的超调量小于或等于 10%;
- (2) 在斜坡输入的作用下,系统的稳态误差较小;
- (3) 减小单位阶跃扰动的影响。

解: 由题得系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K_a}{s(s+K_1)} = \frac{K_a/K_1}{s(s/K_1+1)}$$

系统在 $R(s)$ 和 $N(s)$ 同时作用下的输出为

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{1+G(s)}R(s) + \frac{G_1(s)}{1+G(s)}N(s) \\ &= \frac{K_a}{s(s+K_1)+K_a}R(s) + \frac{1}{s(s+K_1)+K_a}N(s) \end{aligned}$$

误差为

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{1}{1+G(s)}R(s) - \frac{G_1(s)}{1+G(s)}N(s) \\ &= \frac{s(s+K_1)}{s(s+K_1)+K_a}R(s) - \frac{1}{s(s+K_1)+K_a}N(s) \end{aligned}$$

(1) 为了满足在阶跃输入作用下系统超调量的要求。令

$$G(s) = \frac{K_a}{s(s+K_1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

可得

$$\omega_n = \sqrt{K_a}, \quad \zeta = \frac{K_1}{2\sqrt{K_a}}$$

因为对于一个二阶系统

$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \times 100\%$$

解得

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(\ln\sigma)^2}}}$$

若 $\sigma\% = 10\%$, 则求得 $\zeta \approx 0.6$ 。因而在满足指标要求的情况下,

$$K_1 = 2\zeta\sqrt{K_a} = 1.2\sqrt{K_a}$$

(2) 系统为一个 I 型系统, 故当系统的输入为 $r(t) = Rt$ 时, 由表 3-1 可知, 系统给定输入引起的稳态误差为

$$e_{ssr} = \frac{R}{K_v} = \frac{K_1 R}{K_a}$$

由于 K_a 和 K_1 的选取满足超调量 $\sigma\%$ 小于或等于 10% , 所以 $K_1 = 1.2\sqrt{K_a}$, 故系统给定输入引起的稳态误差为

$$e_{ssr} = \frac{1.2R}{\sqrt{K_a}}$$

上式表示为了使系统给定输入引起的稳态误差尽可能减小, 那么 K_a 的选取应尽可能大。

(3) 对于扰动作用来说, $v_1 = 0, v_2 = 1$ 。那么假设当系统的扰动输入为 $n(t) = 1(t)$ 时, 由表 3-2 可知, 系统扰动输入引起的稳态误差为

$$e_{ssn} = -\frac{1}{K_a}$$

当系统的给定输入为斜坡信号时, 系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = \frac{1.2R}{\sqrt{K_a}} - \frac{1}{K_a} = \frac{1.2\sqrt{K_a}R - 1}{K_a}$$

而当系统的给定输入为阶跃信号时, 其引起的稳定误差为 0。所以系统总的稳态误差为

$$e_{ss} = e_{ssr} + e_{ssn} = 0 - \frac{1}{K_a} = -\frac{1}{K_a}$$

不管系统的给定输入为阶跃信号还是斜坡信号, 增大 K_a 都会使系统总的稳态误差 e_{ss} 减小。

在实际系统中, K_a 的选取必须受到限制, 以使系统工作在线性区。当取 $K_a = 100$ 时, 有 $K_1 = 12$ 。所设计的系统的 Simulink 仿真图如图 3-29 所示, 系统对单位阶跃输入和单位阶跃扰动的响应如图 3-30 所示。可以看出, 扰动的影响很小。此时 $e_{ss} = -0.01$ 。

