数学培优竞赛讲座

（九年级，第 2 版）

朱华伟　编著

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，按照初中数学课程的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径；在巩固深化初中数学教材知识的同时，拓宽有关中考数学和竞赛数学的知识，介绍令人耳目一新的解题方法与技巧，有助于激发学生创新与发现的灵感，开发智力，提高学生中考数学和初中数学竞赛的成绩.

本书可供初中生及准备参加初中数学竞赛的学生使用，同时也适合中学数学教师、数学爱好者及高等师范院校数学教育专业的大学生、研究生和数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 九年级 / 朱华伟编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2024.1
ISBN 978-7-302-64881-9

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 215133 号

责任编辑：王　定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：马遥遥
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：河北鹏润印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185mm×260mm　　**印　张**：22.5　　**字　数**：533 千字
版　次：2021 年 9 月第 1 版　2024 年 1 月第 2 版　　**印　次**：2024 年 1 月第 1 次印刷
定　价：79.80 元

产品编号：102834-01

前　　言

提升基础学科的科研水平，培养世界一流的拔尖创新人才，是推动人类文明进步和世界持续发展的重要动力. 培养拔尖创新人才，一定要从娃娃抓起、从基础教育抓起. 因此，重视并加强基础教育阶段的数学、物理等教育迫在眉睫，尤其是对于数理拔尖人才的早期识别和培养，适合的、特殊的成长机会及高水平的、有效的学习资源至关重要.

为了给对数学感兴趣的初中资优生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，笔者以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，根据多年辅导初中数学资优生参加中考数学和初中数学竞赛积累的素材、经验和体会，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（七年级、八年级、九年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（七年级、八年级、九年级）.

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分.

培优篇　按照初中数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往中考数学、著名重点高中自主招生和初中数学竞赛的捷径；在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野，提高思维能力；在有利于学生把初中数学教材知识巩固深化的同时，又恰到好处地为学生拓宽有关中考数学、自主招生和竞赛数学的知识.

竞赛篇　以初中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感. 这类问题涉及的数学知识较少而包含的技巧性强，理解和解决时往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法相当困难，没有固定的模式可套. 它要求学生去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、构造、对应、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法技巧，发现规律，找到解决问题的途径，这恰是数学竞赛试题应有的风格.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下.

名人名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要：详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和考点，对于初中数学教科书中没有的内容，尽可能给出新知识、新方法的产生背景.

例题精讲：含“分析”“解”和“评注”，从易到难，拾级而上，由基础题、提高题、综合题组成. 部分例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系. 总之，评注一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然.

同步训练：含选择题、填空题、解答题，遵循因材施教原则，同步训练题的设置兼顾多个层次的学习需求，分为 A，B，C 三层，便于分层教学，师生在实际教学中可按需取舍. 例如，对于数学基础较好的学生，可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题；对于数学基础较弱的学生，可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题. 为方便自学，在书后每题均给出了详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测. 书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度.《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果.

本书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸显科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析解决问题能力的培养. 希望通过学习本书，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而增强学习数学的兴趣.

数学大师陈省身为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词：“数学好玩.”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣. 著名数学家陈景润说：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本书是初中生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点高中自主招生、破解中考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢. 由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正.

朱华伟

2023 年 5 月于深圳中学新校区

目　　录

培　优　篇/1

竞　赛　篇/183

(2) 若等腰$\triangle ABC$的一边长$a=6$,另两边长b,c恰好是这个方程的两个根,求此三角形的周长.

13. 设a,b,c为互不相等的非零实数,求证:三个方程$ax^2+2bx+c=0$,$bx^2+2cx+a=0$,$cx^2+2ax+b=0$不可能都有两个相等的实数根.

C 组

14. 若$a,b,c,d>0$,证明:在方程

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2a+b}\,x+\sqrt{cd}=0, \qquad ①$$

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2b+c}\,x+\sqrt{ad}=0, \qquad ②$$

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2c+d}\,x+\sqrt{ab}=0, \qquad ③$$

$$\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2d+a}\,x+\sqrt{bc}=0, \qquad ④$$

中,至少有两个方程有两个不相等的实数根.

15. 设$a_1\neq a_2$,且$(a_1+b_1)(a_1+b_2)=(a_2+b_1)(a_2+b_2)=1$,求证:

$$(a_1+b_1)(a_2+b_1)=(a_1+b_2)(a_2+b_2)=-1.$$

培优篇

第 1 讲　一元二次方程

数学家导出方程式和公式,如同看到雕像、美丽的风景,听到优美的曲调等等一样而得到充分的快乐.

——柯普宁

知识方法述要

1. 一元二次方程的定义

两边都是关于未知数的整式的方程叫作整式方程. 只含一个未知数且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫作一元二次方程.

任何一个一元二次方程均可通过展开、移项、合并同类项等步骤把它化成一般形式:

$$ax^2+bx+c=0(a\neq 0),$$

其中,a,b 分别为二次项、一次项的系数,c 称为常数项.

特别注意,一元二次方程中,二次项的系数不能为零.

2. 求根公式

解一元二次方程有直接开平方法、配方法、公式法、因式分解法. 对于一般形式的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$,利用配方法可推导出求根公式为

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}(b^2-4ac\geqslant 0).$$

3. 一元二次方程的根的判别式

记 $\Delta=b^2-4ac$,Δ 被称为一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$的根的判别式. 由求根公式可看出:

当 $\Delta>0$ 时,方程有两个不相等的实数根;当 $\Delta=0$ 时,方程有两个相等的实数根;当 $\Delta<0$ 时,方程没有实数根. 反之也成立.

一元二次方程的根的判别式是关于方程的系数的一个代数式,有关项的系数在方程化为一般形式时即可确定.借助判别式我们可仅通过方程的系数判断出一元二次方程是否有实数根.

此外,要注意判别式在以下几个方面的应用:

(1) 根据给定方程的条件,确定字母的取值或取值范围;

(2) 在解答关于整系数的一元二次方程有整数根一类问题时,要注意它的判别式应该为完全平方数;

(3) 当出现形如一个平方式与两个代数式的积之差形式的问题时,可以考虑利用这种结构构造一个一元二次方程,再用一元二次方程的理论去解答问题;

(4) 只要将方程两边同乘以一个适当的数,有理数方程都可以转化为整系数方程,因此,我们常将有理系数一元二次方程转化为整系数一元二次方程;

(5) 在求某个字母(参数)的取值范围的问题中,常可先利用根的定义或根与系数的关系构造二次方程,再用判别式求出其中参数的范围.

例题精讲

【例 1-1】 若 $a+b+c=0$,则一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个根是 1.

证明 将 $x=1$ 代入方程的左边$=a\times 1^2+b\times 1+c=a+b+c=0=$右边,所以 1 是原方程的根.

评注 系数之和为零的方程必有一根为 1,这说明系数的特殊关系会产生特殊的根.例如,(1)若 $a-b+c=0$,则方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有一个根是 -1;(2)若常数项为 0,则方程必有一个根是 0.

【例 1-2】 解下列关于 x 的方程.

(1) $(a^2-1)x+a(x^2-1)=a^2(x^2-x+1)$;

(2) $x^2-2(a^2+b^2)x+(a^2-b^2)^2=0$.

解 (1) 原方程可变为

$$a(a-1)x^2-(2a^2-1)x+a(a+1)=0. \tag{①}$$

这个方程是不高于二次的方程,当 $a=0,1$ 时,方程为一次方程,分别解得 $x=0$ 与 $x=2$.当 $a\neq 0,1$ 时,式①为二次方程,因式分解得

$$[ax-(a+1)]\cdot[(a-1)x-a]=0,$$

解得 $x_1=\dfrac{a+1}{a}$,$x_2=\dfrac{a}{a-1}$.

(2) 配方可得

$$[x-(a^2+b^2)]^2=(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2=4a^2b^2,$$

即

$$x-(a^2+b^2)=\pm 2ab,$$

所以 $x_1=(a+b)^2$,$x_2=(a-b)^2$.

评注 对于含字母系数的二次方程,可以考虑用因式分解

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),$$

由此求出两个根 x_1, x_2，或采用配方法，即沿用求根公式的推导方法求解.

