

关 系

辩证法告诉我们,事物不是孤立的,互相之间存在着一定的联系,映射描述的就是最简单的单值依赖联系,但映射无法描述事物间的复杂联系,这就需要引入另一个更强的概念——关系。

作为一种强有力的数学工具,关系用于描述事物之间的复杂联系——多值依赖联系。本章首先给出关系的三种等价定义:①应用时用得较多的是二事物具有的性质;②理论上用得较多是笛卡儿乘积的子集;③分析中用得较多的是多值函数。本章主要研究关系的数学性质,主要包括 n 元关系、几种特殊的关系、二元关系的合成、二元关系的传递闭包及其计算、二元关系的表示、等价关系与偏序关系等内容。

介绍几种特殊的关系时要复习第 1 章的计数法则,并用其计算某个有穷集合上各种二元关系的基数。讲授关系的运算时再次引导读者思考引入运算的目的,讲授关系的自反传递闭包之后,引入文法和推导的概念,并建立起语言的数学模型,为形式语言与自动机、编译原理埋下伏笔。关系矩阵和关系图作为关系的表示方法将集合论与图论与数据结构建立起了联系。

“集合论与图论”课程最重要的概念是等价关系,它也是数学、日常生活、社会科学、计算机科学、自然科学中最重要的概念,研究线性代数主要用的就是等价关系。等价关系和集合的划分其实是一回事,只是角度不同而已,等价类之集就是利用等价关系对集合进行的划分,这个概念在现代分析中很重要,可以得到新的对象,实际上它所反映的就是抽象的本质。

偏序关系是计算机专业的一个重要概念,格、布尔代数等就是利用它建立起来的代数系统,它们是近世代数的重要内容,在计算机科学中具有重要的应用。

3.1 关系的概念

3.1.1 关系的等价定义

我们要定义的关系是日常生活中人与人之间的父子关系、夫妻关系、兄妹关系、朋友关系、同学关系、领导关系,以及数间的整除关系、矩阵间的相抵关系等的抽象。

当两个同学被问及“你俩是同一个班级的吗?”如果他们回答“是”,则说明他们符合“同班同学”这一关系,如果他们回答“否”,则说明他们不符合“同班同学”这一关系。对这一过程稍加抽象就得到了下面的关系的第一种定义。

定义 3.1 设 X 与 Y 为集合,一个从 $X \times Y$ 到 $\{\text{是}, \text{否}\}$ 的映射 R 称为 X 与 Y 间的一个

二元关系(Binary relation)。 $\forall (x, y) \in X \times Y$, 如果 $R(x, y) = \text{是}$, 则称 x 与 y 符合关系 R , 记为 xRy ; 如果 $R(x, y) = \text{否}$, 则称 x 与 y 不符合关系 R , 记为 $x \not R y$ 。如果 $X = Y$, 则称 R 为 X 上的二元关系。

例 3.1 自然数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 上有 $<、\leq、=、>、\geq$ 等关系。

例 3.2 整数集 $\mathbf{Z}$ 上的整除关系记为 $|$, $\forall m, n \in \mathbf{Z}, m | n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbf{Z}, \text{使得 } n = mk, m | n$ 读作“ m 整除 n ”或“ n 能被 m 整除”。 m 不能整除 n 记为 $m \nmid n$, 于是有 $2 | 4, 3 \nmid 8$ 。整除关系具有如下性质: 假设 $m, n, k \in \mathbf{Z}$, 则

(1) 若 $m | n$ 且 $m | k$, 则 $m | (n + k)$ 。

(2) 若 $m | n$, 则对 $\forall j \in \mathbf{Z}, m | nj$ 。

(3) 若 $m | n$ 且 $n | k$, 则 $m | k$ 。

例 3.3 设 n 为任意一个自然数, 整数集 $\mathbf{Z}$ 上的模 n 同余关系记为 $\equiv$, $\forall m, k \in \mathbf{Z}$, 如果 $n | (m - k)$, 则称 m 与 k 符合模 n 同余关系, 记为 $m \equiv k \pmod{n}$, m 与 k 不符合模 n 同余关系记为 $m \not\equiv k \pmod{n}$, 于是有 $1 \equiv 4 \pmod{3}, 3 \not\equiv 7 \pmod{5}$ 。模 n 同余关系具有如下性质: 假设 $n, i, j, k, l \in \mathbf{Z}$, 则

(1) 若 $i \equiv k, j \equiv l \pmod{n}$, 则 $(i + j) \equiv (k + l), i - j \equiv k - l, ij \equiv kl \pmod{n}$ 。

(2) 若 $ik \equiv jl, k \equiv l \pmod{n}$, 且 n 与 l 的最大公约数为 1, 则 $i \equiv j \pmod{n}$ 。

例 3.4 设 $n \times n$ 的实矩阵之集为 M_n , $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_n$, 则矩阵间的相抵关系记为 $\cong$, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Leftrightarrow$ 从 $\mathbf{A}$ 经有限次初等变换能转换为 $\mathbf{B}$ 。矩阵间的相似关系记为 $\approx$, $\mathbf{A} \approx \mathbf{B} \Leftrightarrow$ 存在 $\mathbf{P} \in M_n$, 使 $\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{P}$ 。

把集合{是, 否}换成集合 $\{0, 1\}$, 则 R 就是 $X \times Y$ 的一个特征函数, 令 $\text{Ch}(X \times Y) = \{\chi | \chi: X \times Y \rightarrow \{0, 1\}\}$, 根据定理 2.18, $2^{X \times Y} \sim \text{Ch}(X \times Y)$, 亦即集合与特征函数间能够互相表示, 于是, R 就是 $X \times Y$ 的一个子集, 从而得到了关系的另一种定义形式。

定义 3.2 设 X, Y 为集合, 则 $X \times Y$ 的任一子集 R 称为 X 到 Y 的一个二元关系。 $R \subseteq X \times Y$, 如果 $(x, y) \in R$, 则称 x 与 y 符合关系 R , 记为 xRy ; 如果 $(x, y) \notin R$, 则称 x 与 y 不符合关系 R , 记为 $x \not R y$ 。

例 3.5 如图 3.1 所示, 自然数集 $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ 上的 $<、\leq、=、\geq、>$ 关系均为 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 的子集, 于是, $<、\leq、=、\geq、>$ 等关系可以用序对集合表示如下:

$\mathbf{N} \times \mathbf{N}$	1	2	3	4	...
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	...
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	...
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	...
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	...
...	...	...	...	...	...

图 3.1 $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ 示意图

- $< = \{(1,2), (1,3), \dots, (2,3), (2,4), \dots, (3,4), \dots\}$, 对应于图 3.1 所示表中右上角部分的序对之集。
- $\leq = \{(1,1), (2,2), \dots, (1,2), (1,3), \dots, (2,3), (2,4), \dots, (3,4), \dots\}$, 对应于图 3.1 所

示表中右上角部分和对角线上的序对之集。

- $= = \{(1,1), (2,2), \dots\}$, 对应于图 3.1 所示表中对角线上的序对之集。
- $\geq = \{(1,1), (2,2), \dots, (2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), \dots\}$, 对应于图 3.1 所示表中左下角部分和对角线上的序对之集。
- $> = \{(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3), \dots\}$, 对应于图 3.1 所示表中左下角部分的序对之集。

抽象讨论时用定义 3.2, 具体应用时用定义 3.1。有的作者则把关系视为“多值函数”, 于是, 我们又可以得到下面的关系的第三种定义形式。

定义 3.3 设 X, Y 为集合, 一个从 X 到 2^Y 的映射 R 称为从 X 到 Y 的一个二元关系。

定理 3.1 定义 3.2 与定义 3.3 等价。

【证明】 只须证明 $2^{X \times Y}$ 与 $\{f | f: X \rightarrow 2^Y\}$ 之间存在双射即可。

令 $\varphi: 2^{X \times Y} \rightarrow \{f | f: X \rightarrow 2^Y\}$, $\forall R \in 2^{X \times Y}$, $\varphi(R) = f_R$, $f_R: X \rightarrow 2^Y$, 对于 $\forall x \in X$, $f_R(x) = \{y | y \in Y, xRy\}$ 。下面证明 φ 是双射。

(1) $\forall R_1, R_2 \in 2^{X \times Y}$, 如果 $R_1 \neq R_2$, 则 $f_{R_1} \neq f_{R_2}$, 亦即 $\varphi(R_1) \neq \varphi(R_2)$, 所以 φ 是单射。

(2) 对于 $\forall f \in \{f | f: X \rightarrow 2^Y\}$, 构造 $R \in 2^{X \times Y}$, 使得 $f_R = f$, 令 $R = \bigcup_{x \in X} (\{x\} \times f(x))$, 易见 $R \in 2^{X \times Y}$ 且 $f_R = f$, 亦即 $\varphi(R) = f$, 所以 φ 是满射。

综上(1)、(2)可知 φ 是双射。

注意:

(1) 二元运算不是二元关系, 它提问的是“其值是什么”, 回答应是运算结果为哪个数、物或对象, 结果是论域中的对象。

(2) 二元关系的值是真或假, 提问的是“成立还是不成立”, 回答的是“是”或“否”, 结果属于逻辑范畴, 从类型上说是“布尔型”。

(3) 假设 $R \subseteq X \times Y$ 是一个二元关系, 对于 $\forall x \in X$, 未必 $\exists y \in Y$, 使 xRy ; 对于 $\forall y \in Y$, 未必 $\exists x \in X$, 使 xRy 。