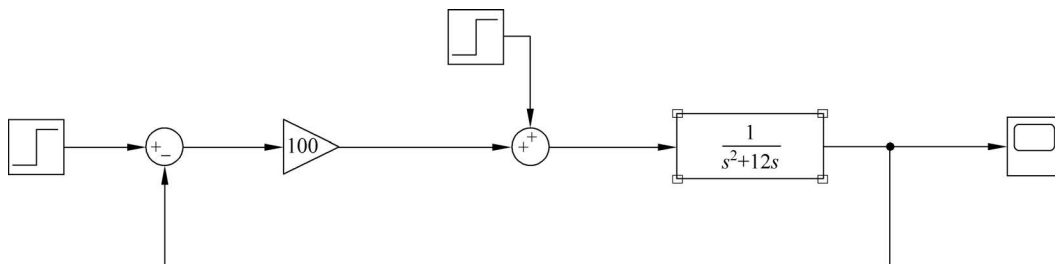


图 3-29 哈勃太空望远镜指向系统 Simulink 仿真图

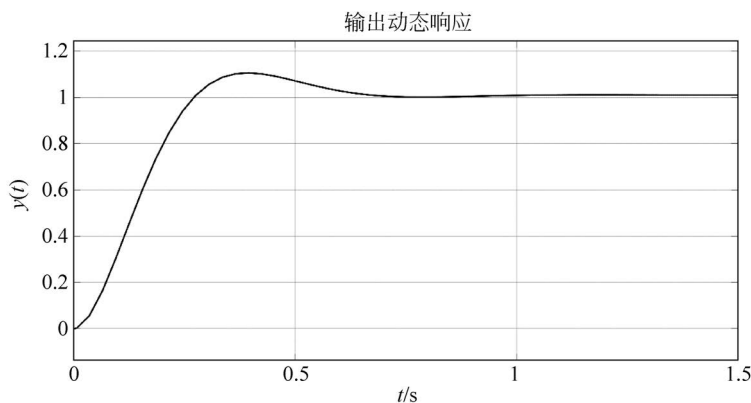


图 3-30 哈勃太空望远镜指向系统响应图

3.6 应用 MATLAB 进行连续控制系统时域分析与设计

3.6.1 应用 MATLAB 分析系统稳定性

系统外部稳定的充要条件是系统的所有特征根都具有负实部。显然, 最直接的方法是求出系统全部的特征根。而对于 MATLAB 来说, 求解代数方程是非常容易的。

设系统的特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

在 MATLAB 中, 输入下面的两条命令就可以求出该系统所有特征根

```
den = [an, an-1, ..., a0];
r = roots(den);
```

该系统的所有特征根都会通过计算保存在 r 中。若 r 中所有的值都具有负实部, 则该系统稳定; 若 r 中至少有一个值具有正实部, 则该系统不稳定。

例 3-25 试利用 MATLAB 判断系统的稳定性。假设系统的特征方程为

$$D(s) = s^4 + 6s^3 - 11s^2 + 6s - 23 = 0$$

解: 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
>> den = [1, 6, -11, 6, -23];
>> r = roots(den)
```

可得到如下运行结果

```
r =
- 7.6029 + 0.0000i
  1.8470 + 0.0000i
- 0.1220 + 1.2740i
- 0.1220 - 1.2740i
```

由于存在 1 个正实部的特征根,所以系统不稳定。

3.6.2 应用 MATLAB 求解系统的阶跃响应

如果已知系统的传递函数的系数,则可以用 `step(num,den)` 或者 `step(num, den, t)` 得到系统的单位阶跃响应曲线图。`step(num, den)` 中没有指定时间 `t`, 系统会自动生成时间向量, 响应曲线图的坐标也是自动标注的。执行该命令能自动画出系统的单位阶跃响应图。

在 MATLAB 中也可以采用命令 `[y, x, t]=step(num, den, t)` 求系统的单位阶跃响应, 其中的时间 `t` 由用户指定。MATLAB 会根据用户给定的时间 `t`, 算出对应的坐标值。执行该命令不能自动画出系统的单位阶跃响应图, 而要另加 `plot` 绘图命令。

例 3-26 已知系统的闭环传递函数为

$$G(s) = \frac{15s + 60}{s^4 + 12s^3 + 54s^2 + 82s + 60}$$

试利用 MATLAB 绘制系统的单位阶跃响应, 并求解系统的暂态性能指标。

解: 在 MATLAB 命令窗口或者建立一个脚本输入以下命令

