观察可能导致发现.观察将揭示某种规律、模式或定律.

——[美]乔治·波利亚(1887—1985)

对微小事物的仔细观察,就是事业、艺术、科学及生命各方面的成功秘诀.

——[英]史迈尔(1812—1904)

第一章　观察:解题的起点

“会用数学的眼光观察现实世界”是数学学科三大核心素养之一.从信息加工的角度来看,所谓数学活动中的观察,指的是有目的、有选择地对各种数学材料进行概括的感知过程,其成果是发现数学材料的外显特点和整体特征.通过观察,把外部世界的各种信息反映到人的大脑里,当然不只是一种机械的条件反射.事实上,伴随观察也会发生一系列的心理活动,如注意、感知、记忆、想象等,其中还一定存在着积极的思维活动.①

观察本身不是一种独立解题的思维方法,但它是萌发思想方法的基础.高质量的解题观察能够帮助我们迅速、合理地引发解题念头,产生积极的解题思维.因此,观察作为解题的第一步非常重要,绝不能将它与数学解题思路的探求分割开来.

第一节　观察的一般方法

在数学学习与研究中,观察起着十分重要的作用。所谓解题中的观察,本质上就是审题,它不同于单纯地用眼去看,而是有目的、有步骤、有针对性地对数学问题进行剖析,通过观察了解有待解决的问题已知哪些条件(要特别注意隐含条件)、待求解的目标是什么(或者要求是什么).如果有图形,还要对照图形明了相关元素及其相互间可能存在的关系,最好能将各相应量在图形上标识出来.在此基础上,发现并获取重要的背景信息.当观察的信息比较熟悉,与自己掌握的解题模式很接近,与自己的认知结构相合拍,那么就能立即进入试探过程,大部分这类问题便可很快获得解决.

如果将观察仅仅理解为“认真地看”,那就太不够了.观察是一种复杂的、多侧面和多角度的思维过程.解题观察包含极其丰富的内涵,不同的人可能采用不同的方式方法。一般意义上的解题观察主要包括整体观察、实验观察、比较观察、极端观察等.

---

① 段志贵,黄琳.数学解题观察的有效视角[J].高中数学教与学,2018(12):44-47.

一、整体观察

解题障碍形成的一个重要原因是忽视对问题整体的观察,从而无法下手.任何一个事物都存在整体与局部的关系.在进行数学观察时,观察整体的同时,还必须观察其局部的特点.从整体中看局部,从局部中把握整体,只有这两个层面都考虑周到,才能真正抓住问题的关键,看出被观察题目的特点.

例 1.1 设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,$a_1>0$,$S_{12}>0$,$S_{13}<0$,问:该等差数列中前几项的和最大?

分析 在等差数列中求前几项的和最大,一定是首项大于零、公差小于零的数列,所以解题的关键是寻找等差数列的正负分界点,即 $a_k\geqslant 0$ 且 $a_{k+1}\leqslant 0$ 时的 k 的值.因此,一般的思路是用首项 a_1 和公差 d 表示 a_k 和 a_{k+1},而在此题中要做到这一点还比较困难.仔细观察题目所给的条件,对 $S_{12}>0$ 和 $S_{13}<0$ 作整体处理.

利用等差数列的求和公式和性质可得:

$$\begin{cases}\dfrac{12(a_1+a_{12})}{2}>0,\\[2mm] \dfrac{13(a_1+a_{13})}{2}<0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a_6+a_7>0,\\ 2a_7<0.\end{cases}$$

因此 $a_6>0$,$a_7<0$.所以该等差数列的前 6 项之和最大.

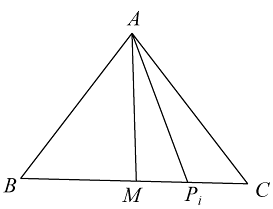

图 1.1

例 1.2 如图 1.1 所示,在$\triangle ABC$ 中,$AB=AC=2$,BC 边上有 100个不同的点 $P_1,P_2,\cdots,P_{100}$,记 $m_i=AP_i^2+BP_i\cdot CP_i(i=1,2,\cdots,100)$.求 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的值.

分析 从整体上看,$m_1+m_2+\cdots+m_{100}$的项数较多,可猜想各项间必有规律.为发现这一规律,不妨首先从观察特殊点入手.

