第1章

不确定投资组合选择

投资组合是多个证券的组合。投资组合选择是指在众多证券中选择一个能在收益最大化和风险最小化之间达到平衡的最优投资组合。传统教科书指出，人们应该根据哈里·马科维茨(Harry Markowitz)的投资组合理论选择投资组合，在该理论中，证券收益是从历史数据中获得的。然而，许多调查显示，投资者并不完全根据历史收益选择证券。相反，他们根据专家对证券收益的估计来选择证券（专家也可以是投资者本人）。那么，这些估计出的证券收益是否应该用随机变量刻画呢？马科维茨的投资组合理论还适用于证券选择吗？或者是否应该用模糊变量来描述估计出的证券收益？本章将回答这些问题，并介绍投资组合选择理论的一个新分支，即不确定投资组合选择。不确定投资组合选择是应用不确定理论基于专家估计出的证券收益来选择投资组合的方法。2010 年由黄晓霞[1]系统提出，之后许多学者对其进一步研究。

1.1 马科维茨模型

证券收益

证券收益指证券的收益率，由下式求得：

$$收益率=\frac{收入-支出}{支出}$$

在不考虑交易费用、税和股票分割的情况下，证券收益可以表示为

$$证券收益=\frac{证券的期末价格-期初价格+股息}{期初价格}$$

因此，一年内的收益可以表示为

$$一年内的收益=\frac{本年收盘价-上一年收盘价+股息}{上一年收盘价}$$

例如，如果投资者在第一年年末购买了证券，持有一年后，在第二年年末卖出，那么投资者在第二年年末的收益是

$$第二年年末的收益=\frac{第二年年末的收盘价-第一年年末的收盘价+第二年的股息}{第一年年末的收盘价}$$

这就是投资者在第一年年末投资 1 美元，第二年得到分红，然后第二年年末以收盘价卖出时所得到或损失的钱数(负收益代表亏损)。例如，如果第一年年末收盘价为 55 美元，第二年年末收盘价为 48 美元，同时第二年有 2 美元股息，那么该投资者第二年的收益率为

$$\text{第二年的收益率}=\frac{48-55+2}{55}=-0.091$$

即每投资 1 美元损失 9.1%。

马科维茨模型

马科维茨[2]将证券收益视为随机变量，通过证券的历史收益得到其概率分布。他用组合收益的期望值来度量投资收益，用方差度量投资风险，提出：投资者应在投资收益最大化和风险最小化之间寻求平衡。那么，投资者应在投资风险不超过事先设定的最大可容忍值的前提下追求投资收益最大化，即马科维茨模型可以表述为

$$\begin{cases}\max E[x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n]\\ \text{s.t.}:\\ \qquad V[x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_n\xi_n]\leqslant c\\ \qquad x_1+x_2+\cdots+x_n=1\\ \qquad x_i\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,n\end{cases}\tag{1.1}$$

其中，x_i 为投资在证券 i 上的资金比例；ξ_i 为证券 i 的随机收益；E 和 V 分别为随机变量的期望和方差；c 为投资者能够容忍的最大方差（风险）水平。x_i 非负表示不允许卖空，x_i 的和为 1 表示投资者将所有资金都投资到证券上。

应用马科维茨模型的一个例子

为了使用马科维茨模型，需要根据证券的历史收益计算投资组合收益的期望值和方差。

随机投资组合收益的期望值

在马科维茨模型中，投资组合的期望收益是组合的均值，通过证券收益的 N 个历史样本值计算得到。表 1.1 给出了 3 只虚拟证券，并显示了根据其过去 12 个月的收益计算的一个组合的预期收益。