(1) 若从计算判别式入手，则

$$\Delta=4(a^2+b^2)^2-4(a^2-b^2)^2=16a^2b^2,$$

运用求根公式得 $x=a^2+b^2\pm 2ab=(a\pm b)^2$.

(2) 注意到 $(a^2-b^2)^2=(a+b)^2(a-b)^2$，分解因式，原方程可变为

$$[x-(a+b)^2][x-(a-b)^2]=0,$$

故 $x_1=(a+b)^2, x_2=(a-b)^2$.

【例 1-3】 设方程 $x^2+px+q=0$ 的两实数根为 a, b，且有 $I_1=a+b, I_2=a^2+b^2, \cdots, I_n=a^n+b^n$，求当 $n\geqslant 3$ 时，$I_n+pI_{n-1}+qI_{n-2}$ 的值.

分析 直接求解犹如"海底捞针"，若利用方程根的意义求解，不仅能以简驭繁，且有出奇制胜之妙. 我们知道，$x=x_0$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根 $\Leftrightarrow ax_0^2+bx_0+c=0$，利用它使得思路清晰，运算简洁.

解
$$\begin{aligned}&I_n+pI_{n-1}+qI_{n-2}\\&=(a^n+b^n)+p(a^{n-1}+b^{n-1})+q(a^{n-2}+b^{n-2})\\&=(a^n+pa^{n-1}+qa^{n-2})+(b^n+pb^{n-1}+qb^{n-2})\\&=(a^2+pa+q)a^{n-2}+(b^2+pb+q)b^{n-2}\\&=0+0=0.\end{aligned}$$

【例 1-4】 当 a, b 为何值时，方程 $x^2+2(1+a)x+(3a^2+4ab+4b^2+2)=0$ 有实数根?

解 因为方程有实数根，所以判别式

$$\begin{aligned}\Delta&=4[(1+a)^2-(3a^2+4ab+4b^2+2)]\\&=4(-1+2a-2a^2-4ab-4b^2)\\&=-4[(1-2a+a^2)+(a^2+4ab+4b^2)]\\&=-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\geqslant 0.\end{aligned}$$

因为 $-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]\leqslant 0$，所以 $-4[(1-a)^2+(a+2b)^2]=0$.

从而 $1-a=0$，且 $a+2b=0$，即 $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$.

所以当 $a=1, b=-\dfrac{1}{2}$ 时，方程有实数根.

评注 证明 $b^2-4ac\geqslant 0$，通常采用配方法.

【例 1-5】 首项系数不相等的两个二次方程

$$(a-1)x^2-(a^2+2)x+(a^2+2a)=0, \quad ①$$

及

$$(b-1)x^2-(b^2+2)x+(b^2+2b)=0, \quad ②$$

(其中 a, b 为正整数) 有一公共根，求 $\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}$ 的值.

解法 1 由已知方程可知 $a\neq 1, b\neq 1$，且 a, b 为正整数，故 $a>1, b>1$，且 $a\neq b$. 设 x_0 是方程①②的公共根，则

$$(a-1)x_0^2-(a^2+2)x_0+(a^2+2a)=0, \quad ③$$

$$(b-1)x_0^2-(b^2+2)x_0+(b^2+2b)=0. \quad ④$$

消去③④两式中的 x_0^2,得

$$(x_0-1)(a-b)(ab-a-b-2)=0.$$

因为 $a\neq b$,所以 $x_0=1$ 或 $ab-a-b-2=0$.

若 $x_0=1$,代入式①得 $a=1$,矛盾.

故 $x_0\neq 1$,$ab-a-b-2=0$.

所以$(a-1)(b-1)=3$,$\begin{cases}a-1=1,\\b-1=3,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a-1=3,\\b-1=1.\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=2,\\b=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=4,\\b=2.\end{cases}$

所以$\dfrac{a^b+b^a}{a^{-b}+b^{-a}}=a^bb^a=2^4\times 4^2=256$.

解法2 利用因式分解法可以求得上述两个方程的根分别为 $a,\dfrac{a+2}{a-1}$;$b,\dfrac{b+2}{b-1}$.

因题设中两个方程有一公共根,且 $a\neq b$,所以必有 $a=\dfrac{b+2}{b-1}$或 $b=\dfrac{a+2}{a-1}$. 以上两式都可以得到 $ab-a-b=2$,即$(a-1)(b-1)=3$.

以下同解法1,略.

评注 含有参数的两个一元二次方程有公共根的问题,是初中数学竞赛中常见的一种类型. 处理此类问题常用的方法有如下两种:

(1) 利用根的定义,设出公共根为 α 后代入两个方程,然后消去含有 α^2 的项,通过因式分解来求解.

(2) 直接求根后通过对比或分类讨论求解.

例1-5也可从两个方程的结构相同入手,首先变更主元,然后利用根的定义来构造方程,再利用根与系数的关系得到关于 a,b 的等式求解.

设两个方程的公共根为 x_0,将 x_0 代入原方程,并经变形得

$$(x_0-1)a^2-(x_0+2)a+(x_0^2+2x)=0, \quad ①$$

$$(x_0-1)b^2-(x_0+2)b+(x_0^2+2x)=0. \quad ②$$

若 $x_0=1$,代入式①得 $a=1$,矛盾. 故 $x_0\neq 1$.

所以 a,b 是关于 t 的方程$(x_0-1)t^2-(x_0+2)t+(x_0^2+2x)=0$ 的相异的两根,因此有

$$a+b=\frac{x_0^2+2}{x_0-1},ab=\frac{x_0^2+2x_0}{x_0-1}.$$

于是 $ab=2+\dfrac{2+x_0^2}{x_0-1}=2+a+b$,即 $ab-(a+b)=2$,$(a-1)(b-1)=3$.

以下同解法1,略.

【例1-6】 当 x 为何有理数时,代数式 $9x^2+23x-2$ 的值恰为两个连续正偶数的乘积?

解 设两个连续正偶数为 $k,k+2$,则 $9x^2+23x-2=k(k+2)$,即

$$9x^2+23x-(2+k^2+2k)=0.$$

由于 x 是有理数，所以判别式为完全平方数，即

$$\Delta=23^2+4\times9(k^2+2k-1+1)=565+[6(k+1)]^2.$$

令 $\Delta=p^2(p\geqslant0)$，则 $p^2-[6(k+1)]^2=565$，所以 $[p+6(k+1)][p-6(k+1)]=113\times5=565\times1$.

由 $p\geqslant0,k\geqslant0$，得 $\begin{cases}p+6(k+1)=565,\\p-6(k+1)=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p+6(k+1)=113,\\p-6(k+1)=5.\end{cases}$

由第 1 个方程组解得 $k=46$，代入原方程，解得 $x=-17$ 或 $x=\dfrac{130}{9}$.

由第 2 个方程组解得 $k=8$，代入原方程，解得 $x=2$ 或 $x=-\dfrac{41}{9}$.

综上所述，当 $x=-17$，或 $x=\dfrac{130}{9}$，或 $x=2$，或 $x=-\dfrac{41}{9}$ 时，$9x^2+23x-2$ 恰为两正偶数 8 和 10，或者 46 和 48 的乘积.

【例 1-7】 已知 a,b,c 是三个两两不同的奇质数，方程 $(b+c)x^2+\sqrt{5}(a+1)x+225=0$ 有两个相等的实数根.

(1) 求 a 的最小值；

(2) 当 a 达到最小值时，解这个方程.

解　(1) 判别式 $\Delta=5(a+1)^2-4\times225\times(b+c)$. 依题意，判别式 $\Delta=0$，即 $(a+1)^2=2^2\times3^2\times5\times(b+c)$.

故 $5(b+c)$ 应为完全平方数，且为偶数.

要使 a 为最小值，必有 $5(b+c)=5^2\times2^2$. 因此 $(a+1)^2=2^4\times3^2\times5^2$，即 $a+1$ 的最小值为 60，从而 a 的最小值为 59.

(2) 当 $a=59$ 时，$b+c=20$. 应取 $b=3,c=17$，原方程为 $20x^2+60\sqrt{5}x+225=0$，解得 $x=-\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$.

【例 1-8】 已知 a,b,c 为正数，且方程 $c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2=0$ 没有实数根. 求证：长分别为 a,b,c 的三条线段可组成一个三角形.