抓住关键词“100 个不同点”,考虑 P_i 恰取 B 或 C 时,易知有

$$AB^2=AC^2=4.$$

再看一特例:若 P_i 取 BC 中点 M,有

$$AM^2+BM\cdot CM=AB^2-BM^2+BM\cdot CM=AB^2=4.$$

由此可猜想,m_i 均为 $4(i=1,2,\cdots,100)$.还可以从上面的特例中寻找解题思路:对 BC 边上任一点 P_i(不妨取在线段 MC 上),由图 1.1 可知

$$\begin{aligned}m_i=AP_i^2+BP_i\cdot CP_i&=AM^2+MP_i^2+(BM+MP_i)(CM-MP_i)\\&=AM^2+MP_i^2+BM^2-MP_i^2\\&=AM^2+BM^2=AB^2=4.\end{aligned}$$

故 $m_1+m_2+\cdots+m_{100}=400$.

二、实验观察

在学习物理和化学时,人们常常通过物理演示实验或化学反应实验帮助认识物理现象

的本质和化学性质的特点.同样的道理,对于数学中的某些问题,一时看不出它具有哪些特征,或者很难寻找解决问题的办法,常常可以通过实验观察,从而获得猜测.然后对其正确性进行推断,达到解决问题的目的.

例 1.3　平面上有 n 条直线,且任意两条都不平行,任意 3 条都不共点,则这 n 条直线互相之间能分割为多少条不同的线段或射线?

分析　要想直接解决本题好像不是很容易,可以先进行实验,尝试观察 1 条、2 条、3 条时的具体情况,探索规律,从而对 n 条直线加以分析和研究.

当 $n=1$ 时,有 1 条;当 $n=2$ 时,有 4 条;当 $n=3$ 时,有 9 条.由此可以猜测:n 条直线可分为 n^2 条.猜测的结论是否正确,需要证明.当 $n=1$ 时,结论显然成立.

假设 $n=k$ 时,结论成立,则当 $n=k+1$ 时,增加的一条直线被原来的 k 条直线分为 $k+1$ 部分,而原来的 k 条直线也都有一部分被分为了两部分,增加了 k 条,因此 $n=k+1$ 时,有 $k^2+k+1+k=(k+1)^2$(条),所以结论正确.

例 1.4　试证:只有一个质数 p,使 $p+10$,$p+14$ 仍是质数.

分析　当问题较为抽象,思路、方法难寻时,不妨将问题具体化,进行实验观察,使思路清晰,便于解题.

取 $p=2$ 时,$p+10=12$,$p+14=16$,都不是质数.

取 $p=3$ 时,$p+10=13$,$p+14=17$,是质数.

取 $p=5$ 时,$p+10=15$,$p+14=19$,不全是质数.

取 $p=7$ 时,$p+10=17$,$p+14=21$,不全是质数.

取 $p=11$ 时,$p+10=21$,$p+14=25$,都不是质数.

由此观察出,$p=3$ 是所要求的一个质数.接下来证明这一结论.

当 $p=3k+1$ 时,$p+14=3k+15=3(k+5)$是合数;当 $p=3k+2$ 时,$p+10=3k+12=3(k+4)$是合数;故只有当 $p=3k(k\in\mathbf{N}_+)$时,才有可能使 $p+10$,$p+14$ 都为质数,而 $p=3k$中的质数只有 3 这一个.故只有一个质数 $p=3$,使 $p+10$,$p+14$ 仍是质数.

三、比较观察

比较是人脑中确定各种事物之间差异和关系的思维过程.俗话说:“有比较才有鉴别.”数学学习中的比较是将有可比意义的概念、题目、方法等组合在一起进行求同存异地观察分析,通过类比联想找到解决问题的思路和方法,这是一种知识间的同化策略.

例 1.5　判断:以过椭圆的焦点的弦为直径的圆,和椭圆相应的准线的位置关系.

分析　此题的结构和要求,让我们联想到抛物线的一个结论:以过抛物线焦点弦为直径的圆,必和抛物线的准线相切.几乎相同的条件,在不同的曲线下结论会发生何种变化?观察一下抛物线时对该题的证明,也许对我们会有所启发.