(4) 映射是二元关系, 设有映射 $f: X \rightarrow Y$, $f = \{(x, f(x)) | x \in X, f(x) \in Y\}$, 显然 $f \subseteq X \times Y$ 。

定义 3.4 假设 $R \subseteq X \times Y$ 是一个二元关系, 则称 Φ 为空关系, 称 $X \times Y$ 为全关系, $R^{-1} = \{(y, x) | (x, y) \in R\}$ 则称为关系 R 的逆关系或简称为 R 的逆。

3.1.2 n 元关系与关系数据库

定义 3.5 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为 n 个集合, 笛卡儿乘积 $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ 的任一子集 R 称为 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 间的一个 n 元关系。

在数据库中, 每个集合 X_i 被赋予一个属性名 A_i , X_i 便称为属性 A_i 的值域。属性 A_i 用来刻画集合 X_i 中各元素在现实世界的一个应用时的性质(意义)。以 $A_1, \dots, A_n$ 为属性的 n 元关系 R 记为 $R(A_1, A_2, \dots, A_n)$, 称为一个关系模式。例如, 学生 S (学号 Sno , 姓名 $Sname$, 性别 $Ssex$, 年龄 $Sage$) 就是一个关系模式。在数据库中, 关系模式还要加上其他约束条件, 如学号决定姓名, 年龄不能为负值等。

直观地, n 元关系 R 可以看作一个二维表, 这个表有 n 列, 每一列对应一个属性, 每一

行则是 R 中的一个 n 元组,例如,图 3.2 给出的二维表就是属于关系模式学生 S (学号 Sno , 姓名 $Sname$, 性别 $Ssex$, 年龄 $Sage$) 的一个学生数据库。

学号 Sno	姓名 $Sname$	性别 $Ssex$	年龄 $Sage$
1603001	祖强	男	18
1703002	席奴瓦	女	18
1903026	张硕	男	20
1902013	曲思蒙	女	19
2003008	李明	男	21

图 3.2 二维表式的学生数据库示例

3.2 几种特殊的二元关系

在数学中经常使用的是集合 X 上的二元关系 $R \subseteq X \times X$, 本节讨论的都是 X 上的二元关系 $R \subseteq X \times X$, 某种特殊的关系也可以看作是关系的某种特殊性质。

3.2.1 自反关系、反自反关系

定义 3.6 设 $R \subseteq X \times X$ 。如果 $\forall x \in X$ 总有 $(x, x) \in R$ (或说 xRx), 则称 R 是 X 上的自反二元关系 (Reflexive relation) 或称 R 是自反的 (Reflexive)。如果 $\forall x \in X$ 总有 $(x, x) \notin R$ (或说 xRx), 则称 R 是 X 上的反自反二元关系 (Anti-Reflexive Relation) 或称 R 是反自反的 (Anti-Reflexive)。

注意:

- (1) R 不是 X 上的自反关系 $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X$ 使 $x_0 R x_0$ 。
- (2) R 不是反自反的 $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X$ 使得 $x_0 R x_0$ 。
- (3) 一个二元关系 R 不是自反的并不能推导出 R 是反自反的。

例 3.6 自然数集上的 $\leq, \geq$ 、模 n 同余、整除关系, 矩阵的相似关系等都是自反的二元关系, 自然数集上的 $<$ 关系是反自反的二元关系。

例 3.7 假设 $X = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$, $R_2 = \{(a, c), (b, a), (b, c), (c, b)\}$, $R_3 = \{(a, b), (b, c), (a, c), (c, b)\}$, $R_4 = \{(a, b), (b, b), (b, c), (a, c), (c, b)\}$, 则 R_1 是自反的, R_3 是反自反的, R_2 是反自反的但不是自反的, R_4 既不是自反的也不是反自反的。

$I_X = \{(x, x) | x \in X\}$ 称为 X 上的恒等关系。

定理 3.2 R 是自反的 $\Leftrightarrow I_X \subseteq R$ 。

3.2.2 对称关系、反对称关系

定义 3.7 设 $R \subseteq X \times X$, $x, y \in X$, 当命题“如果 xRy , 则 yRx ”成立, 则称 R 为 X 上的对称二元关系 (Symmetrical Relation) 或称 R 是对称的 (Symmetrical); 当命题“如果 xRy 且 yRx , 则 $x = y$ ”成立, 则称 R 为 X 上的反对称二元关系 (Anti-Symmetrical Relation) 或称 R 为反对称的 (Anti-Symmetrical)。

注意,

(1) R 不是 X 上的对称二元关系 $\Leftrightarrow \exists x, y \in X, x \neq y$, 使 $(x, y) \in R$ 但 $(y, x) \notin R$ 。

(2) R 不是反对称的 $\Leftrightarrow \exists x, y \in X, x \neq y$, 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$ 。

(3) R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall x, y \in X, x \neq y$ 时 $(x, y) \notin R$ 或者 $(y, x) \notin R$ 。

例 3.8 整数的模 n 同余关系、矩阵的相似关系、人与人之间的朋友、同学关系等都是对称二元关系；整数的 $<、\leq、\geq、>$ 、整除关系等，集合间的 $\subseteq、\subset、\supseteq、\supset$ 等关系都是反对称二元关系。

定理 3.3 设 $R \subseteq X \times X$, R 是对称且反对称的 $\Leftrightarrow R \subseteq I_X$ 。

【证明】 必要性 $\Rightarrow$ ：假设 $(x, y) \in R$, 如果 $x \neq y$, 则因为 R 是对称的, 所以 $(y, x) \in R$, 又因为 R 是反对称的, 所以 $x = y$, 这是不可能的, 亦即 $\forall (x, y) \in R$ 均有 $x = y$, 从而 $(x, y) \in I_X$, 因此 $R \subseteq I_X$ 。

充分性 $\Leftarrow$ ：因为 $R \subseteq I_X$, 所以 $\forall (x, y) \in R$ 均有 $x = y$, 从而有 $(y, x) \in R$, 因此 R 是对称的。而且因为 $R \subseteq I_X$, 所以对于 $\forall x, y \in X, x \neq y$ 时 $(x, y) \notin R$ 且 $(y, x) \notin R$, 所以 R 是反对称的。

定理 3.4 R 是对称的 $\Leftrightarrow R^{-1} = R$ 。

例 3.9 假设 $X = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$, $R_2 = \{(a, c), (b, a), (b, c)\}$, $R_3 = \{(a, b), (b, c), (a, c), (c, b)\}$, 则 R_1 是对称的, R_2 是反对称的, R_3 既不是对称的也不是反对称的。

3.2.3 传递关系

定义 3.8 设 $R \subseteq X \times X, x, y, z \in X$ 。当命题“如果 xRy 且 yRz , 则有 xRz ”成立, 则称 R 为 X 上的传递关系 (Transitive Relation) 或称 R 是传递的 (Transitive)。

注意, R 不是 X 上的传递二元关系 $\Leftrightarrow \exists x, y, z \in X$, 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$ 但 $(x, z) \notin R$ 。

例 3.10 整数的 $=、\leq、<$ 、整除、模 n 同余, 矩阵的相似, 集合的 $\subseteq、\subset、\supseteq、\supset$ 关系等都是传递关系；朋友关系不是传递的关系。

例 3.11 设 $X \neq \Phi, R \subseteq X \times X$, 则空关系 $R = \Phi$ 不是自反的, 但空关系是对称的、反自反的、反对称的和传递的。

例 3.12 假设 $X = \{a, b, c\}$, $R_1 = \{(a, b), (b, a), (c, c)\}$, $R_2 = \{(a, c), (b, a), (b, c)\}$, 则 R_1 不是传递的, R_2 是传递的。

定理 3.5 设 $R \subseteq X \times X$, 如果 R 是反自反的且是传递的, 则 R 是反对称的。

【证明】 假设 $(x, y) \in R$ 且 $(y, x) \in R$, 则因为 R 是传递的, 所以 $(x, x) \in R$, 这与 R 是反自反的相矛盾, 所以 $(x, y) \in R$ 与 $(y, x) \in R$ 不能同时成立, 亦即 $(x, y) \notin R$ 或 $(y, x) \notin R$, 因此 R 是反对称的。■

3.2.4 相容关系、关系的计数

定义 3.9 自反且对称的关系称为相容关系。

相容关系在数理逻辑课程中要用到, 那里会定义, 此处不做详述。

例 3.13 设 $X = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $R \subseteq X \times X$, $\mathcal{R}$ 定义如下, 求 $|\mathcal{R}|$ 。

(1) $\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq X \times X, R \text{ 是自反的}\}$ 。

- (2) $\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq X \times X, R \text{ 是反自反的}\}。$
 (3) $\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq X \times X, R \text{ 是对称的}\}。$
 (4) $\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq X \times X, R \text{ 是反对称的}\}。$
 (5) $\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq X \times X, R \text{ 是自反且对称的}\}。$
 (6) $\mathcal{R} = \{R \mid R \subseteq X \times X, R \text{ 是自反或对称的}\}。$

