# 第 5 章 曲线曲面生成与设计

CHAPTER 5

曲线曲面生成与设计是计算机图形学研究的重要内容之一。而曲线曲面设计源于 20 世纪六七十年代的飞机和汽车工业。

曲线曲面设计方法的要求：①绘制的曲线与曲面具有唯一性；②设计曲线与曲面的过程具有明确的几何意义，且操作方便；③曲线与曲面具有几何不变性；④曲线与曲面具有统一性，能统一表示各种形状及处理各种情况；⑤具有局部修改性，局部修改不影响全局；⑥易于实现光滑连接。

**本章要点：**

本章重点掌握 Beziér 曲线与曲面、B 样条曲线与曲面的生成。了解非均匀有理 B 样条(NURBS)曲线与曲面的基本理论。

## 5.1 曲线与曲面理论基础

### 5.1.1 样条曲线简介

**1. 样条定义**

样条可以定义为由一组指定点集而生成的平滑曲线的柔韧带。例如，通过一组指定点生成平滑曲线那种柔韧的细竹条或细钢条。在计算机图形学中，样条曲线是指由多项式曲线段连接而成的曲线，在每段的边界处满足特定的连续条件。样条曲线有插值样条和逼近样条两种不同的描述方法，每种方法都是一种带有特定边界条件的特殊多项式。

在样条曲线的生成过程中，首先给出一组坐标点位置，它们决定了曲线的大致形状和走势，称这些坐标点为控制点。当选取的多项式使每个控制点都在曲线上时，则所得曲线称为这组控制点的插值样条曲线，如图 5-1 所示。当多项式的选取使曲线不一定通过每个控制点时，所得曲线称为这组控制点的逼近样条曲线，如图 5-2 所示。

图 5-1　插值样条曲线

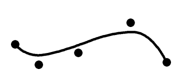

图 5-2　逼近样条曲线

(1) 凸包

凸包是包围一组控制点的凸多边形的边界。这个凸多边形使每个控制点要么在凸包的边界上，要么在凸包的内部。如图 5-3 所示，虚线绘出了包围控制点 $p_i$ 的凸包。凸包提供

了曲线曲面与围绕控制点区域间的偏差度量，同时还保证了多项式光滑地沿控制点前进。

（2）控制多边形

在生成逼近样条的过程中，连接控制点序列的折线很关键，它提醒设计人员控制点的次序。这一组连接控制点的折线称作该曲线的控制多边形，如图 5-4 所示。

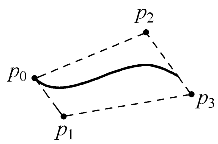


图 5-3　曲线与其凸包

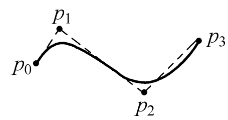


图 5-4　曲线与控制多边形

**2. 连续性条件**

1）参数连续性

为了保证分段参数曲线从一段到另一段平滑过渡，可以在连接点处要求各种连续性条件。样条的每一部分以参数坐标函数的形式进行描述：

$$x=x(u)\quad y=y(u)\quad z=z(u)\quad u_1\leqslant u\leqslant u_2$$

可以通过测试曲线段连接处的参数导数来建立参数连续性。

（1）0 阶参数连续性，记作 $C^0$ 连续性，如图 5-5(a)所示，是指曲线在该位置是连接的，至少没断开，即第一个曲线段在 $u_1$ 处的 $x,y,z$ 值与第二个曲线段在 $u_2$ 处的 $x,y,z$ 值相等。

（2）1 阶参数连续性，记作 $C^1$ 连续性，如图 5-5(b)所示，指代表两个相邻曲线段的方程在相交点处有相同的一阶导数（切线）。

（3）2 阶参数连续性，记作 $C^2$ 连续性，如图 5-5(c)所示，指两个相邻曲线段的方程在相交点处具有相同的一阶和二阶导数。

(a) 0阶参数连续性　　(b) 1阶参数连续性　　(c) 2阶参数连续性

图 5-5　曲线段参数连续性

2）几何连续性

（1）0 阶几何连续性，记作 $G^0$ 连续性，与 0 阶参数连续性的定义相同。

（2）1 阶几何连续性，记作 $G^1$ 连续性，指一阶导数在相邻段的交点处成比例，则相邻曲线段在交点处切向量的大小不一定相等。

（3）2 阶几何连续性，记作 $G^2$ 连续性，指相邻曲线段在交点处其一阶和二阶导数均成比例。$G^2$ 连续性下，两个曲线段在交点处的曲率相等。

从定义可以看出，几何连续性是参数连续性的一种弱化测试。

**3. 样条曲线的等式和矩阵描述**

对于一条三维的 $n$ 次参数多项式曲线，可以采用以 $t$ 为参数的方程来描述：

$$\begin{cases}x(t)=x_0+x_1\cdot t+\cdots+x_n\cdot t^n\\ y(t)=y_0+y_1\cdot t+\cdots+y_n\cdot t^n,\quad t\in[0,1]\\ z(t)=z_0+z_1\cdot t+\cdots+z_n\cdot t^n\end{cases}$$

将方程写成矩阵乘积形式可得

$$\boldsymbol{P}(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\z(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0 & x_1 & \cdots & x_n\\y_0 & y_1 & \cdots & y_n\\z_0 & z_1 & \cdots & z_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\t\\\vdots\\t^n\end{bmatrix}=\boldsymbol{CT},\quad t\in[0,1]$$

其中,$\boldsymbol{T}$ 是参数 $t$ 的幂次列向量矩阵,$\boldsymbol{C}$ 是$(n+1)\times3$ 阶的系数矩阵。将已知的边界条件,如端点坐标以及端点处的一阶导数等,代入该矩阵方程,求得系数矩阵:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{GM}$$

其中,$\boldsymbol{G}$ 是包含样条形式的几何约束条件(边界条件)在内的$(n+1)\times3$ 阶的矩阵,$\boldsymbol{M}$ 是一个$(n+1)\times(n+1)$阶矩阵,也称为基矩阵,它将几何约束值转化成多项式系数,并且提供了样条曲线的特征。基矩阵描述了一个样条表式,它对于从一个样条表示转换到另一个样条表示特别有用。

### 5.1.2 三次样条

实际曲线设计的过程中通常采用三次样条表示,三次多项式方程是通过特定点且在连接处保持位置和斜率连续性的最低阶次的方程。给定 $n+1$ 个控制点 $p_k=(x_k,y_k,z_k)$,$k=0,1,2,\cdots,n$,可得到通过每个点的分段三次多项式曲线,由下面的方程组来描述:

$$\begin{cases}x(t)=x_0+x_1\cdot t+x_2\cdot t^2+x_3\cdot t^3\\y(t)=y_0+y_1\cdot t+y_2\cdot t^2+y_3\cdot t^3,\quad t\in[0,1]\\z(t)=z_0+z_1\cdot t+z_2\cdot t^2+z_3\cdot t^3\end{cases}$$

其中,$t$ 为参数。当 $t=0$ 时,对应每段曲线段的起点;当 $t=1$ 时,对应每段曲线段的终点。对于 $n+1$ 个控制点,一共要生成 $n$ 条三次样条曲线段,每一段都需要求出多项式表示中的系数,这些系数可以通过在两段相邻曲线段的交点处设置足够的边界条件来获得。

常用的插值方法有:自然三次样条插值和 Hermite 插值。

**1. 自然三次样条插值**

描述一个自然三次样条有 $n+1$ 个控制点需要拟合,共有 $n$ 个曲线段计 $4n$ 个多项式系数待定,如图 5-6 所示。对于每个内部控制点($p_0$ 除外,共 $n-1$ 个),各有 4 个边界条件,在该控制点两侧的两个曲线段在该点处有相同的 1 阶导数和 2 阶导数,且两个曲线段都通过该点,所以,共有 4 个边界条件。这样就给出了由 $4n$ 个多项式系数组成的 $4n-4$ 个方程。再加上由第一个控制点 $p_0$(曲线起点)和最后一个控制点 $p_n$(曲线终点)所得的,共 $4n-2$ 个方程。对于 $4n$ 个待定系数,还有两个条件才能列出满足需要的 $4n$ 个方程。得到这两个方程有两个可行的方法,一是设 $p_0$ 和 $p_n$ 处的 2 阶导数为 0;二是增加两个虚控制点,它们各位于控制点序列的两端,定义为 $p_{-1}$ 和 $p_{n+1}$,如图 5-7 所示。两个虚拟控制点的设立使原有的 $n+1$ 个控制点都变成了内控制点,自然可以获得 $4n$ 个边界条件,列出 $4n$ 个求解系数的方程。