设焦点为 F,过焦点的弦为 AB,曲线的离心率为 $e(e=1)$,A、B 两点到准线的距离分别为 m、n.则 AB 中点 M 到准线的距离为 $d=\dfrac{m+n}{2}$.而由抛物线的定义可得 $|AF|=m$,$|BF|=n$.所以有

$$d=\frac{m+n}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2}=\frac{1}{2}|AB|.$$

因此,以过抛物线焦点的弦为直径的圆,必和抛物线的准线相切,如图 1.2 所示.

把椭圆与抛物线相比较,可以仿照抛物线探索解题思路.利用椭圆的第二定义可得

$$d=\frac{m+n}{2}=\frac{|AF|+|BF|}{2e}=\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{2}|AB|.$$

因为椭圆的离心率满足 $0<e<1$,所以 $d>\frac{|AB|}{2}$,则圆和椭圆相应的准线相离,如图 1.3 所示.我们还可以联想到双曲线的情形,由于 $e>1$,所以 $d<\frac{|AB|}{2}$,则圆和双曲线相应的准线相交,如图 1.4 所示.

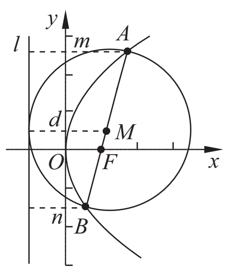

图　1.2

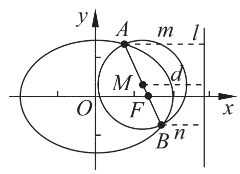

图　1.3

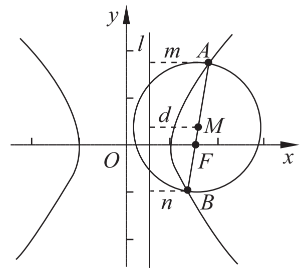

图　1.4

例 1.6　设 $a>0,\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$,比较下列四个数的大小:$\sqrt{1+a},\frac{1}{1-\frac{b}{2}},1+\frac{a}{2},\frac{1}{\sqrt{1-b}}$.

分析　对于这四个数如果用求差的方法比较大小,要进行 $C_4^2=6$(次)比较,才能得到答案.是否可先估计一下这四个数的大小关系呢?不妨先用具体数值代入比较,然后猜想证明.

因为 $a>0$,不妨设 $a=1$,由 $\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$,得 $b=\frac{1}{2}$.于是有

$$\sqrt{1+a}=\sqrt{2},\quad \frac{1}{1-\frac{b}{2}}=\frac{4}{3},\quad 1+\frac{a}{2}=\frac{3}{2},\quad \frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{2}.$$

由此可以猜想,对于满足 $a>0,\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=1$ 的一切 a、b 值都有

$$\frac{1}{1-\frac{b}{2}}<\frac{1}{\sqrt{1-b}}=\sqrt{1+a}<1+\frac{a}{2}.$$

对于这一猜想再进行证明,只需进行三次比较即可(证明从略).

四、极端观察

数学问题的表现形式多种多样.极端观察是指通过对研究对象极端情形的观察,以期判断问题的类型,探索解决问题的方法.

例 1.7　已知异面直线 a 与 b 所成的角为 $60°$,P 为空间一定点,则过点 P 且与 a,b 所

成的角都是 60°的直线有且只有(　　)条.

A. 1　　　　B. 2　　　　C. 3　　　　D. 4

分析　依据题意,作出图 1.5 进行分析观察.过空间点 P 作直线 $a'/\!/a$,$b'/\!/b$,a',b' 相交,确定的平面为 α,它们的夹角为 60°.为探索符合题意要求的直线,考虑从观察两种特殊情形入手.

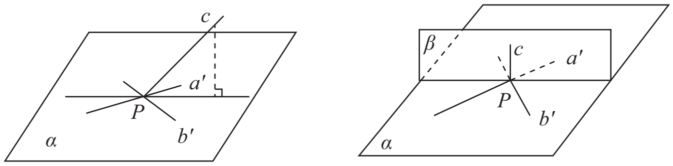

图　1.5

一是平面 α 内 a',b'的两个夹角,一个是 60°,另一个是 120°.显然,120°那个角的角平线所在直线符合题目要求.有没有其他直线呢?若所求直线存在,则必在 α 外,其射影必为 a',b'所成角的角平分线.二是与平面 α 垂直的直线,这条直线与 a',b'所成的角为 90°,为最大角.而最小角为平面 α 上 a',b'所成的角的一半,为 30°.而 60°角介于区间(30°,90°)内,根据对称性,有两条直线合乎要求.