【解】

$$(1) |\mathcal{R}| = 2^{n^2 - n}。$$

$$(2) |\mathcal{R}| = 2^{n^2 - n}。$$

$$(3) |\mathcal{R}| = 2^{n^2 + n}。$$

(4) $|\mathcal{R}| = 3^{(n^2 - n)/2} \times 2^n$ 。因为 R 是反对称的,于是, $i \neq j$ 时, (a_i, a_j) 和 (a_j, a_i) 不能同时属于 R ,存在三种情况:

$$\textcircled{1} (a_i, a_j) \in R, (a_j, a_i) \notin R。$$

$$\textcircled{2} (a_j, a_i) \in R, (a_i, a_j) \notin R。$$

$$\textcircled{3} (a_i, a_j) \notin R, (a_j, a_i) \notin R。$$

$i = j$ 时 (a_i, a_j) 既可以属于 R 也可以不属于 R ,存在两种情况:

$$\textcircled{1} (a_i, a_j) \in R。$$

$$\textcircled{2} (a_i, a_j) \notin R。$$

$$(5) |\mathcal{R}| = 2^{(n^2 - n)/2}。$$

$$(6) |\mathcal{R}| = 2^{n^2 - n} + 2^{(n^2 + n)/2} - 2^{(n^2 - n)/2}。$$

3.3 关系的运算

在关系上引入运算非常重要,形式语言和自动机、编译原理等课程会用到它们。关系的合成运算是映射的合成运算的推广,现实生活中用它可以产生新的关系。利用关系的集合运算、合成运算、关系的闭包等则可以很方便地将各种简单的关系合成为复杂的关系,这些运算的引入使得关系这一数学工具的形式化描述能力变得更为强大。

3.3.1 关系的集合运算

因为二元关系是序对的集合,因此在集合上定义的各种运算均可以应用到关系上来。设 $R, S \subseteq X \times Y$, 则 $R \cup S \subseteq X \times Y, (x, y) \in R \cup S \Leftrightarrow (x, y) \in R \text{ 或 } (x, y) \in S$, 亦即 $xR \cup Sy \Leftrightarrow xRy \text{ 或 } xSy$ 。

类似地,我们还有如下的一些结论:

$$(1) (x, y) \in R \cap S \Leftrightarrow (x, y) \in R \text{ 且 } (x, y) \in S, \text{ 亦即 } xR \cap Sy \Leftrightarrow xRy \text{ 且 } xSy。$$

$$(2) (x, y) \in R \setminus S \Leftrightarrow (x, y) \in R \text{ 但 } (x, y) \notin S, \text{ 亦即 } xR \setminus Sy \Leftrightarrow xRy \text{ 但 } x \not S y。$$

$$(3) (x, y) \in R \Delta S \Leftrightarrow (x, y) \in (R \setminus S) \cup (S \setminus R), \text{ 亦即 } xR \Delta Sy \Leftrightarrow x(R \setminus S) \cup (S \setminus R)y。$$

$$(4) (x, y) \in R^c \Leftrightarrow (x, y) \notin R, \text{ 亦即 } xR^c y \Leftrightarrow x \not R y。$$

$$(5) \text{ 设 } R \subseteq X \times Y, S \subseteq Z \times W, \text{ 则 } R \times S = \{((x, y), (z, w)) \mid (x, y) \in R, (z, w) \in S\}。$$

在数据库系统的具体实现中,关系数据库中的关系就可以进行集合运算。

3.3.2 关系的合成运算

由“母子”关系及“夫妻”关系的存在,产生了“婆媳”关系,其关键是儿子或丈夫的存在,由此可以引出二元关系的合成运算的定义。

定义 3.10 设 $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z$ 。 $X \times Z$ 的子集 $\{(x, z) \mid \exists y \in Y \text{ 使 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in S\}$ 称为 R 与 S 的合成二元关系,记作 $R \circ S$ 。

$R \circ S$ 也可以看成是 R 与 S 的合成运算。易见,当 R 与 S 是映射时, $R \circ S$ 就是映射的合成。

例 3.14 $R \subseteq X \times X$, 则 $R \circ R = \{(x, z) \mid \exists y \in X \text{ 使 } (x, y) \in R \text{ 且 } (y, z) \in R\}$ 。易见,如果 R 是父子关系,则 $R \circ R$ 就是爷孙关系。

例 3.15 假设 $X = \{1, 2, 3, 4\}, R = \{(1, 2), (2, 3)\}, S = \{(1, 1), (2, 1), (1, 3)\}$, 则 $R \circ S = \{(1, 1)\}, S \circ R = \{(1, 2), (2, 2)\}$ 。

一般地,二元关系的合成运算不满足交换律。

3.3.3 关系合成运算的性质

1. 关系的合成运算满足结合律

定理 3.6 设 X, Y, Z, W 为集合, $R \subseteq X \times Y, S \subseteq Y \times Z, T \subseteq Z \times W$, 则 $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ 。

【证明】 先证 $(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$ 。

设 $(x, w) \in (R \circ S) \circ T$, 则 $\exists z \in Z$, 使 $(x, z) \in R \circ S$ 且 $(z, w) \in T$, 再由定义 3.10 知, $\exists y \in Y$, 使 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S$, 于是有 $(x, y) \in R$ 且 $(y, w) \in S \circ T$, 故 $(x, w) \in R \circ (S \circ T)$, 因此 $(R \circ S) \circ T \subseteq R \circ (S \circ T)$ 。

同理可证 $R \circ (S \circ T) \subseteq (R \circ S) \circ T$ 。

综上, $(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$ 。 ■

2. 关系的合成运算对并运算满足左、右分配律

定理 3.7 设 X, Y, Z 为集合, $R \subseteq X \times Y, S, T \subseteq Y \times Z$, 则

(1) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ 。

(2) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$ 。

【证明】

(1) 先证 $R \circ (S \cup T) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$ 。

设 $(x, z) \in R \circ (S \cup T)$, 则 $\exists y \in Y$, 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S \cup T$, 所以 $(y, z) \in S$ 或 $(y, z) \in T$, 如果 $(y, z) \in S$, 则 $(x, z) \in R \circ S \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$; 如果 $(y, z) \in T$, 则 $(x, z) \in R \circ T \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$ 。因此, $R \circ (S \cup T) \subseteq (R \circ S) \cup (R \circ T)$ 。

再证 $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$ 。

设 $(x, z) \in (R \circ S) \cup (R \circ T)$, 则 $(x, z) \in R \circ S$ 或 $(x, z) \in R \circ T$ 。

① 如果 $(x, z) \in R \circ S$, 则 $\exists y \in Y$, 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S \subseteq S \cup T$, 亦即 $\exists y \in Y$, 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S \cup T$, 从而有 $(x, z) \in R \circ (S \cup T)$, 此时 $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$ 。

② 如果 $(x, z) \in R \circ T$, 则 $\exists y \in Y$, 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in T \subseteq S \cup T$, 亦即 $\exists y \in Y$,

使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in S \cup T$, 从而有 $(x, z) \in R \circ (S \cup T)$, 此时 $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$ 。

亦即 $(x, z) \in R \circ S$ 或者 $(x, z) \in R \circ T$ 时均有 $(R \circ S) \cup (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cup T)$ 成立。

综上, $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$ 。

(2) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$ 的证明留给读者作为练习。 ■

3. 关系的合成运算对交运算满足半分配律

定理 3.8 设 X, Y, Z 为集合, $R \subseteq X \times Y$, $S, T \subseteq Y \times Z$, 则 $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$ 。

【证明】

设 $(x, z) \in R \circ (S \cap T)$, 则 $\exists y \in Y$, 使得 $(x, y) \in R$, $(y, z) \in S \cap T$, 所以 $(y, z) \in S$ 且 $(y, z) \in T$, 从而, $(x, z) \in R \circ S$ 且 $(x, z) \in R \circ T$, 因此, $(x, z) \in (R \circ S) \cap (R \circ T)$, 所以 $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$ 。 ■

4. 关系的逆运算是一个穿脱过程

定理 3.9 设 X 为集合, $R, S \subseteq X \times X$, 则

(1) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$ 。

(2) $R \circ R^{-1}$ 是对称的。

【证明】 (1) 先证 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$ 。

设 $(x, z) \in (R \circ S)^{-1}$, 则 $(z, x) \in R \circ S$, 于是 $\exists y \in X$, 使得 $(z, y) \in R$, $(y, x) \in S$, 从而有 $(x, y) \in S^{-1}$, $(y, z) \in R^{-1}$, 所以 $(x, z) \in S^{-1} \circ R^{-1}$, 因此 $(R \circ S)^{-1} \subseteq S^{-1} \circ R^{-1}$ 。

再证 $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$ 。

设 $(x, z) \in S^{-1} \circ R^{-1}$, 则 $\exists y \in X$, 使得 $(x, y) \in S^{-1}$, $(y, z) \in R^{-1}$, 亦即 $(z, y) \in R$, $(y, x) \in S$, 于是有 $(z, x) \in R \circ S$, 故 $(x, z) \in (R \circ S)^{-1}$, 因此 $S^{-1} \circ R^{-1} \subseteq (R \circ S)^{-1}$ 。

(2) 由(1)可得, $(R \circ R^{-1})^{-1} = (R^{-1})^{-1} \circ R^{-1} = R \circ R^{-1}$, 再根据定理 3.4 可知 $R \circ R^{-1}$ 是对称的。 ■

5. 关系的幂运算满足指数规律

定理 3.10 设 X 为集合, m, n 为自然数, $R \subseteq X \times X$, 令 $R^0 = I_X$, $R^1 = R$, $R^2 = R \circ R$, 则 $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, $(R^m)^n = R^{mn}$ 。

利用抽屉原理很容易即可得到下面的定理 3.11。

定理 3.11 设 X 为集合, n 为自然数, $R \subseteq X \times X$, $|X| = n$, 则存在 s 和 t , $0 \leq s < t \leq 2^{n^2}$ 使 $R^s = R^t$ 。