```
>> t = 0: 0.01: 10;
>> num = [15, 60];
>> den = [1, 12, 54, 82, 60];
>> [y, x, t] = step(num, den, t);
>> plot(t, y);
>> grid on
>> xlabel('t'), ylabel('y(t)')
>> title('单位阶跃响应')
>> maxy = max(y);
>> yss = y( length(t) );
>> pos = 100 * (maxy - yss)/yss % 求超调量 σ %
>> for i = 1: 1: 1001
    if y(i) == maxy, n = i; end
end
>> tp = (n - 1) * 0.01 % 求超调时间 tp
>> for i = 1001: -1: 1
    if y(i) > 1.05 || y(i) < 0.95, m = i;
        break;
    end
end
>> ts = (m - 1) * 0.01 % 求调节时间 ts
```

可得到如下运行结果

```
pos =
  4.0959
```

```
tp =
    3.3500
ts =
    2.2200
```

从上面计算结果可知：超调量 $\sigma\% = 4.0959\%$ ；超调时间 $t_p = 3.35\text{s}$ ；调节时间 $t_s = 2.22\text{s}(\Delta=5)$ 。除了编写程序求解系统的暂态性能指标外，还可以用鼠标指向图 3-31 中曲线上的任何一点，可以读取该点对应的时间和幅值，然后计算系统的暂态性能指标。

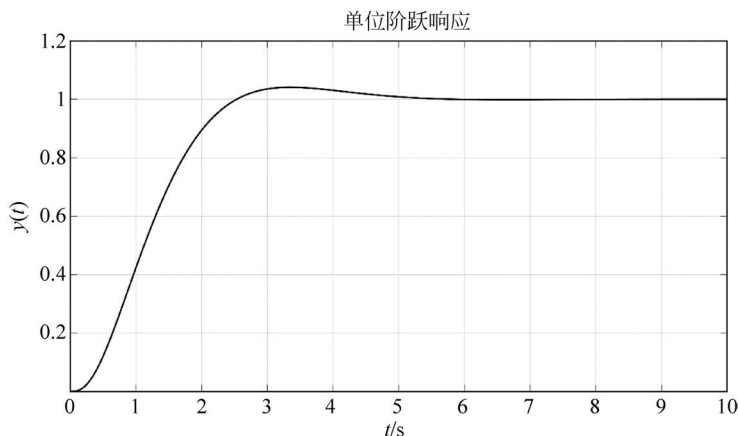


图 3-31 例 3-26 系统的单位阶跃响应

同样的，对于系统的状态空间模型，也可以利用 `step(sys)` 或者 `step(sys, t)` 得到系统的单位阶跃响应曲线图。

除此之外，MATLAB 中提供了求系统各种响应的函数，例如，求脉冲响应的 `impulse()` 命令、求系统零输入响应的 `initial()` 命令等。利用这些函数可以编写系统响应程序。也可以利用 Simulink 来构建系统的方块图模拟仿真，得到系统的响应曲线。

需要指出，由于 MATLAB 只能在系统参数全部给定的情况下进行计算。所以，不能分析系统系数与性能的关系。因此 MATLAB 只能作为分析系统的辅助工具，而不能代替控制理论分析和设计系统。

3.6.3 应用 MATLAB 计算系统矩阵指数函数

设系统的系统矩阵为 $\mathbf{A}$ ，MATLAB 中通过下列函数可以计算矩阵指数函数的数值解和解析解。

```
Y = expm(A * t)
```

若是想要得到数值解，则需要定义时刻 t ；若想要得到解析解，则需要将时间 t 作为一个变量进行符号定义。

例 3-27 试利用 MATLAB 计算下面矩阵 $\mathbf{A}$ 对应的矩阵指数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 和其在 $t=1\text{s}$ 的值。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

解：在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [1, 0; 5, 3];
>> t = 1;
```

```
>> eAt1 = expm(A * t)           % 求解  $e^{At}$  数值解
>> syms t;
>> eAt2 = expm(A * t)           % 求解  $e^{At}$  解析解
```

