高中数学精讲

（必修一）

主编　朱华伟

编者　曾劲松　张文涛　黄文辉

清華大学出版社

北　京

内 容 简 介

本书以最新的《高中数学课程标准》精神为指导，以学生数学认知能力为基础，以提升学生核心素养为宗旨，对标新高考，注重提升学生数学学习的质量，充分将新课标、新教材和新高考理念融入其中.

本书每章包括开头导言、内容提要、释疑解惑、精讲精练和参考答案五部分.开头导言，简明扼要地介绍该章的内容、方法和意义，并给出知识结构框图；内容提要，梳理基本概念、公式、定理，突出重点、难点和数学思想方法技巧；释疑解惑，解释学生学习过程中经常遇到的疑难问题，主要包括对概念、性质的解析，公式的理解和应用，定理的条件分析和使用，方法技巧的归纳总结，似是而非的论断的辨析等；精讲精练，精选具有典型性、新颖性、启迪性的例题，通过分析、求解和点评，介绍解题方法与技巧，并有针对性地配制相关性、发展性的练习；参考答案，给出所有练习题的详细解答，帮助读者自学以及自我评价. 此外，本书配套有《高中数学一课一练(必修一)》(ISBN：9787302640493)，以强化巩固所学知识.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生的学生学习使用，也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

高中数学精讲. 必修一 / 朱华伟主编；曾劲松，张文涛，黄文辉编者. —北京：清华大学出版社，2023.8

ISBN 978-7-302-64047-9

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ① 朱… ② 曾… ③ 张… ④ 黄… Ⅲ. ① 中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ① G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 126064 号

责任编辑：王 定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：马遥遥
责任印制：沈 露

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-83470000 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：小森印刷霸州有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：15.75 **字 数**：353 千字
版 次：2023 年 9 月第 1 版 **印 次**：2023 年 9 月第 1 次印刷
定 价：69.80 元

产品编号：102849-01

前　　言

课程是学校教育的载体，办好一所学校的落脚点在提升教育质量，提升教育质量的关键点在课程. 我国实行的是国家、地方、学校三级课程管理制度，因此学校就有了一定的课程开发自主权，即校本课程. 近年来，深圳中学竭尽所能创新开发、打磨完善了一系列高水平的校本课程，目前校本课程已开设有 360 余门，内容丰富、涵盖面广. 同时，我一直鼓励并支持参与校本课程开发的教师，在经验成熟的基础上将教学实践成果化——编写校本教材.

校本课程基于学生差异因材施教，是适合本校学生的课程. 20 世纪 90 年代，中国人民大学附属中学、上海中学、华东师范大学二附中、武钢三中、黄冈中学等著名中学为学生开发和编写了具有相当难度和广度的数学学习资料，带动其在高考、竞赛等方面声名鹊起. 近年来，深圳中学一直在学习、借鉴、吸取国内外著名中学课程建设的宝贵经验. 在深圳中学，我一直倡导在国家数学课程的基础上，学生要学多点、学深点、学难点，要有更多、更好的适合深圳中学学生水平的数学校本课程，给每一位学生提供可充分发展的课程，科学合理地发展学生的智力. 目前，深圳中学开设了数学分析、微积分、线性代数、解析几何与群论初步、射影几何、统计学、初等数论、离散数学、算法导论、博弈论、数理经济学原理、逻辑导论、AP 微积分、AP 统计学等大学先修课程，以及数学文化与数学史、数学思想方法、数学建模、数学问题选讲、数学竞赛、欧氏几何、强基计划数学等选修课；出版了《数学培优竞赛讲座》《数学培优竞赛一讲一练》丛书（三、四、五、六、七、八、九、高一、高二、高三年级，共 20 册，清华大学出版社）.