证明　依题设，$\Delta<0$，即

$$\begin{aligned}(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2&=(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)\\&=[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]\\&=(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)<0.\qquad①\end{aligned}$$

不妨设 $a\geqslant b>0,a\geqslant c>0$，则 $a+c>b,a+b>c,a+b+c>0$，故由式①可得 $b+c>a$. 由此可见，长分别为 a,b,c 的三条线段满足任意两条线段之和大于第三条线段，它们可以组成一个三角形.

同步训练

A 组

1. 已知 a,b,c 是不全为0的三个实数,那么关于 x 的方程 $x^2+(a+b+c)x+(a^2+b^2+c^2)=0$ 的根的情况是(　　).

A. 有两个负根　　B. 有两个正根

C. 有两个异号的实根　　D. 无实根

2. 关于 x 的两个方程 $x^2+4mx+4m^2+2m+3=0$, $x^2+(2m+1)x+m^2=0$ 中至少有一个方程有实根,则 m 的取值范围是(　　).

A. $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{4}$　　B. $m\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $m\geqslant-\frac{1}{4}$

C. $-\frac{1}{4}<m<\frac{1}{2}$　　D. $m\leqslant-\frac{3}{2}$ 或 $m\geqslant\frac{1}{2}$

3. 若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根,则判别式 $\Delta=b^2-4ac$ 与平方式 $M=(2ax_0+b)^2$ 的大小关系是(　　).

A. $\Delta>M$　　B. $\Delta=M$　　C. $\Delta<M$　　D. 不能确定

4. 已知方程 $x^2+bx+1=0$ 与方程 $x^2-x-b=0$ 只有一个公共实根,则 b 的值为________.

5. 已知实数 a,b 满足 $a^2+ab+b^2=1$,且 $t=ab-a^2-b^2$,那么 t 的取值范围是________.

6. 设正整数 a,b,c,d 满足下列条件:$a+b=71$, $cd=1155$, $ab+c+d=1660$,试求 $|a-b|$ 的值.

7. 已知二次方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+cx+d=0$ 有一个公共根1,求证:二次方程 $x^2+\frac{a+c}{2}x+\frac{b+d}{2}=0$ 也有一个根为1.

8. 若 m,n 为有理数,$\sqrt{n}$ 是无理数,$m+\sqrt{n}$ 是有理系数方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个根.证明:$m-\sqrt{n}$ 也是这个方程的一个根.

B 组

9. 若方程 $x^2+ax+b=0$ 和 $x^2+bx+a=0$ 只有一个公共根,则(　　).

A. $a=b$　　B. $a+b=0$　　C. $a+b=1$　　D. $a+b=-1$

10. 已知 b^2-4ac 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 的一个实数根,则 ab 的取值范围为(　　).

A. $ab\geqslant\frac{1}{8}$　　B. $ab\leqslant\frac{1}{8}$　　C. $ab\geqslant\frac{1}{4}$　　D. $ab\leqslant\frac{1}{4}$

11. 已知 m,n 为整数,方程 $x^2+(n-2)\sqrt{n-1}x+m+18=0$ 有两个不相等的实数根,方程 $x^2-(n-6)\sqrt{n-1}x+m-37=0$ 有两个相等的实数根.求 n 的最小值,并说明理由.

12. 已知关于 x 的方程 $x^2-(3k+1)x+2k^2+2k=0$,

(1) 求证:无论 k 取何实数值,方程总有实数根;

第 2 讲　韦达定理

> 没有不能解决的问题.
>
> ——韦达

知识方法述要

1. 韦达定理及其逆定理

如果一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 x_1,x_2,那么

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

比较等式两边对应项的系数,得

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a},$$

这就是一元二次方程的根与系数的关系,也称为韦达定理. 韦达定理也可以运用求根公式推得.

韦达定理的逆定理:如果 x_1,x_2 满足 $x_1+x_2=-\frac{b}{a},x_1x_2=\frac{c}{a}$,那么 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根.

2. 韦达定理的应用

韦达定理的应用十分广泛:我们可以不解方程,就能判断一元二次方程实根的符号;可用已知方程及方程的一根求另一根;可以构造以某两个数为根的一元二次方程;可求与一元二次方程的根有关的某些代数式的值等. 其中不解方程求与两根有关的某些代数式的值常用到下面关系式:

$$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,$$

$$(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2,$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2},$$

$$\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1^2x_2^2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{(x_1x_2)^2},$$

$$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2].$$

要掌握将一个关于两根的对称式如 $x_1^n+x_2^n$ 转化为两个基本对称式 x_1+x_2 与 x_1x_2 的

方法.

在求关于两根的非对称式的值时，除了运用韦达定理，还可以运用根的定义.

3. 运用韦达定理解题

在运用韦达定理解题时，要注意运用判别式判断这个方程有没有实数根，必要时要将韦达定理与判别式综合运用.

例题精讲

【例 2-1】 已知关于 x 的二次方程 $2x^2+ax-2a+1=0$ 的两个实数根的平方和为 $\frac{29}{4}$，求 a 的值.

解 设方程的两实数根分别为 x_1，x_2. 根据韦达定理，得

$$x_1+x_2=-\frac{a}{2},\ x_1x_2=\frac{-2a+1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}x_1^2+x_2^2&=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\\&=\left(-\frac{a}{2}\right)^2-2\times\frac{-2a+1}{2}\\&=\frac{1}{4}(a^2+8a-4).\end{aligned}$$

依题设，得 $\frac{1}{4}(a^2+8a-4)=\frac{29}{4}$，解得 $a=-11$ 或 3.

注意到 x_1，x_2 为题设方程的两个实数根，故要满足 $\Delta\geqslant 0$. 但当 $a=-11$ 时，$\Delta=(-11)^2+16\times(-11)-8<0$；当 $a=3$ 时，$\Delta>0$. 故 $a=3$.

【例 2-2】 已知 α，β 是方程 $x^2-7x+8=0$ 的两根，且 $\alpha>\beta$. 不解方程，求 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2$ 的值.

分析 由韦达定理知 $\alpha+\beta=7$，$\alpha\beta=8$. 但 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2$ 是已知一元二次方程根的非对称式，很难变化成韦达定理的形式. 若由 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2$ 联想到构造对偶式 $\frac{2}{\beta}+3\alpha^2$，问题就能巧妙获解.

解 设 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2=A$，$\frac{2}{\beta}+3\alpha^2=B$，因为 α，β 是方程 $x^2-7x+8=0$ 的两根，且 $\alpha>\beta$，由韦达定理知 $\alpha+\beta=7$，$\alpha\beta=8$. 所以 $\beta-\alpha=-\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=-\sqrt{17}$.

$$A+B=\frac{2}{\alpha}+3\beta^2+\frac{2}{\beta}+3\alpha^2=\frac{2(\beta+\alpha)}{\alpha\beta}+3[(\beta+\alpha)^2-2\alpha\beta]=\frac{403}{4},\qquad ①$$

$$A-B=\frac{2}{\alpha}+3\beta^2-\frac{2}{\beta}-3\alpha^2=\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha\beta}+3(\beta+\alpha)(\beta-\alpha)=-\frac{85}{4}\sqrt{17},\qquad ②$$

①+②得 $2A=\frac{403}{4}-\frac{85}{4}\sqrt{17}$，所以 $A=\frac{403}{8}-\frac{85}{8}\sqrt{17}$.

故 $\frac{2}{\alpha}+3\beta^2=\frac{1}{8}(403-85\sqrt{17})$.

【例2-3】设实数 s,t 分别满足 $19s^2+99s+1=0$,$t^2+99t+19=0$,并且 $st\neq1$.求$\frac{st+4s+1}{t}$的值.

解 因为 $s\neq0$,所以第一个等式可以变形为

$$\left(\frac{1}{s}\right)^2+99\left(\frac{1}{s}\right)+19=0.$$

又因为 $st\neq1$,所以$\frac{1}{s}$,t 是一元二次方程 $x^2+99x+19=0$ 的两个不同的实根,于是,有$\frac{1}{s}+t=-99$,$\frac{1}{s}\cdot t=19$,即 $st+1=-99s$,$t=19s$.

所以$\frac{st+4s+1}{t}=\frac{-99s+4s}{19s}=-5$.

评注 也可以把$\frac{1}{t}$,s 作为一元二次方程 $x^2+99x+19=0$ 的两个不同的实根,解法同上.