表 1.1　根据证券的历史收益计算投资组合的期望收益和方差

月份 j	r_{1j}	r_{2j}	r_{3j}	$R_j=0.2r_{1j}+0.2r_{2j}+0.6r_{3j}$（使用 SUMPRODUCT）
2015 年 1 月	0.128 1	0.117 9	0.641 8	0.434 3
2015 年 2 月	−0.030 5	−0.042 1	0.059 8	0.021 4
2015 年 3 月	0.045 6	0.178 9	0.179 7	0.152 7
2015 年 4 月	0.128 6	−0.235 5	0.705 0	0.401 6
2015 年 5 月	0.104 8	0.147 4	−0.083 6	0.000 3
2015 年 6 月	−0.084 9	0.246 3	0.354 3	0.244 9
2015 年 7 月	0.226 4	0.030 5	−0.080 8	0.002 9
2015 年 8 月	0.370 6	0.145 5	−0.025 5	0.088 0
2015 年 9 月	−0.016 2	−0.022 2	0.296 3	0.170 1
2015 年 10 月	0.017 6	0.251 7	−0.267 8	−0.106 8
2015 年 11 月	−0.215 6	−0.312 4	−0.232 9	−0.245 3

续表

月份 j	r_{1j}	r_{2j}	r_{3j}	$R_j=0.2r_{1j}+0.2r_{2j}+0.6r_{3j}$（使用 SUMPRODUCT）
2015 年 12 月	0.201 1	0.298 1	0.324 8	0.294 7
均值		（使用 AVERAGE）		0.121 6
方差		（使用 VAR.P）		0.037 6

在表 1.1 中，r_{ij} 是证券 i 在第 j 个月的收益，R_j 表示一个由 20％的证券 1、20％的证券 2 和 60％的证券 3 所组成的证券组合收益的第 j 个样本。利用现有工具，例如 Microsoft Excel 中的“SUMPRODUCT”计算投资组合收益的 12 个样本，即

$$R_j=0.2r_{1j}+0.2r_{2j}+0.6r_{3j},\quad j=1,2,\cdots,12$$

其中，权重是投资在对应证券上的资金比例。利用数据 R_j 和函数“AVERAGE”可以很容易地得到组合收益的期望值。一般情况下，随机投资组合收益的期望值 $E[\xi]$由下式求得：

$$e=E[\xi]=\sum_{j=1}^{N}R_j/N=\sum_{j=1}^{N}(x_1r_{1j}+x_2r_{2j}+\cdots+x_nr_{nj})/N$$

随机投资组合收益的方差

随机投资组合收益的方差可以根据方差的定义得到，即

$$V[\xi]=E[(\xi-e)^2]=\sum_{j=1}^{N}(R_j-e)^2/N$$

例如，表 1.1 中随机投资组合收益的方差为

$$V[\xi]=\sum_{j=1}^{12}(R_j-0.121\,6)^2/12=0.037\,6$$

同样，也可以使用现有的工具得到方差。例如，依据单个证券收益的样本值，在 Microsoft Excel 中，首先使用“SUMPRODUCT”来计算投资组合的收益率 R_j，$j=1,2,\cdots,12$，然后使用 12 个 R_j 的值和函数“VAR.P”可以很容易地得到方差，见表 1.1。

使用马科维茨模型进行投资组合选择

在了解了如何计算投资组合收益的期望值和方差之后，投资者可以应用模型(1.1)寻找最优投资组合。举例来说，假设投资者想为 5 只证券选择一个投资组合，表 1.2 显示了这 5 只证券两年内的月收益率。

表 1.2　5 只证券的月收益率

时间	证券 1	证券 2	证券 3	证券 4	证券 5
2014 年 1 月	0.113 7	0.074 3	0.065 0	−0.028 8	−0.008 0
2014 年 2 月	−0.061 6	0.072 7	0.072 7	−0.060 8	0.064 7
2014 年 3 月	−0.041 3	0.151 6	−0.024 4	0.191 0	−0.032 9
2014 年 4 月	0.070 5	0.162 5	−0.200 0	0.189 7	0.002 6
2014 年 5 月	0.508 2	0.286 7	0.187 5	0.279 0	0.127 9
2014 年 6 月	−0.183 0	−0.067 4	0.099 4	0.311 6	−0.018 5
2014 年 7 月	−0.109 8	0.287 1	0.074 5	−0.195 0	−0.070 8

