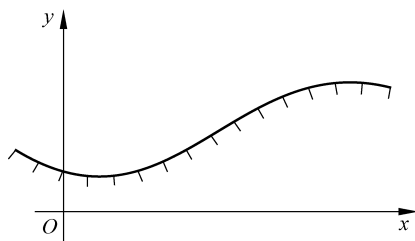


第 3 章 微分与导数



万物皆处于变化之中,而不同事物的变化又会相互产生影响:气候专家估算,全球平均气温如果上升 1°C ,海平面会上升 0.6m 。经济学研究表明,一个国家的国民平均受教育年数每增加 1 年,该国的长期经济增长率可以增加 0.6% ;通过统计数据,全球粮食收成每减少 1 个百分点,粮食产品价格将上涨 8.5% ……对这种关联的研究,可以帮助我们进一步了解自然与社会的基本规律。而在数学世界里,我们关心两个变量是怎样相互影响的:因变量 y 随着自变量 x 的变化会呈现怎样的趋势?这就是本章所介绍的主题:导数。

学 习 目 标	重 要 性	难 度
明确导数的基本概念,熟练掌握基本函数的导数运算	★★★★	★★☆☆
了解隐函数、参数方程、反函数等特殊类型函数的求导过程	★★☆☆	★★★★
学会用洛必达法则进行函数极限运算	★★☆☆	★★☆☆
掌握二阶导数以及高阶导数的运算	★★★★	★★★★
能够利用导数判断函数的单调性、凹凸性、极值点与拐点	★★★★	★☆☆☆
掌握微分的运算法则,求解相关变化率问题	★★★★	★★★★
利用导数实现超越方程数值求解	★★☆☆	★★★★

在完成本章的学习后,你将能够独立解决下列问题:

- ◆ 函数 $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x - 5$ 的图像曲线分别在哪些位置是递增的、在哪些位置是递减的?
- ◆ 函数 $y = \ln x + \frac{e}{x} (x > 0)$ 的最小值是多少?
- ◆ 能否利用简单的加减乘除,近似计算 $\sqrt{15.99}$ 与 $\sqrt[3]{8.01}$ (精确到小数点后 2 位)?
- ◆ 利用计算器获得方程的解: $\cos x - x = 0$ (精确到小数点后 3 位)。



3.1 导数的基本概念与运算

在函数关系 $y=f(x)$ 中, 导数被记为 $\frac{dy}{dx}$ 或 $f'(x)$, 它可以反映出 y 随着 x 变化而呈现的变化趋势。如果导数为正, 则 y 随着 x 增大而增大; 如果导数为负, 则 y 随着 x 增大而减小。导数的绝对值越大, 则变化得越快。在直线函数“ $y=kx+b$ ”中, 斜率 k 就扮演着导数的角色, x 每增长 1 个单位, y 就变化 k 个单位。现在我们将目光转移到曲线中, 去描述曲线的变化情况。

3.1.1 变化率与导数

设函数 $y=f(x)$ ($0 \leq x \leq 10$), 其函数图像由 4 段折线构成, 如图 3.1 所示, 其依次经过 $(0,0)$ 、 $(2,1)$ 、 $(4,3.5)$ 、 $(7,4)$ 和 $(10,2.5)$ 。

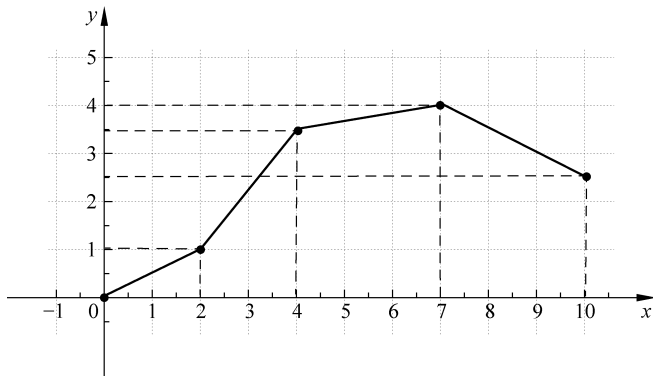


图 3.1 y 与 x 的折线关系图

用“ Δx ”代表 x 的变化量, 用“ Δy ”代表 y 的变化量, 两者的比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 就是 y 随着 x 的变化率, 在这里需要分区间讨论这个值的情况:

- ◆ 在点 $(0,0)$ 到点 $(2,1)$ 之间, $\Delta x=2$, $\Delta y=1$, 此处 y 随 x 的变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{2}$;
- ◆ 在点 $(2,1)$ 到点 $(4,3.5)$ 之间, $\Delta x=2$, $\Delta y=2.5$, 此处 y 随 x 的变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5}{4}$;
- ◆ 在点 $(4,3.5)$ 到点 $(7,4)$ 之间, $\Delta x=3$, $\Delta y=0.5$, 此处 y 随 x 的变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{6}$;
- ◆ 在点 $(7,4)$ 到点 $(10,2.5)$ 之间, $\Delta x=3$, $\Delta y=-1.5$, 此处 y 随 x 的变化率为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{1}{2}$ 。

.....

基于这种分析模式, 我们将目光转向曲线的函数变化率。比如, 图 3.2 中绘制了一条抛物线: $y=\frac{x^2}{10}$ 。以点 $A(6,3.6)$ 为例, 我们描述函数在该点附近的变化率。

从 A 点出发, 在函数曲线上找到与其相邻的点 A' , 两者的横坐标相差 Δx , 点 A' 的横坐标为 $(6+\Delta x)$, 根据抛物线方程得出点 A' 纵坐标为 $\frac{(6+\Delta x)^2}{10}$ 。综上所述, A 与 A' 的坐标如下:

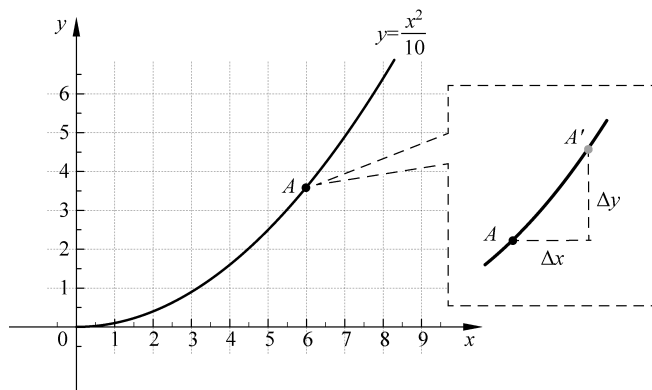


图 3.2 抛物线中的变化率

$$A(6, 3.6) \quad (3.1.1)$$

$$A'(6 + \Delta x, \frac{(6 + \Delta x)^2}{10}) \quad (3.1.2)$$

两者的纵坐标之差 Δy 为

$$\Delta y = \frac{(6 + \Delta x)^2}{10} - 3.6 = \frac{6\Delta x}{5} + \frac{(\Delta x)^2}{10} \quad (3.1.3)$$

在 A 到 A' 这一段上,变化率为 Δy 与 Δx 的比值:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6}{5} + \frac{\Delta x}{10} \quad (3.1.4)$$

我们的最终目的是精确描述 A 点处的变化率,所以需要让 A' 与 A 尽量接近,最理想的状态下就是无限接近,由此设定“ $\Delta x \rightarrow 0$ ”,进一步计算式(3.1.4):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{6}{5} + \frac{\Delta x}{10} \right) = \frac{6}{5} \quad (3.1.5)$$

由此我们可以说,该段抛物线在 A 点处的变化率为 $\frac{6}{5}$ 。如果以该值作为斜率,并且通过 $A(6, 3.6)$,则得到一个直线方程:

$$y = \frac{6}{5}x - \frac{18}{5} \quad (3.1.6)$$

该直线称为函数曲线在 A 点处的**切线**, A 点被称为**切点**。由此可以看出,邻点 A' 无限向 A 靠近,这个过程中直线 AA' 所趋近的最终状态就是式(3.1.6)所表示的切线。

同样地,对于抛物线上任意一点 $\left(x_0, \frac{x_0^2}{10}\right)$,其邻点坐标为 $\left(x_0 + \Delta x, \frac{(x_0 + \Delta x)^2}{10}\right)$,仿照式(3.1.5)可以求出该点处的变化率,也是该点处的切线斜率:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{(x_0 + \Delta x)^2}{10} - \frac{x_0^2}{10}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{x_0}{5} + \frac{\Delta x}{10} \right) = \frac{x_0}{5} \quad (3.1.7)$$

通过上述分析过程,对于一个函数曲线 $y = f(x)$,为了求得曲线上一点 $(x, f(x))$ 处的变化率,需要找到相近的一个邻点 $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$,在两者无限接近的情况下,求得纵坐标变化量 Δy 与横坐标变化量 Δx 的比值即可。为了能够让两者无限接近,需要指定 $\Delta x \rightarrow 0$ 。

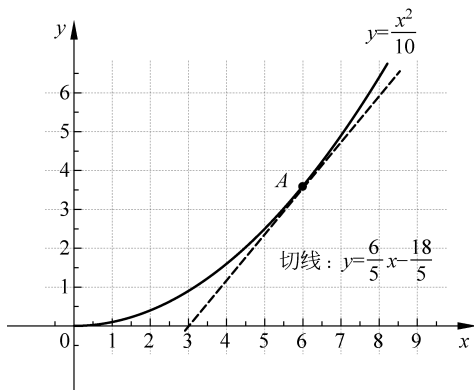


图 3.3 函数曲线的切线

为了简化符号,我们将“无限趋于 0 的 Δx ”简记为“ dx ”,同样有“无限趋于 0 的 Δy ”简记为“ dy ”,于是导数可以写为如下形式:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

导数定义

对于一个函数 $y = f(x)$,其导数 $f'(x)$ 可以反映出因变量 y 随自变量 x 的变化趋势,
 $f'(x)$ 也可以记为 y' 或 $\frac{dy}{dx}$ 。导数的本质是一个极限比值,其表达式为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.1.8)$$

对于某个函数 $f(x)$,式(3.1.8)存在相应的极限值,就称它是有导数的,也叫作“可导的”。在一些特殊情景下,可能无法求得导数,我们将在 3.1.4 节中给出案例和分析。基于式(3.1.8),接下来尝试求出几个基本函数的导数 $f'(x)$ 。