【例2-4】设方程 $2002^2x^2-2003\times2001x-1=0$ 的较大根是 r,方程 $2001x^2-2002x+1=0$ 的较小根是 s,求 $r-s$ 的值.

解 因 $2002^2-2003\times2001-1=0$,故1是方程 $2002^2x^2-2003\times2001x-1=0$ 的根,由根与系数的关系知两根之积为负,所以1是方程 $2002^2x^2-2003\times2001x-1=0$ 的较大根,$r=1$.

因 $2001x^2-2002x+1=0$,故1也是方程 $2001x^2-2002x+1=0$ 的根,由根与系数的关系知两根之积为$\frac{1}{2001}$,所以$\frac{1}{2001}$是方程的较小根,即 $s=\frac{1}{2001}$.

故 $r-s=1-\frac{1}{2001}=\frac{2000}{2001}$.

【例2-5】已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 没有实数根.甲由于看错了二次项系数,误求得两根为2和4;乙由于看错了某项系数的符号,误求得两根为-1和4,求$\frac{2b+3c}{a}$的值.

解 甲看错了二次项系数,设他所解的方程为 $a'x^2+bx+c=0$,于是 $2+4=-\frac{b}{a'}$,$2\times4=\frac{c}{a'}$,故

$$-\frac{3}{4}=\frac{b}{c}. \qquad ①$$

设乙看错了一次项系数的符号,则他所解的方程为 $ax^2-bx+c=0$.于是

$$-1+4=\frac{b}{a}. \qquad ②$$

由①②知,$\Delta=b^2-4ac=b^2-4\cdot\frac{b}{3}\cdot\left(-\frac{4}{3}b\right)=\frac{25}{9}b^2\geqslant0$,与题设矛盾.故乙看错的只是常数项,即他所解的方程为 $ax^2+bx-c=0$,则

$$-1+4=-\frac{b}{a}. \qquad ③$$

由①③知，$\frac{2b+3c}{a}=\frac{2b-4b}{a}=-\frac{2b}{a}=6$.

【例 2-6】 已知实数 a,b,c 满足 $a+b+c=2$，$abc=4$.

(1) 求 a,b,c 中最大者的最小值；

(2) 求 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值.

解　(1) 不妨设 a 是 a,b,c 中的最大者，即 $a\geqslant b$，$a\geqslant c$. 由题设知 $a>0$，且 $b+c=2-a$，$bc=\frac{4}{a}$. 于是 b,c 是一元二次方程 $x^2-(2-a)x+\frac{4}{a}=0$ 的两实根，

$$\Delta=(2-a)^2-4\times\frac{4}{a}\geqslant 0,$$

即 $a^3-4a^2+4a-16\geqslant 0$，$(a^2+4)(a-4)\geqslant 0$. 所以 $a\geqslant 4$.

又当 $a=4$，$b=c=-1$ 时，满足题意. 故 a,b,c 中最大者的最小值为 4.

(2) 因为 $abc>0$，所以 a,b,c 均大于 0 或一正二负.

若 a,b,c 均大于 0，则由(1)知，a,b,c 中的最大者不小于 4，这与 $a+b+c=2$ 矛盾.

若 a,b,c 为一正二负，设 $a>0$，$b<0$，$c<0$，则

$$|a|+|b|+|c|=a-b-c=a-(2-a)=2a-2,$$

由(1)知 $a\geqslant 4$，故 $2a-2\geqslant 6$，当 $a=4$，$b=c=-1$ 时，满足题设条件且使得不等式等号成立. 故 $|a|+|b|+|c|$ 的最小值为 6.

【例 2-7】 已知 p,q,r 都是正整数，求证：关于 x 的三个方程 $x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$，$x^2-\sqrt{q}x+\frac{r}{8}=0$，$x^2-\sqrt{r}+\frac{p}{8}=0$ 中至少有一个方程有两个不等正实数根.

分析与解　先退一步，从反面考虑：假设三个方程都没有不等实数根，则

$$\begin{cases}\Delta_1=p-\frac{q}{2}\leqslant 0, & ①\\ \Delta_2=q-\frac{r}{2}\leqslant 0, & ②\\ \Delta_3=r-\frac{p}{2}\leqslant 0. & ③\end{cases}$$

三式相加，得 $\frac{1}{2}(p+q+r)\leqslant 0$，这与 p,q,r 为正整数矛盾. 故其中必有一个方程有不等实数根.

不妨设方程 $x^2-\sqrt{p}x+\frac{q}{8}=0$ 有两根为 x_1,x_2，根据韦达定理，有 $x_1x_2=\frac{q}{8}>0$，这表明 x_1,x_2 同号. 又 $x_1+x_2=\sqrt{p}>0$，所以 x_1,x_2 均大于 0.

综上所述，至少存在一个方程有两个不等正实数根.

评注 设方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两个根为 x_1,x_2,如果 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$,$x_1x_2=\frac{c}{a}>0$,那么方程有两正根.

【例 2-8】 已知$\frac{1}{4}(b-c)^2=(a-b)(c-a)$,求证:$b+c=2a$.

证明 若 $a-b=0$,则 $b-c=0$,此时 $a=b=c$,有 $b+c=2a$;

若 $a-b\neq 0$,构造一元二次方程

$$(a-b)x^2+(b-c)x+(c-a)=0, \qquad ①$$

则 $\Delta=(b-c)^2-4(a-b)(c-a)=4\left[\frac{1}{4}(b-c)^2-(a-b)(c-a)\right]=0$,故方程①有相等实数根,又将 $x=1$ 代入①的左边,有$(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$,故方程两根均为 1.根据韦达定理,有$\frac{c-a}{a-b}=1$,所以 $b+c=2a$.

同步训练

A 组

1. 设方程 $2x^2+ax-2=0$ 两根之差的绝对值为$\frac{5}{2}$,则 a 等于( ).

A. 3 B. -5 C. ± 3 D. ± 5

2. 若 m,n 是二次方程 $x^2+1994x+7=0$ 的两根,那么$(m^2+1993m+6)(n^2+1995n+8)$等于( ).

A. 2000 B. 1994 C. 1986 D. 7

3. 已知实数 $a\neq b$,且满足$(a+1)^2=3-3(a+1)$,$3(b+1)=3-(b+1)^2$,则$b\sqrt{\frac{b}{a}}+a\sqrt{\frac{a}{b}}$的值为( ).

A. 23 B. -23 C. -2 D. -13

4. 已知实数 x_1,x_2 满足 $x_1^2-6x_1+2=0$ 和 $x_2^2-6x_2+2=0$,则$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$的值为________.

5. 已知 $3m^2-2m-5=0$,$5n^2+2n-3=0$,其中 m,n 为实数,则$\left|m-\frac{1}{n}\right|=$________.

6. 已知 a,b,c 是实数,关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个非零实根 x_1,x_2,则以$\frac{1}{x_1^2}$,$\frac{1}{x_2^2}$为两个实根的一元二次方程是________.

7. 已知 a,b 分别满足$\frac{4}{a^4}-\frac{2}{a^2}-3=0$,$b^4+b^2-3=0$,求$\frac{a^4b^4+4}{a^4}$的值.

8. 当 $n=1,2,\cdots,2015$ 时,关于 x 的一元二次方程 $n(n+1)x^2-(2n+1)x+1=0$ 的根为 a_n,b_n,试求$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\cdots+|a_{2015}-b_{2015}|$的值.

B 组

9. 已知方程 $x^2+px+q=0$ 的两根之比为 $1:2$，判别式的值为 1，则 p,q 的值分别为（　　）.

A. $p=1,q=2$　　B. $p=3,q=2$

C. $p=\pm3,q=2$　　D. $p=3,q=\pm2$

10. 若实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，$abc=2$，$c>0$，则（　　）.

A. $ab<0$　　B. $|a|+|b|\geqslant2$

C. $|a|+|b|\geqslant4$　　D. $0<|a|+|b|\leqslant1$

11. 有三个整数 $x\leqslant y\leqslant z\leqslant8$，使得 $x+y+z=12$ 且 $xy+yz+zx=27$，则 xyz 的值是________.