续表

时间	证券 1	证券 2	证券 3	证券 4	证券 5
2014 年 8 月	0.183 3	−0.404 1	−0.007 4	0.093 8	0.022 8
2014 年 9 月	−0.004 2	−0.044 5	0.027 4	0.286 5	0.002 5
2014 年 10 月	0.118 8	−0.074 0	−0.077 7	0.165 3	0.175 7
2014 年 11 月	−0.012 6	−0.032 5	−0.034 2	0.118 6	0.402 1
2014 年 12 月	0.188 2	0.012 2	0.498 6	0.516 8	0.265 8
2015 年 1 月	0.417 0	0.293 1	0.641 8	0.117 9	0.128 1
2015 年 2 月	0.071 5	0.308 4	0.059 8	−0.042 1	−0.030 5
2015 年 3 月	0.346 3	0.342 9	0.179 7	0.178 9	0.045 6
2015 年 4 月	0.106 5	0.376 3	0.705 0	−0.235 5	0.128 6
2015 年 5 月	−0.064 8	−0.047 3	−0.083 6	0.147 4	0.104 8
2015 年 6 月	−0.234 3	−0.352 9	0.354 3	0.246 3	−0.084 9
2015 年 7 月	0.281 4	0.329 2	−0.080 8	0.030 5	0.226 4
2015 年 8 月	0.771 0	0.528 3	−0.025 5	0.145 5	0.370 6
2015 年 9 月	0.070 4	0.023 1	0.296 3	−0.022 2	−0.016 2
2015 年 10 月	−0.112 6	−0.240 6	−0.267 8	0.251 7	0.017 6
2015 年 11 月	−0.172 8	−0.184 7	−0.232 9	−0.312 4	−0.215 6
2015 年 12 月	0.251 5	0.305 7	0.324 8	0.298 1	0.201 1

假设投资者将最大可容忍方差设为 0.015，马科维茨模型如下：

$$\begin{cases}\max E\left[x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3+x_4\xi_4+x_5\xi_5\right]\\ \text{s. t.:}\\ V\left[x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3+x_4\xi_4+x_5\xi_5\right]\leqslant 0.015\\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1\\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0\end{cases}\tag{1.2}$$

其中，ξ_i 为证券 i 的月收益率，$i=1,2,\cdots,5$。

使用 Microsoft Excel 工具栏中的“Solver”命令求解模型(1.2)，在计算组合的期望值和方差时，用上述例子中所使用的方法，只不过在表 1.1 中，组合里 3 只证券的投资比例已经分别确定为 0.2、0.2 和 0.6，而在计算模型(1.2)中组合的期望值和方差时，是用决策变量 $x_1,x_2,\cdots,x_5$ 代替预先确定的投资比例。在 Microsoft Excel 中运行工具栏中“Solver”命令，可以得到，为了在方差不大于 0.015 的情况下获得最大的期望收益，投资者应该根据表 1.3 分配资金，最大期望收益是 9.63%。