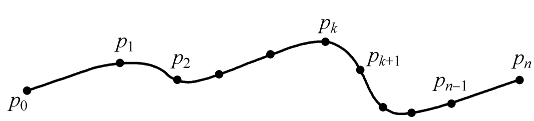


图 5-6 $n+1$ 个控制点的分段连续三次样条插值

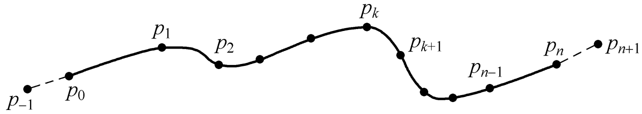

图 5-7 增加两个虚控制点的连续三次样条插值

自然三次样条插值有如下特点。

(1) 采用公式描述时,需要相邻曲线段在公共边界处有 $C^2$ 连续性。

(2) 对于具有 $n+1$ 个控制点的自然三次样条有 $n+1$ 个控制点需要拟合,共有 $n$ 个曲线段计 $4n$ 个多项式系数待定。

(3) 内控制点两侧的曲线段在控制点处具有相同的 1 阶导数和 2 阶导数,且均通过控制点,加上起点和终点共 $4n-2$ 个方程,还需要两个条件。

① 假定 $p_0$ 和 $p_n$ 处 2 阶导数为 0。

② 增加两个虚控制点,可保证 $n+1$ 个点均为内控制点。

自然三次样条插值是一种有效的方法,但其中任何一个控制点的改动都会影响到整个曲线的形状,局部控制特性不好。

**2. Hermite 插值样条**

由法国数学家查理斯·埃尔米特(Charles Hermite)给出的 Hermite 插值样条是一个给定每个控制点切线的分段三次多项式。它可以实现局部的调整,因为它的各个曲线段都仅取决于端点的约束。假定型值点 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_{k+1}$ 之间的曲线段为 $\boldsymbol{p}(t), t\in[0,1]$,给定矢量 $\boldsymbol{P}_k$、$\boldsymbol{P}_{k+1}$、$\boldsymbol{R}_k$ 和 $\boldsymbol{R}_{k+1}$,则满足下列条件的三次参数曲线为三次 Hermite 样条曲线:

$$\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{P}_k, \quad \boldsymbol{p}(1)=\boldsymbol{P}_{k+1}$$
$$\boldsymbol{p}'(0)=\boldsymbol{R}_k, \quad \boldsymbol{p}'(1)=\boldsymbol{R}_{k+1}$$

如图 5-8 所示。

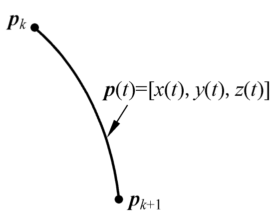

图 5-8 在控制点 $\boldsymbol{P}_k$ 和 $\boldsymbol{P}_{k+1}$ 之间的 Hermite 曲线段的参数点函数 $\boldsymbol{p}(t)$

关于该曲线的矢量方程可写成

$$\boldsymbol{p}(t)=at^3+bt^2+ct+d$$

其矩阵表达式为

$$\boldsymbol{p}(t)=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \\ d_x & d_y & d_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\boldsymbol{TC}$$

代入边界条件得

$$\begin{bmatrix} p(0) \\ p(1) \\ p'(0) \\ p'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_K \\ \boldsymbol{P}_{K+1} \\ \boldsymbol{R}_K \\ \boldsymbol{R}_{K+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} C$$

对上式两边再同乘逆矩阵，得到

$$C = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_k \\ \boldsymbol{P}_{k+1} \\ \boldsymbol{R}_k \\ \boldsymbol{R}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_k \\ \boldsymbol{P}_{k+1} \\ \boldsymbol{R}_k \\ \boldsymbol{R}_{k+1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{M}_h \boldsymbol{G}_h$$

其中，$\boldsymbol{M}_h$ 是 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{G}_h$ 是 Hermite 几何矢量。

因此，三次 Hermite 样条曲线的方程为

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_h\boldsymbol{G}_h, \quad t \in [0,1]$$

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_h = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

令

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{P}_k H_0(t) + \boldsymbol{P}_{k+1} H_1(t) + \boldsymbol{R}_k H_2(t) + \boldsymbol{R}_{k+1} H_3(t)$$

多项式 $H_k(u)(k=0,1,2,3)$ 为 Hermite 基函数，如图 5-9 所示。

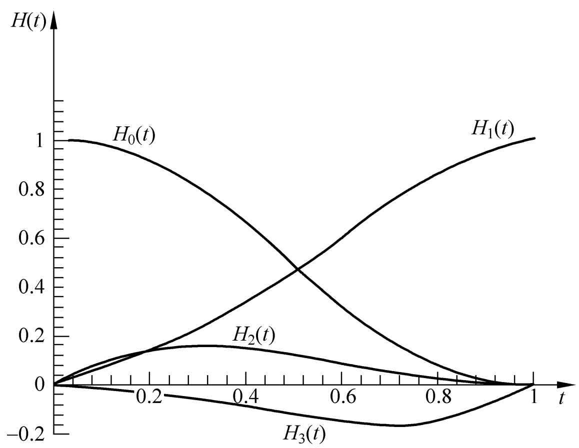


图 5-9 Hermite 基函数

# 5.2 Beziér 曲线与曲面

Beziér 曲线是法国雷诺汽车公司工程师 P. E Beziér 于 1962 年以“逼近”为基础构造的一种参数曲线。由于 Beziér 曲线拥有许多较好的性质，且更容易实现，在许多图形系统和 CAD 系统得到广泛应用。

## 5.2.1 Beziér 曲线的定义

**1. Beziér 曲线的定义**

Beziér 曲线是能够在第一个和最后一个顶点之间进行插值的一个多项式混合函数。通常，对于有 $n+1$ 个控制点的 Beziér 曲线段用参数方程表示如下：

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i\mathrm{BEZ}_{i,n}(t) \quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

Beziér 基函数——Bernstein 多项式的定义为

$$\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)=C_n^i t^i(1-t)^{n-i} \quad t\in[0,1]$$

其中：

$$C_n^i=\frac{n!}{i!(n-i)!}$$

Beziér 混合函数的递归定义形式为

$$\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)=(1-t)\mathrm{BEZ}_{i,n-1}(t)+t\mathrm{BEZ}_{i-1,n-1}(t) \quad n>i\geqslant 1$$

这里：

$$\mathrm{BEZ}_{i,i}(t)=t^i$$

$$\mathrm{BEZ}_{0,i}(t)=(1-t)^i$$

Beziér 曲线坐标的 3 个分量 $x,y,z$ 的参数方程为

$$x(t)=\sum_{i=0}^{n}x_i\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)$$

$$y(t)=\sum_{i=0}^{n}y_i\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)$$

$$z(t)=\sum_{i=0}^{n}z_i\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)$$

Beziér 曲线控制点的个数与曲线形状直接相关。Beziér 曲线多项式的次数要比控制点的个数少 1。3 个控制点生成抛物线(二次曲线)，4 个控制点生成三次曲线，但对某些控制点布局，得到了退化的 Beziér 多项式。

**2. 基函数 Bernstein 多项式的性质**

(1) 非负性：$\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)\geqslant 0$， $t\in[0,1]$。