定理 3.12 设 X 为集合, $R \subseteq X \times X$, 则 R 是传递的 $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$ 。

【证明】 必要性 $\Rightarrow$: 设 R 是传递的, 往证 $R^2 \subseteq R$ 。

为此, 设 $(x, z) \in R^2$, 则 $\exists y \in X$, 使得 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 根据 R 的传递性即可得 $(x, z) \in R$, 因此 $R^2 \subseteq R$ 。

充分性 $\Leftarrow$: 设 $R^2 \subseteq R$, 往证 R 是传递的, 即如果 $(x, y) \in R$ 且 $(y, z) \in R$, 往证 $(x, z) \in R$ 。这是显然的, 因为 $(x, z) \in R^2 \subseteq R$ 。 ■

由定理 3.12 可以看出, 关系具有传递性的本质是它包含了由直接联系可以推导出来的一跳可达的间接联系。

定理 3.13 设 $R \subseteq X \times X$, R 是对称且传递的 $\Leftrightarrow R = R \circ R^{-1}$ 。

【证明】 必要性 $\Rightarrow$: 假设 R 是对称且传递的, 则因为 $R^{-1}=R$, 所以 $R \circ R^{-1} \subseteq R$ 。假设 $(x, y) \in R$, 则 $(y, x) \in R^{-1}=R$, 从而有 $(y, y) \in R$, 故 $(x, y) \in R^2 = R \circ R^{-1}$, 因此 $R \subseteq R \circ R^{-1}$, 所以 $R = R \circ R^{-1}$ 。

充分性 $\Leftarrow$: 假设 $R = R \circ R^{-1}$, 则由定理 3.9(2) 可知 R 是对称的, 从而 $R = R^{-1}$, 于是, $R = R^2$, 再由定理 3.12 可知 R 是传递的。■

问: 关系的合成运算保持了参与运算的关系的哪些性质?

答: 自反, 即如果 R 与 S 是自反的, 则 $R \circ S$ 也是自反的。与合成运算有关的, 计算机科学中最有用的是传递闭包。

3.4 二元关系的传递闭包

二元关系的传递闭包、自反传递闭包在形式语言与自动机理论中十分有用。

3.4.1 二元关系的传递闭包、自反传递闭包

由“父子”关系可以引出“后代”关系, 由“直接领导”关系可以引出“间接领导”关系, 对这一过程的抽象就可以得到关系的传递闭包运算。

定义 3.11 设 $R \subseteq X \times X$, X 上一切包含 R 的传递关系的交称为 R 的传递闭包 (Transitive Closure), 记为 R^+ 。于是,

$$R^+ = \bigcap_{\substack{R \subseteq R' \\ R' \text{ 传递}}} R'$$

$R^* = R^0 \cup R^+$ 称为 R 的自反传递闭包。

由定义 3.11 可知, 如果 R 是传递的, 则 $R^+ = R$; 如果 R 是自反且传递的, 则 $R^* = R$ 。

对定义 3.11 的定义方式不妨这样理解: 给定一个关系 R , R 的性质不太好, 如不传递 (工程上有时只能获取和保存直接联系, 得到的关系没有体现间接联系), 但又必须研究 (需要获取间接联系)。为什么不传递? 因为序对太少 (只有直接联系), 则加一些序对 (加入直接联系所隐含的间接联系), 但又不能加得太多 (需要体现出原始的关系 R , 因此只能加入由 R 中的直接联系派生出来的间接联系), 则定义传递闭包为包含 R 的传递关系中最小的那一个 (这一点恰好可以用交运算来表述)。

虽然定义 3.11 给出的关系的传递闭包不好计算, 但更容易推广到关系的其他性质上去, 如自反闭包、对称闭包等。

3.4.2 传递闭包的性质

定理 3.14 设 $R \subseteq X \times X$, 则 R^+ 是传递的。

【证明】

设 $(x, y) \in R^+$, $(y, z) \in R^+$, 只需证明 $(x, z) \in R^+$ 。

为此, 设 R' 是任一包含 R 的传递关系, 则根据定义 3.11 可知, $R^+ \subseteq R'$, 从而有 $(x, y) \in R'$, $(y, z) \in R'$, 由 R' 的传递性可得 $(x, z) \in R'$, 再根据定义 3.11, 以及 R' 的任意性和交运算的性质可得 $(x, z) \in R^+$ 。■

定理 3.14 再次说明 R^+ 就是包含 R 的传递关系中最小的那一个。

定义 3.11 给出的 R 的传递闭包不好计算,从“父子”关系引出的“后代”关系可以得出传递闭包的一种更便于计算的定义方式,如定理 3.15 所示。

定理 3.15 设 $R \subseteq X \times X$, 则 $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

【证明】 先证 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

显然 $R \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 于是只需证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的即可。设 $(a, b), (b, c) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 则有 m, k 使得 $(a, b) \in R^m, (b, c) \in R^k$, 由关系合成的定义可知, $(a, c) \in R^m \circ R^k = R^{m+k} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 因此 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 是传递的, 从而 $R^+ \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。

再证 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

设 $(a, b) \in \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$, 则有 m 使得 $(a, b) \in R^m$, 按照关系合成的定义, 存在 $b_1, b_2, \dots, b_{m-1} \in X$, 使得 $(a, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{m-1}, b) \in R$, 因为 $R \subseteq R^+$, 所以 $(a, b_1), (b_1, b_2), \dots, (b_{m-1}, b) \in R^+$, 由定理 3.14 知 R^+ 是传递的, 因此, $(a, b) \in R^+$, 从而 $\bigcup_{n=1}^{\infty} R^n \subseteq R^+$ 。

综上, $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ 。 ■

定理 3.15 给出的关系的传递闭包仍然不好计算, 因为计算机只能处理有穷的, 如果 $|X| = n$, 则可以得到一种方便计算的关系的传递闭包定义式, 如定理 3.16 所示。

定理 3.16 设 $R \subseteq X \times X, |X| = n$, 则 $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

【证明】

根据定理 3.15, 只需证明当 $m > n$ 时 $R^m \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$ 即可。

设 $(x, y) \in R^m$, 则存在 $y_1, y_2, \dots, y_{m-1} \in X$, 使得 $(x, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{i-1}, y_i), \dots, (y_{j-1}, y_j), \dots, (y_{m-1}, y) \in R$, $x, y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y$ 是 X 中的 $m+1$ 个元素, 而 $|X| = n, n < m$, 根据抽屉原理, $y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y$ 中必有两个元素相同, 不妨设 $y_i = y_j, 1 \leq i < j \leq m$, 其中, $y_m = y$ 。于是, 根据关系合成的定义, 我们有 $(x, y_1), (y_1, y_2), \dots, (y_{i-1}, y_j), \dots, (y_{m-1}, y) \in R$, 从而 $(x, y) \in R^{m-(j-i)}$, 如果 $m-(j-i) \leq n$, 则定理得证, 如果 $m-(j-i) > n$ 则继续使用上面的方法, 由 n 有限可知, 经过有限次使用上述方法必将得到 $p \leq n$, 使得 $(x, y) \in R^p \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$, 亦即当 $m > n$ 时 $R^m \subseteq \bigcup_{i=1}^n R^i$, 从而可得 $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 。

如果将求 R 的传递闭包 R^+ 看作是关于 R 的一个函数, 将 $\subseteq$ 看作是升序, 则求传递闭包 R^+ 就是个单调函数, 亦即“如果 $R \subseteq S$, 则 $R^+ \subseteq S^+$ ”成立。我们先来证明一下这个结论。因为 $R \subseteq S \subseteq S^+$, 又因为 S^+ 是传递的, 因此 S^+ 就是定义 3.11 中的某个 R' , 而 $R^+ \subseteq R'$, 故 $R^+ \subseteq S^+$ 。 ■

上面的结论可以作为推理的工具, 则下面的定理 3.17 的证明就非常简单了。

定理 3.17 设 $R, S \subseteq X \times X$, 则 $R^+ \cup S^+ \subseteq (R \cup S)^+$ 。

【证明】 因为 $R \subseteq R \cup S$ 且 $S \subseteq R \cup S$, 所以 $R^+ \subseteq (R \cup S)^+$ 且 $S^+ \subseteq (R \cup S)^+$, 从而 $R^+ \cup S^+ \subseteq (R \cup S)^+$ 。 ■

例 3.16 $N = \{1, 2, \dots\}$, $< \subseteq N \times N$, $\forall m, n \in N, n < m \Leftrightarrow m = n + 1$, 则有 $<^+ = <$, $<^* = \leq$ 。

$<$ 是自然数间的直接相邻关系, $<^+ = <$ 是自然数间的间接相邻关系, 可见, 利用求闭包运算可以由简单的直接联系得到复杂的间接联系。

例 3.17 $X = \{a, b, c, d\}$, $R = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$, 则 $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4 = \{(a, b), (b, c), (c, a), (a, c), (b, a), (c, b), (a, a), (b, b), (c, c)\}$ 。

如果 $R = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, a)\}$, 则 $R^2 = \{(a, c), (b, d), (c, a), (d, b)\}$, $R^3 = \{(a, d), (b, a), (c, b), (d, c)\}$, $R^4 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d)\}$ 。这表明定理 3.16 中 $R^+ = \bigcup_{i=1}^n R^i$ 里的 n 不能再改善了。

定义 3.12 设 $R \subseteq X \times X$, P 是性质(如 $P = \{\text{自反}, \text{传递}\}$)。 R 的 P 闭包是 X 上一切包含 R 的同时具有 P 中所有性质的关系的交。

3.4.3 迷宫问题

如图 3.3 所示, 这是迷宫问题的一个典型例子: 寻找从一指定的房间 S 到某个“目标”房间 G 的一条路径(如果存在的话)。如果迷宫像图 3.3 似的规模很小, 则该问题的解容易一眼看出, 但对于规模较大的迷宫, 情况就不会这么简单了。

学习了关系这种数学工具之后, 我们可以如下来思考上述迷宫问题:

① 定义一个适当的关系 R 连同—个迷宫中所有房间组成的有穷定义域, 使得迷宫问题的解的存在与不存在可由计算闭包 R^* 来确定。

② 描述如何修改 R^* 的计算以使迷宫问题的解决不仅限于确定解的存在性, 也就是说, 还需要展示如果从 S 到 G 的路径存在的话, 如何把它算出来。

我们自然应该想到, 编一个计算机程序解决它。于是产生了下面的问题:

- (1) 怎样表示迷宫?
- (2) 怎样表示关系 R ?
- (3) 怎样计算 R^* ?
- (4) 怎样找出从 S 到 G 的路径?