表 1.3 5 只证券的资金分配

证券 i	证券 1	证券 2	证券 3	证券 4	证券 5
投资比例	0	17.98%	14.91%	39.16%	27.95%

1.2 投资者会使用马科维茨方法吗

回顾可知，通过马科维茨方法选择投资组合完全基于证券的历史收益。但投资者在实践中真的会这么做吗？为了找到答案，作者对 15 名熟悉马科维茨方法的身为基金经理的

专业投资者进行了面对面的深入调查。在调查中，首先问道：

您是否完全根据股票过去的收益来选择投资组合？

没有人回答“是”，接下来，问道：

那么您是如何选择股票组合的呢？

尽管他们的描述不太一样，但他们都是先估计股票收益，然后选择投资组合。然而，用来估计股票收益的信息是多种多样的。关于过去收益数据的作用，6 名受访者表示历史数据是判断股票收益趋势的参考之一。其中一人表示过去的收益可以用来估计收益的稳定性，例如，基金经理 1 说，他会考虑股票的历史收益来感受有关股票收益的变化水平。为了预测股价，他会仔细分析股票公司的利润和行业前景，使用“研究财务报表并分析标的公司业绩”的表述，他强调，标的公司应该来自“有潜力的行业”，在行业中具有“竞争力”，而且特别指出，在分析股票公司业绩时，不仅要分析公司的财务报表，还要对公司进行实地调查。此外，他会密切关注与行业和公司相关的政府政策，以及市场主题和消息，他举了一个例子解释“市场主题”及其对股票价格的影响：中国政府提出了“一带一路”倡议，那么市场就有了“一带一路”的主题，并且支持它，这一主题意味着市场认为与“一带一路”相关的公司未来可能会有很好的发展，这一信念会推动其股价大幅上涨。此外，他表示，他会非常关注股票的交易量，特别是大宗交易商的交易量，因为他们的操作对股价有很大的影响。对于基金经理 2，他关注的是股票公司的业绩和行业前景，使用了“分析标的公司基本面”的表述，强调这些公司应该来自“成长型行业”，并在行业中具有“竞争力”。此外，他还强调了实地考察公司业绩的重要性，以及对政府政策的敏感性。表 1.4 总结了他们用来估计股票收益的信息。

表 1.4　估计股票收益的信息

经理编号	历史收益	公司的利润和前景	政府政策	市场消息	股票交易量
1	√	√	√	√	√
2		√	√		
3		√	√	√	
4		√	√	√	
5		√	√		
6	√	√	√		√
7	√	√	√		√
8		√	√	√	√
9	√	√	√	√	
10	√	√	√	√	√
11	√	√	√	√	√
12		√	√		√
13		√	√		√
14		√	√	√	
15		√	√		

从表 1.4 中，可以得到以下两点。

（1）在 15 名基金经理中，有 9 名经理完全不关心历史收益。

（2）即使 6 名关心历史收益的经理，他们也会关心公司的利润和前景以及政府的政策。此外，不少经理人还关心市场消息和股票交易量。

通过调查得知，他们没有人相信过去的数据能很好地反映未来，没有人完全根据过去的收益率数据得出股票收益率的分布函数。换句话说，没有人使用马科维茨方法来得到证券的收益分布函数。因此，可以说他们不会在实践中使用马科维茨方法。

1.3 投资者为什么不使用马科维茨方法

马科维茨方法完全使用过去的收益数据来获得证券未来的收益，这意味着认为从过去收益得到的分布函数的频率与未来的频率足够接近，证券收益可以用随机变量来刻画。只有当股票公司、股票市场或经济环境没有任何变化、没有意外事件或没有噪声时，这个假设才可能成立。然而，现实很难满足这些条件。因此，历史收益不能很好地反映股票未来的收益。为了更好地理解这句话，下面举三个真实的例子。

第一个例子使用不同历史时期的样本计算上证指数（指数代码为 000001）的月平均收益率，结果见表 1.5。可以看见，从不同历史时期的样本中得到的月平均收益率差异很大。如果认为过去收益数据的频率能够反映指数未来的月收益率，就会出现一个问题：投资者应该采用表 1.5 中的哪一个平均值作为上证指数未来的月收益率？这个问题很难回答！此外，从 2017 年 1 月 1 日之后的 3 个“未来”月收益率中可以看到，没有一个“历史”平均月收益率能够很好地反映表 1.6 中给出的上证指数 3 个“未来”月收益率。因此，过去的数据很难很好地反映未来的股票收益。

表 1.5 不同样本期上证指数月平均收益率

样　本　期	月平均收益率/%
2010/01/01—2017/01/01	0.181 6
2011/01/01—2017/01/01	0.386 7
2012/01/01—2017/01/01	0.851 3
2013/01/01—2017/01/01	0.954 3
2014/01/01—2017/01/01	0.141 6

表 1.6 上证指数 3 个“未来”月收益率

样　本　期	月收益率/%
2017/01/01—2017/01/31	1.789 1
2017/02/01—2017/02/28	2.778 2
2017/03/01—2017/03/31	−0.592 9

第二个例子是关于一家高科技公司的股票，即暴风集团股份有限公司（以下简称“暴风集团”）的股票。表 1.7 提供了暴风集团股票（代码 300431）自 2015 年 3 月 24 日在证券市场首次上市后连续 54 个工作日的收益率。如果投资者是在 2015 年 6 月 10 日有了这些数据，他们会选择买这只股票吗？由表 1.7 计算可得，历史日收益率的期望值为 6.681 8%，方差为 0.003 7。股票公司于 2015 年 3 月 24 日上市，在决策时间 2015 年 6 月 10 日，54 天的数