12. 设方程 $x^2+px+q=0$ 的两根分别比方程 $x^2+2qx+\frac{1}{2}p=0$ 的两根大 1，且方程 $x^2+px+q=0$ 的两根之差与方程 $x^2+2qx+\frac{1}{2}p=0$ 的两根之差相等，求这两个方程的解.

13. 已知三个不同的实数 a,b,c 满足 $a-b+c=3$，方程 $x^2+ax+1=0$ 和 $x^2+bx+c=0$ 有一个相同的实根，方程 $x^2+x+a=0$ 和 $x^2+cx+b=0$ 也有一个相同的实根. 求 a,b,c 的值.

C 组

14. 已知方程 $x^2+a_1x+a_2a_3=0$ 与方程 $x^2+a_2x+a_1a_3=0$ 有且仅有一个公共根. 求证：这两个方程的另两个根（除公共根外）是方程 $x^2+a_3x+a_1a_2=0$ 的根.

15. 对于二次多项式 ax^2+bx+c，允许做下面的运算：(1) 把 a 和 c 对换；(2) 把 x 换成 $x+t$，其中 t 是任意实数. 重复做这样的运算，能把 x^2-x-2 变成 x^2-x-1 吗？

第 3 讲　可转化为一元二次方程的方程

> 解题，就是意味着把所要解决的问题转化为已经解过的问题.
>
> ——雅诺夫斯卡亚

知识方法述要

1. 解高次方程的基本思想

初中数学中的方程包括整式方程、分式方程和无理方程. 对于整式方程，特别是高次方程，基本解题思想是降次——将高次方程转化为低次方程.

2. 特殊方程转化为一元二次方程求解

某些含绝对值方程、分式方程、无理方程可转化为一元二次方程求解，在转化过程中，仔细观察分析方程的结构特征，从全局出发规划解题策略，灵活地变形，运用拆项分组、配方、换元、因式分解等手段，改变方程结构，变繁为易，实现转化，达到解题目的.

(1) 对于分式方程，常用的方法是去分母，将其转化为整式方程来解；

(2) 对于无理方程，常用的方法是去根号，将其转化为整式方程来解.

要注意运用代数式恒等变形的技巧来化简方程. 善于使用换元法，将方程中相同的部分看作一个整体，设为一个辅助未知数.

3. 在取值范围中求方程的根

分式方程和无理方程中各个分式、根式中的未知数都有各自的取值范围，这些取值的公共部分就是方程未知数允许的取值范围，只能在这个取值范围中求它的根. 但当分式方程、无理方程转化为整式方程后，就可能出现两种情形：

(1) 如果整式方程的根都在分式方程、无理方程的未知数取值范围内，那么整式方程的根都是分式方程、无理方程的根；

(2) 如果整式方程的根有的不在分式方程、无理方程的取值范围内，则这个根是增根. 因此在运算过程准确无误的情况下，分式方程、无理方程验根时，检验这个根是否超出了原方程未知数的取值范围即可.

例题精讲

【例 3-1】(1) 解关于 x 的方程：$x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$；

(2) 解关于 x 的方程：$x+\frac{1}{4x-6}=\frac{a^2+3a+1}{2a}$（$a$ 是常数，且 $a\neq0$）.

解　(1) 设 a 是给定的非零实数，原方程可以化成关于 x 的一元二次方程，因而至多有两个根. 显然 $a\neq1$ 时，$x_1=a$，$x_2=\frac{1}{a}$.

(2) 原方程可化为 $2x+\frac{1}{2x-3}=a+3+\frac{1}{a}$，即

$$2x-3+\frac{1}{2x-3}=a+\frac{1}{a},$$

所以 $2x-3=a$，或 $2x-3=\frac{1}{a}$，故 $x=\frac{a+3}{2}$ 或 $x=\frac{3a+1}{2a}$.

评注　在例 3-1 中，观察知 $x_1=a$ 是方程 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ 的根. 又方程 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$ 等价于

$$x^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)x+1=0,$$

由韦达定理知，$x_1x_2=1$，所以，方程的另一根为 $x_2=\frac{1}{a}$.

【例 3-2】 解关于 x 的方程：$\frac{x-a}{b}-\frac{b}{x-a}=\frac{a}{x-b}-\frac{x-b}{a}$，其中 $a+b\neq0$.

分析　如果不假思索，直接去分母将得到一个三次方程. 分析方程特点可发现：(1)不考虑符号，方程左边、右边的两项都互为倒数；(2)左边第一项与右边第二项形式相同，左边第二项与右边第一项形式相同. 据此两特点，可得出简便解法.

解法 1　将原方程变形为

$$\frac{x-a}{b}+\frac{x-b}{a}=\frac{a}{x-b}+\frac{b}{x-a},$$

$$\frac{ax-a^2+bx-b^2}{ab}=\frac{ax-a^2+bx-b^2}{(x-b)(x-a)},$$

则 $ax-a^2+bx-b^2=0$ 或 $(x-b)(x-a)=ab$.

当 $ax-a^2+bx-b^2=0$ 时，$x_1=\frac{a^2+b^2}{a+b}$；

当 $(x-b)(x-a)=ab$ 时，$x^2-(a+b)x=0$，解得 $x_2=0$，$x_3=a+b$.

故原方程的解为 $x_1=\frac{a^2+b^2}{a+b}$，$x_2=0$，$x_3=a+b$.

解法 2　令 $u=\frac{x-a}{b}$，$v=\frac{a}{x-b}$，原方程化为 $u-\frac{1}{u}=v-\frac{1}{v}$，即

$$(u-v)\left(1+\frac{1}{uv}\right)=0,$$

所以 $u=v$ 或 $uv=-1$.

当 $u=v$ 时,$\frac{x-a}{b}=\frac{a}{x-b}$,即$(x-a)(x-b)=ab$,$x^2-(a+b)x=0$,于是 $x=0$ 或 $x=a+b$.

当 $uv=-1$ 时,$\frac{(x-a)a}{b(x-b)}=-1$,即 $ax-a^2+bx-b^2=0$,$(a+b)x=a^2+b^2$,得 $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

故原方程的根为 $x=0$,或 $x=a+b$,或 $x=\frac{a^2+b^2}{a+b}$.

评注 (1) 解分式方程切忌盲目运算,应该仔细观察方程的特点适当变形后运算;

(2) 记含有 x 的多项式为 $f(x)$,$g(x)$,则方程$\frac{f(x)}{g_1(x)}=\frac{f(x)}{g_2(x)}$等价于 $f(x)=0$ 或 $g_1(x)=g_2(x)\neq 0$,解答过程中很容易遗漏 $f(x)=0$ 的情形.

【例 3-3】解方程:$\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}$.

解 原方程可化为

$$\frac{(x+1)-2}{x+1}+\frac{(x+4)-8}{x+4}=\frac{(x+2)-4}{x+2}+\frac{(x+3)-6}{x+3},$$

即

$$1-\frac{2}{x+1}+1-\frac{8}{x+4}=1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3},$$

$$\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1}=\frac{4}{x+4}-\frac{3}{x+3},$$

故$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{x}{x^2+7x+12}$.

所以 $x=0$ 或 $x^2+3x+2=x^2+7x+12$,解得 $x_1=0$,$x_2=-\frac{5}{2}$.

经检验,$x_1=0$,$x_2=-\frac{5}{2}$均为原方程的根.

评注 (1) 例 3-3 没有直接去分母,而是通过先分离出整式部分的办法使分式中的分子降次,使原方程得到简化.

(2) 通过合理移项,使通分后方程两边的分子相同,直接提取公因式,使方程剩余部分更为简单易解是例 3-3 解题的一项策略.

【例 3-4】解方程:$(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

解 原方程可化为

$$(6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72. \quad ①$$

设 $y=6x+7$,代入方程①,得

$$y^2(y+1)(y-1)=72,$$

所以 $y^4-y^2-72=0$,即$(y^2+8)(y^2-9)=0$.

因为 $y^2+8\neq 0$,所以 $y^2-9=0$,即 $y_1=3$,$y_2=-3$.

由 $6x+7=3$ 得 $x_1=-\frac{2}{3}$;由 $6x+7=-3$ 得 $x_2=-\frac{5}{3}$.

【例 3-5】 解方程：$\dfrac{1}{x^2+11x-8}+\dfrac{1}{x^2+2x-8}+\dfrac{1}{x^2-13x-8}=0$.