由此引出了 3.5 节内容——关系的计算机表示和闭包的求解算法。

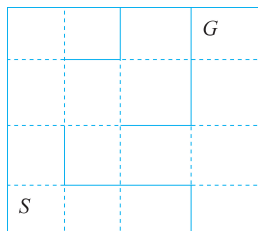


图 3.3 一个迷宫的示意图

3.5 关系矩阵与关系图

因为在计算机中只能处理有穷的情况, 因此本节假定关系是有穷集合上的二元关系。

3.5.1 关系矩阵

设 X, Y 为集合, 为 X 中元素编号得 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, 为 Y 中元素编号得 $Y =$

$\{y_1, y_2, \dots, y_n\}, R \subseteq X \times Y$, 则 $m \times n$ 的 $(0, 1)$ -矩阵 $A = (a_{ij})$ 称为关系 R 的矩阵, 其中

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & x_i R x_j \\ 0 & x_i \not R x_j \end{cases}.$$

计算机处理集合的常用方法就是为集合中的元素编号, 计算机中存放关系 R 的方法就是存放其矩阵, 以后称为布尔矩阵, 编号不同得到不同的矩阵, 但都忠实地反映了 R 。利用线性代数线性空间的基, 元素重新排序后的矩阵 A'_R 与原矩阵 A_R 之间的关系是合同关系, 即存在一个置换矩阵 P , 使得 $A'_R = P^T A_R P$ 。

定理 3.18 设 X 为集合, $R \subseteq X \times X$, A_R 是 R 的布尔矩阵, 则

- (1) R 是自反的 $\Leftrightarrow A_R$ 对角线上元素全为 1。
- (2) R 是对称的 $\Leftrightarrow A_R = A_R^T$ 。
- (3) R 是反对称的 $\Leftrightarrow \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j$ 时, a_{ij} 与 a_{ji} 不能同时为 1。
- (4) R 是反自反的 $\Leftrightarrow A_R$ 对角线上元素全为 0。
- (5) R 是传递的 $\Leftrightarrow$ 如果 $a_{ik} = 1$ 且 $a_{kj} = 1$, 则 $a_{ij} = 1$ 。

由定理 3.18 可以看出, 用计算机验证某一关系的性质, 编程是很容易的。

3.5.2 $(0, 1)$ -矩阵的运算

$m \times n$ 的 $(0, 1)$ -矩阵 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, 则 $A \vee B = (a_{ij} \vee b_{ij})$, $A \wedge B = (a_{ij} \wedge b_{ij})$ 。

如果 $A = (a_{ij})$ 为 $m \times p$ 的 $(0, 1)$ -矩阵, $B = (b_{ij})$ 为 $p \times n$ 的 $(0, 1)$ -矩阵, 则定义 $A \circ B = C$, 其中

$$c_{ij} = (a_{i1} \wedge b_{1j}) \vee (a_{i2} \wedge b_{2j}) \vee \dots \vee (a_{ip} \wedge b_{pj}).$$

定理 3.19 设 $R, S \subseteq X \times X, |X| = n$, A, B 为 R 和 S 的矩阵, 则 $R \cup S, R \cap S, R \circ S, R^+$ 的矩阵分别为 $A \vee B, A \wedge B, A \circ B, \bigcup_{i=1}^n A^{(i)}$, 其中,

$$A^{(i)} = A \circ A \circ \dots \circ A \quad (\text{共 } i \text{ 个 } A)$$

3.5.3 Warshall 算法

算法是用计算机解决问题的一种基本方法, 第一步, 确定迭代关系, 第二步, 建立关系式, 第三步, 过程控制。

如下的 Warshall 算法就是用来求解 R^+ 的一个典型算法。

输入: A_R ;

输出: R^+ ;

步骤:

(1) $A \leftarrow A_R$;

(2) for $k = 1$ to n

 for $i = 1$ to n

 for $j = 1$ to n

$A[i, j] = A[i, j] \vee (A[i, k] \wedge A[k, j])$

3.5.4 关系的图

本节只是给出用于表示关系的一种方法——图,详细地研究图及其性质是图论的内容。

设 X 为集合, $R \subseteq X \times X$, X 中每个元素 x 对应一个标记为 x 的顶点,如果 $(x, y) \in R$, 则从顶点 x 到顶点 y 画一条有方向的边,由此得到的图形就是关系的图。

例 3.18 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $R \subseteq X \times X$, $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2), (2, 4)\}$, 则关系 R 的图如图 3.4 所示。

例 3.19 设 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c\}$, $R \subseteq X \times Y$, $R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, b), (4, c)\}$, 则关系 R 的图如图 3.5 所示。

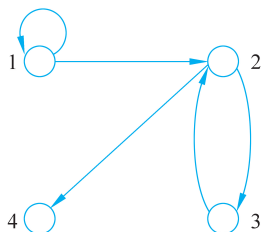


图 3.4 例 3.18 中关系 R 的图

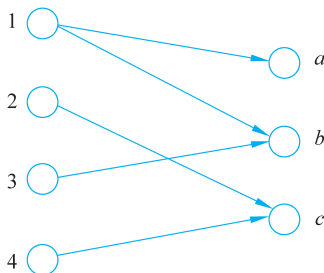


图 3.5 例 3.19 中关系 R 的图

定理 3.20 设 X 为集合, $R \subseteq X \times X$, 则

- (1) R 是自反的 $\Leftrightarrow$ 在关系 R 的图中, 每个顶点有指向自己的边。
- (2) R 是对称的 $\Leftrightarrow$ 在关系 R 的图中, 如果存在从顶点 x 指向顶点 y 的边, 则必有从顶点 y 指向顶点 x 的边。
- (3) R 是传递的 $\Leftrightarrow$ 在关系 R 的图中, 如果存在从顶点 x 指向顶点 y 的边, 且存在从顶点 y 指向顶点 z 的边, 则必有从顶点 x 指向顶点 z 的边。

因此, 图就是一个二元组 (X, R) , 如果 X 是一个有穷集合, X 上只有一个二元关系, 则用图作数学模型最合适, 计算机中用矩阵存放图。

3.6 等价关系与集合的划分

不论在数学还是日常生活, 不论在自然科学还是社会科学, 抑或计算机科学中, 等价关系 (equivalent relation) 都是一个非常重要的概念, 线性代数的研究方法主要就是使用等价关系, 近世代数中的重要结论或方法——同态基本定理使用的也是利用映射确定的等价关系。集合的划分和等价关系这两个概念是一回事, 只是角度不同而已, 对此, 本节也将给出论证。

3.6.1 等价关系

等价关系反映的是事物之间的同质性, 如同学、同事、同桌、同乡、同余、同值域等, 抽象地看, 自反、对称且传递的关系就是等价关系。

定义 3.13 设 X 为集合, $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系, 如果

① R 是自反的, 即 $I_X \subseteq R$ 。

② R 是对称的, 即 $R^{-1} \subseteq R$ 。

③ R 是传递的, 即 $R^2 \subseteq R$ 。

则称 R 为 X 上的等价关系。

例 3.20 设 Z 为整数集合, $\equiv \subseteq Z \times Z, n \in Z, \forall m, k \in Z, m \equiv k \Leftrightarrow n \mid (m - k)$, $\equiv$ 称为 Z 上的模 n 同余关系, 模 n 同余关系 $\equiv$ 是等价关系。

例 3.21 设 S 为学生集合, $\sim \subseteq S \times S, \forall a, b \in S, a \sim b \Leftrightarrow a$ 与 b 在同一个班级学习, $\sim$ 称为 S 上的同班同学关系, 学生之间的同班同学关系 $\sim$ 也是等价关系。

例 3.22 设 M 为一切 $m \times n$ 实矩阵之集, $\cong \subseteq M \times M, \forall A, B \in M, A \cong B \Leftrightarrow$ 用初等变换可以从 A 变到 B , $\cong$ 称为 M 上的相抵关系, 矩阵间的相抵关系 $\cong$ 是等价关系。

例 3.23 设 M 为所有 n 阶实对称矩阵之集, $\simeq \subseteq M \times M, \forall A, B \in M, A \simeq B \Leftrightarrow \exists P$, 使 $B = P^T A P$, $\simeq$ 称为 M 上的合同关系, 矩阵间的合同关系 $\simeq$ 是等价关系。

例 3.24 设 M 为所有 n 阶实方阵之集, $\approx \subseteq M \times M, \forall A, B \in M, A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in M$, 使 $B = P^{-1} A P$, $\approx$ 称为 M 上的相似关系, 矩阵间的相似关系 $\approx$ 是等价关系。