据均可获得，日收益 6.681 8%意味着年收益 2 438.218%，这只股票的预期收益是巨大的，方差是很小的。如果投资者使用马科维茨方法，他们应该购买这只股票。然而，现实情况是，如果投资者当天买进股票，他们将遭受巨大的损失。2015 年 6 月 10 日之后，直到 2020 年 11 月 9 日该股退市，股价从未超过 6 月 10 日的 116.3 元。事实上，该股退市时的股价仅为 0.28 元。因此，历史数据不能反映股票的未来收益率，使用马科维茨方法进行投资决策会导致巨大的损失。

表 1.7　暴风集团股票日收益率

日　　期	收益率/%	日　　期	收益率/%	日　　期	收益率/%
2015-03-25	10.06	2015-04-21	10.01	2015-05-18	10.00
2015-03-26	9.92	2015-04-22	10.01	2015-05-19	10.00
2015-03-27	10.09	2015-04-23	9.99	2015-05-20	10.00
2015-03-30	9.97	2015-04-24	10.01	2015-05-21	−6.92
2015-03-31	10.09	2015-04-27	10.02	2015-05-22	3.21
2015-04-01	9.96	2015-04-28	9.99	2015-05-25	−8.30
2015-04-02	10.02	2015-04-29	10.02	2015-05-26	−4.03
2015-04-03	9.99	2015-04-30	9.99	2015-05-27	2.23
2015-04-07	9.98	2015-05-04	10.00	2015-05-28	−9.41
2015-04-08	9.98	2015-05-05	10.00	2015-05-29	1.03
2015-04-09	9.98	2015-05-06	5.88	2015-06-01	5.48
2015-04-10	9.98	2015-05-07	10.01	2015-06-02	2.79
2015-04-13	10.03	2015-05-08	10.00	2015-06-03	10.00
2015-04-14	10.04	2015-05-11	10.01	2015-06-04	−10.00
2015-04-15	9.97	2015-05-12	10.00	2015-06-05	−5.26
2015-04-16	9.99	2015-05-13	10.00	2015-06-08	10.00
2015-04-17	9.97	2015-05-14	−4.42	2015-06-09	5.04
2015-04-20	10.04	2015-05-15	−6.49	2015-06-10	10.00

第三个例子是关于新型冠状病毒感染疫情在全球暴发的问题。在新冠肆虐的很长时间里，没有专家能够知道新型冠状病毒感染疫情何时结束，也没有经济学家能预测它对股票收益的影响。由于新型冠状病毒感染疫情的发生，很难用历史数据预测未来的股票收益。

在现实生活中，很少有股票公司、股票市场或经济环境处于没有任何意外事件、没有任何变化或者没有噪声的情况。此外，如果一只股票在提高其价格的因素上没有任何显著的有利变化，这样的股票就不可能有高回报，那么投资者就不会对这只股票感兴趣。因此，只有公司利润或其他因素发生有利且显著变化的股票，才会被投资者视为投资组合的候选股票。由于这些原因，股票收益在许多情况下不能完全通过历史收益数据反映，而必须由投资者估计给出。

1.4　如何理解投资者估计得到的收益分布

在讨论这个问题之前，先举一个简单的例子来说明如何根据专家（或投资者）的估计得到证券的收益分布。为不失一般性，本节将通过一只证券来说明该方法。关于根据专家或

投资者的估计得到证券收益分布的更多信息，请参阅第3章。

例1.1 假设一个投资者被问到“你认为证券收益是多少？”，他回答说：“我认为收益率将在-0.2到0.8之间。最小值为-0.2，最大值为0.8。”然后根据投资者的估计，可以得到以下两点。