(2) 权性：$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)=1$， $t\in[0,1]$。

(3) 对称性：$\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)=\mathrm{BEZ}_{n-i,n}(1-t)$， $(i=0,1,2,\cdots,n)$。

(4) 导数：对 $i=0,1,2,\cdots,n$，有 $\mathrm{BEZ}'_{i,n}(t)=n[\mathrm{BEZ}_{i-1,n-1}(t)-\mathrm{BEZ}_{i,n-1}(t)]$。

(5) 积分：$\int_0^1 \mathrm{BEZ}_{i,n}(t)=\dfrac{1}{n+1}$, $(i=0,1,2,\cdots,n)$。

(6) 最大值：在区间[0,1]内，$\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)$在 $t=i/n$ 处取得最大值。

(7) 线性无关性：任何一个 $n$ 次多项式都可表示成它们的线性组合，或者说 $\{\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)\}_{i=0}^{n}$ 是 $n$ 次多项式空间的一组基。

### 5.2.2 Beziér 曲线的性质

根据基函数 Bernstein 的性质，可推导出 Beziér 曲线具有下列性质。

1) 端点的性质

Beziér 曲线总是通过第一个和最后一个控制点，该曲线在两个端点处的边界条件是

$$\boldsymbol{p}(t)\Big|_{t=0}=\boldsymbol{P}_0$$

$$\boldsymbol{p}(t)\Big|_{t=1}=\boldsymbol{P}_n$$

Beziér 曲线在端点处的一阶导数值可由控制点的坐标求出

$$\boldsymbol{p}'(t)\Big|_{t=0}=n\boldsymbol{P}_1-n\boldsymbol{P}_0$$

$$\boldsymbol{p}'(t)\Big|_{t=1}=n\boldsymbol{P}_n-n\boldsymbol{P}_{n-1}$$

Beziér 曲线在起点处的切线位于前两个控制点的连线上，而终点处的切线位于最后两个控制点的连线上，即曲线起点和终点处的切线方向与起始折线段和终止折线段的切线方向一致。同样，Beziér 曲线在端点处的二阶导数可以计算为

$$\boldsymbol{p}''(t)\Big|_{t=0}=n(n-1)[(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)-(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0)]$$

$$\boldsymbol{p}''(t)\Big|_{t=1}=n(n-1)[(\boldsymbol{P}_{n-2}-\boldsymbol{P}_{n-1})-(\boldsymbol{P}_{n-1}-\boldsymbol{P}_n)]$$

例如，三次 Beziér 曲线段在起点和终点的二阶导数是

$$\boldsymbol{p}''(t)\Big|_{t=0}=6(\boldsymbol{P}_0-2\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)$$

$$\boldsymbol{p}''(t)\Big|_{t=1}=6(\boldsymbol{P}_1-2\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3)$$

利用该性质可将几个较低次数的 Beziér 曲线段相连接，构造成一条形状复杂的高次 Beziér 曲线。

2) 几何不变性和仿射不变性

曲线仅依赖于控制点而与坐标系的位置和方向无关，即曲线的形状在坐标系平移和旋转后不变。同时，对任意仿射变换 A，有

$$\mathrm{A}(\boldsymbol{p}(t))=\mathrm{A}\Big(\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)\Big)=\sum_{i=0}^{n}\mathrm{A}[\boldsymbol{P}_i]\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)$$

即在仿射变换下，$\boldsymbol{p}(t)$的形式不变。

3) 对称性

Beziér 曲线对称性不是形状的对称，而是如果保留 Beziér 曲线全部控制点 $\boldsymbol{P}_i$ 的坐标位

置不变，即保持控制多边形的顶点位置不变，仅把它们的顺序颠倒一下，将下标为 $i$ 的控制点 $\boldsymbol{P}_i$ 改为下标为 $n-i$ 的控制点 $\boldsymbol{P}_{n-i}$ 时，即新的控制多边形的顶点为 $\boldsymbol{P}_i^*=\boldsymbol{P}_{n-i}$，则曲线保持不变，只是走向相反而已，其曲线路径描述如下：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^*(t)&=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i^*\,\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)\\&=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{n-i}\,\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)\\&=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_{n-i}\,\mathrm{BEZ}_{n-i,n}(1-t)\\&=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i\,\mathrm{BEZ}_{i,n}(1-t)\end{aligned}$$

Beziér 曲线的对称性表明其控制多边形的起点和终点具有相同的特性。

4）凸包性

由于 Beziér 曲线的基函数 Bernstein 多项式总是正值，而且总和为 1，即

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{BEZ}_{i,n}(t)=1,\quad t\in[0,1]$$

所以，Beziér 曲线各点均落在控制多边形各顶点构成的凸包中，这里的凸包指的是包含所有顶点的最小凸多边形。Beziér 曲线的凸包性保证了曲线随控制点平稳前进而不会振荡。

5）变差缩减性

如果 Beziér 曲线的特征多边形 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_n$ 是一个平面图形，则平面内任意直线与曲线的交点个数不会多于该直线与其特征多边形的交点个数。此性质反映了 Beziér 曲线比特征多边形的波动还小，即 Beziér 曲线比特征多边形的折线更光顺。

### 5.2.3 按不同次数给出 Beziér 曲线的描述

**1. 一次 Beziér 曲线**

当 $n=1$ 时，有两个控制点 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}$，Beziér 曲线是一个一次多项式：

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=0}^{1}\boldsymbol{P}_i\,\mathrm{BEZ}_{i,1}(t)=(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

可应用矩阵表示为

$$\boldsymbol{p}(t)=\begin{bmatrix}t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\end{bmatrix},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

显然，一次 Beziér 曲线是连接起点 $\boldsymbol{P}_0$ 和终点 $\boldsymbol{P}_1$ 的直线段。

**2. 二次 Beziér 曲线**

当 $n=2$ 时，有三个控制点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$，Beziér 曲线是一个二次多项式：

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=0}^{2}\boldsymbol{P}_i\,\mathrm{BEZ}_{i,2}(t)=(1-t)^2\boldsymbol{P}_0+2t(1-t)\boldsymbol{P}_1+t^2\boldsymbol{P}_2,\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

可应用矩阵表示为

$$\boldsymbol{p}(t)=\begin{bmatrix}t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\end{bmatrix},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

显然，二次 Beziér 曲线对应一条起点为 $\boldsymbol{P}_0$，终点为 $\boldsymbol{P}_2$ 的抛物线，有

$$\boldsymbol{p}(0)=\boldsymbol{P}_0,\quad \boldsymbol{p}(1)=\boldsymbol{P}_2,\quad \boldsymbol{p}'(0)=2(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0),\quad \boldsymbol{p}'(1)=2(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)$$

当 $t=\dfrac{1}{2}$时，有

$$\boldsymbol{p}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\boldsymbol{P}_1+\frac{1}{2}\cdot(\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_2)\right]$$

由此可得，二次 Beziér 曲线在 $t=\dfrac{1}{2}$处的点 $\boldsymbol{P}\left(\dfrac{1}{2}\right)$经过三角形 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 中边 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2$ 上的中线 $\boldsymbol{P}_1$ 的中点 $\boldsymbol{P}'$，如图 5-10 所示。

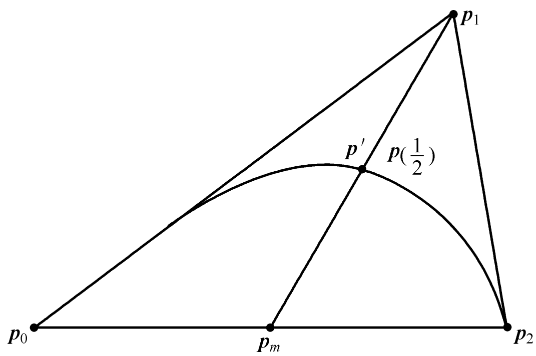


图 5-10　二次 Beziér 曲线

**3. 三次 Beziér 曲线**

当 $n=3$ 时，有四个控制点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_3$，Beziér 曲线是一个三次多项式：