3.6.2 等价类

定义 3.14 设 X 为集合, $\cong$ 是 X 上的等价关系, $x \in X$, 令 $[x] = \{y \mid x \cong y, y \in X\}$, $[x]$ 称为 $\cong$ 的一个等价类(equivalent class)。

如果 $y \in [x]$, 则 $x \cong y$, 因此 $[y] = [x]$ 。

例如, 文豪和张航是 1203103 班的同学, 则 $1203103 = [\text{文豪}] = [\text{张航}]$, 祖强和王杰是 1603001 班的同学, 则 $1603001 = [\text{祖强}] = [\text{王杰}]$, 由此可见, 等价类就是互相等价的元素组成的那个整体, 其中的每个元素都可以作为这一整体的代表。

那么, 等价类具有什么性质呢? 请看下面的引理 3.1。

引理 3.1 如果 $[x]$ 和 $[y]$ 是等价关系 $\cong$ 的两个等价类, 则 $[x] = [y]$ 或 $[x] \cap [y] = \Phi$, 即如果 $[x] \neq [y]$ 则 $[x] \cap [y] = \Phi$ 。

【证明】 采用反证法。

假设 $[x] \cap [y] \neq \Phi$, 则 $\exists z \in [x] \cap [y]$, 即 $z \in [x]$ 且 $z \in [y]$, 从而 $x \cong z, y \cong z$, 从而 $x \cong y$, 因此, 对于 $\forall p \in [x], x \cong p$, 故 $p \cong x$, 又因为 $x \cong y$, 所以 $p \cong y$, 于是 $y \cong p$, 亦即 $p \in [y]$ 。反之, 对于 $\forall p \in [y]$, 易证 $p \in [x]$, 故此 $[x] = [y]$, 矛盾。■

给定一个等价关系, 我们还需要弄清楚下面的问题: 对应该等价关系有多少个等价类? 每个等价类中的元素是哪些? 具有什么共同的性质? 解决问题没有统一的方法, 只能具体问题具体分析, 下面给出几个求等价类的例子。

例 3.25 $N = \{1, 2, 3, \dots\}$ 上的模 3 同余关系的等价类为

$$[1] = \{1, 4, 7, \dots\}$$

$$[2] = \{2, 5, 8, \dots\}$$

$$[3] = \{3, 6, 9, \dots\}$$

例 3.26 设有映射 $f: X \rightarrow Y$, 利用 f 在 X 上定义一个等价关系 $\cong_f, \forall x_1, x_2 \in X, x_1 \cong_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, 则 $\cong_f$ 的等价类为: $\forall y \in Y, f^{-1}(\{y\}) = f^{-1}(y) \subseteq X, \cong_f$ 至多有 $|Y|$ 个等价类(f 为满射时有 $|Y|$ 个等价类), 等价类的个数为 $|f(X)|$ 。

例 3.27 $X = \{1, 2, 3\}, Y = \{1, 2\}, Y^X = \{f \mid f: X \rightarrow Y\}$, 在 Y^X 上定义二元关系 $\cong: \forall f, g \in Y^X, f \cong g \Leftrightarrow f(X) = g(X)$, 易见 $\cong$ 为等价关系。假设值域为 $\{1\}$ 的映射为 f_1 , 值域为 $\{2\}$ 的映射为 f_2 , 值域为 $\{1, 2\}$ 的映射为 $f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8$, 则 $\cong$ 的等价类为:

- (1) $[f_1] = \{f_1\}$ 。
- (2) $[f_2] = \{f_2\}$ 。
- (3) $[f_3] = \{f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8\}$ 。

X 上的等价关系 $\cong$ 的等价类之集称为 X 对 $\cong$ 的商集, 记为 $X/\cong$ 。这个概念很重要, 尤其在现代分析中, 可以得到新的对象(等价类), 这其实就是对事物进行抽象的过程。记得小时候做过这样的事情: 黄豆、红豆、黑豆、绿豆混在一起, 将其分开的过程就是在求等价类, 你能给出其等价关系的定义吗? 为什么等价类之集称为商集呢?

例 3.28 设 S_n 是全体 n 阶置换的集合, $\forall \sigma \in S_n, b_i(\sigma)$ 表示 σ 分解为循环置换的乘积时其中所包含的 i -循环置换的个数, 则 $1^{b_1(\sigma)} 2^{b_2(\sigma)} \cdots n^{b_n(\sigma)}$ 称为 σ 的型, 记为 $\text{Type}(\sigma)$ 。例如, 假设 $\sigma = (1258)(367)(4)(9)$, 则 $\text{Type}(\sigma) = 1^2 3^1 4^1$ 。在 S_n 上定义共轭关系 $R, \forall \sigma, \tau \in S_n, \sigma R \tau \Leftrightarrow \text{Type}(\sigma) = \text{Type}(\tau)$ 。

- (1) 试证明: R 是等价关系。
- (2) 求 S_5 关于共轭关系 R 的等价类。

【证明】 (1) 只须证明 R 是自反的、对称的和传递的即可。

- ① $\forall \sigma \in S_n$, 显然 $\text{Type}(\sigma) = \text{Type}(\sigma)$, 因此 $\sigma R \sigma$, 所以 R 是自反的。
- ② $\forall \sigma, \tau \in S_n$, 如果 $\sigma R \tau$, 则 $\text{Type}(\sigma) = \text{Type}(\tau)$, 亦即 $\text{Type}(\tau) = \text{Type}(\sigma)$, 从而有 $\tau R \sigma$, 所以 R 是对称的。
- ③ $\forall \sigma, \tau, \gamma \in S_n$, 如果 $\sigma R \tau$ 且 $\tau R \gamma$, 则 $\text{Type}(\sigma) = \text{Type}(\tau)$ 且 $\text{Type}(\tau) = \text{Type}(\gamma)$, 于是 $\text{Type}(\sigma) = \text{Type}(\gamma)$, 从而有 $\sigma R \gamma$, 所以 R 是传递的。

综上①~③可知, 共轭关系 R 是等价关系。 ■

【解】 (2) 根据 S_5 分解为循环置换的乘积后所包含的 1-循环置换、2-循环置换、3-循环置换、4-循环置换、5-循环置换的个数易得: S_5 关于共轭关系 R 的等价类集合为

$$S_5/R = \{[1^5], [1^3 2^1], [1^1 2^2], [1^2 3^1], [2^1 3^1], [1^1 4^1], [5^1]\}$$

3.6.3 集合的划分

虽然集合的划分(set partition)在数学上是一个抽象的概念, 但在现实生活中却到处都能碰到, 如地质学、植物学、动物学、商场、博物馆的分类(partition), 分类可以任意分, 但不能太随便了, 就像学生分班一样, 要求全体学生都要分完, 班级不能为空, 而且不同班级的交集必须为空。

定义 3.15 设 X 是一个集合, $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 称为 X 的划分, 如果 $\mathcal{A}$ 满足:

- (1) $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, A_i \subseteq X, A_i \neq \Phi$ 。
- (2) $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$, 如果 $i \neq j$, 则 $A_i \cap A_j = \Phi$ 。
- (3) $\bigcup_{i=1}^k A_i = X$ 。

如果 $|\mathcal{A}| = k$, 则 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个 k -划分。

设 $\mathcal{A}$ 是 X 的一个划分, 如果定义 3.15 中只有 (1) 和 (2) 成立, 则称 $\mathcal{A}$ 是 X 的子划分 (subpartition)。如果 $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}, A_i \cap A \neq \Phi$, 则称 A 为 $\mathcal{A}$ 的一个覆盖 (cover)。

如果 $|X| = n+1$, 则 X 的划分个数为:

$$B_{n+1} = C_n^0 B_0 + C_n^1 B_1 + \dots + C_n^n B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k B_k, n \geq 0, B_0 = 1. B_n \text{ 称为贝尔数, 贝尔数}$$

以数学家埃里克·坦普尔·贝尔 (Eric Temple Bell) 的名字来命名的。

令 $s(n, k)$ 表示将 n 个物体的集合分成 k 个类的划分的个数, 则 $B_n = \sum_{k=1}^n s(n, k)$ 。 $s(n, k)$ 称为第二类斯特林数, 斯特林数是由苏格兰数学家 James Stirling 提出的, 可以分为两类: 第一类斯特林数和第二类斯特林数。

第一类斯特林数 (也称为无符号第一类斯特林数) 表示将 n 个不同元素构成 k 个圆排列的数目, 亦即 S_n 中的恰有 k 个循环 (包括 1-循环) 的置换个数, 则

$$\sum_{k=1}^n s(n, k) x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$$

其递推公式为

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) - n \cdot s(n, k)$$

其中, $s(n, 1)$ 表示 n 个元素的唯一排列方式, 即 $n!$; $s(n, 2)$ 表示 n 个元素的两种排列方式的组合数, 即 $n!(n-1)!$ 。

第二类斯特林数表示将 n 个相同元素构成 k 个圆排列的数目, 亦即将 n 个物体的集合分成 k 个类的划分的个数, 则

$$s(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i (k-i)^n$$

其递推公式为

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + n \cdot s(n-1, k)$$

其中, $s(n, k)$ 表示 n 个相同元素的 k 个圆排列的数目, $s(n-1, k)$ 表示 $n-1$ 个相同元素的 k 个圆排列的数目。

这两种斯特林数在组合数学中有广泛的应用, 可以用于解决多种数学分析和组合数学问题。

3.6.4 等价关系与集合划分互相确定

定理 3.21 设 X 是一个集合, $\mathcal{E} = \{\cong | \cong \text{ 是 } X \text{ 上的等价关系}\}$, $\mathcal{P} = \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \text{ 是 } X \text{ 的划分}\}$, 则 $\mathcal{E}$ 与 $\mathcal{P}$ 之间存在双射。