分析　若考虑去分母，运算量过大；由于分母不能全部化为一次因式之积，分拆也受阻. 注意到各分母都是二次三项式，可考虑整体换元.

解　令 $x^2+2x-8=y$，原方程可化为 $\dfrac{1}{y+9x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y-15x}=0$，即

$$\frac{1}{y+9x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15x-y}.$$

解这个关于 y 的分式方程，得 $y=9x$ 或 $y=-5x$.

故当 $y=9x$ 时，$x^2+2x-8=9x$，解得 $x_1=8$ 或 $x_2=-1$.

当 $y=-5x$ 时，$x^2+2x-8=-5x$，解得 $x_3=8$ 或 $x_4=1$.

经检验，上述 4 个解均为原方程的解.

评注　当分式方程的结构较复杂且有相同或相近部分时，将相同部分整体代换常可以使方程形式大大简化，运算量大大降低.

【例 3-6】 解方程：$x^4+(x-4)^4=626$.

分析与解　直接展开求解难以进行，进行平均值代换：$y=\dfrac{x+(x-4)}{2}=x-2$，原方程可化为$(y+2)^4+(y-2)^4=626$，再展开，正负相消，有 $y^4+24y^2-297=0$，即$(y^2+33)(y^2-9)=0$.

因 $y^2+33>0$，故 $y^2-9=0$，有 $y=\pm3$，于是 $x_1=5$，$x_2=-1$.

评注　深入观察，可发现原方程即 $x^4+(x-4)^4=5^4+1^4$，不难看出 $x=5$，-1 是方程的根，且是仅有的两个根.

【例 3-7】 解方程：$2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$.

解　显然 $x=0$ 不是原方程的根，因此，可将原方程两边同除以 x^2，得

$$2x^2-9x+14-9\times\frac{1}{x}+2\times\frac{1}{x^2}=0,$$

即

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0. \qquad ①$$

令 $y=x+\dfrac{1}{x}$，则 $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=y^2-2$，故式①可化为

$$2y^2-9y+10=0,$$

解得 $y_1=2$，$y_2=\dfrac{5}{2}$.

当 $y_1=2$ 时，$x+\dfrac{1}{x}=2$，解得 $x_1=x_2=1$；

当 $y_2=\dfrac{5}{2}$时，$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$，解得 $x_3=\dfrac{1}{2}$，$x_4=2$.

综上所述，原方程的根为$\dfrac{1}{2}$，1，2.

评注 一个整式方程,按照未知数降幂排列后,若与首尾两项等距的两项的系数相等,或互为相反数,则这样的方程称作倒数方程.这里所说的首项是指方程的最高次项,尾项是指方程的常数项(缺项要空位).若项数为奇数,中间一项看作是与首尾等距的两项.例 3-7 给出了解倒数方程的一种重要方法.

【例 3-8】 解方程:$5x^2+x-x\cdot\sqrt{5x^2-1}-2=0$.

解 原方程可化为$(5x^2-1)-x\cdot\sqrt{5x^2-1}+(x-1)=0$,

因式分解得$(\sqrt{5x^2-1}-x+1)(\sqrt{5x^2-1}-1)=0$.

由$\sqrt{5x^2-1}-x+1=0$,解得 $x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_2=-1$;

由$\sqrt{5x^2-1}-1=0$,解得 $x_3=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$,$x_4=-\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

经检验,$x=\pm\dfrac{\sqrt{10}}{5}$是原方程的根.

【例 3-9】 设 x 满足$\sqrt[n]{\dfrac{x}{16-x}}+\sqrt[n]{\dfrac{16-x}{x}}=2$($n$ 为正整数),则 $x=$________.

分析 注意$\sqrt[n]{\dfrac{x}{16-x}}$与$\sqrt[n]{\dfrac{16-x}{x}}$互为倒数,积为 1,因而这两式和与两式积分别为 2,1.可考虑用韦达定理转化为一元二次方程的问题来解决.

【答案】 8.

解 设$\sqrt[n]{\dfrac{x}{16-x}}=p$,$\sqrt[n]{\dfrac{16-x}{x}}=q$,则

$$\begin{cases}p+q=2,\\p\cdot q=1.\end{cases}$$

所以 p,q 可看作一元二次方程 $z^2-2z+1=0$ 的两根,所以 $p=q=1$.

所以$\sqrt[n]{\dfrac{x}{16-x}}=1$,即$\dfrac{x}{16-x}=1$,所以 $x=8$.

评注 当条件中有两式和与两式积的值时,往往可利用韦达定理将问题转化成求解一元二次方程的问题.当两式互为倒数时,已知条件则以两式和的形式出现.

同步训练

A 组

1. 方程$|x|-\dfrac{4}{x}=\dfrac{3|x|}{x}$的实根的个数为(　　).

A. 1　　　B. 2　　　C. 3　　　D. 4

2. 方程 $x^2+3x-\dfrac{3}{x^2+3x-7}=9$ 的所有实数根之积为(　　).

A. 60　　B. -60　　C. 10　　D. -10

3. 方程$|x^2-1|=(4-2\sqrt{3})(x+2)$的解的个数为(　　).

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

4. 方程 $x=(x^2-2)^2-2$ 的解是________.

5. 方程$\dfrac{1}{x^2-2x+6}+\dfrac{1}{x^2-11x+6}+\dfrac{1}{x^2+13x+6}=0$ 的解是________.

6. 无理方程 $2x^2-15x-\sqrt{2x^2-15x+1998}=-18$ 的解是________.

7. 解方程:$(x+2)(x+3)(x+6)(x+9)=3x^2$.

8. 解方程:$2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$.

B 组

9. 关于 x 的方程$\left|\dfrac{x^2}{x-1}\right|=a$ 仅有两个不同的实根,则实数 a 的取值范围是________.

10. 若$\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}-\dfrac{1}{p+q}=0$,则$\dfrac{q}{p}+\dfrac{p}{q}=$________.

11. 方程$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=x-1$ 的解是________.

12. 方程$(1+x^2)^2=4x(1-x^2)$的解是________.

13. 解方程:$5\sqrt{x}+5\sqrt{2x+3}+2\sqrt{2x^2+3x}=11-3x$.

C 组

14. 解方程:$\sqrt{\dfrac{a-x}{b+x}}+\sqrt{\dfrac{b+x}{a-x}}=2(a>b>0)$.

15. 解方程:$\dfrac{13x-x^2}{x+1}\left(x+\dfrac{13-x}{x+1}\right)=42$.

第4讲　一元二次方程的整数根

精巧的论证常常不是一蹴而就的，而是人们长期切磋积累的成果．我也是慢慢学来的，而且还要继续不断地学习．

——阿贝尔

知识方法述要

整数根的问题是有关整系数一元二次方程的一个重点，常需要多角度、全面地思考问题，灵活地运用方程的判别式、韦达定理以及整数的性质．

1．含参数的一元二次方程解法

当含有某个参数 k 的一元二次方程的左边比较容易分解成两个一次因式的积时，我们可以先利用因式分解直接求方程的解，通常它们是关于 k 的分式形式的解，然后利用其根是整数的要求来解方程．此时因参数 k 的条件不同，常有两种处理方法．其一是 k 为整数，这时只需注意分式形式的解中，分子是分母的倍数即可；其二是 k 为实数，此时应该消去参数 k，得到关于两根的方程，再解此方程即可．

2．用判别式解一元二次方程

对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$，当 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$ 时，有实数根 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$，所以要使整系数的一元二次方程方程有整数根，必须 $\Delta=b^2-4ac$ 为完全平方数，并且 $-b\pm\sqrt{\Delta}$ 为 $2a$ 的整数倍．故处理此类问题，常可用判别式来解决．又可细分为两类：

（1）先求参数范围．可利用题设参数的范围，直接求解；也可由不等式 $\Delta\geqslant 0$ 求出参数的范围，再求解．

（2）可以再设参数，即设 $\Delta=k^2$（k 是整数）．当 $\Delta=k^2$ 为关于原参数的一次式时，用代入法来解；当 $\Delta=k^2$ 为关于原参数的二次式时，用分解因式法来解或转化成关于参数的二次方程再次利用判别式求解．

对有理系数的二次方程有有理根的问题，上述解法也是适用的．

3．使用韦达定理解一元二次方程

韦达定理，即根与系数的关系是一元二次方程的重要性质，我们也常用它来处理含参数的一元二次方程的整数根的问题，常用的方法有：

(1) 从根与系数的关系式中消去参数,得到关于两根的不定方程.