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=0}^{3}\boldsymbol{P}_i\,\mathrm{BEZ}_{i,3}(t)=(1-t)^3\boldsymbol{P}_0+3t(1-t^2)\boldsymbol{P}_1+3t^2(1-t)\boldsymbol{P}_2+t^3\boldsymbol{P}_3\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

可应用矩阵表示为

$$\boldsymbol{p}(t)=\begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_3\end{bmatrix}$$

其三次 Beziér 基函数为

$$\mathrm{BEZ}_{0,3}(t)=(1-t)^3$$

$$\mathrm{BEZ}_{1,3}(t)=3(1-t)^2$$

$$\mathrm{BEZ}_{2,3}(t)=3t^2(1-t)$$

$$\mathrm{BEZ}_{3,3}(t)=t^3$$

图 5-11 给出了这 4 个三次 Beziér 基函数的形状。

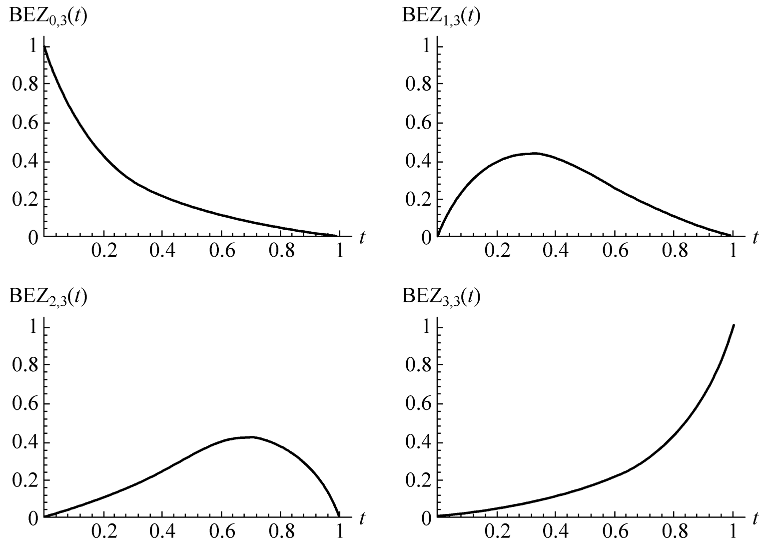


图 5-11　三次 Beziér 曲线的 4 个基函数

### 5.2.4　Beziér 曲线的 De Casteljau 递推算法

计算 Beziér 曲线上的点，可用 Beziér 曲线方程，但使用 De Casteljau 提出的递推算法则要简单的多。如图 5-12 所示，设 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_0^2$、$\boldsymbol{P}_2$ 是一条抛物线上顺序 3 个不同的点。过 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 点的两切线交于 $\boldsymbol{P}_1$ 点，在 $\boldsymbol{P}_0^2$ 点的切线交 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1$ 于 $\boldsymbol{P}_0^1$ 和 $\boldsymbol{P}_1^1$，则如下比例成立：

$$\frac{\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_0^1}{\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{P}_1}=\frac{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_1^1}{\boldsymbol{P}_1^1\boldsymbol{P}_2}=\frac{\boldsymbol{P}_0^1\boldsymbol{P}_0^2}{\boldsymbol{P}_0^2\boldsymbol{P}_1^1}$$

这是抛物线的三切线定理。

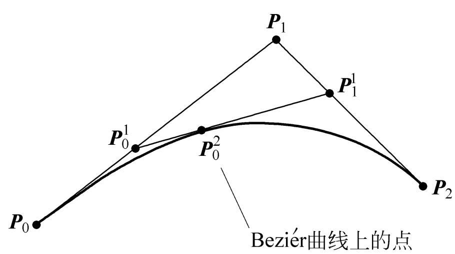


图 5-12　Beziér 曲线的 De Casteljau 递推算法

当 $\boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_2$ 固定，引入参数 $t$，令上述比值为 $t:(1-t)$，即有

$$\boldsymbol{P}_0^1=(1-t)\boldsymbol{P}_0+t\boldsymbol{P}_1$$

$$\boldsymbol{P}_1^1=(1-t)\boldsymbol{P}_1+t\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{P}_0^2=(1-t)\boldsymbol{P}_0^1+t\boldsymbol{P}_1^1$$

$t$ 从 0 变到 1，第一、二式就分别表示控制二边形的第一、二条边，它们是两条一次 Beziér 曲线。将一、二式代入第三式得

$$\boldsymbol{P}_0^2=(1-t)^2\boldsymbol{P}_0+2t(1-t)\boldsymbol{P}_1+t^2\boldsymbol{P}_2$$

当 $t$ 从 0 变到 1 时，它表示了由 3 个顶点 $\boldsymbol{P}_0$、$\boldsymbol{P}_1$、$\boldsymbol{P}_2$ 定义的一条二次 Beziér 曲线，并且

表明二次 Beziér 曲线 $\boldsymbol{P}_0^2$ 可被定义为分别由前两个顶点($\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1$)和后两个顶点($\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$)确定的一次 Beziér 曲线的线性组合。以此类推,由 4 个控制点定义的三次 Beziér 曲线 $\boldsymbol{P}_0^3$ 可被定义为分别由($\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2$)和($\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$)确定的两条二次 Beziér 曲线的线性组合;而($n+1$)个控制点 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$定义的 $n$ 次 Beziér 曲线 $\boldsymbol{P}_0^n$ 可被定义为分别由前、后 $n$ 个控制点定义的两条($n-1$)次 Beziér 曲线的 $\boldsymbol{P}_0^{n-1}$ 和 $\boldsymbol{P}_1^{n-1}$ 线性组合:

$$\boldsymbol{P}_0^n=(1-t)\boldsymbol{P}_0^{n-1}+t\boldsymbol{P}_1^{n-1},\quad 0\leqslant t\leqslant 1$$

由此得到 Beziér 曲线的递推计算公式为

$$\boldsymbol{P}_i^r=\begin{cases}\boldsymbol{P}_i, & r=0\\(1-t)\cdot\boldsymbol{P}_i^{r-1}+t\cdot\boldsymbol{P}_{i+1}^{r-1}, & r=1,2,\cdots,n;\ i=0,1,2,\cdots,n-r\end{cases}$$

这就是 De Casteljau 递推算法,图 5-13 是 $n=3$ 求解 $\boldsymbol{P}_i^r$ 的递推过程。

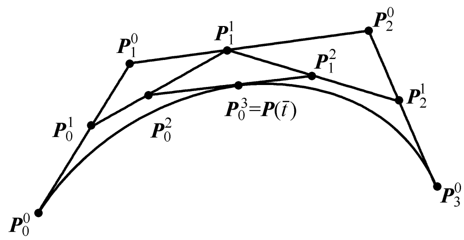


图 5-13 $n=3$ 时应用 De Casteljau 递推算法求解 $\boldsymbol{P}_i^r$ 的递推过程

## 5.2.5 Beziér 曲线的拼接

给定两条 Beziér 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$和 $\boldsymbol{Q}(t)$,相应控制点为 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$和 $\boldsymbol{Q}_j(j=0,1,2,\cdots,m)$,且令 $\boldsymbol{a}_i=\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_{i-1}$,$\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{Q}_j-\boldsymbol{Q}_{j-1}$,如图 5-14 所示。

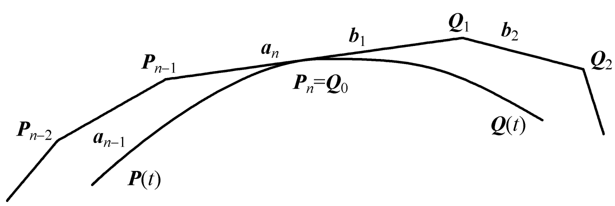


图 5-14 Beziér 曲线的拼接

现在把两条曲线连接起来,连接条件如下。

(1) 要使它们达到 $G^0$ 连续的充要条件:$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{Q}_0$。