所以,本题符合题意的直线共有 3 条.

例 1.8　已知二次函数 $y=ax^2+bx+c\,(a>0)$图象经 $M(1-\sqrt{2},0)$、$N(1+\sqrt{2},0)$、$P(0,k)$三点,若$\angle MPN$ 是钝角,求 a 的取值范围.

分析　若利用余弦定理,并由$-1<\cos\angle MPN<0$,将得到一个较复杂的不等式.观察$\angle MPN$ 的变化状态,显然直角是钝角的极限情形.

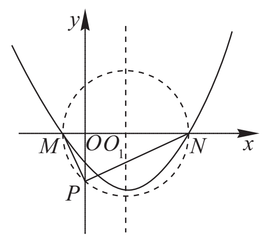

图　1.6

事实上,当$\angle MPN$ 为直角时,则点 P 在以 MN 为直径的圆周上,于是 P 为该圆与 y 轴的交点.如图 1.6 所示,由勾股定理不难得 $k=\pm1$.

由此推断,当$\angle MPN$ 为钝角时,点 P 在圆内.由 $a>0$ 知:点 P 应在 y 轴的负半轴上.把 $P(0,k)$的坐标代入 $y=a(x-1+\sqrt{2})(x-1-\sqrt{2})$得 $a=-k$,因此,$0<a<1$.

第二节　数与式的观察

数与式是数学的主要表征形态.解决问题可利用数的表征,如整数、无理数、质数、勾股数、数的组成、数的整除性等;也可利用式的特征,如共轭因式、互为倒数因式、对偶式等.问题所给的数与式,常常给问题的求解指明探索的思路.如果能够通过观察发现数字、式子间的内在联系,往往就能找到解决问题的突破口.

例 1.9　设 $A=(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$,求 A 的末位数字.

分析　此题若企图把等式右边各个因数相乘是极不现实的.观察所给式子的特征,容易想到用$(2-1)$同乘等式两边进行试探:

$$(2-1)A=(2-1)(2+1)(2^2+1)\cdots(2^{64}+1)=2^{128}-1=(2^4)^{32}-1=16^{32}-1.$$

因为 16^{32} 的末位数字是 6,所以 A 的末位数字是 5.

本题还有另一个观察的视角,就是敏锐地捕捉到 A 中一个因式 2^2+1 是 5,其他所有的各项都是奇数,因此 A 的末尾数字是 5.

例 1.10 解方程$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x=4$.

分析 观察方程左边两个代数式中的底数的数字特征,不难发现$\sqrt{2+\sqrt{3}}$与$\sqrt{2-\sqrt{3}}$互为倒数.如令$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=y$,则问题可纳入解“$y+\dfrac{1}{y}=a$ 型”方程的模式,不难求出 y 的值,从而解出 $x=\pm 2$.

例 1.11 解方程 $x^3-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)x^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})x-\sqrt{6}=0$.

分析 解决本题的关键是拥有一双慧眼发现方程系数的关系,通过试根观察可以发现:

$$1-(\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)+(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6})-\sqrt{6}=0,$$

方程有一根为 $x_1=1$.从而在方程的左边可以提取公因式 $x-1$,得

$$(x-1)[x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}]=0.$$

由此可求得另两根为 $x_2=\sqrt{2}$,$x_3=\sqrt{3}$.

例 1.12 已知三角形的三边分别为 108、144、180.求此三角形的最大角.

分析 本题用余弦定理计算比较麻烦.若认真观察数字间的特征,就会发现:

$$108:144:180=3:4:5.$$

由勾股定理的逆定理即可知此三角形为直角三角形,所以最大角是 $90°$.

类似地,通过对特殊常数的仔细观察获得解题方法的习题比较多.

例如,已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{60}{169}$,$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$,求 $\cos\theta+\sin\theta$ 的值.可以观察数字$\dfrac{60}{169}=\dfrac{5}{13}\times\dfrac{12}{13}$.联想到数组(5,12,13),于是可以构造直角三角形.又 θ 为锐角,可知 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$或 $\cos\theta=\dfrac{5}{13}$,$\sin\theta=\dfrac{5}{13}$或 $\cos\theta=\dfrac{12}{13}$,故 $\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{17}{13}$.