1. $y = x^3$ 的导数为 $y' = 3x^2$

曲线上的点为 (x, x^3) ,其相应的邻点即为 $(x + \Delta x, (x + \Delta x)^3)$,根据导数定义表达式(3.1.8),则导数为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2] = 3x^2 \quad (3.1.9)$$

2. $y = \sin x$ 的导数为 $y' = \cos x$

曲线上的点为 $(x, \sin x)$,其相应的邻点即为 $(x + \Delta x, \sin(x + \Delta x))$,根据导数定义表达式(3.1.8),则导数的计算过程如下:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos \Delta x + \cos x \cdot \sin \Delta x - \sin x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\cos \Delta x - 1) + \cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\cos \Delta x - 1)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \sin \Delta x}{\Delta x} \\
 &\quad (\text{由于 } \Delta x \text{ 为无穷小, 因此可以进行等价代换, } (1 - \cos \Delta x) \sim \frac{\Delta x^2}{2}, \sin \Delta x \sim \Delta x) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \left(-\frac{\Delta x^2}{2}\right)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \Delta x}{\Delta x} = \cos x \quad (3.1.10)
 \end{aligned}$$

3. $y=e^x$ 的导数为 $y'=e^x$

曲线上的点为 (x, e^x) , 其相应的邻点即为 $(x + \Delta x, e^{x+\Delta x})$, 根据导数定义表达式 (3.1.8), 则导数的计算过程如下:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} \\
 &\quad (\text{由于 } \Delta x \text{ 为无穷小, 因此可以进行等价代换, } (e^{\Delta x} - 1) \sim \Delta x) \quad (3.1.11) \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x \Delta x}{\Delta x} = e^x
 \end{aligned}$$

以上 3 个函数作为举例, 可以帮助我们更清楚地看到导数的计算过程。3.1.2 节将给出更高效的导数运算方法。

3.1.2 导数基本运算

3.1.1 节的式 (3.1.8) ~ 式 (3.1.11) 给出了导数的基本定义以及 3 种常见函数的导数。表 3.1 则给出了更多基本函数的导数情况, 需要各位同学能够熟记, 从而方便后续计算。

表 3.1 常见函数的导函数 (表中的 n, k, a 均属于常数)

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^n (n \neq 0)$	nx^{n-1}	$\log_a x (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$
$k (k \in \mathbf{R})$	0	e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$	a^x	$a^x \ln a$
$\cos x$	$-\sin x$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

导数的四则运算公式

如果函数 u 与 v 各自存在导数 u' 与 v' , 则有下列运算规则:

- (1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- (2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- (3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$



计算下列函数的导数:

$$(1) y = \ln x \cdot \sin x$$

$$(2) y = \frac{e^x}{x}$$

$$(3) y = (3x+4)^2$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt[3]{5x^2}}$$

解:

$$(1) y' = (\ln x)' \sin x + \ln x (\sin x)' = \frac{\sin x}{x} + \ln x \cos x$$

$$(2) y' = \frac{x(e^x)' - e^x(x)'}{x^2} = \frac{xe^x - e^x}{x^2}$$

$$(3) y' = (9x^2 + 24x + 16)' = 18x + 24$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot x^{-\frac{2}{3}}, y' = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{5x^5}}$$

设函数 $y = \ln(3x^2 + 4 + \sin x)$, 试求出导数 $\frac{dy}{dx}$ 。等号右侧的表达式, 可以看作 $f(x) = \ln x$ 与 $g(x) = 3x^2 + 4 + \sin x$ 的组合, 这时称 $\ln(3x^2 + 4 + \sin x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的复合函数, 记为 $f(g(x))$ 。为了求出复合函数的导数, 可以采用以下两种思维模型。

1. 变量传递

对于函数 $y = \ln(3x^2 + 4 + \sin x)$, 将其中的 $(3x^2 + 4 + \sin x)$ 看作一个整体, 记为 t 。于是得到了两个方程:

$$y = \ln t \quad (3.1.12)$$

$$t = 3x^2 + 4 + \sin x \quad (3.1.13)$$

我们可以求出 y 对 t 的导数, 以及 t 对 x 的导数, 将两者相乘就成为了 y 对 x 的导数, 如下式所示:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \quad (3.1.14)$$

这就是求导的链式法则: y 受到 t 的控制, 而 t 受到 x 的控制, 因而 y 关于 x 的变化率 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ 就是两层变化率 $\left(\frac{dy}{dt} \text{ 与 } \frac{dt}{dx}\right)$ 的乘积。该过程可参考图 3.4。

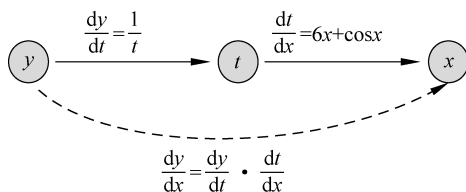


图 3.4 导数计算链式法则示意图

计算式(3.1.14)可得到最终结果:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t} \cdot (6x + \cos x) = \frac{6x + \cos x}{3x^2 + 4 + \sin x} \quad (3.1.15)$$

学生:为什么链式法则是变化率层层相乘,而不是层层相加或者其他运算呢?

老师:举个例子你就明白了。以石油与农业举例,石油产业与我们的生活密切相关:如果一桶石油价格上涨1元,那么一吨化肥的价格就要平均上涨12元;如果一吨化肥价格上涨1元,则一吨蔬菜的价格就会平均上涨14元。那么请问,如果一桶石油的价格上涨1元,则一吨蔬菜价格会受到多少影响?

学生:应该是 12×14 , 也就是168元。

老师:所以你看,化肥价格随石油的变化率为12,而蔬菜价格随化肥的变化率为14,所以最后不难得出蔬菜随着石油的变化率为中间过程变化率的乘积。

2. 逐层求导

对于 $y = \ln(3x^2 + 4 + \sin x)$, 可以将其看作两层函数, 将两层函数的导数依次求出再相乘即可: 最外层的函数是 $\ln$ 函数, 自变量为 $(3x^2 + 4 + \sin x)$, 则该层的导数为 $\frac{1}{3x^2 + 4 + \sin x}$; 内层是另外一个函数 $(3x^2 + 4 + \sin x)$, 其导数为 $(6x + \cos x)$ 。如图 3.5 所示, 每次求导的函数部分用灰色区域标注, 整个过程由两步构成。

$$\begin{aligned} y' &= [\ln(3x^2 + 4 + \sin x)]' \\ &\downarrow \\ y' &= \frac{1}{3x^2 + 4 + \sin x} \cdot (3x^2 + 4 + \sin x)' \\ &\downarrow \\ y' &= \frac{1}{3x^2 + 4 + \sin x} \cdot (6x + \cos x) \end{aligned}$$

图 3.5 复合函数逐层导数计算示意图

复合函数及其导数的计算

设有两个一元函数 $u(x)$ 与 $v(x)$, 倘若将 $v(x)$ 的函数值作为 $u(x)$ 的自变量, 组合成为新的函数 $f(x) = u(v(x))$, 则称 $f(x)$ 这个函数是函数 u 与 v 的复合函数。如果函数 u 与 v 各自存在导数 u' 与 v' , 则 $f(x)$ 的导数如下:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

计算下列函数的导数:

(1) $y = e^{3x^2}$

(2) $y = \sin^6 x$

(3) $y = \ln[3 + \sin(9x^2)]$

(4) $y = (10 + \sin x)^{\cos x}$



解:

$$(1) y' = e^{3x^2} \cdot 6x$$

$$(2) y' = 6 \sin^5 x \cdot \cos x$$

$$(3) y' = \frac{\cos(9x^2) \cdot 18x}{3 + \sin(9x^2)}$$

(4) 首先需要将等号右侧的形式进行改写, 根据公式 $a^b = e^{b \ln a}$ ($a > 0$), 可得 $(10 + \sin x)^{\cos x} = e^{\cos x \ln(10 + \sin x)}$, 因此导数计算过程如下:

$$y' = e^{\cos x \ln(10 + \sin x)} [\cos x \ln(10 + \sin x)]' = e^{\cos x \ln(10 + \sin x)} \left[\frac{\cos x \cdot \cos x}{10 + \sin x} - \sin x \ln(10 + \sin x) \right]$$

3.1.3 其他形式函数的导数计算

本节讨论 3 个特殊类型的导数计算, 分别是隐函数的导数、反函数的导数和参数方程组中的导数。

1. 隐函数的导数

如果变量 y 与 x 有下列关系:

$$x^2 - 4xy + 9y^2 = 1 \quad (3.1.16)$$

那么该方程在二维平面中的图像是一个倾斜的椭圆, 如图 3.6 所示。该椭圆曲线经过点 $(1, 0)$, 现在倘若我们需要求得该点处椭圆的切线, 如何获得对应的切线斜率呢? 此问题实际上是需要获得 y 对 x 的导数。观察式 (3.1.16), 并不能很方便地转换为“ $y = f(x)$ ”的形式, 变量 y 与 x 之间的关系隐藏在一个方程中, 这样的关系我们一般称之为“隐函数”。

隐函数求导的过程也相对简单, 只需要做一件事情: 方程左右两侧依次对 x 求导数。我们对方程 (3.1.16) 进行操作, 具体细节如下:

(1) x^2 对 x 求导, 结果为 $2x$ 。

(2) $4xy$ 对 x 求导, 可以看作两个函数相乘求导的过程, $4xy = (4x) \cdot (y)$, 根据导数四则运算法则, 即为 $(4xy)' = (4x)' \cdot (y) + (4x) \cdot (y)' = 4y + 4xy'$ 。

(3) $9y^2$ 对 x 求导, 根据求导的链式法则, 该过程分为两步, 先求得 $9y^2$ 对 y 的导数, 乘上 y 对 x

的导数, 就完成了对 x 的导数计算, 即为 $\frac{d(9y^2)}{dx} = \frac{d(9y^2)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 18y \cdot y'$ 。