可得到如下运行结果

```
eAt1 =
2.7183      0
43.4181    20.0855
eAt2 =
[      exp(t),      0]
[(5 * exp(3 * t))/2 - (5 * exp(t))/2, exp(3 * t)]
```

3.6.4 应用 MATLAB 计算系统状态响应与输出响应

1. 系统的零输入响应

在 MATLAB 中,initial()函数可用于计算系统状态空间模型 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 的零输入响应,即系统在初始状态 $\mathbf{x}_0$ 作用下的自由运动。其程序如下:

```
sys = ss(A, B, C, D)
[y, t, x] = initial(sys, x0, t)
```

2. 系统的零状态响应

在 MATLAB 中,step()函数、impulse()函数可用于计算系统状态空间模型 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 的零初始状态下的单位阶跃响应和单位脉冲响应。其程序如下:

```
sys = ss(A, B, C, D)
[y, t, x] = step(sys, t) 或 [y, t, x] = impulse(sys, t)
```

3. 系统的任意状态响应和输出响应的数值解

在 MATLAB 中,lsim()函数可用于计算系统状态空间模型 $\Sigma(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ 的状态响应和输出响应的数值解。其程序如下:

```
sys = ss(A, B, C, D)
[y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0)
```

其中,输入信号 u 对应于时间数组各时刻的采样值构成的输入数组。除了可以通过对任意输入函数进行采样获取外,还可以应用 gensig()函数产生信号类型为 type,以 τ 秒的信号周期, T_f 为信号时间长度, T_s 为采样周期的信号。其程序如下:

```
[u, t] = gensig(type, tau, Tf, Ts)
```

例 3-28 试利用 MATLAB 计算下面的系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \mathbf{y}(t) = [1 \quad 1] \mathbf{x}(t) \end{cases}$$

在 $[0, 5s]$ 的时间区间的状态响应,其中初始状态为 $\mathbf{x}(0) = [1 \quad 2]^T$,输入信号为 $u(t) = 1 + e^{-t} \cos(5t)$ 。

解: 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [0, 1; -2, -3];
>> B = [0; 1]; C = [1, 1]; D = [0];
>> x0 = [1; 2];
```