例 1.13 解方程$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}=x$.

分析 本题用常规的方法,即不断对两边取平方(有时需移项后再取),可化为一个八次方程.不过这样求解不但计算量大,而且也不容易求解出来.但是,不管计算过程多么复杂,解答结果只可能有三种情形:无解;有唯一正根;有若干个正根.

而它是否有解,往往可以从是否存在正数能使方程两边相等得出.

实际上,只要略加观察,就可发现:由于$\sqrt{2+2}=2$,可依次推得

$$2=\sqrt{2+2}=\sqrt{2+\sqrt{2+2}}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2}}}. \qquad ①$$

因此，$x=2$ 是方程的根，方程是有解的.

但上述根是方程唯一的根，还是它的若干个正根中的一个根呢？如果回到上面发现 $x=2$这个根的起点，就不难看出能使$\sqrt{2+x}=x$ 的正数就只有一个 2，从而大致估量出其他的正数是不可能满足题设方程的.由此进一步猜想到：用不等于 2 的正数代 x，式①中的一串等号将可能变为一串大于(或小于)号.

为证实上面的猜想，必须做些计算.事实上，如果解不等式

$$\sqrt{2+x}<x$$

可知 $x>2$ 时，恒有 $x>\sqrt{2+x}$，于是依次推得

$$x>\sqrt{2+x}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}. \tag{②}$$

因此，大于 2 的正数都不是方程的根.

而当 $0<x<2$ 时，可得到类似于式②的结果，这时只要把大于号改为小于号即可.因此，小于 2 的正数同样也都不是方程的根.

这样，就用分类淘汰法从方程可能的根(无穷多个正数)中去掉了所有不等于 2 的正数，至此，就可以肯定方程只有唯一的根：$x=2$.

例 1.14　求证：$1>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}_+)$.

分析　观察可发现 $n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$，而 n 又恰为不等式中间项的项数，于是可进行如下试探：

$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}\geqslant\frac{1}{2n},$$
$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+2}\geqslant\frac{1}{2n},$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n}>\frac{1}{n+n}\geqslant\frac{1}{2n},$$

则有

$$\begin{aligned}1=n\cdot\frac{1}{n}=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}}&>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\\&\geqslant\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n\text{个}}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

即

$$1>\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\geqslant\frac{1}{2}\quad(n\in\mathbf{N}_+).$$

例 1.15 若 $x\geqslant 0$,求 $y=\dfrac{4x^2+8x+13}{6(x+1)}$的最小值.

分析 本题可以采用判别式法,但若仔细观察,可以发现分子能写成 $4(x+1)^2+9$,分母是 $6(x+1)$,不妨做一试探:

$$y=\frac{4x^2+8x+13}{6(x+1)}=\frac{4(x+1)^2+9}{6(x+1)}=\frac{2}{3}(x+1)+\frac{1}{\frac{2}{3}(x+1)},$$

因 $x\geqslant 0$,故$\dfrac{2}{3}(x+1)>0$,由均值不等式可知,$y\geqslant 2\sqrt{\dfrac{2}{3}(x+1)\cdot\dfrac{1}{\frac{2}{3}(x+1)}}=2$,

从而可知:当且仅当$\dfrac{2}{3}(x+1)=\dfrac{1}{\frac{2}{3}(x+1)}$,即 $x=\dfrac{1}{2}$时,$y_{\min}=2$.

例 1.16 对任意的正整数 k,令 $f_1(k)$定义为 k 的各位数字的和的平方,对于 $n\geqslant 2$,令 $f_n(k)=f_1(f_{n-1}(k))$,求 $f_{2018}(11)$.