(4) 1 对 x 求导, 常数的导数为 0。

经过这样的操作, 从方程 (3.1.16) 得到了一个关于 y' 的方程:

$$2x - (4xy' + 4y) + 18y \cdot y' = 0 \quad (3.1.17)$$

通过移项, 得到了 y' :

$$y' = \frac{x - 2y}{2x - 9y} \quad (3.1.18)$$

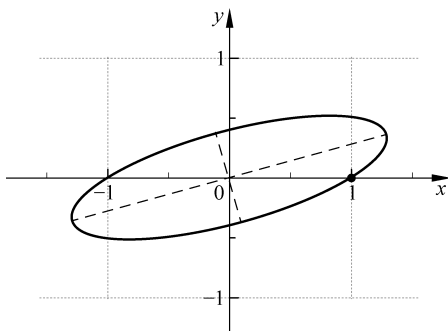


图 3.6 倾斜的椭圆示意图

这就是隐函数求导的过程,可参考图 3.7。

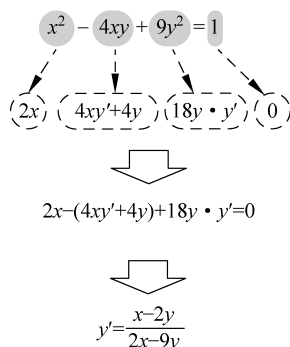


图 3.7 隐函数导数计算过程示意图

根据式(3.1.18),在点(1,0)处, $x=1, y=0$,代入可得 y' 的取值为 $\frac{1}{2}$,即为该点处切线斜率,切线方程为

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \quad (3.1.19)$$

求出下列方程中的 y' :

(1) $y^3 + 5y - x - x^4 = 100$

(2) $\sin(xy) + e^{3x+4y} = 7x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $y = \sqrt{(2x+3)(4x+5)(6x+7)}$

解:

(1) 左右两侧对 x 求导数,可得

$$3y^2 \cdot y' + 5y' - 1 - 4x^3 = 0$$

$$y' = \frac{1 + 4x^3}{3y^2 + 5}$$

(2) 左右两侧对 x 求导数,在此过程中要灵活使用链式法则,比如 $\sin(xy)$ 的导数计算,可以暂且将“ xy ”当作一个整体,对 $\sin$ 函数计算导数后需要乘以“ xy ”的导数。可得

$$\cos(xy) \cdot (xy)' + e^{3x+4y} \cdot (3x+4y)' = 14x + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (x^2+y^2)'$$

$$\cos(xy) \cdot (y+x \cdot y') + e^{3x+4y} \cdot (3+4y') = 14x + \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x+2y \cdot y')$$

$$y' = \frac{14x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - y\cos(xy) - 3e^{3x+4y}}{x\cos(xy) + 4e^{3x+4y} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

(3) 该函数并非隐函数,但是直接求导的计算量比较大,可以考虑左右两侧取 $\ln$ 函数,可以起到意想不到的简化效果:



$$\ln y = \ln \sqrt{(2x+3)(4x+5)(6x+7)}$$

根据对数计算的规律 $\ln a \cdot b = \ln a + \ln b$, $\ln a^b = b \ln a$, 可以将等式右侧进行拆分化简:

$$\ln y = \frac{1}{2} [\ln(2x+3) + \ln(4x+5) + \ln(6x+7)]$$

左右两侧对 x 求导数, 可得

$$\begin{aligned} \frac{y'}{y} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{4}{4x+5} + \frac{6}{6x+7} \right) \\ y' &= \frac{y}{2} \left(\frac{2}{2x+3} + \frac{4}{4x+5} + \frac{6}{6x+7} \right) \end{aligned}$$

2. 反函数的导数

表 3.1 中给出的有关反三角函数的导数分别为

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad (3.1.20)$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.1.21)$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.1.22)$$

我们以式(3.1.21)为例, 论证该导数是如何得到的。设 $y = \arcsin x$ ($-1 < x < 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$), 则对应有:

$$x = \sin y \quad \left(-1 < x < 1, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right) \quad (3.1.23)$$

此时不妨将 x 当作因变量, 而 y 当作自变量, 令 x 对 y 求导数, 可得:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y \quad (3.1.24)$$

观察发现, $\frac{dy}{dx}$ 与 $\frac{dx}{dy}$ 属于倒数关系, 于是有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} \quad (3.1.25)$$

这样就获得了 y 对 x 的导数为 $\frac{1}{\cos y}$, 这个结果也可以用 x 来表示, 根据式(3.1.23)可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3.1.26)$$

利用反函数求导的规则, 求得下列函数中的导数:

(1) $y = \arctan x$

(2) $y = \ln x$

解:

$$(1) y = \arctan x, \text{ 于是有 } x = \tan y, \frac{dx}{dy} = \sec^2 y, \text{ 进而 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$(2) y = \ln x, \text{ 于是有 } x = e^y, \frac{dx}{dy} = e^y, \text{ 进而 } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

已知 $u = v^3 + 5v$, 尝试求得 $\frac{dv}{du}$ 的表达式。

解: 将 u 当作因变量, 而 v 当作自变量, 可以容易地求得 u 对 v 的导数:

$$\frac{du}{dv} = 3v^2 + 5$$

利用反函数求导的理念, 可得

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{\frac{du}{dv}} = \frac{1}{3v^2 + 5}$$

3. 参数方程组中的导数

假设现在有一物体在平面内运动, 水平向右的初速度为 $v_{x0} = 2\text{m/s}$, 水平方向加速度为 $a_x = 0.2\text{m/s}^2$, 竖直方向初速度为 $v_{y0} = 3\text{m/s}$ (向上为正方向), 竖直方向加速度为 $a_y = -2\text{m/s}^2$ 。设物体的水平位移为 x , 竖直位移为 y , 时间为 t , 则可列出方程组:

$$\begin{cases} y = 3t - t^2 \\ x = 2t + \frac{t^2}{10} \end{cases} \quad (3.1.27)$$

物体的运动轨迹如图 3.8 所示, 在 xOy 平面内形成一条曲线。此时, y 与 x 皆是关于 t 的函数, 这说明 y 与 x 之间也存在某种联系, 这时候称变量 y 与 x 之间是由参数方程组 (3.1.27) 确立的函数关系。

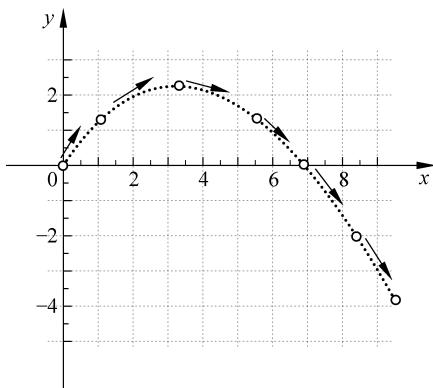


图 3.8 物体的平面运动轨迹

现在需要解决的问题是: 如何求得这条运动轨迹的切线斜率? 换言之, 如何求得 y 对 x 的导数 $\frac{dy}{dx}$?

通过式 (3.1.27), 可以分别获得 y 对 t 的导数 $\frac{dy}{dt}$

以及 x 对 t 的导数 $\frac{dx}{dt}$:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = 3 - 2t \\ \frac{dx}{dt} = 2 + \frac{t}{5} \end{cases} \quad (3.1.28)$$

这时让两个导数相除, 微分变量 dt 可以被约分, 使得

到 $\frac{dy}{dx}$:



$$\frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = \frac{3-2t}{2+\frac{t}{5}} = \frac{15-10t}{10+t} \quad (3.1.29)$$

比如在 $t=1$ 时,由方程组(3.1.27)可以得知此时物体的位置处于(2,1,2),通过式(3.1.29)可以算出此时运动曲线的切线斜率为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=1} = \frac{15-10t}{10+t} \Big|_{t=1} = \frac{5}{11}$; 当 $t=3$ 时,通过方程组(3.1.27)可以得知此时物体的位置处于(6,9,0),通过式(3.1.29)可以算出此时切线的斜率为 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=3} = \frac{15-10t}{10+t} \Big|_{t=3} = -\frac{15}{13}$ 。

参数方程组中的函数及其导数运算

如果变量 y 与 x 都是关于变量 t 的函数,即

$$\begin{cases} y = f(t) \\ x = g(t) \end{cases}$$

这时则称 y 与 x 之间是由参数方程组建立的函数关系,并且此时 y 对 x 的导数是 y 和 x 分别对 t 导数的比值:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

继续来看一个利用参数方程组求导数的案例。在数学的世界里有一个浪漫的曲线方程:

$$r = 1 - \sin\theta \quad (3.1.30)$$

该方程是由极坐标的方式给出的,其中, r 代表了一个点 (x, y) 到原点的距离, θ 则是该点所处的方位角。该方程的图像如图 3.9 所示,所以该曲线名为“心形线”,据说笛卡尔曾在信中使用这个方程向瑞典公主克里斯汀隐晦而巧妙地传达自己的爱意。

取 $\theta = \frac{7}{4}\pi$,通过式(3.1.30)可得对应的 $r = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$,根据极坐标的转换方程:

$$\begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \sin\theta \end{cases} \quad (3.1.31)$$

可得到心形曲线上一点的坐标 $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$ 。更进一步地,如何求得该点处切线的斜率? 答案就隐藏在转换方程组(3.1.31)中,将式(3.1.30)代入,可得:

$$\begin{cases} x = (1 - \sin\theta) \cos\theta \\ y = (1 - \sin\theta) \sin\theta \end{cases} \quad (3.1.32)$$

观察式(3.1.32),可以看到 x 和 y 都受到同一个变量 θ 的控制, y 和 x 的关系是由变量 θ 来联系的,这就是典型的参数方程组求导数问题。需要首先求得 x 和 y 分别对变量 θ 的导数:

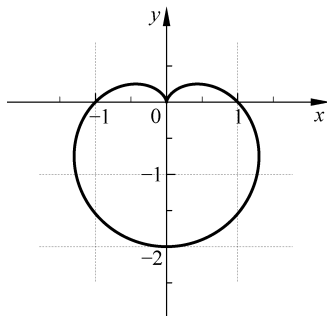


图 3.9 心形线曲线图

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = -\cos\theta\cos\theta - (1 - \sin\theta)\sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = -\cos\theta\sin\theta + (1 - \sin\theta)\cos\theta \end{cases} \quad (3.1.33)$$

根据之前所讲述的理论, y 对 x 的导数, 即为式(3.1.33)中两者的比值:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{-\cos\theta\sin\theta + (1 - \sin\theta)\cos\theta}{-\cos\theta\cos\theta - (1 - \sin\theta)\sin\theta} = \frac{(1 - 2\sin\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta - \sin\theta} \quad (3.1.34)$$