(2) 要使它们达到 $G^1$ 连续的充要条件:$\boldsymbol{P}_{n-1}$,$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{Q}_0$,$\boldsymbol{Q}_1$ 三点共线,即

$$\boldsymbol{b}_1=\alpha\boldsymbol{a}_n\quad(\alpha>0)$$

(3) 要使它们达到 $G^2$ 连续的充要条件:在 $G^1$ 连续的条件下,并满足方程 $\boldsymbol{Q}''(0)=\alpha^2\boldsymbol{P}''(1)+\beta\boldsymbol{P}'(1)$。

将 $\boldsymbol{Q}''(0)$、$\boldsymbol{P}''(1)$和 $\boldsymbol{P}'(1)$,$\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{P}_n$、$\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{Q}_2=\alpha(\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{P}_{n-1})$代入并整理,可以得到

$$\boldsymbol{Q}_2=\left(\alpha^2+2\alpha+\frac{\beta}{n-1}+1\right)\boldsymbol{P}_n-\left(2\alpha^2+2\alpha+\frac{\beta}{n-1}\right)\boldsymbol{P}_{n-1}+\alpha^2\boldsymbol{P}_{n-2}$$

选择 $\alpha$ 和 $\beta$ 的值,可以利用该式确定曲线段 $\boldsymbol{Q}(t)$的特征多边形的顶点 $\boldsymbol{Q}_2$,而顶点 $\boldsymbol{Q}_0$、

$\boldsymbol{Q}_1$ 已被 $G^1$ 连续条件确定。要达到 $G^2$ 连续的话，只剩下顶点 $\boldsymbol{Q}_2$ 可以自由选取。

如果从上式的两边都减去 $\boldsymbol{P}_n$，则等式右边可以表示为$(\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{P}_{n-1})$和$(\boldsymbol{P}_{n-1}-\boldsymbol{P}_{n-2})$的线性组合：

$$\boldsymbol{Q}_2-\boldsymbol{P}_n=\left(\alpha^2+2\alpha+\frac{\beta}{n-1}\right)(\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{P}_{n-1})-\alpha^2(\boldsymbol{P}_{n-1}-\boldsymbol{P}_{n-2})$$

这表明 $\boldsymbol{P}_{n-2}$、$\boldsymbol{P}_{n-1}$、$\boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{Q}_0$、$\boldsymbol{Q}_1$ 和 $\boldsymbol{Q}_2$ 五点共面。事实上，在接合点两条曲线段的曲率相等，主法线方向一致，可以断定：$\boldsymbol{P}_{n-2}\boldsymbol{Q}_2$ 位于直线 $\boldsymbol{P}_{n-1}\boldsymbol{Q}_1$ 的同一侧。

### 5.2.6 反求 Beziér 曲线控制点的方法

若给定 $n+1$ 个型值点 $\boldsymbol{Q}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，为了构造一条通过这些型值点的 $n$ 次 Beziér 曲线，需要反求出通过 $\boldsymbol{Q}_i$ 的 Beziér 曲线的 $n+1$ 个控制点 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$。

由 Beziér 曲线定义可知，由 $n+1$ 个控制点 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$可生成 $n$ 次 Beziér 曲线，即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(t)&=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i\mathrm{BEZ}_{i,n}(t),\quad 0\leqslant t\leqslant 1\\&=\sum_{i=0}^{n}C_n^i t^i(1-t)^{n-i}\boldsymbol{P}_i\\&=C_n^0(1-t)^n\boldsymbol{P}_0+C_n^1t(1-t)^{n-1}\boldsymbol{P}_1+\cdots+C_n^{n-1}t^{n-1}(1-t)\boldsymbol{P}_{n-1}+C_n^nt^n\boldsymbol{P}_n\end{aligned}$$

通常，可取参数 $t=i/n$ 与型值点 $\boldsymbol{Q}_i$ 对应，用于反求 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$。

由于 $\boldsymbol{Q}_i=\boldsymbol{P}_i(i/n)$，可得到关于 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$的 $n+1$ 个方程构成的线性方程组：

$$\begin{cases}\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{P}_0\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_i=C_n^0(1-i/n)^n\boldsymbol{P}_0+C_n^1(i/n)(1-i/n)^{n-1}\boldsymbol{P}_1+\cdots C_n^{n-1}(i/n)^{n-1}(1-i/n)\boldsymbol{P}_{n-1}+C_n^n(i/n)^n\boldsymbol{P}_n\\ \vdots\\ \boldsymbol{Q}_n=\boldsymbol{P}_n\end{cases}$$

其中，$i=0,1,2,\cdots,n-1$，由上述方程组可得 $\boldsymbol{Q}_i$ 的 Beziér 曲线的 $n+1$ 个控制点 $\boldsymbol{P}_i(i=0,1,2,\cdots,n)$。分别列出上述方程组关于 $x(t),y(t),z(t)$的 $n+1$ 个方程式，则可解出 $n+1$ 个控制点 $\boldsymbol{P}_i$ 的坐标值$(x_i,y_i,z_i)$。

### 5.2.7 Beziér 曲面

在掌握 Beziér 曲线的基础上，可以较容易给出 Beziér 曲面的定义和性质。Beziér 曲线的一些算法也可以扩展到 Beziér 曲面的生成。

**1. Beziér 曲面的定义**

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,j}\mathrm{BEZ}_{i,m}(u)\mathrm{BEZ}_{j,n}(v)\quad(u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

其中，$\boldsymbol{P}_{i,j}$ 为给定$(m+1)\times(n+1)$个控制点的位置，所有的控制点形成一个空间的网格，称为控制网格或 Beziér 网格。

$BEZ_{i,m}(u)$与$BEZ_{j,n}(v)$是 Bernstein 基函数，定义为

$$BEZ_{i,m}(u)=C_m^i \cdot u^i \cdot (1-u)^{m-i}$$

$$BEZ_{j,n}(v)=C_n^j \cdot v^j \cdot (1-v)^{n-j}$$

Beziér 曲面的矩阵形式为

$$\boldsymbol{P}(u,v)=[BEZ_{0,n}(u),BEZ_{1,n}(u),\cdots,BEZ_{m,n}(u)]\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{0,0} & \boldsymbol{P}_{0,1} & \cdots & \boldsymbol{P}_{0,m}\\ \boldsymbol{P}_{1,0} & \boldsymbol{P}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{P}_{1,m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{P}_{n,0} & \boldsymbol{P}_{n,1} & \cdots & \boldsymbol{P}_{n,m}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}BEZ_{0,m}(v)\\ BEZ_{1,m}(v)\\ \vdots\\ BEZ_{n,m}(v)\end{bmatrix}$$

在实际设计中，$m$ 与 $n$ 小于或等于 4，否则网格对于曲面的控制力将会减弱。

**2. Beziér 曲面的性质**

除变差缩减性外，Beziér 曲线的其他所有性质都可以推广到 Beziér 曲面。

(1) Beziér 网格的 4 个角点正好是 Beziér 曲面的 4 个角点，即

$$\boldsymbol{p}(0,0)=\boldsymbol{p}_{0,0},\quad \boldsymbol{p}(0,1)=\boldsymbol{p}_{0,n},\quad \boldsymbol{p}(1,0)=\boldsymbol{p}_{m,0},\quad \boldsymbol{p}(1,1)=\boldsymbol{p}_{m,n}$$

(2) 几何不变性和仿射不变性。

(3) 对称性。

(4) 凸包性。

**3. 常见的 Beziér 曲面**

1) 双线性 Beziér 曲面

当 $m=n=1$ 时，形成双线性 Beziér 曲面。

双线性 Beziér 曲面的表达式为

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\boldsymbol{P}_{i,j}BEZ_{i,1}(u)BEZ_{j,1}(v)\quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

所以有

$$\boldsymbol{p}(u,v)=(1-u)(1-v)\boldsymbol{P}_{0,0}+(1-u)v\boldsymbol{P}_{0,1}+u(1-v)\boldsymbol{P}_{1,0}+uv\boldsymbol{P}_{1,1}$$