(1) 相信收益率不低于-0.2的机会是100%，可以进一步转化为收益率低于-0.2的机会为0。

(2) 相信收益率不超过0.8的机会为100%。

可以看到，估计表达了投资者相信不确定收益事件将发生的机会水平，从第一句话得到一个点$(-0.2,0)$，从第二句话得到另一个点$(0.8,1)$。如果投资者对-0.2和0.8之间的收益没有更多的想法，则认为两点之间的收益应该会均匀分布在这两点之间。然后把这两点连接起来，得到一条直线，这条线是由专家估计得到的证券收益的分布，称为证券收益的信度函数，见图1.1。通过信度函数，可以知道投资者相信收益低于某一给定值的机会水平，例如，通过图1.1中的信度函数可知，投资者相信证券收益小于0.2的机会为0.4。

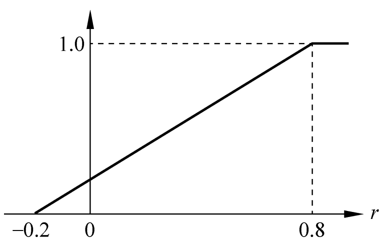

图1.1 证券收益的信度函数

有人认为，仍然可以将图1.1中证券收益的信度函数视为概率分布。然而，丹尼尔·卡尼曼(Daniel Kahneman)和阿莫斯·特沃斯基(Amos Tversky)[3]指出，大多数人过于重视不可能发生的事件，这意味着投资者通常估计的收益范围比证券的实际收益要大得多。许多关于证券投资的调查也证实了这一现象。那么，如果仍将证券收益的信度函数视为概率分布会怎样？接下来研究一个新的例子。

例1.2 假设投资者有20只独立的收益分布相同的证券，证券收益均匀分布在$[-0.2,-0.1]$。由于每只证券的最大收益是-10%，所以很容易得到

$$\Pr\{\text{“资金均匀投资于20只证券的收益率”} \leqslant 0\} = 1$$

也就是说，投资组合的收益率肯定小于0。

然而，投资者并不知道真正的情况。正如前面所讨论的，投资者只愿意考虑那些公司利润或其他因素发生有利且明显变化的证券，这样投资者就可以期望获得较高收益。因此，候选证券通常由投资者基于多种信息给出，而不是依据历史数据得到。在现实生活中，人们很少能准确估计出与现实情况相同的收益。假设在本例中，投资者估计出的证券收益的信度函数如图1.1所示，如果将收益的信度函数仍视为概率分布，则通过模拟可以得到

$$\Pr\{\text{“资金均匀投资于20只证券的收益率”} \leqslant 0\} \approx 0$$

不恰当地使用概率论，确定的事件可以被判断为不可能发生。

进一步假设无风险证券的收益为0.01，投资者考虑如何将资金配置到有风险证券和无风险证券中。投资者很谨慎，并设定了严格的风险控制要求，即投资组合收益小于0的概率必须等于或小于0.1%。那么如果将图1.1中的收益分布视为概率分布，则由于

$$E[\text{“资金均匀投资于20只证券的收益率”}] = 0.3$$

远远高于0.01的无风险收益率，并且

$$\Pr\{\text{“资金均匀投资于20只证券的收益率”} \leqslant 0\} < 0.001$$

投资者应将所有资金配置到这 20 只风险证券上，而不是无风险证券。然而，如果投资者遵循这一决定，他们将遭受至少 10％的损失，因为每只证券的最大实际收益只有－10％。由此可见，当由投资者估计得到的收益分布与未来累积频率不够接近时，将其作为概率分布是不恰当的，并会导致投资者蒙受巨大损失。因此，将投资者估计得到的收益分布视为概率分布是不合适的。值得注意的是，在现实中人们很可能会乐观地估计股票收益，这样的例子比比皆是，例如 1.3 节描述的暴风集团的股票。如果决策时间是在 2015 年 6 月 10 日，那么面对此前的收益数据，对收益的估计是[－0.2，0.8]已经非常"准确"了。

除了随机变量，能否用其他方式来刻画人们对证券收益的估计？有些人认为可以使用模糊变量。投资者会以模糊变量的方式估计收益吗？投资者可以用模糊集理论选择证券组合吗？让我们用一个例子来回答这些问题。