```

>> sys = ss(A, B, C, D);
>> t = [0: 0.02: 5];
>> u = 1 + exp(-t) .* cos(5 * t);
>> [y, t, x] = lsim(sys, u, t, x0);
>> figure(1);
>> plot(t, x); grid on
>> xlabel( 't/s' ), ylabel( 'x' );
>> title( '状态响应曲线' );
>> text(2.5, 1, 'x1');
>> text(2.5, 0, 'x2');
>> figure(2);
>> plot(t, y) ; grid on
>> xlabel( 't/s' ), ylabel( 'y' );
>> title( '输出响应曲线' );

```

可得到如图 3-32 所示的状态响应曲线和如图 3-33 所示的输出响应曲线。

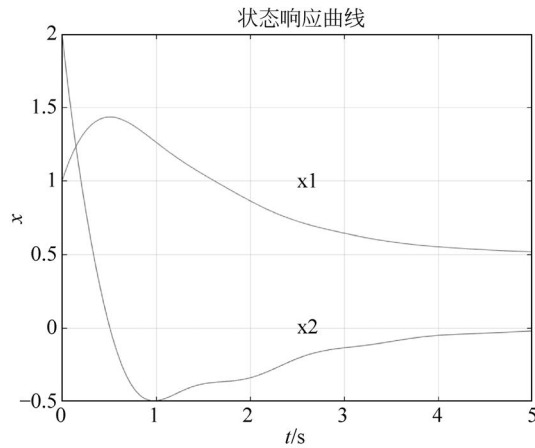


图 3-32 例 3-28 的状态响应曲线

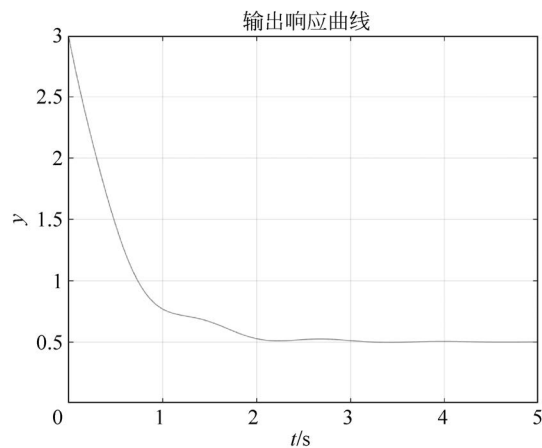


图 3-33 例 3-28 的输出响应曲线

4. 系统的任意状态响应和输出响应的解析解

在 MATLAB 中, `int()` 函数可用于进行计算函数积分的解析解。其程序如下

$$R = \text{int}(S, v, a, b)$$

其中, S 为被积函数表达式; v 为积分变量; a 和 b 分别为积分上限和下限。

利用 $\text{expm}()$ 函数和 $\text{int}()$ 函数, 可以对式 (3-132) 进行计算, 从而获得系统任意状态响应和输出响应的解析解。

例 3-29 试利用 MATLAB 计算例 3-28 系统的状态响应和输出响应。其中初始状态为 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 2]^T$, 输入信号为 $u(t) = 2t$ 。

解: 在 MATLAB 命令窗口输入以下命令

```
>> A = [0, 1; -2, -3];
>> B = [0; 1]; C = [1, 1]; D = [0];
>> x0 = [1; 2];
>> syms t tau;
>> ut = 2 * t;
>> xt = expm(A * t) * x0 + int(expm(A * (t - tau)) * B * ut, tau, 0, t)
>> yt = C * xt
```

可得到如下运行结果