双线性 Beziér 曲面的矩阵形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}(u,v)&=\boldsymbol{p}_1(u)\cdot(1-v)+\boldsymbol{p}_2(u)\cdot v=[\boldsymbol{p}_1(u)\quad \boldsymbol{p}_2(u)]\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}\\ &=[1-u\quad u]\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{0,0} & \boldsymbol{P}_{0,1}\\ \boldsymbol{P}_{1,0} & \boldsymbol{P}_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1-v\\ v\end{bmatrix}\\ &=[u\quad 1]\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{0,0} & \boldsymbol{P}_{0,1}\\ \boldsymbol{P}_{1,0} & \boldsymbol{P}_{1,1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v\\ 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

2) 双二次 Beziér 曲面

当 $m=n=2$ 时，形成双二次 Beziér 曲面。

双二次 Beziér 曲面的表达式为

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\boldsymbol{P}_{i,j}BEZ_{i,2}(u)BEZ_{j,2}(v)\quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

双二次 Beziér 曲面的矩阵形式为

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\boldsymbol{P}_{i,j}\mathrm{BEZ}_{i,2}(u)\mathrm{BEZ}_{j,2}(v)$$

$$=\begin{bmatrix}u^2 & u & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{0,0} & \boldsymbol{P}_{0,1} & \boldsymbol{P}_{0,2}\\ \boldsymbol{P}_{1,0} & \boldsymbol{P}_{1,1} & \boldsymbol{P}_{1,2}\\ \boldsymbol{P}_{2,0} & \boldsymbol{P}_{2,1} & \boldsymbol{P}_{2,2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 1\\ -2 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v^2\\ v\\ 1\end{bmatrix}$$

双二次 Beziér 曲面如图 5-15 所示。控制网格由 9 个控制点组成，其中 $\boldsymbol{P}_{0,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,2}$、$\boldsymbol{P}_{2,0}$、$\boldsymbol{P}_{2,2}$ 在曲面片的角点处。

3）双三次 Beziér 曲面

Beziér 曲面中最重要的应用是双三次 Beziér 曲面，即 $m=n=3$。

双三次 Beziér 曲面的表达式为

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3}\boldsymbol{P}_{i,j}\mathrm{BEZ}_{i,3}(u)\mathrm{BEZ}_{j,3}(v)\quad (u,v)\in[0,1]\times[0,1]$$

双三次 Beziér 曲面如图 5-16 所示，控制网格由 16 个控制点组成，其中 $\boldsymbol{P}_{0,0}$、$\boldsymbol{P}_{0,3}$、$\boldsymbol{P}_{3,0}$、$\boldsymbol{P}_{3,3}$ 在曲面片的角点处，四周的 12 个控制点定义了 4 条 Beziér 曲线，即曲面片的边界曲线，中央 4 个控制点 $\boldsymbol{P}_{1,1}$、$\boldsymbol{P}_{1,2}$、$\boldsymbol{P}_{2,1}$、$\boldsymbol{P}_{2,2}$ 与边界曲线无关，但也影响曲面的形状。

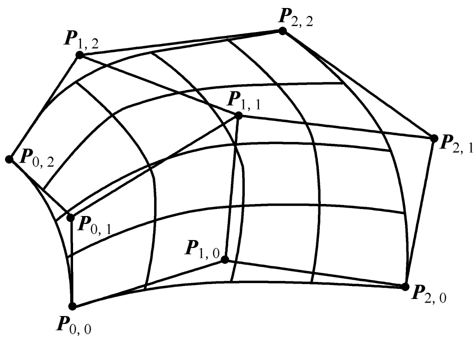


图 5-15　双二次 Beziér 曲面

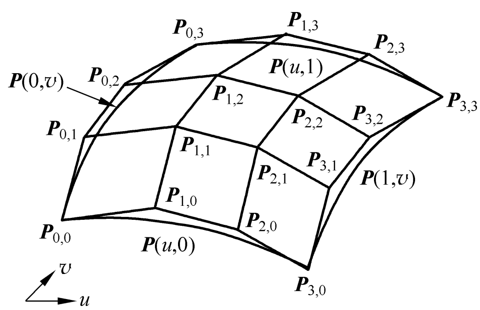


图 5-16　双三次 Beziér 曲面

## 5.3　B 样条曲线与曲面

Gordon，Riesenfeld 等对 Beziér 曲线理论进行了改进，他们用 B 样条基函数代替了 Bernstein 基函数，从而形成 B 样条曲线。B 样条方法保留了 Beziér 方法的优点，克服了其由于整体表示带来的不具备局部性质的缺点。B 样条曲线具有设计自由型曲线曲面的强大功能，被广泛应用于 CAD 系统和许多图形软件包中。

### 5.3.1　B 样条曲线的定义与性质

**1. B 样条曲线的定义**

B 样条曲线的定义为

$$\boldsymbol{p}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_i\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)\quad t_{\min}\leqslant t\leqslant t_{\max},2\leqslant k\leqslant n+1$$

其中，$\boldsymbol{P}_i(i=0,1,\cdots,n)$为 $n+1$ 个控制顶点，又称为 de Boor 点。由控制顶点顺序连成的折

线称为 B 样条控制多边形，简称控制多边形。$k$ 是 B 样条曲线的阶数，$(k-1)$ 称为次数，曲线连接点处有 $(k-1)$ 次连续。参数 $t$ 的选取取决于 B 样条节点矢量的选取。$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 是 BEZ 样条基函数，由 Cox-de Boor 的递归公式定义为

$$\mathrm{BEZ}_{i,1}(t)=\begin{cases}1, & t_i \leqslant t < t_{i+1}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)=\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i}\mathrm{BEZ}_{i,k-1}(t)+\frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}}\mathrm{BEZ}_{i+1,k-1}(t)$$

由于 $\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 的各项分母可能为 0，所以这里规定 $0/0=0$。$t_k$ 是节点值，$\boldsymbol{T}=(t_0, t_1,\cdots,t_{n+k})$ 构成了 $k-1$ 次 B 样条函数的节点矢量，其中的节点是非减序列，所生成的 B 样条曲线定义在从节点值为 $t_k-1$ 到节点值为 $t_n+1$ 的区间上。B 样条通常可以按照节点矢量分为三种类型：均匀 B 样条曲线、开放均匀 B 样条曲线和非均匀 B 样条曲线。

**2. B 样条曲线基函数 $\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 的性质**

(1) 局部性：$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 只在区间 $(t_i, t_{i+k})$ 取正值，在其他地方为零。

(2) 权性：$\sum \mathrm{BEZ}_{i,k}(t)\equiv 1(i=0,1,2,\cdots,n)$。

(3) 连续性：$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 在 $r$ 重节点处至少为 $k-1-r$ 次连续 $(C^{k-1-r})$。

(4) 线性无关性：$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)(i=0,1,2,\cdots,n)$ 线性无关。

(5) 分段多项式：$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 在每个长度非零的区间 $[t_j, t_{j+1})$ 上都是次数不高于 $k-1$ 的多项式，它在整个参数轴上是分段多项式。

(6) 可微性：$\mathrm{BEZ}'_{i,k}(t)=(k-1)\left[\frac{\mathrm{BEZ}_{i,k-1}(t)}{t_{i+k-1}-t_i}-\frac{B_{i+1,k-1}(t)}{t_{i+k}-t_{i+1}}\right]$。

**3. B 样条曲线的性质**

(1) 在 $t$ 取值范围内，多项式曲线的次数为 $k-1$，并且具有 $C^{k-2}$。

(2) 对于 $n+1$ 个控制点，曲线由 $n+1$ 个基函数进行描述。

(3) 每个基函数 $\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)$ 定义在 $t$ 取值范围的 $k$ 子区间上，以节点矢量值 $t_i$ 为起点。

(4) 参数 $t$ 的取值范围由 $n+k+1$ 个节点向量中指定的值分成 $n+k$ 个子区间。

(5) 节点值记为 $\{t_0,t_1,\cdots,t_{n+k}\}$，所生成的 B 样条曲线定义在从节点值 $t_{k-1}$ 到节点值 $t_{n+1}$ 的区间上。