在模糊集理论中，隶属函数是一个基本概念，可能性是一个基本测度，每个模糊数都应该有一个隶属函数。根据模糊集理论，隶属函数与可能性测度的关系为

$$\mathrm{Pos}\{\xi \in \mathbf{R}\} = \sup_{x \in \mathbf{R}} \mu(x) \tag{1.3}$$

其中，ξ 为模糊变量；μ 为隶属函数；$\mathbf{R}$ 为实数集。

例 1.3　首先假设可以用模糊变量来描述投资者对证券收益的估计，那么模糊证券收益应该有其隶属函数。假设证券收益的隶属函数如图 1.2 所示，通过图 1.2 和式(1.3)可以推出

$$\mathrm{Pos}\{\text{“证券收益恰好是 0.10”}\} = 1 \tag{1.4}$$

$$\mathrm{Pos}\{\text{“证券收益不是 0.10”}\} = 1 \tag{1.5}$$

通过式(1.4)和式(1.5)可得

$$\mathrm{Pos}\{\text{“证券收益恰好是 0.10”}\} = \mathrm{Pos}\{\text{“证券收益不是 0.10”}\} \tag{1.6}$$

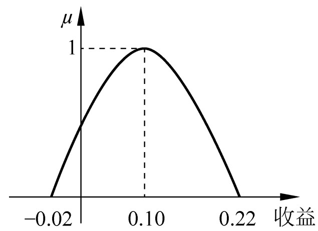

图 1.2　证券收益的隶属函数

让我们来理解一下式(1.4)和式(1.6)的含义。式(1.4)表示，证券收益正好是 0.10，不多也不少，可能性值为 1。但这也太巧了，证券收益率能不多不少正好是 0.10！从常识来看，人们会认为"证券收益恰好是 0.10"的可能性应该几乎为零，这意味着人们没有用模糊的方式思考。式(1.6)表明事件"证券收益恰好是 0.10"和事件"证券收益不是 0.10"发生的可能性相同。假设有一个赌局，如果证券收益率正好是 0.10，会得到 100 美元；如果证券收益率不是 0.10，需要支付 100 美元。你愿意接受这样的赌注吗？在调查了中国银行股票的收益率之后，告诉那些至少有一年股票投资经验的受访者，专家认为中国银行股票的月收益率在 0.08％～2.6％之间，他们可以在 0.08％～2.6％之间选择他们认为最有可能是股票收益率的任何数字。然后打赌：如果股票回报率恰好是受访者选择的数字，将付给受访者 100 美元；否则，受访者将支付 100 美元。调查了 30 位受访者，问他们是否愿意接受这样的赌注。他们中没有人接受这个赌注，因为他们都觉得，收益率恰好是他们选择的数字发生的可能性要比不是这个数字发生的可能性小得多，这个赌注太不公平了。调查结果再次表明，人们并没有以模糊的方式进行估计。此外，图书 *Uncertainty Theory*[4] 分析指出了模糊集理论的基础存在缺陷。因此，模糊集理论不适用于刻画证券收益的估计值，也不适合处理基于这些证券估计所进行的投资组合选择问题。

1.5 不确定投资组合选择

本书使用不确定理论作为工具来描述证券收益的估计值。不确定理论[5]创立于2007年，随后被许多学者研究，现在，它已发展成为一个基于公理体系的数学分支[6]，用于分析和处理不确定性问题。不确定测度是不确定理论的核心概念，被解释为一个人相信不确定事件可能发生的机会。不确定变量是不确定理论的另一个核心概念，用于刻画不确定数量。不确定分布在实践中称为信度函数，用来描述不确定变量可能的取值及机会。

不确定理论不同于模糊集理论，尽管它们都试图刻画人们的估计，但不确定理论在数学上是自洽的，而模糊集理论在数学上不是自洽的，在实践中容易导致错误的结果。模糊集理论不一致的例子可以在图书*Uncertainty Theory*[4]中找到，用模糊集理论推导出的错误结果也在1.4节的例1.3中给出。