【证明】 令 $\varphi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{P}$, $\forall \cong \in \mathcal{E}$, $\varphi(\cong)$ 为 $\cong$ 的所有等价类之集 $\mathcal{A}_{\cong}$, 则根据引理 3.6.1 可知, $\mathcal{A}_{\cong}$ 是 X 的一个划分, 于是 $\mathcal{A}_{\cong} \in \mathcal{P}$ 。如果 $\cong, \cong' \in \mathcal{E}$, 且 $\cong \neq \cong'$, 则 $\varphi(\cong) \neq \varphi(\cong')$, 即 $\cong$ 和 $\cong'$ 的等价类之集不相等, 所以 φ 是单射。

反之, 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{P}$, 则关系 $\cong_{\mathcal{A}} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \times A$ 是 X 上的二元关系且 $\varphi(\cong_{\mathcal{A}}) = \mathcal{A}$ 。今证 $\cong_{\mathcal{A}}$ 是 X 上的等价关系 (一般情况下, 笛卡儿乘积没有意义, 但此时, 划分中每个集合的笛卡儿乘积的并就是划分所对应的等价关系)。

(1) $\forall x \in X, \exists A \in \mathcal{A}$ 使得 $x \in A$, 因此, $(x, x) \in A \times A \subseteq \cong_{\mathcal{A}}$, 故 $\cong_{\mathcal{A}}$ 是自反的。

(2) 如果 $x \cong_{\mathcal{A}} y$, 即 $(x, y) \in \cong_{\mathcal{A}}$, 则 $\exists A \in \mathcal{A}$ 使得 $x, y \in A$, 从而 $(y, x) \in A \times A \subseteq \cong_{\mathcal{A}}$, 故 $y \cong_{\mathcal{A}} x$, 所以 $\cong_{\mathcal{A}}$ 是对称的。

(3) 如果 $x \cong_{\mathcal{A}} y$ 且 $y \cong_{\mathcal{A}} z$, 即 $(x, y), (y, z) \in \cong_{\mathcal{A}}$, 则 $\exists A \in \mathcal{A}$ 使得 $x, y, z \in A$, 从而 $(x, z) \in A \times A \subseteq \cong_{\mathcal{A}}$, 故 $x \cong_{\mathcal{A}} z$, 所以 $\cong_{\mathcal{A}}$ 是传递的。

综上所述, $\cong_{\mathcal{A}}$ 是 X 上的等价关系。

根据 $\cong_{\mathcal{A}}$ 的定义知 $X/\cong_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$, 因此 φ 是满射。

综上所述, φ 是 $\mathcal{E}$ 到 $\mathcal{P}$ 的双射。 ■

3.6.5 从等价关系看线性代数

线性代数主要研究矩阵及其性质, 利用等价关系可以简化对大量矩阵的研究, 对于所有等价的矩阵, 也就是同一等价类中的矩阵只需要研究它们的共性, 然后找出其中最简单形状的矩阵(标准型)作为其代表即可。

1. 相抵关系

一切 $m \times n$ 实矩阵之集 M 上的相抵关系 $\cong \subseteq M \times M$, $\forall A, B \in M, A \cong B \Leftrightarrow$ 用初等变换可以从 A 变到 B , 矩阵相抵关系 $\cong$ 是等价关系。

(1) 满足相抵关系的矩阵的共性是秩相等。

(2) 其代表是秩为 r 的标准型。

2. 合同关系

n 阶实对称矩阵之集 M 上的合同关系 $\simeq \subseteq M \times M$, $A \simeq B \Leftrightarrow \exists P$, 使 $B = P^T A P$, 矩阵合同关系 $\simeq$ 是等价关系。

(1) 满足合同关系的矩阵的共性是满足惯性定理。

(2) 其代表是代表二次型的标准型。

3. 相似关系

n 阶实方阵之集 M 上的相似关系 $\approx \subseteq M \times M$, $\forall A, B \in M, A \approx B \Leftrightarrow \exists P \in M$, 使得 $B = P^{-1} A P$, 矩阵相似关系 $\approx$ 是等价关系。

(1) 满足相似关系的矩阵的共性是初等因子组相同。

(2) 其代表是约当标准型。

3.6.6 等价闭包与等价关系的合成

定义 3.16 设 X 为集合, $R \subseteq X \times X$ 是 X 上的二元关系, R 的等价闭包就是 X 上包含 R 的那些等价关系的交, 记为 $e(R)$ 。

$$e(R) = \bigcap_{\substack{R \subseteq R' \\ R' \text{ 是等价关系}}} R'$$

定理 3.22 设 R 是 X 上的一个二元关系, 则

$$e(R) = (R \cup R^{-1})^*$$

【证明】 先证 $e(R) \subseteq (R \cup R^{-1})^*$ 。

因为 $(R \cup R^{-1})^*$ 是包含 R 的一个等价关系, 而根据定义 3.16, $e(R)$ 是包含 R 的所有等价关系的交, 因此, $e(R) \subseteq (R \cup R^{-1})^*$ 。

再证 $(R \cup R^{-1})^* \subseteq e(R)$ 。假设 $(x, y) \in (R \cup R^{-1})^*$, 如果 $x = y$, 则 $(x, y) \in e(R)$ 。如

果 $x \neq y$, 则 $\exists k \in N$, 使得 $(x, y) \in (R \cup R^{-1})^k$, 亦即 $\exists y_1, y_2, \dots, y_{k-1} \in X$, 使得 $(x, y_1) \in R \cup R^{-1}, (y_1, y_2) \in R \cup R^{-1}, \dots, (y_{k-2}, y_{k-1}) \in R \cup R^{-1}, (y_{k-1}, y) \in R \cup R^{-1}$ 。假设 R' 是包含 R 的任意一个等价关系, 则 $R \cup R^{-1} \subseteq R'$, 从而有 $(x, y_1) \in R', (y_1, y_2) \in R', \dots, (y_{k-2}, y_{k-1}) \in R', (y_{k-1}, y) \in R'$, 因此 $(x, y) \in R'$, 根据定义 3.16 和 R' 的任意性, $(x, y) \in e(R)$, 故 $(R \cup R^{-1})^* \subseteq e(R)$ 。

综上, $e(R) = (R \cup R^{-1})^*$ 。

定理 3.23 设 R, S 是 X 上的等价关系, 则 $R \circ S$ 是等价关系 $\Leftrightarrow R \circ S = S \circ R$ 。

【证明】 必要性 $\Rightarrow$: 因为 R, S 是等价关系, 所以 $R \circ S = (R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R$ 。

充分性 $\Leftarrow$: 因为 R, S 是等价关系, 所以 $R \circ S$ 是自反的, 又因为 $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1} = S \circ R = R \circ S$, 故 $R \circ S$ 是对称的, $(R \circ S)^2 = (R \circ S) \circ (R \circ S) = R^2 \circ S^2 \subseteq R \circ S$, 故 $R \circ S$ 是传递的, 因此, $R \circ S$ 是等价关系。

由定理 3.23 可知, 如果 R 是 X 上的等价关系, 则 $R^n (n \in N)$ 也是 X 上的等价关系。

定理 3.24 设 R, S 以及 $R \circ S$ 均是 X 上的等价关系, 则 $R \circ S = (R \cup S)^+$ 。

【证明】 先证 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

假设 $(x, y) \in R \circ S$, 则 $\exists z \in X$, 使得 $(x, z) \in R \subseteq R \cup S, (z, y) \in S \subseteq R \cup S$, 于是 $(x, y) \in (R \cup S)^2 \subseteq (R \cup S)^+$, 因此 $R \circ S \subseteq (R \cup S)^+$ 。

再证 $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

因为 R, S 以及 $R \circ S$ 均是 X 上的等价关系, 所以 $R \cup S \subseteq R \circ S$, 又因为 $R \circ S$ 是传递的, 根据定义 3.11, $(R \cup S)^+ \subseteq R \circ S$ 。

3.7 映射按等价关系分解

将给定映射分解为两个规格化了的映射的合成, 在近世代数中具有重要的方法论意义, 可以用来比较两个性质不同的代数系统, 以便从一个已知的代数系统去推知另一个未知代数系统的性质。读者在近世代数中学到么半群、群、环等的同态基本定理时, 应返回本节, 重新复习一下这里的内容, 思考其思想、方法及意义。

3.7.1 由映射确定的等价关系与集合划分

定义 3.17 设 $f: X \rightarrow Y$, 则 $\{f^{-1}(y) | y \in f(X)\}$ 是 X 的一个划分, 此划分确定的等价关系记为 $E_f, \forall x, x' \in X$, 有

$$x E_f x' \quad \text{当且仅当} \quad f(x) = f(x')$$

E_f 称为由 f 确定的等价关系 (f 导出的关系), 其等价类之集记为 $\{f^{-1}(y) | y \in f(X)\}$ 。

显然有, $\forall x \in X, f(x) = f(x)$, 从而 $x E_f x$, 所以 E_f 是自反的; $\forall x, y \in X$, 如果 $x E_f y$, 则 $f(x) = f(y)$, 即 $f(y) = f(x)$, 故 $y E_f x$, 所以 E_f 是对称的; $\forall x, y, z \in X$, 如果 $x E_f y$ 且 $y E_f z$, 则 $f(x) = f(y)$ 且 $f(y) = f(z)$, 从而有 $f(x) = f(z)$, 亦即 $x E_f z$, 所以 E_f 是传递的。因此, E_f 确实是一个等价关系。 E_f 又称为 f 的核, 记为 $\text{Ker}(f)$, 显然有 $X/\text{Ker}(f) = \{f^{-1}(y) | y \in f(X)\}$ 。