(6) 任意一个控制点最多可以影响 $k$ 个曲线段的形状。

(7) B 样条曲线位于最多由 $k+1$ 个控制点所形成的凸壳内，因此 B 样条与控制点的位置密切关联。对从节点值 $t_{k-1}$ 到节点值 $t_{n+1}$ 的 $t$，所有的基函数之和为 1。

$$\sum_{i=0}^{n}\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)\equiv 1 \quad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$$

(8) 导数：$\boldsymbol{p}'(t)=(k-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{\boldsymbol{P}_i-\boldsymbol{P}_{i-1}}{t_{i+k-1}-t_i}\mathrm{BEZ}_{i,k-1}(t) \quad t\in[t_{k-1},t_{n+1}]$。

## 5.3.2　均匀 B 样条曲线

当节点值间的距离为常数时，所生成的曲线称为均匀 B 样条曲线。例如，可以建立均匀节点矢量为

$$\boldsymbol{T}=(-2,-1.5,-1,-0.5,0,0.5,1,1.5,2)$$

通常，节点值的标准取值范围介于 0 和 1，例如：

$$\boldsymbol{T}=(0.0,0.2,0.4,0.6,0.8,1.0)$$

在很多应用中建立起以 0 为初始值、1 为间距的均匀点值是比较方便的，其节点矢量为

$$\boldsymbol{T}=(0,1,2,3,4,5,6,7)$$

均匀 B 样条的基函数呈周期性，即给定 $n$ 和 $k$ 值，所有的基函数具有相同的形状。每个后继基函数仅是前面基函数平移的结果：

$$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)=\mathrm{BEZ}_{i+1,k}(t+\Delta t)=\mathrm{BEZ}_{i+2,k}(t+2\Delta t)$$

也就有

$$\mathrm{BEZ}_{i,k}(t)=\mathrm{BEZ}_{0,k}(t-i\Delta t)$$

其中，$\Delta t$ 是相邻节点的区间。

**1. 均匀二次(三阶)B 样条曲线**

为了更好地理解整数节点的均匀二次 B 样条的基函数，取 $n=3,k=3$，则 $n+k+1=7$，不妨设节点矢量为

$$\boldsymbol{T}=(0,1,2,3,4,5,6)$$

参数 $t$ 的范围从 0 到 6，有 $n+k=6$ 个子区间。

根据 Cox-de Boor 递归公式有

$$\mathrm{BEZ}_{0,1}(t)=\begin{cases}1, & 0\leqslant t<1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BEZ}_{0,2}(t)&=t\,\mathrm{BEZ}_{0,1}(t)+(2-t)\mathrm{BEZ}_{1,1}(t)\\&=t\,\mathrm{BEZ}_{0,1}(t)+(2-t)\mathrm{BEZ}_{0,1}(t-1)\\&=\begin{cases}t, & 0\leqslant t<1\\ 2-t, & 1\leqslant t<2\end{cases}\end{aligned}$$

可以获得第一个基函数为

$$\begin{aligned}\mathrm{BEZ}_{0,3}(t)&=\frac{t}{2}\mathrm{BEZ}_{0,1}(t)+\frac{3-t}{2}\mathrm{BEZ}_{0,2}(t-1)\\&=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2, & 0\leqslant t<1\\ \frac{1}{2}t(2-t)+\frac{1}{2}(t-1)(3-t), & 1\leqslant t<2\\ \frac{1}{2}(3-t)^2, & 2\leqslant t<3\end{cases}\end{aligned}$$

在 $\mathrm{BEZ}_{0,3}(t)$中使用$(t-1)$代替 $t$，并将起始位置从 0 移到 1，可得到第二个基函数为

$$\mathrm{BEZ}_{1,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-1)^2, & 1\leqslant t<2\\ \frac{1}{2}(t-1)(3-t)+\frac{1}{2}(t-2)(4-t), & 2\leqslant t<3\\ \frac{1}{2}(4-t)^2, & 3\leqslant t<4\end{cases}$$

以此类推，得到第三和第四个基函数为

$$\mathrm{BEZ}_{2,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-2)^2, & 2\leqslant t<3\\ \frac{1}{2}(t-2)(4-t)+\frac{1}{2}(t-3)(5-t), & 3\leqslant t<4\\ \frac{1}{2}(5-t)^2, & 4\leqslant t<5\end{cases}$$

$$\mathrm{BEZ}_{3,3}(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}(t-3)^2, & 3\leqslant t<4\\ \frac{1}{2}(t-3)(5-t)+\frac{1}{2}(t-4)(6-t), & 4\leqslant t<5\\ \frac{1}{2}(6-t)^2, & 5\leqslant t<6\end{cases}$$

图 5-17 给出了这 4 个周期二次均匀 B 样条的基函数。所有基函数都在 $t_{k-1}=2$ 到 $t_{n+1}=4$ 的区间上出现。2 到 4 的区域是多项式曲线的范围，在该区间中所有基函数的总和为 1。

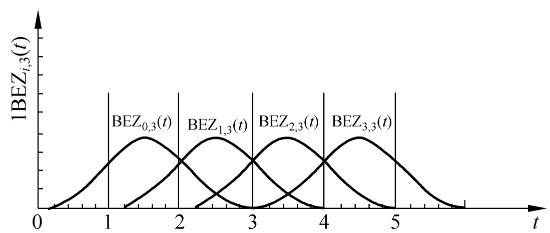


图 5-17　4 段二次(三阶)均匀 B 样条的基函数

由于取值从 2 到 4，通过求解基函数在这些点的值，可确定曲线的起点和终点值：

$$\boldsymbol{p}_{\text{start}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_1),\quad \boldsymbol{p}_{\text{end}}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3)$$

从而得出：曲线的起点在前两个控制点的中间位置，终点在最后两个控制点的中间位置。

如果对基函数求导，并以端点值替换参数 $t$，可得均匀二次 B 样条曲线的起点和终点处的导数：

$$\boldsymbol{p}'_{\text{start}}=\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_0,\quad \boldsymbol{p}'_{\text{end}}=\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2$$

也就是：曲线在起点的斜率平行于前两个控制点的连线，在终点的斜率平行于后两个控制点的连线。图 5-18 给出了 $xOy$ 平面上 4 个控制点确定的二次周期性 B 样条曲线。

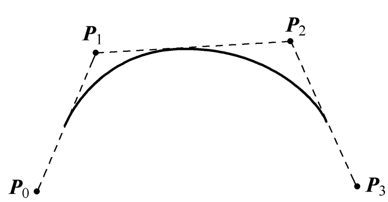


图 5-18　4 个控制点的二次周期性 B 样条曲线

**2. 均匀三次(四阶)周期性 B 样条**

为了理解三次(四阶)周期性 B 样条曲线，不妨取 $k=4, n=3$，节点矢量为 $\boldsymbol{T}=(0,1,2,3,4,5,6,7)$。利用 Cox-de Boor 递归公式可求 $t\in[0,1]$时的周期基函数：

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{BEZ}_{0,4}(t) &= \frac{1}{6}(-t^3+3t^2-3t+1)\\
\mathrm{BEZ}_{1,4}(t) &= \frac{1}{6}(3t^3-6t^2+4)\\
\mathrm{BEZ}_{2,4}(t) &= \frac{1}{6}(-3t^3+3t^2+3t+1)\\
\mathrm{BEZ}_{3,4}(t) &= \frac{1}{6}t^3
\end{aligned}\right\},\quad t\in[0,1]$$

对于给定 4 个控制点 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\boldsymbol{P}_3$，三次周期性 B 样条曲线的表达式为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}(t) &= \sum_{i=0}^{3}\boldsymbol{P}_i\mathrm{BEZ}_{i,4}\\
&= \begin{bmatrix}\mathrm{BEZ}_{0,4}(t) & \mathrm{BEZ}_{1,4}(t) & \mathrm{BEZ}_{2,4}(t) & \mathrm{BEZ}_{3,4}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_3\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_0\\ \boldsymbol{P}_1\\ \boldsymbol{P}_2\\ \boldsymbol{P}_3\end{bmatrix}\\
&= \boldsymbol{T}\boldsymbol{M}_{\mathrm{BEZ}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{BEZ}},\quad t\in[0,1]
\end{aligned}$$

