第1章

线性代数基础知识

本章主要介绍行列式、矩阵的基本概念及常用的运算，通过示例并借助 MATLAB 仿真软件，加深学生对行列式和矩阵基础知识的理解。

本章需要重点掌握矩阵的乘法运算和逆运算，其中矩阵的逆运算是本章的难点。行列式、矩阵是学习现代控制理论的数学基础，也是数学工具。

1.1 行　列　式

1.1.1 n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究二阶、三阶行列式的结构。

1. 二阶行列式的定义

定义：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \tag{1-1}$$

式中：$a_{ij}(i=1,2;\ j=1,2)$称为行列式(1-1)的元素或元；元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列；位于第 i 行第 j 列的元素称为行列式(1-1)的(i,j)元。

2. 三阶行列式的定义

定义：

$$\begin{aligned} D&=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}- \\ &\quad a_{11}a_{32}a_{23}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \end{aligned} \tag{1-2}$$

式(1-2)的定义表明三阶行列式包含 6 项，每项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正负号。

【例 1-1】 计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$。

解：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times 4-3\times 2=4-6=-2$$

【例 1-2】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$。

解：

$$\begin{aligned} D &= 1\times 2\times(-2)+2\times 1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times 4- \\ &\quad 1\times 1\times 4-2\times(-2)\times(-2)-(-4)\times 2\times(-3) \\ &= -4-6+32-4-8-24=-14 \end{aligned}$$

由此可把二阶、三阶行列式推广到一般情形。

3. *n* 阶行列式的定义

定义：设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表。记作

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-3}$$

也记作 $\det(a_{ij})$，其中 a_{ij} 为行列式 D 的 (i,j) 元。

注意：当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，不要与绝对值符号混淆。

上（下）三角行列式：主对角线以下（上）的元素都为 0 的行列式叫作上（下）三角行列式。特别地，除主对角线以外，其余元素都为 0 的行列式叫作对角行列式。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \tag{1-4}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n \tag{1-5}$$

1.1.2 行列式的性质

首先需要弄清楚转置行列式的概念，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-6}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式。

性质 1：行列式 D 与它的转置行列式 D^{T} 相等，即 $\det(a_{ij})=\det(a_{ji})$。

性质 2：对换行列式的两行（列），行列式变号。若行列式 D 存在两行（列）完全相同，则 $D=0$。

性质 3：行列式的某一行(列)中的所有元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘以此行列式。

性质 4：行列式中如果有两行(列)元素成比例，则此行列式等于零。

性质 5：若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和，例如第 i 列的元素都是两数之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6：把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一数，然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式不变。例如，以数 k 乘以第 j 列加到第 i 列上，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(i\neq j)$$

以上性质的证明略。

性质 5 表明：当某一行(列)的元素为两数之和时，行列式关于该行(或列)可分解为两个行列式，若 n 阶行列式每个元素都表示成两数之和，则它可分解成 2^n 个行列式。

性质 2、3、6 介绍了行列式关于行和列的三种运算，利用这些运算可简化行列式的计算。

1.1.3 行列式的计算

【例 1-3】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$。

解：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}\rightarrow(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\rightarrow(-1)\times\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}\rightarrow$$

$$(-1)\times(-1)\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & -8 & 4 & -6\\0 & 16 & -2 & 7\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 8 & -10\\0 & 0 & -10 & 15\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\0 & 2 & 1 & -1\\0 & 0 & 8 & -10\\0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{vmatrix}=40$$

【例 1-4】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}$。

解：这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6，把第 2、3、4 行同时加到第 1 行，提取公因子 6，然后各行减去第 1 行，即

$$D=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}6 & 6 & 6 & 6\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\rightarrow 6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 3 & 1 & 1\\1 & 1 & 3 & 1\\1 & 1 & 1 & 3\end{vmatrix}\rightarrow 6\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 2 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=48$$

【例 1-5】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\a & a+b & a+b+c & a+b+c+d\\a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d\\a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d\end{vmatrix}$。

解：从第 4 行开始，后行减前行，即

$$D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\a & a+b & a+b+c & a+b+c+d\\a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d\\a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d\\0 & a & a+b & a+b+c\\0 & a & 2a+b & 3a+2b+c\\0 & a & 3a+b & 6a+3b+c\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}a & b & c & d\\0 & a & a+b & a+b+c\\0 & 0 & a & 2a+b\\0 & 0 & a & 3a+b\end{vmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d\\0 & a & a+b & a+b+c\\0 & 0 & a & 2a+b\\0 & 0 & 0 & a\end{vmatrix}=a^4$$