将 $\theta = \frac{7}{4}\pi$ 代入式(3.1.34), 可得在该点处的切线斜率为 $(1 + \sqrt{2})$ 。

针对以下方程组, 求出 y 对 x 的导数:

$$\begin{cases} y = 3t + 4t^2 \\ x = 6\sin t + 7\cos t \end{cases}$$

解:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3 + 8t}{6\cos t - 7\sin t}$$

3.1.4 特殊情形的导数

并不是所有的函数都有合理的导数存在。我们需要给出一些相关的例子, 以便更准确地了解导数的性质。

1. $y = |x|$ 在 $x=0$ 处的导数

该函数曲线图像如图 3.10 所示。

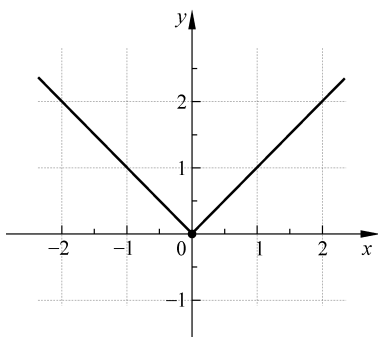


图 3.10 绝对值函数曲线图像

按照式(3.1.8)中对导数的定义, $y = |x|$ 在 $x=0$ 处的导数应该等同于下面的极限值:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad (3.1.35)$$

该极限不存在, 因为左右极限的值不相同:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \quad (3.1.36)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1 \quad (3.1.37)$$

一个点处如果存在导数, 那么导数只能是一个固定的值, 不能说 $y = |x|$ 在 $x=0$ 处的导数是 1 或者 -1, 在这种情况下只能说该点处不存在导数。分为左右两种情况, 依据式(3.1.36)和式(3.1.37), 可以说 $y = |x|$ 在 $x=0$ 处的右导数是 1, 左导数是 -1。



2. $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处的导数

该函数曲线图像如图 3.11 所示。

同样按照式(3.1.8), $y = \sqrt[3]{x}$ 在 $x=0$ 处的导数对应如下极限:

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} \\ &= +\infty \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

该极限为无穷大,属于不存在极限值的情况,导数也就不存在。从图 3.11 可以看出,该函数曲线在 $x=0$ 处的切线应该是竖直的状态。

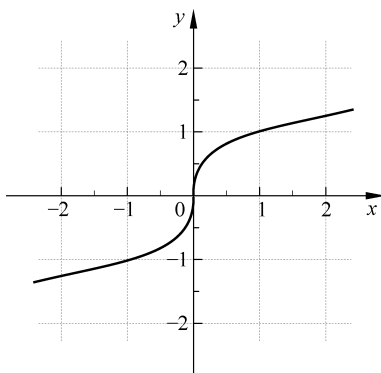


图 3.11 立方根函数曲线图像

3. $y = \sqrt[3]{x} \sin x$ 在 $x=0$ 处的导数

许多同学想到利用导数四则运算法则,计算该函数的导函数:

$$y' = (\sqrt[3]{x} \sin x)' = (\sqrt[3]{x})' \cdot \sin x + \sqrt[3]{x} \cdot (\sin x)' = \frac{\sin x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x} \cdot \cos x \quad (3.1.39)$$

这时发现 $x=0$ 不可以代入式(3.1.39)右侧,这是否意味着这个函数在 $x=0$ 处不存在导数呢?并非如此,我们仍然采用极限运算的方式来计算:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x} \sin \Delta x}{\Delta x} \\ &\stackrel{\text{等价无穷小代换, } \sin \Delta x \sim \Delta x}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

可见该导数值是存在的,取值为 0。那为何式(3.1.39)失效了呢?原因很简单,我们在计算导数时使用了乘法求导公式:

$$(uv)' = u' \cdot v + u \cdot v' \quad (3.1.41)$$

该公式使用是有前提条件的:函数 u 和 v 各自独立地存在导数。在本例中, $\sqrt[3]{x}$ 自身在 $x=0$ 处不存在导数,所以不可以用式(3.1.39)直接运算,而是从导数本质的极限定义出发加以判定。

3.2 导数基本应用

导数,在函数曲线的图像中对应为切线的斜率,也可以用来分析一个函数的基本性质,比如单调性、凹凸性等。

3.2.1 函数的单调性与极值点

给出如下函数:

$$y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1 \quad (3.2.1)$$

如何描绘出该函数曲线的变化特点呢? 通过导数可以找到答案:

$$y' = -x^2 + x + 2 \quad (3.2.2)$$

导函数 y' 为抛物线方程, 不难得到其图像, 如图 3.12 所示, 开口向下, 并与 x 轴相交于 $(-1, 0)$ 和 $(2, 0)$ 这两个点。

- (1) 当 $x < -1$ 时, $y' < 0$, 说明 y 随着 x 的增长而减小;
- (2) 当 $-1 < x < 2$ 时, $y' > 0$, 说明 y 随着 x 的增长而增长;
- (3) 当 $x > 2$ 时, $y' < 0$, 说明 y 随着 x 的增长而减小。

并且, 在函数 $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - 1$ 中, 当 x 分别取 -1 和 2 时, y 的值分别为 $-\frac{13}{6}$ 和 $\frac{7}{3}$,

由此可以勾勒出函数曲线的走势, 如图 3.13 所示。从图 3.13 可以看出, $A\left(-1, -\frac{13}{6}\right)$ 和 $B\left(2, \frac{7}{3}\right)$ 是曲线的两个转折点, A 点的函数值比其周围的函数值都要小, B 点的函数值比其周围的函数值都要大, 这样的点统称为“极值点”, A 是极小值点, B 是极大值点。

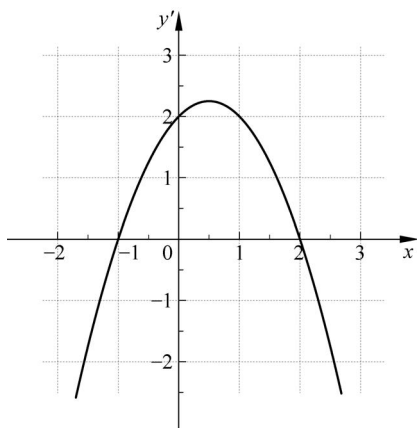


图 3.12 导函数曲线图(二次曲线)

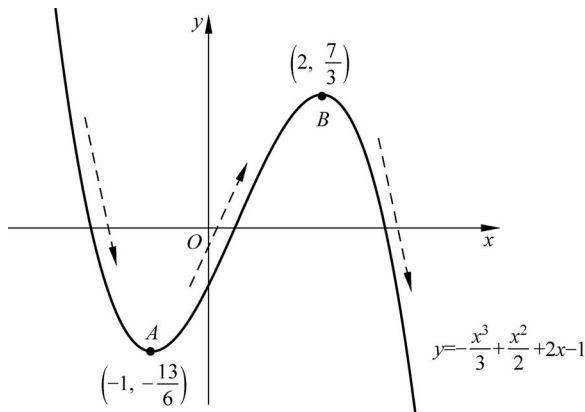


图 3.13 函数曲线图(三次曲线)

基于这个过程, 我们给出下述定义:

函数的单调性

- 对于函数 $y = f(x)$, 在某个区间 D 内, 如果 $f(x)$ 随着 x 的增加而增加, 则称该函数在这个区间内为单调递增的。换言之, 在区间 D 内选取任意的两个不同的值 a 、 b , 单调递增的函数满足下列不等式:

$$(a - b)(f(a) - f(b)) \geq 0$$

- 如果 $f(x)$ 随着 x 的增加而减小, 则称该函数在这个区间内为单调递减的。在区间 D 内选取任意的两个不同的值 a 、 b , 单调递减的函数满足下列不等式:

$$(a - b)(f(a) - f(b)) \leq 0$$

利用导数判断单调性

函数 $y = f(x)$ 在某个区间 D 内可导并且 $f'(x) \geq 0$, 则说明在此区域该函数是单调递增的; 反之, 如果导数 $f'(x) \leq 0$, 则说明在此区域该函数是单调递减的。



函数的极值点

对于函数 $y=f(x)$, 其在某段区间 (a, b) 内有定义, 如果在 (a, b) 内有一点 x_0 , 存在一个正数 δ , 使得当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 都有 $f(x_0) \geq f(x)$, 则称 $x=x_0$ 处为函数 $f(x)$ 的极大值点; 反之, 当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 时, 都有 $f(x_0) \leq f(x)$, 则称 $x=x_0$ 处为函数 $f(x)$ 的极小值点。

根据本节给出的问题分析过程, 可以总结出求得函数极值点的流程, 对于一个各处存在导数的函数 $y=f(x)$:

- ◆ 第一步, 求得对应的导函数 $f'(x)$, 并解方程 $f'(x)=0$;
- ◆ 第二步, 根据导函数的根 ($f'(x)=0$), 将函数 $f(x)$ 划分为不同区间, 分别判断 $f'(x)$ 的符号, 进而明确 $y=f(x)$ 在不同位置的单调性;
- ◆ 第三步, 根据单调性的分布情况, 给出极值点的判定。

求函数 $y=\ln x - \frac{x}{e} + 2 (x>0)$ 的单调区间与极值点。

解: $y' = \frac{1}{x} - \frac{1}{e}$, 令导数等于 0, 即

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{e} = 0, \quad x = e$$

在函数的定义域内分为两部分, 分别是 $x \in (0, e)$ 以及 $x \in (e, +\infty)$ 。

当 $x \in (0, e)$ 时, $y' > 0$, 函数曲线递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $y' < 0$, 函数曲线递减。

函数曲线大概情况如图 3.14 所示。

所以当 $x=e$ 时, 对应函数曲线的极大值点, 对应的极大值为 $y=2$ 。

在如图 3.15 所示的简单电路中, 电源稳定地提供 5V 的电压, 内电阻的阻值为 3Ω , 负载电阻为 R (单位: Ω)。请问负载电阻的 R 取多大时, 其输出的功率最大?