将 $t$ 的端点值代入上式，可得到三次周期性 B 样条的边界条件为

$$\boldsymbol{p}(0)=\frac{1}{6}(\boldsymbol{P}_0+4\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2)=\frac{1}{3}\left(\frac{\boldsymbol{P}_0+\boldsymbol{P}_2}{2}\right)+\frac{2}{3}\boldsymbol{P}_1$$

$$\boldsymbol{p}(1)=\frac{1}{6}(\boldsymbol{P}_1+4\boldsymbol{P}_2+\boldsymbol{P}_3)=\frac{1}{3}\left(\frac{\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_3}{2}\right)+\frac{2}{3}\boldsymbol{P}_2$$

$$\boldsymbol{p}'(0)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_0)$$

$$\boldsymbol{p}'(1)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_1)$$

从而得到结论：曲线的起点 $\boldsymbol{p}(0)$在△$\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 底边中线 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}$ 的 1/3 处，曲线的终点 $\boldsymbol{p}(1)$在△$\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_3$ 底边中线 $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{M}'$的 1/3 处。曲线的起点 $\boldsymbol{p}(0)$的切线平行于 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2$，其模长为该边长的 1/2，曲线的终点 $\boldsymbol{p}(1)$的切线平行于 $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_1$，其模长为该边长的 1/2，如图 5-19 所示。

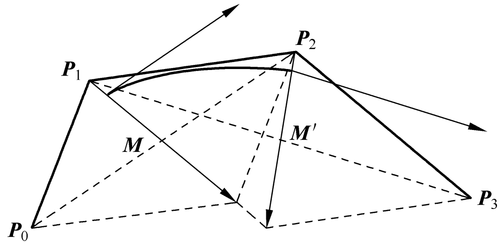


图 5-19 4 个控制点的三次均匀 B 样条曲线

### 5.3.3　B 样条曲面

**1. B 样条曲面**

B 样条曲面的向量函数可应用 B 样条曲线的基函数的笛卡儿乘积得到

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\boldsymbol{P}_{i,j}\mathrm{BEZ}_{i,k}(u)\mathrm{BEZ}_{j,l}(v)$$

其中，$\boldsymbol{P}_{i,j}$ 是给定的$(m+1)\times(n+1)$个控制点的位置，所有的控制点构成了一个空间网格，称为控制网格。

同样，B 样条曲面具有与 B 样条曲线相同的局部支柱性、凸包性、连续性、几何变换不变性等性质。

B 样条曲面也可以表示为矩阵的形式：

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\boldsymbol{U}_k\mathrm{BEZ}_k\boldsymbol{P}_{k,l}\mathrm{BEZ}_l^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}_l^{\mathrm{T}}$$

式中：

$$\boldsymbol{U}_k=(u^k,u^{k-1},\cdots,u,1)$$

$$\boldsymbol{V}_l=(v^l,v^{l-1},\cdots,v,1)$$

$$\boldsymbol{P}_{k,l}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}_{0,0} & \boldsymbol{P}_{0,1} & \cdots & \boldsymbol{P}_{0,l}\\ \boldsymbol{P}_{1,0} & \boldsymbol{P}_{1,1} & \cdots & \boldsymbol{P}_{1,l}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{P}_{k,0} & \boldsymbol{P}_{k,1} & \cdots & \boldsymbol{P}_{k,l}\end{bmatrix}$$

与 B 样条曲线分类一样，B 样条曲面也可以分为均匀 B 样条曲面和非均匀 B 样条曲面，如图 5-20 和图 5-21 所示。

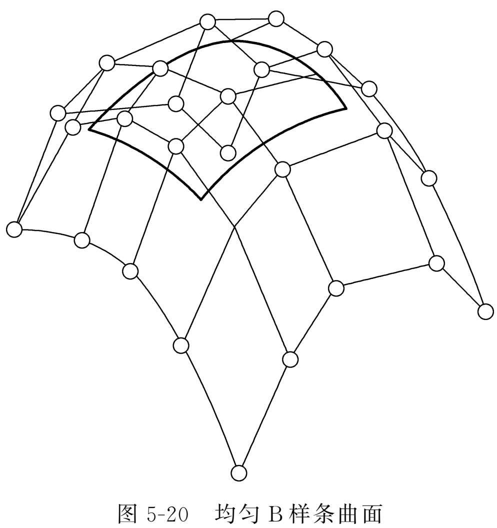

图 5-20　均匀 B 样条曲面

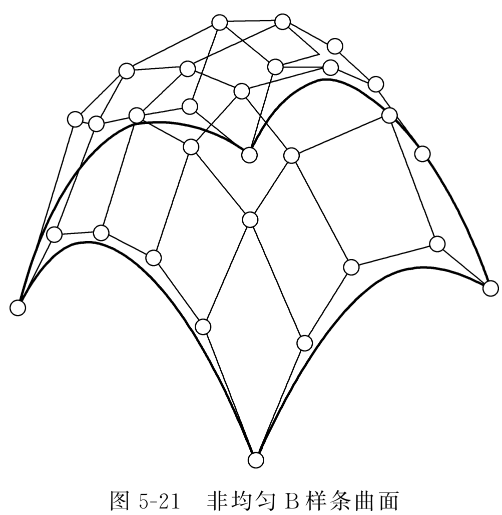

图 5-21　非均匀 B 样条曲面

**2. 双三次 B 样条曲面**

最常用的是均匀三次 B 样条曲面。已知曲面的控制顶点 $\boldsymbol{P}_{i,j}$$(i=0,1,2,3;\ j=0,1,2,3)$，参数 $u,v\in[0,1]$，$k=l=3$，分别沿 $u,v$ 轴构造三次 B 样条曲线，即可得均匀三次 B 样条曲面：

$$p(u,v)=\boldsymbol{U}\boldsymbol{M}_{\mathrm{BEZ}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{M}_{\mathrm{BEZ}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}$$

其中：

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{bmatrix}v^3 & v^2 & v & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_{\mathrm{BEZ}}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-1 & 3 & -3 & 1\\ 3 & -6 & 3 & 0\\ -3 & 0 & 3 & 0\\ 1 & 4 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}P_{0,0} & P_{0,1} & P_{0,2} & P_{0,3}\\ P_{1,0} & P_{1,1} & P_{1,2} & P_{1,3}\\ P_{2,0} & P_{2,1} & P_{2,2} & P_{2,3}\\ p_{3,0} & P_{3,1} & P_{3,2} & P_{3,3}\end{bmatrix}$$

## 5.4 本章小结

本章首先介绍了曲线与曲面的基础理论，并对两类有广泛应用的 Beziér 曲线与曲面、B 样条曲线与曲面进行了讨论。在对曲线与曲面的基础理论的讨论中，给出了显式、隐式和参数表示、样条曲线与三次样条的定义，在对 Beziér 曲线与曲面的讨论中，给出了 Beziér 曲线的定义与性质、按不同次数给出 Beziér 曲线的描述、De Casteljau 递推算法、Beziér 曲线的拼接及反求 Beziér 曲线控制点的方法，最后给出了 Beziér 曲面的描述。在对 B 样条曲线与曲面的讨论中，给出了 B 样条曲线的定义与性质、均匀 B 样条曲线，最后给出了 B 样条曲面的描述。

## 5.5 习题

1. 什么是样条曲线？
2. 什么是凸包？
3. 什么是控制点？
4. 如何区分插值样条和逼近样条？
5. 比较曲线的参数连续性和几何连续性的联系与区别。
6. 简述 Beziér 曲线的定义与性质。
7. 试对 Beziér 曲线编写程序，根据指定控制点可以画出相应 Beziér 曲线。
8. 试对 B 样条曲线编写程序，根据指定控制点可以画出相应 B 样条曲线。