1.2 行列式按行(列)展开

一般来说，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算简便，那么自然而然就会考虑到是否可用低阶行列式来表示高阶行列式，这里首先介绍余子式和代数余子式。

定义：在 n 阶行列式中，把(i,j)元 a_{ij} 所在的第i 行和第j 列划去后，剩余下来的 $n-1$ 阶行列式叫作(i,j)元 a_{ij} 的余子式，记作 M_{ij}。

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{1-7}$$

A_{ij} 叫作(i,j)元 a_{ij} 的代数余子式。

【例 1-6】 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$中$(3,2)$元 a_{32} 的余子式和代数余子式。

解：行列式 D 中$(3,2)$元 a_{32} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{32}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-M_{32}$$

定理：行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n) \tag{1-8}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{1-9}$$

这个定理叫作行列式按行(列)展开法则，利用这一法则并结合行列式的性质，可以简化行列式的计算。

【例 1-7】 计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$。

解：

$$D \to \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \to \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix}=40$$

1.3 矩　　阵

1.3.1 矩阵的基本概念

定义：由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排列的 m 行 n 列的数表，称为 m

行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，记作

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-10}$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，简称为元；数 a_{ij} 位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行和第 j 列，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元。元素是实数的矩阵称为实矩阵，元素是复数的矩阵称为复矩阵。行数和列数都等于 n 的矩阵称为 n 阶矩阵或 n 阶方阵。

只有一行的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_1 a_2 \cdots a_n)$，称为行矩阵，又称为行向量。为避免元素间的混淆，行矩阵也记为 $\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$。

只有一列的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$，称为列矩阵，又称为列向量。

两个矩阵的行数和列数都相等时，称它们是同型矩阵。如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，并且它们的对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，那么称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$$

元素都是零的矩阵称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$。

注意：不同型的零矩阵是不同的。

若一个 n 阶方阵从左上角到右下角的直线（叫作（主）对角线）上的元素都是 1，其他元素都是 0，即

$$\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{1-11}$$

则称该方阵 $\boldsymbol{I}$ 为单位阵。

若一个 n 阶方阵从左上角到右下角的直线（叫作（主）对角线）上的元素是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，其他元素都是 0，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{1-12}$$

则称该方阵 $\boldsymbol{A}$ 为对角矩阵，简称为对角阵，记为 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

1.3.2 矩阵的基本运算

1. 矩阵的加法

定义：设有两个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-13}$$

注意：只有当两个矩阵是同型矩阵时，这两个矩阵才能进行加法运算。

矩阵的加法满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵)：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

2. 数与矩阵相乘

定义：数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记为 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$，规定为

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1-14}$$

数与矩阵相乘满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，λ、μ 为数)：

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{B}+\lambda\boldsymbol{A}$

3. 矩阵与矩阵相乘

定义：设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是一个 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是一个 $s\times n$ 矩阵，那么规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{it}b_{tj}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj} \tag{1-15}$$

式中：$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$。

记作
$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$$

若一个 $1\times s$ 行矩阵与一个 $s\times 1$ 列矩阵相乘，其结果是一个 1 阶方阵，也就是一个数。

【例 1-8】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$。

解：因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数，所以矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可

以相乘，其乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 是一个 2×3 矩阵，即

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3 & -1\\2 & 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\-1 & 1 & 3\\2 & 0 & 1\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times4+0\times(-1)+3\times2+(-1)\times1 & 1\times1+0\times1+3\times0+(-1)\times3 & 1\times0+0\times3+3\times1+(-1)\times4\\2\times4+1\times(-1)+0\times2+2\times1 & 2\times1+1\times1+0\times0+2\times3 & 2\times0+1\times3+0\times1+2\times4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9 & -2 & -1\\9 & 9 & 11\end{bmatrix}$$

【例 1-9】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{bmatrix}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}$ 及 $\boldsymbol{BA}$。

解：由矩阵与矩阵相乘的定义可知，

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-16 & -32\\8 & 16\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}2 & 4\\-3 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4\\1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$$

在例 1-8 中，$\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵，乘积 $\boldsymbol{AB}$ 有意义而 $\boldsymbol{BA}$ 却没有意义。由此可见，在矩阵的乘法中必须注意矩阵相乘的顺序，$\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{B}$ 被 $\boldsymbol{A}$ 左乘）的乘积，$\boldsymbol{BA}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，$\boldsymbol{AB}$ 有意义时 $\boldsymbol{BA}$ 可以没有意义。又若 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但 $\boldsymbol{AB}$ 是 m 阶方阵，$\boldsymbol{BA}$ 是 n 阶方阵，当 $m\neq n$ 时，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，即使 $m=n$ 时，即 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是同阶方阵，$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 仍然有可能不相等。总之，矩阵的乘法不满足交换律，即在一般情况下，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，但仍满足下列的结合律和分配律：