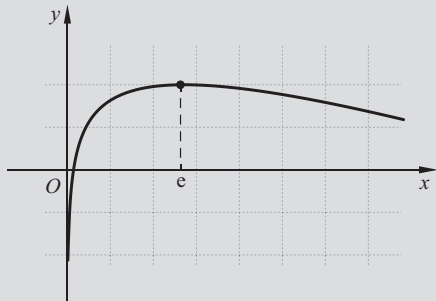


图 3.14 极值问题中的函数曲线

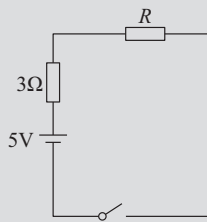


图 3.15 电路示意图

解: 已知负载电阻的输出功率 $P=I^2 R$, 其中电流 I 受到电阻影响, 可以表示为

$$I = \frac{5}{3+R}$$

所以负载电阻的功率 P 可以写为一个关于电阻 R 的函数:

$$P = \frac{25R}{(3+R)^2}$$

现在欲使 P 取得最大值,借助于 P 对 R 的导数:

$$\frac{dP}{dR} = \frac{25(3+R)^2 - 25R \cdot 2(3+R)}{(3+R)^4} = \frac{25(3-R)}{(3+R)^3}$$

使该导数为 0,可以得到 $R=3$ 。

当 $0 < R < 3$ 时, $\frac{dP}{dR} > 0$, 功率 P 随着电阻 R 增大而增大;

当 $R > 3$ 时, $\frac{dP}{dR} < 0$, 功率 P 随着电阻 R 增大而减小。

由此可以得出, $R=3(\Omega)$ 时, 负载电阻可以实现最大的功率, 此时其功率为 $\frac{25 \times 3}{(3+3)^2} = \frac{25}{12}(\text{W})$ 。

3.2.2 函数的凹凸性与拐点

在一阶导数的基础上继续运算导数, 就来到了更高阶的导数, 它们可以帮助我们揭示更多有关函数的奥秘, 比如二阶导数的正负情况对应了函数的凹凸性, 高阶导数的取值可以在泰勒公式中大显身手。

以函数 $y = x^3 - 2x^2 + 5x - 3$ 为例, 其导函数 $y' = 3x^2 - 4x + 5$, 如果对导函数再求导数, 就到了二阶导数, 记为 y'' 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$$y'' = 6x - 4 \quad (3.2.3)$$

同样还有三阶导数 $y^{(3)}$ 或 $\frac{d^3 y}{dx^3}$:

$$y^{(3)} = 6 \quad (3.2.4)$$

以此类推, 对于二阶以上的导数, 第 n 阶导数被记为 $y^{(n)}$ 或 $\frac{d^n y}{dx^n}$ 。

对于一些特定类型的函数, 不难发现其高阶导数是有规律的, 如表 3.2 所示。

表 3.2 常见的高阶导数

$f(x)$	$f^{(n)}(x)$
e^{ax}	$a^n e^{ax}$
$\sin x$	$\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{1}{ax+b} (a \neq 0)$	$\frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}$

利用二阶导数, 我们可以判断一个函数曲线的凹凸性。如图 3.16 所示, 观察两个不同的函数曲线, 它们同样经过两个点 M 和 N 。

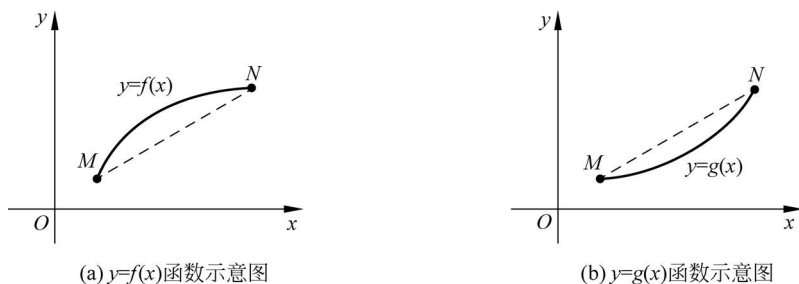


图 3.16 凸、凹函数曲线图像区别示意图

将曲线上的两点 M 、 N 用线段连接起来,此线段被称为函数曲线的一段割线。在图 3.16(a) 中,对于 $y=f(x)$,可以看出它在割线 MN 的上方,仿佛整个曲线向上凸起。对于一段函数曲线,在某个区间内任意取其中的两点形成割线,如果函数曲线是在割线的上方经过的,称该函数在这个区间内为凸函数,并且这个区间称为凸区间;反之,如果曲线是在割线的下方经过的,则称其为凹函数,这个区间为凹区间。在图 3.16(b) 中, $y=g(x)$ 从 M 到 N 这一段,就是凹函数的形态。

函数的凹凸性与单调性无关,凹函数既可以递增也可以递减,凸函数亦然。图 3.16 为我们展示了单调递增状态下的凸函数与凹函数,图 3.17 就展示了单调递减状态下的凸函数与凹函数,图 3.17(a) 中的 $y=u(x)$ 从割线的上方经过,是凸函数;图 3.17(b) 中的 $y=v(x)$ 从割线的下方经过,是凹函数。

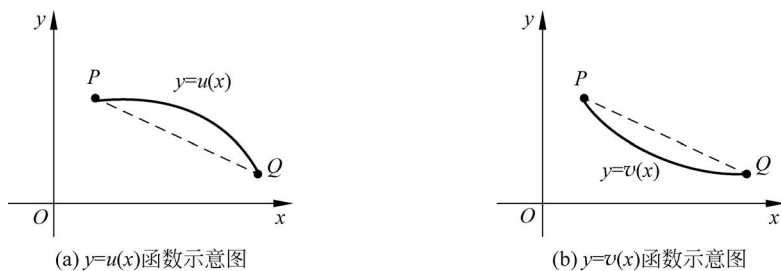


图 3.17 单调递减状态下的凸函数、凹函数图像

需要补充的是,函数曲线上取两个不同的点,其坐标分别为 $(x_1, f(x_1))$ 、 $(x_2, f(x_2))$,则两点确定的直线方程为

$$y = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \quad (3.2.5)$$

凸函数、凹函数的定义

- 对于函数 $y=f(x)$,如果它在 $a \leq x \leq b$ 时具有一条连续的函数曲线,且在 $[a, b]$ 内任意取两不相同的值 x_1 与 x_2 (设定 $x_2 > x_1$),当 $x \in [x_1, x_2]$ 时,成立下列不等式:

$$f(x) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

则可以说, $y=f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 时是凸函数。

- 如果下列不等式成立:

$$f(x) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1)$$

则 $y=f(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 时是凹函数。

利用二阶导数判断函数的凹凸性: 如果函数 $y=f(x)$, 如果它在 $a < x < b$ 时始终有 $f''(x) < 0$, 则函数在 (a, b) 区间内属于凸函数; 反之亦然, 在 $a < x < b$ 时始终有 $f''(x) > 0$, 则函数在 (a, b) 区间内属于凹函数。

一条函数曲线有可能一部分是凸函数, 一部分是凹函数。如图 3.18 所示, 函数 $y=f(x)$ 在 A 点左边是凹函数, 在 A 点右侧是凸函数, 函数曲线的凹凸性发生转折的点就称为拐点。

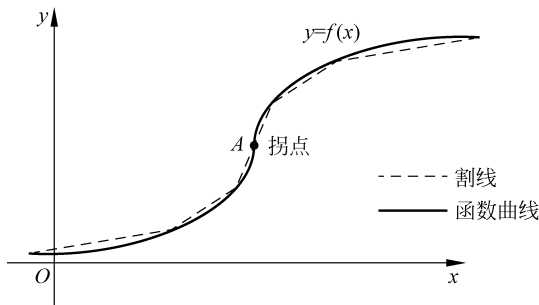


图 3.18 函数曲线的拐点示意图

分析函数 $y=\ln(1+x^2)$ 在不同位置的凹凸性, 并求得它的拐点。

解: $y' = \frac{2x}{1+x^2}$, $y'' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$ 。所以, 当 $x=1$ 和 $x=-1$ 时, 函数的二阶导数为 0。

(1) 当 $x < -1$ 和 $x > 1$ 时, $y'' < 0$, 函数曲线为凸曲线;

(2) 当 $-1 < x < 1$ 时, $y'' > 0$, 函数曲线为凹曲线。

在 $x=-1$ 和 $x=1$ 处分别出现了拐点, 拐点坐标为 $(-1, \ln 2)$ 和 $(1, \ln 2)$ 。

为直观展示曲线特点, 画出 $y=\ln(1+x^2)$ 的函数曲线, 如图 3.19 所示, 可见其凹凸特性在不同位置的差别。

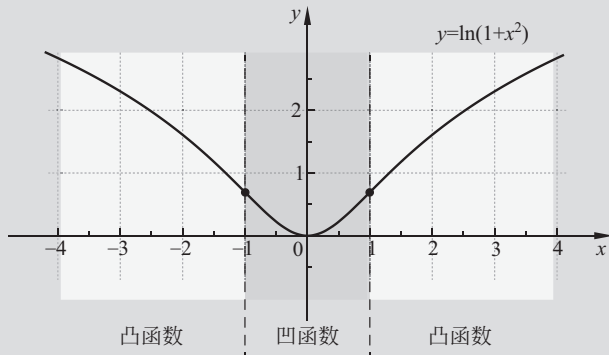
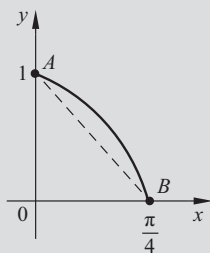


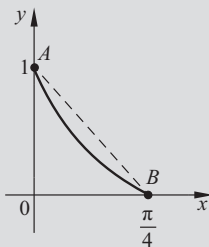
图 3.19 $y=\ln(1+x^2)$ 函数曲线图像



函数 $f(x) = \cos x - \sin x$, 已知函数曲线经过 $A(0, 1)$ 与 $B(\frac{\pi}{4}, 0)$, 请从下面两个图像中选择正确图像, 可以表示 $y = f(x)$ 在 A, B 两点之间的函数曲线:



①



②

解: $f''(x) = -\cos x + \sin x$, 当 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 时, $f''(x) < 0$, 所以 $y = f(x)$ 在这个区间属于凸函数, 这意味着它应当在割线 AB 的上方通过 A, B 两点, 图像①就反映了这种情况。

3.2.3 洛必达法则

在第2章中我们学习了函数极限的运算过程, 而现在可以利用导数来参与极限的运算, 这便是洛必达法则。

洛必达法则

在计算函数极限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ 时, 如果同时满足下列3个条件:

- (1) 当 $x \rightarrow a$ 时, 函数 $f(x)$ 以及 $g(x)$ 都趋于0或者都趋于 ∞ ;
- (2) 在点 a 的某去心邻域内, 函数 $f'(x)$ 以及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x) \neq 0$;
- (3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 为常数或无穷大。

则有:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

通过洛必达法则, 可以对分子、分母分别求导数, 从而算得极限值。下面通过几个例题来详细说明。

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 + 7x}$$

不难发现, 此函数极限分子、分母都属于无穷小, 且都在实数域上可导, 符合洛必达法则的前两个使用条件, 于是:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 + 7x} \xrightarrow[\text{(分子、分母各自求导)}]{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x + 5}{4x + 7} = \frac{5}{7}$$

得出的结果为常数 $\frac{5}{7}$, 这符合洛必达法则的第三条要求, 所以用洛必达法则计算此极限是可行的。

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 + 7x}$$

此函数极限分子、分母都属于无穷大, 使用洛必达法则求解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x}{2x^2 + 7x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 5}{4x + 7} \xrightarrow{\text{再次使用洛必达法则}} \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

在此过程中, 洛必达法则使用一次后, 极限表达式的分子、分母仍然是无穷大, 所以可以再次使用洛必达法则。

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{2x + 7\cos x}$$

此极限的分子、分母都趋于无穷大, 尝试使用洛必达法则求解:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{2x + 7\cos x} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \cos x}{2 - 7\sin x} \text{ 不存在极限}$$

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 我们知道 $\cos x$ 和 $\sin x$ 在 $[-1, 1]$ 区间来回振荡, 并不存在极限值, 所以洛必达法则处理后的表达式不存在极限值, 这违反了洛必达法则的第三个使用条件。所以此题不可以用洛必达法则来处理。正确做法应该是分子、分母上下同时除以 x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + \sin x}{2x + 7\cos x} \xrightarrow{\text{上下同时除以 } x} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{\sin x}{x}}{2 + \frac{7\cos x}{x}} = \frac{5 + 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$$

这也提醒我们, 洛必达法则虽然用法简单、方便高效, 但在使用时务必牢记它的使用条件。

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

很多同学看到 $\sin x$ 就想到第 2 章中的等价无穷小的概念, 想尝试将其代换为 x 。需要留意的是, 当不同部分加减时, 请不要将其中任何一方使用等价无穷小的代换, 否则将可能导致错误结果。比如本题的分子中是两个无穷小进行减法, 这时把 $\sin x$ 换成 x 是不正确的。在这种情况下, 推荐使用洛必达法则来处理它们。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} \xrightarrow{\text{等价代换 } (1 - \cos x) \sim \frac{x^2}{2}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2}}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]$$

为了能够套用洛必达法则来处理, 首先采用换元的方式, 使其呈现出“ $\frac{\text{无穷小}}{\text{无穷小}}$ ”的状态:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] \xrightarrow{\text{令 } t = \frac{1}{x}} \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{t} - \frac{\ln(1+t)}{t^2} \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2}$$



这时,分子上是两部分相减,仍然不可以应用等价无穷小代换规则将 $\ln(1+t)$ 直接替换为 t ,而应利用洛必达法则处理:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} \xrightarrow{\text{洛必达法则}} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{2t(1+t)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2(1+t)} = \frac{1}{2}$$

3.3 微分运算及其应用

借助于导数运算的逻辑,我们可以了解微分运算,进而从微分的视角解决一些实用问题。

3.3.1 微分基本运算规则

首先需要了解微分符号“d”,我们最早在式(3.1.8)中见过了“ dx ”与“ dy ”,它们分别代表了变量 x 与 y 的无穷小变化。我们需要熟悉以下微分的基本公式:

$$df(x) = f'(x)dx \quad (3.3.1)$$

$$d(ax+b) = a dx \quad (3.3.2)$$

$$d(u+v) = du + dv \quad (3.3.3)$$

$$d(uv) = u dv + v du \quad (3.3.4)$$

以上4个公式都是来自导数运算的逻辑,比如式(3.3.1),它是根据式(3.1.8)得到的,也是这4个微分法则中最为常用和重要的一个。表3.3列出了微分运算规则及相应的原理。

表 3.3 微分运算法则与导数运算对照

微分运算	对应导数运算	举 例
$dy = y' dx$	$\frac{dy}{dx} = y'$	$d(x^3) = 3x^2 dx$
$d(ax+b) = a dx$, a, b 是任意常数	$\frac{d(ax+b)}{dx} = a$	$d(-3x+2) = -3dx$
$d(u+v) = du + dv$	$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$	$d(x+y) = dx + dy$
$d(u \cdot v) = u dv + v du$	$\frac{d(u \cdot v)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	$d(xy) = x dy + y dx$

化简下列微分表达式:

(1) $d(\sin x)$

(2) $d(\arctan x)$

(3) $d(3x^2 + 5x + 7)$

(4) $d(3x^2 + 5x)$

(5) $d(\ln y)$

(6) $d(\sqrt{1+u^2})$

(7) $d(x^2 + y^4)$

$$(8) d(x^2 y^4)$$

解:

$$(1) d(\sin x) = \cos x dx$$

$$(2) d(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$(3) d(3x^2 + 5x + 7) = (6x + 5) dx$$

$$(4) d(3x^2 + 5x) = (6x + 5) dx$$

$$(5) d(\ln y) = \frac{1}{y} dy$$

$$(6) d(\sqrt{1+u^2}) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} du$$

$$(7) d(x^2 + y^4) = d(x^2) + d(y^4) = 2x dx + 4y^3 dy$$

$$(8) d(x^2 y^4) = x^2 d(y^4) + y^4 d(x^2) = x^2 \cdot 4y^3 dy + y^4 \cdot 2x dx = 4x^2 y^3 dy + 2xy^4 dx$$

相比于导数计算,在许多场景下使用微分运算可以更快地获得所需信息,比如接下来登场的相关变化率问题。

3.3.2 相关变化率

本节将通过 3 个具体场景,带大家了解相关变化率问题。

1. 圆锥形容器水位上涨速度

如图 3.20 所示,一个圆锥形容器,其底部半径 R 为 3m,高度 H 为 4m。现在向这个容器中注水,每秒注入 0.8m^3 的水,其水位高度也随之升高。现在我们需要解决的问题是:水位升高的速度是多少?

由于容器形状,所以注入的水体也是圆锥形。如图 3.21 所示,设水位高度为 h ,对应的水面半径为 r ,通过相似三角形关系不难得出:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{3}{4}h \quad (3.3.5)$$

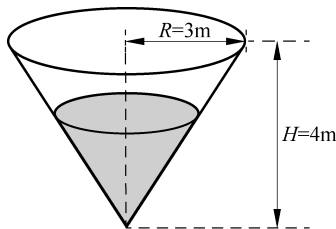


图 3.20 圆锥形容器示意图

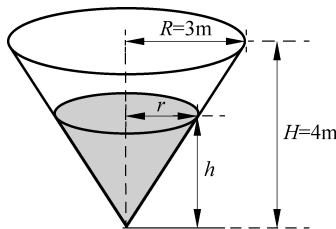


图 3.21 注水过程示意图

因此水的体积 v 为

$$v = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{3\pi}{16} h^3 \quad (3.3.6)$$

将式(3.3.6)左右进行微分处理,也就是等号左右两端各加上“d”这个微分符号:



$$dv = d\left(\frac{3\pi}{16}h^3\right) \quad (3.3.7)$$

根据微分运算法则式(3.3.1),可以进一步处理式(3.3.7):

$$dv = \frac{3\pi}{8}h^2 dh \quad (3.3.8)$$

根据已知信息,由于每秒注水 0.8m^3 ,这也就意味着水的体积 v 随时间的变化率为 0.8 ,设时间为 t ,则有:

$$\frac{dv}{dt} = 0.8 \quad (3.3.9)$$

我们的目标是获得“ $\frac{dh}{dt}$ ”,就是水位高度 h 随时间的变化率。为此,将式(3.3.8)左右同时除以 dt :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3\pi}{8}h^2 \frac{dh}{dt} \quad (3.3.10)$$

所以,最终获得了下式:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{8}{3\pi h^2} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{8}{3\pi h^2} \times 0.8 = \frac{32}{15\pi h^2} \quad (3.3.11)$$

通过式(3.3.11),可以得出结论,水位上升的速度并非是恒定的,它会随着水位高度 h 的增加而逐渐降低。比如,

- ◆ 在水位高度为 1m 的时刻,水位上升的速度为 $\frac{32}{15\pi \times 1^2} \approx 0.679\,061\text{m/s}$;
- ◆ 在水位高度为 2m 的时刻,水位上升的速度为 $\frac{32}{15\pi \times 2^2} \approx 0.169\,765\text{m/s}$;
- ◆ 在水位高度为 3m 的时刻,水位上升的速度为 $\frac{32}{15\pi \times 3^2} \approx 0.075\,451\,2\text{m/s}$ 。

在解决此问题的过程中,利用 v (水的体积)随时间的变化率,借助 v 与 h 之间的关系,求得了 h (水的高度)随时间的变化率,这便是相关变化率问题,如图 3.22 所示。

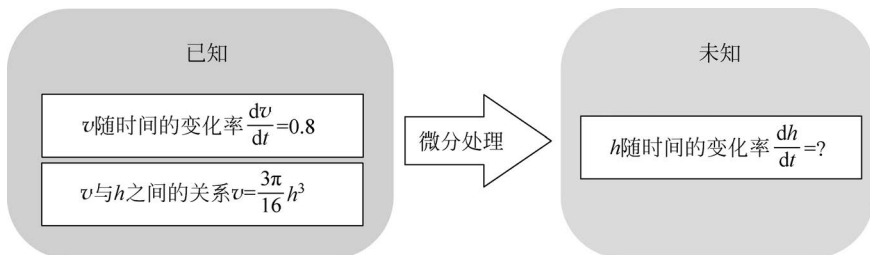


图 3.22 相关变化率问题求解过程示意图

2. 气球升空的观察仰角

如图 3.23 所示,有一枚火箭正在以 9km/s 的速度竖直升空,现在有一个观察员站在距离火箭发射点 10km 外的位置注视火箭。随着火箭升空,观察员视线的仰角 θ 逐渐抬高,请计算出仰角 θ 随时间的变化率。