分析 最直接的方法是先求出 $f_1(11)$,$f_2(11)$,$f_3(11)$,…,进行观察,由定义可得

$$\begin{aligned}
&f_1(11)=(1+1)^2=4,\\
&f_2(11)=f_1(f_1(11))=f_1(4)=4^2=16,\\
&f_3(11)=f_1(f_2(11))=f_1(16)=(1+6)^2=49,\\
&f_4(11)=f_1(f_3(11))=f_1(49)=(4+9)^2=169,\\
&f_5(11)=f_1(f_4(11))=f_1(169)=(1+6+9)^2=256,\\
&f_6(11)=f_1(f_5(11))=f_1(256)=(2+5+6)^2=169,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

因为 $f_n(11)$只依赖于 $f_{n-1}(11)$,所以 256 和 169 将连续交替出现,也就是说,当 $n\geqslant 4$ 时,有

$$f_n(11)=\begin{cases}169,\ n\text{ 是偶数},\\256,\ n\text{ 是奇数}.\end{cases}$$

由于 2018 是偶数,所以 $f_{2018}(11)=169$.

例 1.17 已知 a_1、a_2、a_3、a_4 为非零实数,且满足

$$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2a_4(a_1+a_3)+a_2^2+a_3^2=0.$$

求证:a_1、a_2、a_3 成等比数列.

分析 通过对已知等式的观察,注意到 a_1、a_2、a_3、a_4 为非零实数,可以把等式看成以 a_4 为未知数的方程,且方程有实根,于是

$$\Delta=[-2a_2(a_1+a_3)]^2-4(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)=-4(a_2^2-a_1a_3)^2\geqslant 0.$$

由此可得到 $a_2^2=a_1a_3$,故 a_1、a_2、a_3 成等比数列.

此题还可将已知等式展开,应用配方知识解答.

例 1.18　已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2,\dfrac{a_n+a_{n-1}}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{a_n}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N})$,求$a_{n+1}$.

分析　如果不加思索地去分母,这样下去是比较麻烦的.留心观察一下已知等式,容易发现$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}+1=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-1$,即$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}-\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$,所以数列$\left\{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$是一个首项为2、公差为2的等差数列,因此$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2+2(n-1)=2n$.再利用累乘法即可得$a_{n+1}=2^n n!$.

显然,在去分母和不去分母之间作出正确选择之后,问题就容易解决了.

第三节　图形的观察

学习数学离不开图形.注意图形特征的观察,可以发现其中隐含的重要的关系,有利于数形结合方法的运用,也有助于在解题过程中选择简捷、优美的解法.

例 1.19　已知x、$y\in\mathbf{R}$,且$x^2+y^2=4$,求$x+y$的最大值和最小值.

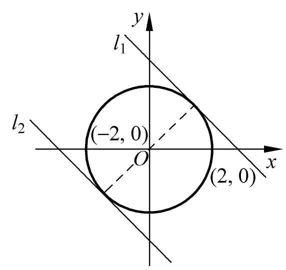

图　1.7

分析　观察已知等式知,它表示一个以原点为圆心、以2为半径的圆,如图1.7所示,于是问题转化为当点(x,y)在圆上运动时,直线$x+y=b$在y轴上的截距b的最值问题.再借助于图形进一步观察,可得结论:当且仅当直线$x+y=b$运动到l_1位置与圆相切时,取得最大值;运动到l_2位置与圆相切时,取得最小值.由此不难求得$x+y$的最大值为$2\sqrt{2}$,最小值为$-2\sqrt{2}$.

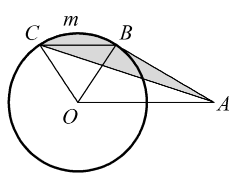

图　1.8

例 1.20　如图1.8所示,A是半径为1的圆O外一点,$OA=2$,AB是圆的切线,B是切点,弦$BC/\!/OA$,连结AC,试求阴影部分面积.

分析　从弦$BC/\!/OA$出发,观察图形特征,连结OC、OB,发现$\triangle BOC$与$\triangle ABC$有相同的底和高,其面积相等.于是

$$S_{阴影}=S_{弓形BmC}+S_{\triangle ABC}=S_{弓形BmC}+S_{\triangle BOC}=S_{扇形BOC}.$$

而要求$S_{扇形BOC}$,关键是求$\angle BOC$,再观察图形知:在$\mathrm{Rt}\triangle AOB$中,由已知条件得$\angle OAB=30°$.

由$BC/\!/OA$,有$\angle CBO=\angle BOA=60°$.所以$\triangle BOC$为等边三角形,$\angle BOC=60°$.最后得到$S_{阴影}=S_{扇形BOC}=\dfrac{\pi}{6}$.