(2) 利用"当两根为整数时,其和、积必为整数"来解.

4. 变更主元法

在含有参数的一元二次方程中,参数和未知数都是用字母表示的,通常将未知数看作主元,必要时也可"反客为主",反过来将参数看作主元,即将方程看成以参数为未知数的方程,这种方法就是变更主元法.

(1) 当方程中参数的次数为一次时,可将参数直接用未知数表示出来,再利用已知参数的范围或性质来求解.

(2) 当方程中参数的次数为二次时,可考虑以参数为主元构造一个二次方程,再运用前述方法(如利用判别式,韦达定理)来处理.

例题精讲

【例 4-1】 若关于 x 的方程 $2x^2-kx-1=0$ 有整数根,求整数 k.

解　设方程 $2x^2-kx-1=0$ 的整数根为 α_0,则 $2\alpha_0^2-k\alpha_0-1=0$,即 $\alpha_0(2\alpha_0-k)=1$. 因为 α_0,$2\alpha_0-k$ 均为整数,故 α_0 能整除 1,故 $\alpha_0=\pm1$.

当 $\alpha_0=1$ 时,$2-k-1=0$,则 $k=1$;

当 $\alpha_0=-1$ 时,$2+k-1=0$,则 $k=-1$.

综上所述,$k=\pm1$.

评注　若整系数方程 $ax^2+bx+c=0$ 有整数根 α,则 $\alpha\mid c$.

【例 4-2】 k 为什么整数时,关于 x 的方程 $(6-k)(9-k)x^2-(117-15k)x+54=0$ 的解都是整数?

分析　此方程的系数均为整数,而且方程的左边可以直接分解成两个整系数的一次因式,故可考虑直接求根来解答此题. 另外此题的条件中并未说明方程是一元二次方程,故还应考虑二次项系数为 0,原方程是一次方程的情况.

解　若 $k=6$,则 $x=-2$;若 $k=9$,则 $x=3$;若 $k\neq6$ 且 $k\neq9$,则原方程可化为 $[(k-6)x-9][(k-9)x-6]=0$,故方程的两个根为 $x_1=\dfrac{9}{k-6}$,$x_2=\dfrac{6}{k-9}$.

为使 x_1 和 x_2 都是整数,则应有 $k-6=\pm1,\pm3,\pm9$,$k=-3,3,5,7,9,15$;还应有 $k-9=\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$,$k=3,6,7,8,10,11,12,15$. 所以 $k=3,7,15$ 时,x_1 和 x_2 都是整数.

综上所述,当 k 值为 3,6,7,9,15 时,方程的解都是整数.

【例 4-3】 设关于 x 的一元二次方程 $(k^2-6k+8)x^2+(2k^2-6k-4)x+k^2=4$ 的两根都是整数. 求满足条件的所有实数 k 的值.

分析　此题的条件指出了方程是一元二次方程,就不必考虑二次项系数为 0 的情况. 这个一元二次方程也可以直接求出两个根,但是它的条件与例 4-2 不同,例 4-2 中的参数 k 是整数,而本题中的参数 k 是实数. 因此求得两根后不能像例 4-2 那样讨论,因为使 x_1(或 x_2)为整数的实数 k 有无穷多个,所以要先消去 k,得到关于 x_1,x_2 的不定方程,先求出这个不定方程

的整数解,然后再反过来求 k 的值.

解 将原方程变形得 $(k-2)(k-4)x^2+(2k^2-6k-4)x+(k-2)(k+2)=0$.

分解因式得 $[(k-2)x+k+2][(k-4)x+k-2]=0$.

显然,$k\neq 2$,$k\neq 4$,解得 $x_1=-\frac{k-2}{k-4}=-1-\frac{2}{k-4}$,$x_2=-\frac{k+2}{k-2}=-1-\frac{4}{k-2}$.

于是有 $k-4=-\frac{2}{x_1+1}$,$k-2=-\frac{4}{x_2+1}$$(x_1\neq -1, x_2\neq -1)$.

两式相减消去 k,整理得 $x_1x_2+3x_1+2=0$,即 $x_1(x_2+3)=-2$.

于是有 $\begin{cases}x_1=-2,\\ x_2+3=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=2,\\ x_2+3=-1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=1,\\ x_2+3=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-1,\\ x_2+3=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x_1=-2,\\ x_2=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=-4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=1,\\ x_2=-5,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_1=-1,\\ x_2=-1.\end{cases}$(舍去)

因为 $k-4=-\frac{2}{x_1+1}$,当 $x_1=-2$ 时,$k=6$;当 $x_1=2$ 时,$k=\frac{10}{3}$;当 $x_1=1$ 时,$k=3$.

经检验,$k=6,3,\frac{10}{3}$ 都满足题意.

【例 4-4】 求当 m 为何整数时,关于 x 的一元二次方程 $mx^2-6x+9=0$ 与 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根都是整数.

分析 从此题的两个方程无法得到用有理式形式表示的两个根,但方程有整数根的前提是有实数根,我们可以先求出两个方程有实数根的条件,从而求出参数 m 的取值范围;再由 m 是整数的条件,确定其值;不过,最后还得代入验证此时方程的根是否都是整数.

解 依题意,有 $\begin{cases}m\neq 0,\\ (-6)^2-36m\geqslant 0,\\ (-4m)^2-4(4\,\mathrm{m}^2-4m-5)\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $-\frac{5}{4}\leqslant m\leqslant 1$,且 $m\neq 0$.又 m 为整数,故 $m=\pm 1$.

当 $m=1$ 时,方程 $mx^2-6x+9=0$ 的两个根均为 1,方程 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的两个根为 -1 和 5,符合要求.

当 $m=-1$ 时,方程 $mx^2-6x+9=0$ 的两个根均不是整数,不符合要求.

所以仅当 $m=1$ 时,方程的两根都是整数.

评注 利用判别式解含有参数的一元二次方程的整数根的方法如下:当通过方程有实数根,判别式不小于 0 而求得参数的取值范围,其中整数个数是有限个时,可对这些整数一一讨论,从而求出其解.

【例 4-5】 若关于 x 的方程 $ax^2+2(a-3)x+(a-2)=0$ 至少有一个整数根,且 a 为整数,求 a.

分析 此题和例 4-4 的不同之处在于:若利用判别式求出参数 a 的取值范围,计算后会发现,满足此范围的整数 a 有无穷多个,无法一一验证.注意到要使整系数的一元二次方程有

整数根,则其判别式必须为完全平方数.本题的判别式是关于参数 a 的一次式,一般可以设其为 t^2(t 为非负整数),再将方程的根用 t 表示出来,从而求得其整数解.

解　当 $a=0$ 时,方程为 $-6x-2=0$,无整数解.

当 $a\neq0$ 时,方程为一元二次方程,要使方程至少有一个整数根,则其判别式必须为完全平方数.

因为 $\Delta=4(a-3)^2-4a(a-2)=4(9-4a)$,所以 $9-4a$ 为完全平方数.

设 $9-4a=t^2$(t 为正奇数,且 $t\neq3$),则 $a=\dfrac{9-t^2}{4}$.此时,方程的两个根为

$$x_{1,2}=\frac{-2a+6\pm2t}{2a}=-1+\frac{3\pm t}{a}=-1+\frac{3\pm t}{\frac{9-t^2}{4}}=-1+\frac{4(3\pm t)}{9-t^2},$$

即 $x_1=-1+\dfrac{4}{3+t}$,$x_2=-1+\dfrac{4}{3-t}$.

要使 x_1 为整数,而 t 为正奇数,只能 $t=1$,此时 $a=2$;

要使 x_2 为整数,t 只能为 1,5,7,此时 $a=2,-4,-10$.

综上所述,a 的值为 $2,-4,-10$.

【例 4-6】已知关于 x 的方程 $x^2-6x-4n^2-32n=0$ 的根都是整数,求整数 n 的值.

分析1　此题与例 4-5 的差别在于其判别式不是关于参数的一次式,而是二次式,因此不能用代入法.此类问题一般采用因式分解的方法求解.