```
xt =
4 * exp(-t) - 3 * exp(-2 * t) + t * exp(-2 * t) * (exp(t) - 1)^2
6 * exp(-2 * t) - 4 * exp(-t) + 2 * t * exp(-2 * t) * (exp(t) - 1)
yt =
3 * exp(-2 * t) + 2 * t * exp(-2 * t) * (exp(t) - 1) + t * exp(-2 * t) * (exp(t) - 1)^2
```

本章小结

时域分析法是研究系统的时间响应所包含的各种信息。本章建立了对系统时域分析和设计的基本概念, 重点讨论了连续控制系统的暂态性能分析、稳态性能分析、连续系统状态方程的求解和稳定性分析。

连续控制系统的动态响应较为直观地提供了系统相对稳定性和快速性的信息。其中, 为了分析方便, 一般会利用单位阶跃响应曲线来计算系统的暂态性能指标: 超调量、超调时间、调节时间和上升时间等。这些性能可以定量评价系统控制质量的优劣, 并且作为系统的设计要求。系统的动态性能取决于系统结构和参数, 即取决于闭环系统的零点和极点分布。可以用解析法求线性定常一阶、二阶系统的时域响应, 得到具体的暂态性能指标和响应曲线。这可用作分析低阶系统性能和设计计算的依据, 也是分析高阶系统的基础。利用主导极点法对高阶系统进行低阶近似, 能够近似分析和设计高阶系统。

系统稳态误差是评价系统稳态性能的指标, 它反映了系统的控制精度。稳态误差不仅与系统结构参数有关, 而且与外界作用(给定或干扰)形式紧密相关。利用终值定理法可以计算系统的稳态误差。除此以外, 也可以观察系统类型, 计算稳态误差系数, 利用误差系数法计算给定输入时的稳态误差。

上述的系统性能分析都是建立在系统的数学模型是微分方程或者传递函数上的。所以, 为了进行线性动态系统的运动分析, 基于线性系统的状态空间模型, 定义了状态转移矩阵的概念、性质及其计算。状态转移矩阵在系统运动分析中起到了重要作用, 掌握它的一系列性质及计算有助于对系统的运动分析。另外, 状态方程的求解方法是一种定量分析的方

法,通过求解出状态解进而求出系统的状态响应和输出响应。

控制系统的稳定性是系统正常工作的首要条件。系统稳定性可以分为外部稳定性和内部稳定性。对于一个线性定常系统,其外部稳定性通常用劳斯判据、赫尔维茨稳定判据进行判断;而内部稳定性通常用李雅普诺夫稳定性理论来分析。

最后,针对具体控制问题所提出的性能指标要求,利用线性定常系统的时域分析结果进行参数设计,并运用 MATLAB 分析系统的稳定性,绘制系统的动态响应曲线和确定系统的暂态性能指标,以及进行系统状态转移矩阵、状态响应和输出响应的计算。

习题 3

3-1 已知二阶系统的单位阶跃响应为 $y(t) = 10 - 12.5e^{-1.2t} \sin(1.6t + 53.1^\circ)$,求系统的超调量 $\sigma\%$,超调时间 t_p 和调节时间 $t_s (\Delta=5)$ 。

3-2 系统的方块图如图 3-34 所示。要求系统阻尼比 $\zeta=0.6$,试确定 K_t 值并计算系统的暂态性能指标(超调量 $\sigma\%$,超调时间 t_p 和调节时间 t_s ,其中 $\Delta=5$)。

3-3 单位负反馈的二阶系统,其单位阶跃输入下的系统响应如图 3-35 所示。要求:

- (1) 确定系统的开环传递函数;
- (2) 求出系统在单位斜坡输入信号作用下的稳态误差。

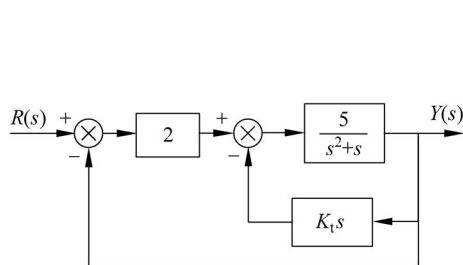


图 3-34 习题 3-2 系统方块图

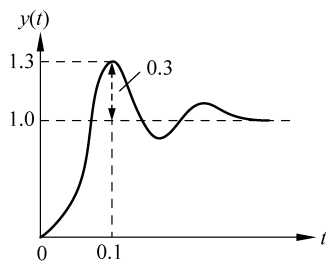


图 3-35 习题 3-3 系统单位阶跃响应

3-4 已知某三阶闭环系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{378}{(s + 3.56)(s + 0.2 + 0.5j)(s + 0.2 - 0.5j)}$$

试说明该系统是否有主导极点。如有,求出该极点,并简要说明该系统对单位阶跃输入的响应。

3-5 已知闭环系统的方块图如图 3-36 所示。

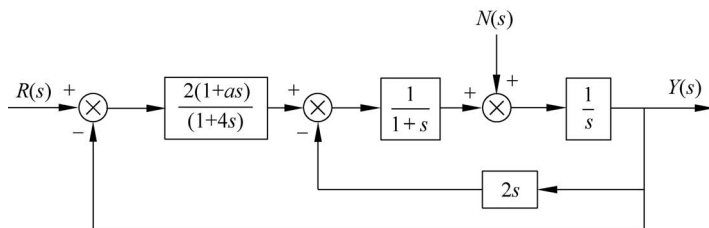


图 3-36 习题 3-5 系统方块图

- (1) 试用劳斯判据判断在 a 取何值时, 闭环系统才是稳定的;
- (2) 若系统的输入和扰动信号都是单位阶跃信号, 试求系统的稳态误差。

3-6 系统方块图如图 3-37 所示。设输入信号 $r(t) = 1 + at$, $K > 0$, $T > 0$, 控制器 $G_c(s)$ 为比例微分环节, 且比例系数为 1。试证明通过适当调节微分时间常数, 可使系统输出 $y(t)$ 相对输入 $r(t)$ 的稳态误差为 0。

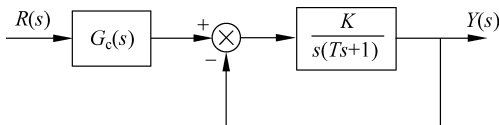


图 3-37 习题 3-6 系统方块图