例 1.21　平面上有两点$A(-1,0)$、$B(1,0)$,在圆周$(x-3)^2+(y-4)^2=4$上取一点P,求使AP^2+BP^2最小时点P的坐标.

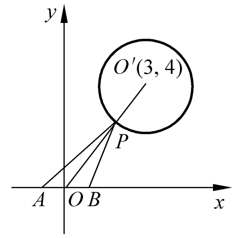

图　1.9

分析　观察图1.9知:PO为$\triangle PAB$的边AB上的中线,易证$AP^2+BP^2=2OP^2+2OB^2=2OP^2+2$.$OP$最小时,$AP^2+BP^2$也最小,因此连结点$O$和圆心$O'$的线段与圆的交点即为所求的点$P$.解方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{4}{3}x, \\ (x-3)^2+(y-4)^2=4, \end{cases}$$

求得 $P\left(\dfrac{9}{5},\dfrac{12}{5}\right)$.

例 1.22　已知抛物线 $y=x^2+2kx-k+1(k\in\mathbf{R})$ 在 x 轴上的两个交点分别在区间 $(0,1)$ 与 $(1,2)$ 内,求 k 的取值.

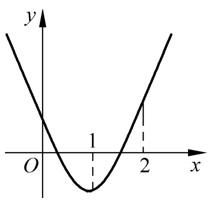

图　1.10

分析　可设想有一条满足条件的抛物线如图 1.10 所示.观察图形,不难发现由于抛物线开口向上,故 k 应满足

$$\begin{cases} f(0)=0^2+2k\cdot 0-k+1>0, \\ f(1)=1^2+2k\cdot 1-k+1<0, \\ f(2)=2^2+2k\cdot 2-k+1>0, \end{cases} \text{解得} \begin{cases} k<1, \\ k<-2, \\ k>-\dfrac{5}{3}, \end{cases} \text{所以 } k \text{ 不存在.}$$

例 1.23　已知变量 x、y 满足条件 $\begin{cases} x\geqslant 1, \\ x-y\leqslant 0, \\ x+2y-9\leqslant 0, \end{cases}$ 求 $x+y$ 的最大值.

分析　本题实质上是线性规划问题,利用数形结合,首先画出可行域,再求线性目标函数的最值.如图 1.11 所示,可行域为图中阴影部分(包括边界线),则 $z=x+y$ 在 A 点处取得最大值,由 $\begin{cases} x-y=0 \\ x+2y-9=0 \end{cases}$ 得 $A(3,3)$,故 $x+y$ 的最大值为 $3+3=6$.

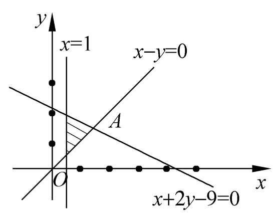

图　1.11

值得注意的是,目标函数对应的直线与边界直线斜率的大小关系用于确定最优解的正确位置,应仔细观察各直线的倾斜程度,准确判定可行域内的最优解.

例 1.24　正方体 $ABCD—A'B'C'D'$ 中,边长为 1,求二面角 $A—BD'—B'$ 的大小.

分析　求二面角有多种方法.这里介绍两种方法.

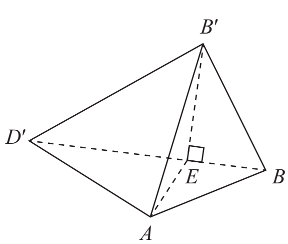

图　1.12

方法 1　几何法.从正方体中抽取待求二面角,如图 1.12 所示.不难发现 $\triangle ABD'$ 和 $\triangle B'BD'$ 全等,因为 $AD'=B'D'=\sqrt{2}$,$AB=B'B=1$,$D'A\perp AB$,$D'B'\perp BB'$,所以过 A、B' 分别作 BD' 的垂线交于同一点,记为 E,则 $\angle AEB'$ 即为所求二面角.

因为 $B'E=AE=\dfrac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,而 $AB'=\sqrt{2}$,所以 $\cos\angle AEB'=$

$$\frac{\dfrac{6}{9}+\dfrac{6}{9}-2}{2\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}}=-\frac{1}{2}$$,故 $\angle AEB'=120^\circ$,即所求二面角为 120°.