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

(2) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$（其中 λ 为数）

(3) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}\qquad(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$

对于单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，有

$$\boldsymbol{IA}=\boldsymbol{AI}=\boldsymbol{A}$$

可见单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 在矩阵乘法中的作用类似于数 1。

4. 矩阵的转置

定义：把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫作 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$。

矩阵的转置也是一种运算，满足下列运算规律（假设运算都是可行的）：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

【例 1-10】 已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\1 & 3 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 7 & -1\\4 & 2 & 3\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$。

解：

方法一：
$$AB=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{bmatrix}$$

$$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}$$

方法二：
$$(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{bmatrix}$$

5. 方阵的行列式

定义：由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式(各元素的位置不变)，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$。

注意：方阵与行列式是两个不同的概念，n 阶方阵是 n^2 个数按一定方式排成的数表，而 n 阶行列式则是这些数按一定的运算法则所确定的一个数。

由 $\boldsymbol{A}$ 确定 $|\boldsymbol{A}|$ 的这个运算满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，λ 为数)。

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$

(3) $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$

6. 共轭矩阵

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复矩阵时，用 $\bar{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数，$\bar{\boldsymbol{A}}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵。共轭矩阵满足下列运算规律(设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为复矩阵，λ 为复数，且运算都是可行的)。

(1) $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\bar{\boldsymbol{A}}+\bar{\boldsymbol{B}}$

(2) $\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\bar{\lambda}\bar{\boldsymbol{A}}$

(3) $\overline{\boldsymbol{AB}}=\bar{\boldsymbol{A}}\bar{\boldsymbol{B}}$

1.3.3 逆阵

定义：对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果有一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则说矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，并把矩阵 $\boldsymbol{B}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，简称为逆阵。$\boldsymbol{A}$ 的逆阵记作 $\boldsymbol{A}^{-1}$。如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，那么 $\boldsymbol{A}$ 的逆阵是唯一的。

定理 1 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$。

定理 2 若 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{1-16}$$

其中，$\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随阵，记作 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ji}$，$M_{ji}$ 为 $|\boldsymbol{A}|$ 的余子式。

若 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$\boldsymbol{A}$ 称为奇异矩阵，否则称为非奇异矩阵。

方阵的逆阵满足下列运算规律。

(1) 若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$。

（2）若 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 $\lambda\boldsymbol{A}$ 可逆，且 $(\lambda\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}^{-1}$。

（3）若 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为同阶矩阵且均为可逆，则 $\boldsymbol{AB}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$。

【例 1-11】 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$ 的逆阵。

解：由定理 2 可知，$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}$。则

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{vmatrix}=s\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix}$$

$$=s(s^2+3s+2)+1=s^3+3s^2+2s+1$$

伴随阵 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ji}$，再计算 $|\boldsymbol{A}|$ 的余子式。

$$M_{11}=\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}=s^2+3s+2 \quad M_{12}=\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s+3 \end{vmatrix}=1 \quad M_{13}=\begin{vmatrix} 0 & s \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-s$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & s+3 \end{vmatrix}=-s-3 \quad M_{22}=\begin{vmatrix} s & 0 \\ 1 & s+3 \end{vmatrix}=s^2+3s \quad M_{23}=\begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2s+1$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix}=1 \quad M_{32}=\begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-s \quad M_{33}=\begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix}=s^2$$

伴随阵 $\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}=\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s+3 & 1 \\ -1 & s^2+3s & s \\ -s & -2s-1 & s^2 \end{bmatrix}$，所以有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\mathrm{adj}\boldsymbol{A}_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}=\frac{1}{s^3+3s^2+2s+1}\begin{bmatrix} s^2+3s+2 & s+3 & 1 \\ -1 & s^2+3s & s \\ -s & -2s-1 & s^2 \end{bmatrix}$$

1.4 MATLAB 在线性代数中的应用

MATLAB 的全称为 Matrix Laboratory，由此可知，MATLAB 主要是处理矩阵，即使是常数，也可以看作 1×1 阶的矩阵。

1.4.1 矩阵

在 MATLAB 中，矩阵的构成包括以下要素。

（1）整个矩阵用“[ ]”括起来。

（2）矩阵各元素之间使用空格或“，”分隔。

（3）矩阵的行与行之间用“；”或回车符区别。

（4）矩阵在 MATLAB 中按先列后行的方式储存。