解法 1　因二次方程的根都是整数,故 $\Delta=4n^2+32n+9$ 应为完全平方数.

设 $4n^2+32n+9=k^2$($k>0$,k 为整数),即 $(2n+8)^2-k^2=55$,所以 $(2n+8+k)(2n+8-k)=55$.

因 $2n+8+k>2n+8-k$,故可得如下 4 个方程组

$$\begin{cases}2n+8+k=55,\\2n+8-k=1,\end{cases}\begin{cases}2n+8+k=11,\\2n+8-k=5,\end{cases}\begin{cases}2n+8+k=-1,\\2n+8-k=-55,\end{cases}\begin{cases}2n+8+k=-5,\\2n+8-k=-11.\end{cases}$$

分别解得 $n=10,n=0,n=-18,n=-8$.

分析2　因 $\Delta=4n^2+32n+9=k^2$ 又可以看作关于 n 的一元二次方程,故本题也可以再用判别式来求解.

解法 2　因二次方程的根都是整数,故 $\Delta_1=4n^2+32n+9$ 应为完全平方数.

设 $4n^2+32n+9=k^2$($k>0$,k 为整数),即 $4n^2+32n+9-k^2=0$.将其看作关于 n 的一元二次方程,其判别式也应为完全平方数,即 $\Delta_2=32^2-4\times4\times(9-k^2)=16(k^2+55)$ 为完全平方数.

设 $k^2+55=t^2$($t>0$,t 为整数),即 $(t+k)(t-k)=55$.

因 $t+k>t-k$,故可得如下 4 个方程组

$$\begin{cases}t+k=55,\\t-k=1,\end{cases}\begin{cases}t+k=11,\\t-k=5,\end{cases}\begin{cases}t+k=-1,\\t-k=-55,\end{cases}\begin{cases}t+k=-5,\\t-k=-11.\end{cases}$$

分别解得 $k=27,3,-27$ 或 -3,于是 $4n^2+32n+9=27^2$ 或 $4n^2+32n+9=3^3$,分别解得 $n=10,n=-18,n=-8,n=0$.所以整数 n 的值为 $-18,-8,0,10$.

【例 4-7】求使关于 x 的方程 $x^2-pqx+p+q=0$ 有整数根的所有正整数 p 和 q.

解 设原方程两根为 x_1,x_2,则

$$x_1x_2=p+q, \quad ①$$

$$x_1+x_2=pq. \quad ②$$

因此,这两根之和与两根之积均为正整数.若 x_1 是整数,由②知 x_2 也是整数,由①知两个根均为正整数.

①-②得 $x_1x_2-(x_1+x_2)=p+q-pq$,即 $(x_1-1)(x_2-1)=(p-1)(q-1)=2$.

将2表示为两个非负整数之和,只有三种情况:$0+2$;$1+1$;$2+0$.

若 $(p-1)(q-1)=2$,则 $p=3,q=2$ 或 $p=2,q=3$;

若 $(p-1)(q-1)=1$,则 $p=q=2$;

若 $(p-1)(q-1)=0$,则 $p=1,q=5$,或 $p=5,q=1$.

评注 虽然都是用根与系数的关系解题,例4-7和例4-6在解法上又有一些差别.这里用到了整数根和参数间的和、差、积都是整数的性质.

【例4-8】试求所有这样的正整数 a,使关于 x 的方程 $ax^2+2(2a-1)x+4(a-3)=0$ 至少有一个整数解.

分析 直接利用判别式不能求出解的范围,由于两个根不一定都是整数,利用韦达定理也不方便,这时我们可以考虑变更主元.在本题中参数 a 的次数为一次,所以可以考虑将 a 用 x 表示出来,然后利用 a 是正整数的性质求出 x 的范围,再求解.

解 原方程可化为 $a(x+2)^2=2(x+6)$,显然 $x\neq-2$,所以

$$a=\frac{2(x+6)}{(x+2)^2}. \quad ①$$

又 a 是正整数,则 $\frac{2(x+6)}{(x+2)^2}\geqslant1$,解得 $-4\leqslant x\leqslant2$ 且 $x\neq-2$.

故 $x=-4,-3,-1,0,1,2$.分别代入式①得 $a=1,6,10,3,\frac{14}{9},1$.

因为 a 为正整数,所以 a 的值可为 $1,3,6,10$.

【例4-9】当 m 是什么整数时,关于 x 的方程 $x^2-(m-1)x+m+1=0$ 的两根都是整数?

解法1 原方程可化为 $(x-1)m=x^2+x+1$.显然 $x=1$ 不是原方程的解,即 $x\neq1$,所以 $m=\frac{x^2+x+1}{x-1}$,即 $m=x+2+\frac{3}{x-1}$.

因为 m 是整数,所以整数 $x-1$ 只能取 $\pm1,\pm3$,即 $x=2,0,4,2$.相应地,$m=7$ 或 $m=-1$.

所以当 $m=7$ 或 $m=-1$ 时,方程的两根都是整数.

评注 例4-9与例4-8相同的是参数都是一次式,不同的是 m 的范围不是已知的,不宜借用不等式的方法求解.又将参数 m 用 x 表示后的分式中,分母比分子的次数高,于是可以采用分离整式的方法求整数解.

解法2 设方程的两整数根分别为 α,β,由韦达定理得

$$\alpha+\beta=m-1, \quad ①$$

$$\alpha\beta=m+1. \quad ②$$

②－①得 $\alpha\beta-\alpha-\beta=2$，即有 $\alpha\beta-\alpha-\beta+1=3$.

所以 $(\alpha-1)(\beta-1)=3$，$\alpha-1=\dfrac{3}{\beta-1}$.

所以 $\beta-1=\pm1,\pm3$，则 $\beta=2,0,4,-2$，并相应得到 $\alpha=4,-2,2,0$，于是可得 $\alpha\beta=8$ 或 0，分别代入式②得 $m=-7$ 或 $m=-1$.

同步训练

A 组

1．已知关于 x 的方程 $(m^2-1)x^2-6(3m-1)x+72=0$ 有两个不相等的正整数根，那么 $m=$________.

2．已知关于 x 的方程 $(4-k)(8-k)x^2-(80-12k)x+32=0$ 的解都是整数，那么整数 k 的值是________.

3．已知方程 $x^2-1999x+a=0$ 有两个质数根，则常数 $a=$________.

4．已知关于 x 的方程 $3x^2+px-18=0$ 至少有一个整数根，则整数 p 的值是________.

5．已知方程 $x^2+px+q=0$ 有两个正整数解. 若 $p+q=16$，则 q 的值是________.

6．设 m 为整数，且 $4<m<40$，又关于 x 的方程 $x^2-2(2m-3)x+4m^2-14m+8=0$ 有两个整数根. 求 m 的值及方程的根.

7．已知关于 x 的一元二次方程 $(6-k)(9-k)x^2-(117-15k)x+54=0$ 的两个根都是整数，求所有满足条件的实数 k 的值.

8．关于 x 的方程 $ax^2+(a-5)x+2a+1=0$ 至少有一个整数根，求正整数 a 的所有值.

B 组

9．不解方程，证明方程 $x^2-2001x+2001=0$ 无整数根.

10．求所有正实数 a，使得关于 x 的方程 $x^2-ax+4a=0$ 仅有整数根.

11．当 m 为整数时，关于 x 的方程 $(2m-1)x^2-(2m+1)x+1=0$ 是否有有理数根？如果有，求出 m 的值；如果没有，请说明理由.

12．已知 p,q 都是质数，且使得关于 x 的一元二次方程 $x^2-(8p-10q)x+5pq=0$ 至少有一个正整数根，求所有的质数对 (p,q).

13．设关于 x 的方程 $a^2x^2+ax+1-7a^2=0$ 的两根都是整数，求所有的正数 a.

C 组

14．已知关于 x 的方程

$$4x^2-8nx-3n=2, \tag{①}$$

$$x^2-(n+3)x-2n^2+2=0, \tag{②}$$

问：是否存在这样的 n 值，使第一个方程的两个实数根的差的平方等于第二个方程的一个整数根？若存在，求出这样的 n 值；若不存在，请说明理由.

15．求使关于 x 的方程 $(a+1)x^2-(a^2+1)x+2a^3-6=0$ 有整数根的所有整数 a.