3.7.2 商集、自然映射

定义 3.18 设 $\cong$ 是 X 上的一个等价关系。 $\cong$ 的所有等价类形成的划分记为

$X/\cong$, $X/\cong$ 称为 X 关于 $\cong$ 的商集。映射 $\gamma: X \rightarrow X/\cong$ 定义为 $\forall x \in X, \gamma(x) = [x]$ 。 γ 称为 X 到 $X/\cong$ 的自然映射。

显然, 自然映射是满射, 之所以称为自然映射, 是因为每个元素对应于其所属的等价类, 简单自然。

3.7.3 映射按等价关系分解

定理 3.25 如图 3.6 所示, 设 $f: X \rightarrow Y$, 则 f 可分解成 X 到 X/E_f 的自然映射 γ 与 X/E_f 到 Y 的某个单射 $\bar{f}$ 的合成, 即 $f = \bar{f} \circ \gamma$ 。

【证明】 令 $\bar{f}: X/E_f \rightarrow Y, \forall [x] \in X/E_f$, 定义 $\bar{f}([x]) = f(x)$, 则因为 $[x]$ 是 E_f 的等价类, 故 $\forall z \in [x], f(z) = f(x)$, 所以 $\bar{f}$ 是映射。其次, $\forall x \in X$ 有 $\bar{f} \circ \gamma(x) = \bar{f}(\gamma(x)) = \bar{f}([x]) = f(x)$, 因此, $f = \bar{f} \circ \gamma$ 。 ■

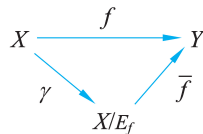


图 3.6 映射的分解

假设 $A, B \in X/E_f, A \neq B$, 则 $A \cap B = \Phi$, 而且 $\forall a \in A, \forall b \in B$ 有 $f(a) \neq f(b)$, 从而有 $\bar{f}(A) \neq \bar{f}(B)$, 因此 $\bar{f}$ 是单射。

推论 3.1 定理 3.25 中的 $\bar{f}$ 是一一对应当且仅当 f 是满射。

定理 3.26 定理 3.25 中的 $\bar{f}$ 是唯一的。

【证明】 假设还有 $\beta: X/E_f \rightarrow Y$ 使 $f = \beta \circ \gamma$, 则 $\forall x \in X$ 有 $\beta \circ \gamma(x) = f(x) = \bar{f} \circ \gamma(x)$, $\beta(\gamma(x)) = \bar{f}(\gamma(x))$, 由于 γ 是满射, 所以 $\forall A \in X/E_f, \exists a \in X$ 使 $\gamma(a) = A$, 因此 $\beta(A) = \bar{f}(A)$, 亦即 $\beta = \bar{f}$, 因此 $\bar{f}$ 是唯一的。 ■

3.7.4 与映射相容的等价关系

定义 3.19 设 $\cong$ 是集合 X 上的一个等价关系, $f: X \rightarrow Y$ 。如果 $\forall a, b \in X, a \cong b \Rightarrow f(a) = f(b)$, 则称 $\cong$ 与 f 相容。

实际上, $X/\cong$ 是 X/E_f 的加细。

现在令 $\gamma: X \rightarrow X/\cong, \forall x \in X, \gamma(x) = [x]_{\cong}, \bar{f}: X/\cong \rightarrow Y, \forall [x]_{\cong} \in X/\cong, \bar{f}([x]_{\cong}) = f(x)$, 则 $\bar{f}$ 是映射且 $\forall x \in X, \bar{f}([x]_{\cong}) = f(x)$, 所以 $\bar{f} \circ \gamma = f$ 。但只要 $\exists [x]_{\cong} \in X/\cong$ 使 $\exists A, B \in X/E_f$, 有 $A \neq B$ 且 $A, B \subseteq [x]_{\cong}$, 那么 $\bar{f}(A) = \bar{f}(B) = f(x)$ 。故一般说来 $\bar{f}$ 未必是单射。

事实上, 我们有 $\bar{f}$ 是单射 $\Leftrightarrow \cong = E_f$ 。

$\forall (a, b) \in \cong$ 有 $f(a) = f(b)$, 所以 $(a, b) \in E_f$, 因此有 $\cong \subseteq E_f$; 其次, 如果 $\bar{f}$ 是单射, 而 $(a, b) \in E_f$, 则 $f(a) = f(b)$ 。于是, $\bar{f}([a]_{\cong}) = f(a) = f(b) = \bar{f}([b]_{\cong})$, 由 $\bar{f}$ 的单射性知 $[a]_{\cong} = [b]_{\cong}$, 从而 $(a, b) \in \cong$, 故有 $E_f \subseteq \cong$ 。所以 $E_f = \cong$ 。而若 $\cong = E_f$, 则由定理 3.25 及定理 3.26 知 $\bar{f}$ 是单射。

3.8 偏序关系与偏序集

偏序关系是数学、日常生活和计算机中用得最多的关系,它是大小、前后、粗细、高矮、 $\leq$ 、 $\geq$ 等的抽象。数学上存在着广泛且迷人的偏序集的理论,但从算法的观点来看,大多数的基本技术包括从事各种线性序工作。在实践中,重要的是可以怎样去规定一个线性序,一种方法是用某种“线性数组”列出集合的元素,另一种是字典序(Lexicographic Order),它在算法设计中也是十分有用的线性序关系。

3.8.1 偏序关系与偏序集的定义

偏序关系是通常的“…不超过…”“…不比…粗”“…包含在…里”“ $\leq$ ”关系、整数的“整除”关系、“…不在…后”等关系的抽象。

定义 3.20 设 R 是集合 X 上的二元关系,如果

- (1) R 是自反的,即 $I_X \subseteq R$ 。
- (2) R 是反对称的,即对于 $\forall x, y \in X$, 如果 xRy 且 yRx , 则 $x = y$ 。
- (3) R 是传递的,即 $R \circ R \subseteq R$ 。

则称 R 是 X 上的一个偏序关系(Partially Ordered Relation),二元组 (X, R) 称为一个偏序集(Partially Ordered Set)。

集合没有结构,但定义了偏序关系后,集合就有了结构。就如同装在口袋里的玻璃球,可以用手随意拨动,一旦定义了上下关系就不能随意拨动了。

抽象讨论时,往往用“ $\leq$ ”表示偏序关系,若 $x \leq y$,则读为“ x 小于或等于 y ”。约定记号“ $<$ ”如下: $x < y$ 当且仅当 $x \leq y$ 且 $x \neq y$ 。

如果 $x \leq y$ 或 $y \leq x$,则说 x 与 y 可以比较。但应该注意的是在偏序集 $(X, \leq)$ 中,任意两个元素 x, y 未必都可以比较,即可能 $\exists a, b \in X$ 使 $a \leq b$ 和 $b \leq a$ 均不成立。例如,集合间的包含关系“ $\subseteq$ ”、整数间的整除关系“ $|$ ”就是这样的偏序关系。

偏序关系也称为半序关系(half-ordered relation)。

例 3.29 $\Sigma = \{a, b, c, \dots, x, y, z\}$, Σ^n 为长为 n 的字符串之集,定义 $\leq \subseteq \Sigma^n \times \Sigma^n$ 为 Σ^n 上的字典序(lexicographic order)关系, $a_1 a_2 \dots a_n \leq b_1 b_2 \dots b_n \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$, 或者 $\exists i (1 \leq i < n)$, 使得 $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_{i-1} = b_{i-1}, a_i < b_i$ 。

更一般地,假设 $D = \{1, 2, \dots, d\}$, $R = \{1, 2, \dots, r\}$, D 和 R 中是什么并不重要,但我们可以将 D 中元素看作是位置,并且从左到右在直线上依次为第 1 个位置,其下一个是第 2 个位置,等等。 R 中的元素可以是其他任何 r 个不同事物,不过已排定了次序,不妨认为是 $1, 2, \dots, r$ 且 $1 < 2 < \dots < r$ 。从 D 到 R 的所有映射记为 R^D , 每个映射可用一行(串)表示,譬如 $f(1)f(2)\dots f(d)$, 若记 $f(k) = i_k$, 则 f 表示成行形式 $i_1 i_2 \dots i_d$, 并写成 $f = i_1 i_2 \dots i_d$ 。在 R^D 上定义序关系 $<$: 已知 $f = i_1 i_2 \dots i_d$ 和 $g = j_1 j_2 \dots j_d$, 从左到右扫描直到第 1 次找到一个 k 使 $i_k \neq j_k$ 时停止。若 $i_k < j_k$ 则说在字典序上 f 小于 g , 记为 $f < g$; 若 $i_k > j_k$, 则 $g < f$ 。如果这样的 k 不存在,则说 f 与 g 相等。可以验证这是 R^D 上的一个线性序。如果用从右到左扫描代替上面所说的从左到右扫描,所得到的序称为余字典序(colex order)。

思考一下: 已知 $f \in R^D$, 如何找到 f 的后继呢? 例如, $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $R =$