不确定理论与概率论的区别在于发展这两种理论所依据的公理体系不同，其中最核心的区别在于乘积测度的定义。不确定理论的基本原理将在第2章介绍。粗略地说，乘积概率测度是单个事件的概率测度的乘积，而乘积不确定测度是单个事件不确定测度中的最小值。换句话说，不确定理论是一个最小化数学系统，而概率论是一个乘积数学系统。概率论和不确定理论源于不同的乘积测度，因而有不同的运算法则。概率论是处理真实频率的数学分支，而不确定理论是处理人们估计值的数学分支。当人们估计值的信度函数不接近真实的累积频率时，概率论的运算法则会放大估计值与真实频率之间的误差，然而，不确定理论不会进一步放大估计值的误差。

再来思考1.4节中的例1.2，将图1.1所示的20只风险证券收益的信度函数视为不确定分布，根据不确定理论，可以得到

$$\mathcal{M}\{\text{“资金均匀投资于 20 只证券的收益率”} \leqslant 0\} = 0.2 \tag{1.7}$$

其中，$\mathcal{M}$代表不确定测度，表明不确定事件发生的机会。利用不确定理论，某一确定发生的事件不会被判定为不可能事件。可以看到，投资于20只风险证券的投资组合收益率小于等于0的不确定测度值(机会)为20%。虽然20%的机会与实际情况相差甚远，但差异来自输入的误差。不确定理论没有进一步放大估计的误差，而概率论会进一步放大误差。在这种情况下，收益率小于等于0的机会为20%。这一结果可以提醒到投资者。如果投资者设定的风险控制要求与例1.2一样，即投资组合收益小于等于0的机会必须等于或小于0.1%，根据式(1.7)的结果，投资者不能将资金均匀投资于风险证券。事实上，由第2章将介绍的不确定理论的知识我们可以得到，投资者应该将他们所有的钱配置到无风险证券，那么他们肯定可以获得1%的收益率。

一般认为，一个适合解决决策问题的工具，理论上应该是自洽的，同时比其他工具更好地解决某类问题。在处理基于人们对证券的估计来选择证券组合的问题上，不确定理论满足这两个条件。因此，黄晓霞以不确定理论为工具，在2010年率先提出了不确定投资组合理论。[7]

本书将介绍不确定投资组合选择的理论与方法。如果把随机投资组合定义为一种基于证券收益的频率，应用概率论来选择证券组合的方法，那么，不确定投资组合选择可以定义为一种基于证券收益的不确定分布，运用不确定理论进行投资组合选择的方法。不确定投

资组合选择与随机投资组合选择有三个区别：第一，输入是不同的。随机投资组合理论的输入是过去收益数据的频率，它被认为与证券未来收益的频率足够接近，而不确定投资组合选择的输入是人依据多种信息估计得到的证券收益的不确定分布，也称信度函数。第二，随机投资组合选择和不确定投资组合选择采用不同的数学工具，前者使用概率论，后者使用不确定理论。第三个区别源于第二个区别，即两种理论中投资组合选择问题的数学性质和求解方法不同。

也许读者会问什么时候应该使用不确定投资组合选择。为了选择一个投资组合，首先需要得到证券未来收益的分布。如果你相信得到的分布足够接近未来收益的频率，那么应该使用随机投资组合选择；否则，必须把得到的分布作为信度函数，并使用不确定投资组合选择（参见图 1.3）。

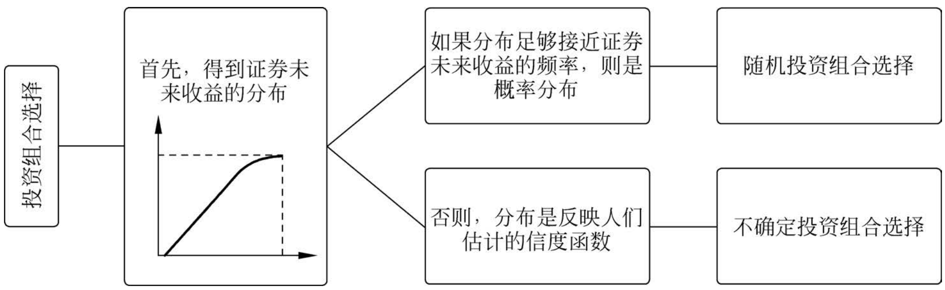

图 1.3　何时使用不确定投资组合选择