3-7 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$\begin{aligned} (1) G(s) &= \frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}; & (2) G(s) &= \frac{K}{s(s^2+4s+200)} \\ (3) G(s) &= \frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}; & (4) G(s) &= \frac{s(s+1)(s+2)}{s^4+2s^3-s^2+4s+4} \end{aligned}$$

试求稳态位置误差系数 K_p 、稳态速度误差系数 K_v 、稳态加速度误差系数 K_a 。

3-8 设稳定闭环系统传递函数的一般形式为

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

误差定义取 $e(t) = r(t) - y(t)$ 。试证:

- (1) 系统在阶跃输入信号下, 稳态误差为零的充分条件为 $b_0 = a_0, b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 。
- (2) 系统在斜坡输入信号下, 稳态误差为零的充分条件为 $b_0 = a_0, b_1 = a_1, b_i = 0 (i = 1, 2, \cdots, m)$ 。

3-9 设线性定常系统的系统矩阵为 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$, 试用下列方法求系统的矩阵指

数函数 $e^{\mathbf{A}t}$ 。

- (1) 按定义求解;
- (2) 利用拉普拉斯变换法求解;
- (3) 利用特征值规范型求解;
- (4) 利用凯莱-哈密顿定理求解。

3-10 已知某二阶系统齐次状态方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, 其解为: 当 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} \\ e^{-t} \end{bmatrix}$; 当 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} + 2te^{-t} \\ e^{-t} + te^{-t} \end{bmatrix}$ 。求系统的状态转移矩阵 $\Phi(t)$ 和系统矩阵 $\mathbf{A}$ 。

3-11 设系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} u$$

求初始状态 $\mathbf{x}(0) = [1 \ 2 \ 1]^T$, 系统在单位阶跃输入作用下的状态响应。

3-12 已知线性连续定常系统的状态空间表达式为

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ -3 & a_2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \ 1] \mathbf{x} \end{cases}$$

其中, a_1 和 a_2 为待定实常数。

(1) 当输入 $u(t)=0$, 初始状态 $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 时, 状态方程的解为 $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ e^t \end{bmatrix}$, 试确定系

统矩阵中的参数 a_1 和 a_2 ;

(2) 当 $u(t)=\delta(t)$ 时, 系统的输出 $y(t)=3e^t+2e^{3t}$, 求系统的初始状态 $\mathbf{x}(0)$ 。

3-13 用劳斯判据推导二阶、三阶系统稳定的条件。

3-14 已知系统的特征方程如下。试用劳斯判据确定系统的稳定性, 并指出特征根的分布情况。

(1) $s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3 = 0$

(2) $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$

(3) $s^4 + 3s^3 + s^2 + 3s + 1 = 0$

(4) $s^6 + 4s^5 - 4s^4 + 4s^3 - 7s^2 - 8s + 10 = 0$

3-15 已知系统方块图如图 3-38 所示, 试确定闭环系统的稳定性。

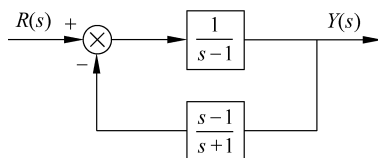


图 3-38 习题 3-15 系统方块图

3-16 设闭环系统的特征方程为 $2s^3 + 4s^2 + 6s + 1 = 0$ 。试用赫尔维茨稳定判据判别系统的稳定性。

3-17 试用李雅普诺夫第一法求系统 $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{x}$ 在平衡状态 $\mathbf{x}_e = 0$ 稳定的条件。