相较于人眼所处的水平位置,设火箭的高度为 h (单位: km),则根据已知信息可得:

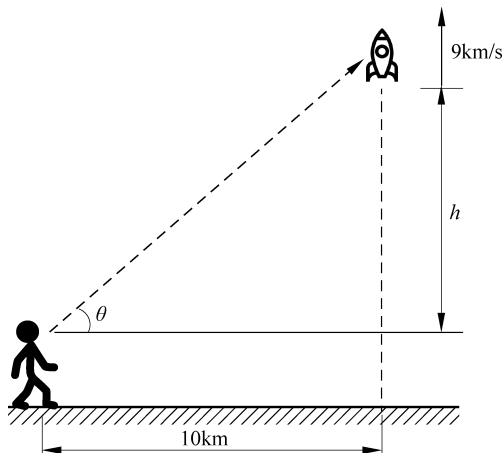


图 3.23 地面观察火箭升空过程

$$\frac{dh}{dt} = 9 \quad (3.3.12)$$

通过简单的三角知识,可以得出 h 与 θ 在运动过程中保持的关系式为

$$\tan\theta = \frac{h}{10} \quad (3.3.13)$$

将式(3.3.13)的左右两侧进行微分处理,便可以得到:

$$d(\tan\theta) = d\left(\frac{h}{10}\right) \quad (3.3.14)$$

$$\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{10}dh \quad (3.3.15)$$

左右同时除以 dt ,并代入式(3.3.12),就得到了我们需要的 $\frac{d\theta}{dt}$:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{10}\cos^2\theta \quad (3.3.16)$$

而式(3.3.16)也可以换个方式表达,因为

$$\cos\theta = \frac{10}{\sqrt{h^2 + 10^2}} \quad (3.3.17)$$

所以式(3.3.16)可改成由 h 来表示:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{10} \cdot \frac{10}{h^2 + 100} = \frac{9}{h^2 + 100} \quad (3.3.18)$$

由此可以发现,尽管火箭匀速上升,但是人站在远处观察的仰角 θ 并不是以恒定的速度抬高的,而是随着 h 的升高而逐渐变缓。比如,

- ◆ 当火箭上升至 1km 高度时, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{1^2 + 100} = 0.08911(\text{rad/s})$;
- ◆ 当火箭上升至 3km 高度时, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{3^2 + 100} = 0.08257(\text{rad/s})$;
- ◆ 当火箭上升至 10km 高度时, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{10^2 + 100} = 0.04500(\text{rad/s})$;



◆ 当火箭上升至 20km 高度时, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{9}{20^2 + 100} = 0.018\ 00(\text{rad/s})$;

.....

3. 发动机转子转动的角速度

汽车发动机通过汽油燃烧, 释放高温高压气体, 从而推动机械运转。如图 3.24 左端所示, 汽油在燃烧室内燃烧, 推动活塞向下运动, 活塞上固定了一个可以转动的连杆(连杆 1), 连杆另一端又与一个连杆(连杆 2)相连, 连杆 2 绕着固定的轴心转动。伴随着活塞上下运动, 连杆 2 不断转动。图 3.24 展示了在一个周期内, 4 个不同时刻各部件所处的位置。

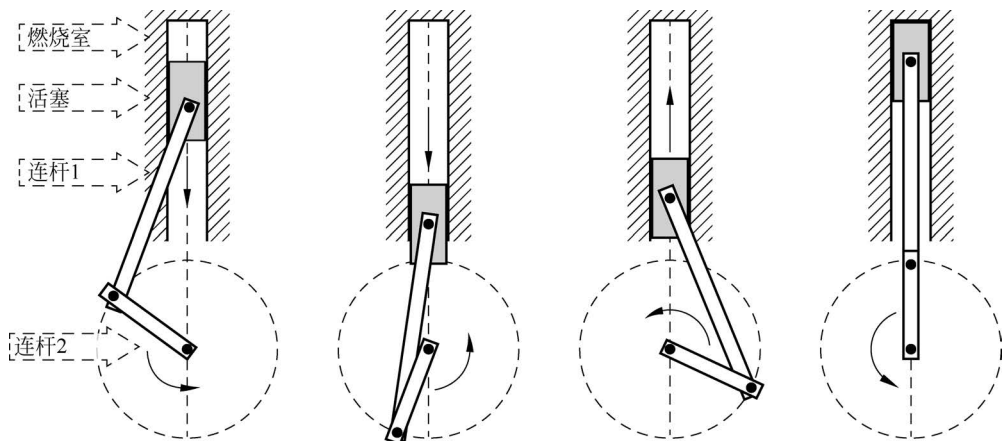


图 3.24 发动机活塞与转子连杆传动系统

本节讨论的主要问题是: 如果知道连杆 2 转动的角速度, 那么相应的活塞下落的速度是多快呢? (角速度即是每秒转角的大小, 这里用弧度来描述一个角的大小, 则角速度的单位是“rad/s”。)

如图 3.25 所示, 连杆 2 转动的角度记为 θ , 活塞到下方圆心之间的距离记为 h , 而两根连

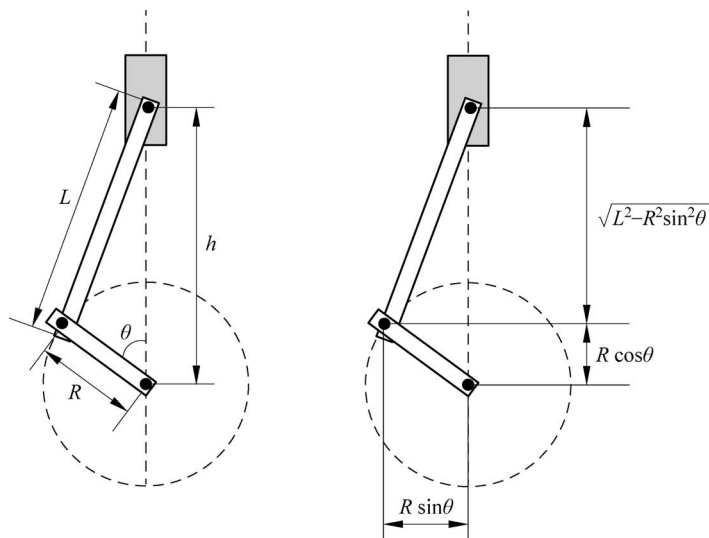


图 3.25 连杆传动变量之间的关系分析图

杆的长度是固定的,分别为 L 与 R 。注意, θ 与 h 是随着运动过程发生改变的,而 L 与 R 是固定不变的常数。

根据图 3.25,可知各个位置的几何信息,比如,

$$h = \sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta} + R \cos \theta \quad (3.3.19)$$

由此可以构建起变量 h 与 θ 之间的关联,而 h 的变化量就是活塞的位移量, θ 的变化量就是连杆 2 的转动量。此时可以像之前容器注水问题一样将式(3.3.19)两侧进行微分处理,然而在这里提供另外一条路径。先计算 h 对 θ 的导数,即 $\frac{dh}{d\theta}$ 。

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{-R^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}} - R \sin \theta \quad (3.3.20)$$

已知连杆 2 的转动角速度,即 θ 随着时间 t 的变化率 $\frac{d\theta}{dt}$; 我们

需要了解的是活塞运动的速度,即为 h 随着时间 t 的变化率 $\frac{dh}{dt}$,通过简单的乘法运算,可以获得:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dh}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (3.3.21)$$

将式(3.3.20)代入式(3.3.21)的右侧,便最终得到了问题的答案:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{-R^2 \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{L^2 - R^2 \sin^2 \theta}} - R \sin \theta \right) \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad (3.3.22)$$

利用式(3.3.22),当我们知道连杆 2 所处的位置以及它的转动速度时,就可以求得活塞向上或向下移动的速度。

比如,如图 3.26 所示,已知 $L=7, R=3$,而且连杆 2 的转动角速度为 4rad/s ,当其转动至 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 时,求活塞滑动的速度。

将已知参数代入式(3.3.22),可得:

$$\frac{dh}{dt} = \left(\frac{-3^2 \sin \frac{2\pi}{3} \cos \frac{2\pi}{3}}{\sqrt{7^2 - 3^2 \sin^2 \frac{2\pi}{3}}} - 3 \sin \frac{2\pi}{3} \right) \cdot 4 \approx -7.99 (\text{m/s}) \quad (3.3.23)$$

$\frac{dh}{dt}$ 为负值,说明 h 正在随时间而减小,可以判断出活塞是在向下运动,并且速度大小为 7.99m/s 。

3.4 超越方程与牛顿迭代法

请根据已知的函数知识,求解以下方程:

(1) $2^{3x-1} = 7$;

(2) $e^x = -x$;

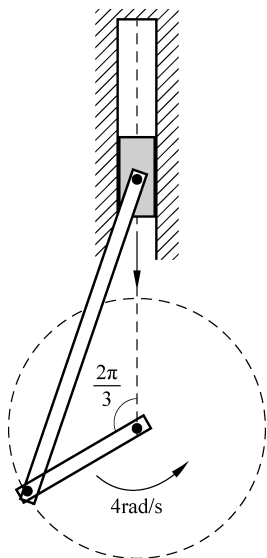


图 3.26 求活塞速度举例示意图



(3) $x = \cos x$ 。

对于方程(1),左右两侧利用“ $\log_2$ ”函数进行处理,可以方便地求得 $x = \frac{\log_2 7 + 1}{3}$,只需要借助科学计算器便可得到具体数值,约为 1.27。而方程(2)和方程(3)就遇到了麻烦,我们无法化简得到 x 的代数表达式,这种方程称为“超越方程”。一般情况下,超越方程中的 x 是无理数。接下来介绍牛顿迭代法,就是利用导数来寻求 x 的近似取值。

1. 解方程 $e^x = -x$, 并精确到小数点后 5 位

将方程移项到左侧,设为函数 $f(x)$:

$$f(x) = e^x + x \quad (3.4.1)$$

原方程的解就意味着“ $f(x)=0$ ”的解,即函数 $f(x)$ 的根。画出 $y=f(x)$ 的函数图像:

从图 3.27 可看出,该函数的根出现在 $x=-0.5$ 附近。曲线在 $x=0.5$ 处的切线方程为

$$y = f'(-0.5)[x - (-0.5)] + f(-0.5) \quad (3.4.2)$$

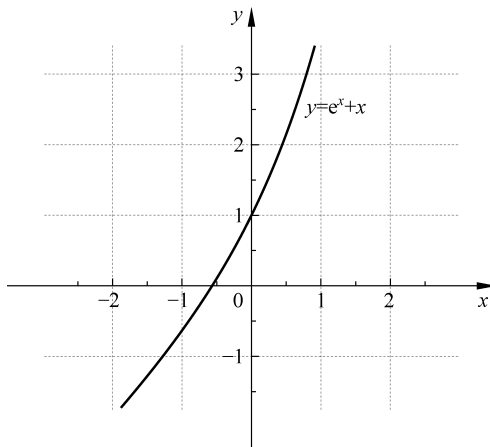


图 3.27 $y=e^x+x$ 函数曲线图

牛顿迭代法的核心思想在于:利用切线近似代替函数曲线,切线的根就更加靠近函数曲线的根。用图 3.28(a)加以说明:曲线 $y=f(x)$ 的根为 a ,在 a 附近选一点 x_0 ,则函数曲线在此处的切线方程为

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \quad (3.4.3)$$

让式(3.4.3)中的 $y=0$,解得切线的根为 x_1 :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (3.4.4)$$

从图 3.28(a)可以观察到 x_1 比 x_0 更加接近 a 。重复上述步骤:

- ◆ 利用 x_1 处的切线,求得该切线的根为 x_2 , x_2 比 x_1 更加接近 a ;
- ◆ 利用 x_2 处的切线,求得该切线的根为 x_3 , x_3 比 x_2 更加接近 a ;
-

如图 3.28(b)所示,不断求得新的点,随着 n 的增加, x_n 就可以一步一步地更加靠近 a 。这个过程称为“牛顿迭代法”运算过程,它可以用一个表达式概括:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \in \mathbf{N} \quad (3.4.5)$$

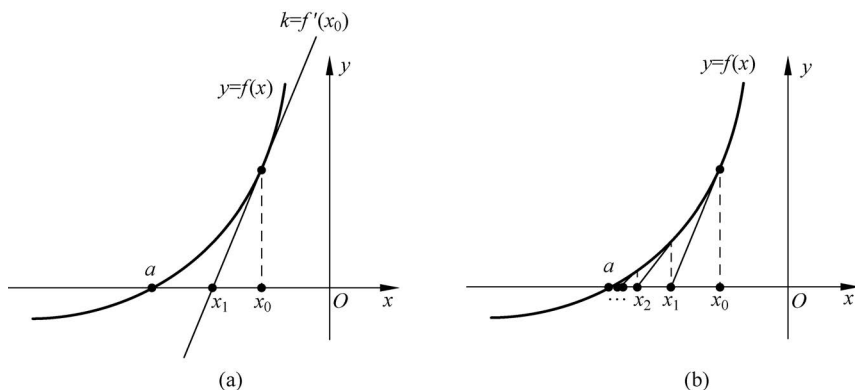


图 3.28 牛顿迭代法过程示意图

代入式(3.4.1)中给定的 $f(x)$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{e^{x_n} + x_n}{e^{x_n} + 1}, \quad n \in \mathbf{N} \quad (3.4.6)$$

取 $x_0 = -0.5$, 利用计算器计算便可得到(保留 10 位有效数字):

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = -0.566\,311\,003\,2 \quad (3.4.7)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = -0.567\,143\,165\,0 \quad (3.4.8)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = -0.567\,143\,290\,4 \quad (3.4.9)$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = -0.567\,143\,290\,4 \quad (3.4.10)$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = -0.567\,143\,290\,4 \quad (3.4.11)$$

经过上述计算,发现从 x_3 到 x_5 小数点后 10 位没有区别,再继续计算下去也只会改变 10 位小数以后的数字。并且计算该处的函数值:

$$f(-0.567\,143\,290\,4) = 1.5332 \times 10^{-11} \quad (3.4.12)$$

说明已经非常接近 $f(x)=0$ 的位置。可以得出结论: 方程 $e^x = -x$ 的解精确到小数点后 5 位是 $-0.567\,14$ 。

总结上述流程,使用牛顿迭代法求解超越方程,只需以下 3 步:

(1) 将需要求解的方程改写为“ $f(x)=0$ ”的格式;

(2) 找到 $f(x)$ 的根比较接近的一个数值,记为 x_0 ;

(3) 利用迭代公式“ $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ ”,依次计算出 $x_1, x_2, x_3, \dots$ 直到实现满意的精度。

2. 解方程: $x = \cos x$, 并精确到小数点后 5 位

根据方程,设函数为



$$f(x) = x - \cos x \quad (3.4.13)$$

画出该函数的图像,如图 3.29 所示。

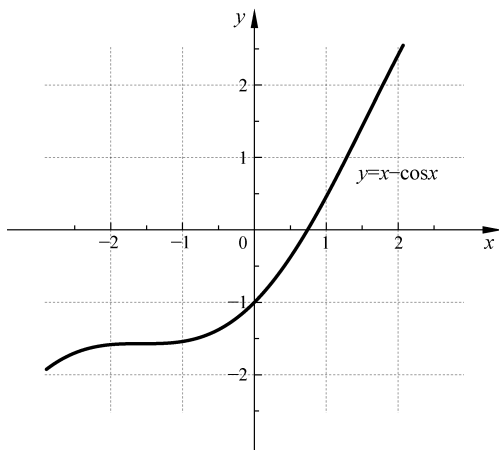


图 3.29 $y=x-\cos x$ 函数曲线图

从图 3.29 中可以大概看出 $f(x)=0$ 的根在 $x=1$ 附近,于是取 $x_0=1$ 。根据牛顿迭代法公式,可以得出:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 0.750\ 363\ 867\ 8 \quad (3.4.14)$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.737\ 151\ 911\ 0 \quad (3.4.15)$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 0.739\ 446\ 670\ 3 \quad (3.4.16)$$

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 0.739\ 018\ 516\ 3 \quad (3.4.17)$$

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} = 0.739\ 097\ 442\ 1 \quad (3.4.18)$$

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)} = 0.739\ 082\ 860\ 0 \quad (3.4.19)$$

$$x_7 = x_6 - \frac{f(x_6)}{f'(x_6)} = 0.739\ 085\ 553\ 0 \quad (3.4.20)$$

.....

当计算到 x_6 和 x_7 , 小数点后 5 位稳定在 0.739 08 时,可将此数作为方程精确到小数点后 5 位的解。利用设定好的计算流程来获得一个近似解,该过程称为“数值方法”运算过程,相应获得的近似解也被称为“数值解”,数值解的对立面为“解析解”。比如解下面这个方程:

$$e^{2x+3} = 6 \quad (3.4.21)$$

它的解析解是通过方程变形得到的:

$$x = \frac{\ln 6 - 3}{2} \text{ (解析解)} \quad (3.4.22)$$

而数值解是通过牛顿迭代法得到的一个近似小数：

$$x \approx -0.60412 \text{ (数值解)} \quad (3.4.23)$$

解析解与数值解其实各有优劣，解析解的好处是能够精准地表达结果，而数值解只能得到一个近似的小数；然而并不是所有的方程都能轻易获得它的解析解，这时利用数值解来求解就非常有必要了。在实际工程问题中经常会用到数值解，数值方法更是无处不在。为了提高操作效率，可以使用计算机编程来自动完成迭代求解，比如基于 Python、C++ 以及 MATLAB 编写相应的程序代码并自动迭代。在代码中需要设置迭代的终止条件，比如迭代 20 次就结束，当然更好的方案是基于精度来停止迭代：当计算机发现 x_{n+1} 与 x_n 之间的差距小于一定的数值（如 1×10^{-6} ）时退出迭代过程并给出结果。

以下便是牛顿迭代法求解方程 $x = \cos x$ 的程序代码，供各位同学参考。

代码 1：基于 Python 语言实现牛顿迭代法求解方程

```
import math

def f(x):
    return x - math.cos(x)

def f_prime(x):
    return 1 + math.sin(x)

def newton_method(initial_guess, tolerance = 0.000001):
    x0 = initial_guess
    while True:
        x1 = x0 - f(x0) / f_prime(x0)
        if abs(x1 - x0) < tolerance:
            break
        x0 = x1
    return x1

result = newton_method(1)
print("Solution: x =", result)
```

代码 2：基于 C++ 语言实现牛顿迭代法求解方程

```
#include <iostream>
#include <cmath>

double f(double x) {
    return x - cos(x);
}

double f_prime(double x) {
    return 1 + sin(x);
}

double newton_method(double initial_guess, double tolerance = 0.000001) {
    double x0 = initial_guess;
    double x1;
    while (true) {
        x1 = x0 - f(x0) / f_prime(x0);
        if (fabs(x1 - x0) < tolerance) {
```



```

        break;
    }
    x0 = x1;
}
return x1;
}

int main() {
    double result = newton_method(1);
    std::cout << "Solution: x = " << result << std::endl;
    return 0;
}

```

代码 3：基于 MATLAB 语言实现牛顿迭代法求解方程

```

result = newton_method(1,0.000001);
disp(['Solution: x = ', num2str(result)]);

function result = newton_method(initial_guess, tolerance)
    x0 = initial_guess;
    while true
        x1 = x0 - f(x0) / f_prime(x0);
        if abs(x1 - x0) < tolerance
            break;
        end
        x0 = x1;
    end
    result = x1;
end

function y = f(x)
    y = x - cos(x);
end

function y = f_prime(x)
    y = 1 + sin(x);
end

```

3.5 结语

导数为我们揭示了函数变化的趋势,使我们可以更加清晰地了解变量之间是如何相互影响的。

本章在介绍导数具体的应用时,引入了发动机连杆转子系统的例子,探索了转子角速度与活塞运动速度之间的关系。如果各位同学对于此类物理问题感兴趣,可以在后续参考和学习“理论力学”课程,其中有关“广义坐标”的内容非常有启发意义。此外,我们还了解到什么是“超越方程”,并利用牛顿迭代法获得了其精确到小数点后 5 位的解。同学们还可学习“数值计算方法”课程,尝试仅使用一些常规计算(加、减、乘、除以及常用函数计算)来解决诸多复杂的数学问题,比如解超越方程、曲线拟合、定积分、常微分方程等问题。