我从 2003 年开始参加新课标湘教版高中数学教科书的研发工作，在这个过程中积极向张景中院士等前辈、老师学习，得到了很好的锻炼和提高，后来担任湘教版高中数学教科书的副主编，同时我个人也出版了一些高考备考、数学培优和数学竞赛方面的书籍，对新课标、新教材、新高考有较深入的学习和理解. 因此，在深圳中学工作的数年来，我一直希望能够有机会借助自己多年积累的经验，带头开发一套适合所有深圳中学学生的数学校本教材.

众所周知，2022 年全国高考数学创下了近些年的难度新高，以此为契机，我决定将这个酝酿多年的想法付诸实施. 在 2022 年高考数学结束后的第二天，我组织深圳中学数学组十余位高三一线教师和骨干教师召开研讨会议，动员大家集思广益、群策群力，编写一套贴合新课标、适应新高考、匹配深圳中学学生水平的深圳中学数学校本教材，于是《高中数学精讲》《高中数学一课一练》丛书应运而生. 如今呈现在各位读者面前的这套丛书，凝结了深圳中学数学教师多年来的教学经验、教育智慧和辛勤付出.

在本丛书的撰写过程中，我们以最新的《高中数学课程标准》精神为指导，以高中生数学认知能力为基础，以最新的《高中数学课程标准》知识脉络为主线，以提高学生核心素养为宗旨，对标新高考，注重提升学生数学学习的质量，充分将新课标、新教材和新高考理念融入其中.

《高中数学精讲》涵盖高中数学课程和新高考数学的所有内容,难度不超过高考数学,按章、节编写,每章开头简明扼要地介绍该章的内容、方法和意义,给出该章的知识结构框图,方便学生形成自己的知识结构.每节包括如下三个栏目.

内容提要:梳理每节中的基本概念、公式、定理,突出重点、难点和数学思想方法技巧,提供一个知识网络,授人以渔.

释疑解惑:通过精心设置的一系列问题与解答,解释学生数学学习过程中经常遇到的疑难问题,主要包括对概念、性质的解析,公式的理解和应用,定理的条件分析和使用要领,方法技巧的归纳总结,对某些似是而非的论断的辨析等,授业解惑.

典型例题:每节精讲具有典型性、新颖性、启迪性的例题,覆盖该节的知识方法技巧,遵循可接受性原则,按由浅入深、从易到难排序,通过分析、求解和点评,介绍与该例题有关的解题方法与技巧,帮助学生归纳解题规律,提高解题能力;每道例题后配有相关性、发展性的练习,帮助学生熟练演算技巧,巩固、拓展、深化对知识的理解和认知,培养分析问题、解决问题的能力,举一反三.

在书的后半部分,我们提供了所有练习题的详细解答,帮助学生自学及自我评价.

与《高中数学精讲》配套使用的是《高中数学一课一练》.

《高中数学一课一练》按章、节编写,涵盖新高考所有知识点,并增加多选题型.每节与《高中数学精讲》对应,精选习题循序渐进、拾级而上,遵循因材施教原则,习题设置兼顾多个层次的学习需求,分为A,B,C三层,适合分层教学,学生在实际使用中可以按需取舍.例如,数学基础较好的学生,可以在完成A组和B组习题的基础上努力尝试完成C组习题;数学基础较弱的学生,可以在完成A组习题的前提下努力尝试完成B组习题.书后附有所有习题的详细解答,《高中数学一课一练》与《高中数学精讲》配套使用,能更好地达到预期的学习效果.

本丛书包括《高中数学精讲》《高中数学一课一练》(必修一、必修二、选择性必修一、选择性必修二),共8册.

本丛书的编委会由深圳中学数学组的优秀中青年教师组成,他们是:洪建明、曾劲松、张红兵、董正林、黄文辉、张文涛、周峻民、许苏华、罗承成、邱际春、赵志伟、林健.在本丛书的编写过程中,我们力求精益求精,但其中难免存在一些疏漏与不足之处,敬请广大读者给予批评指正.

希望更多的同学喜欢数学,取得自己理想的成绩!

朱华伟

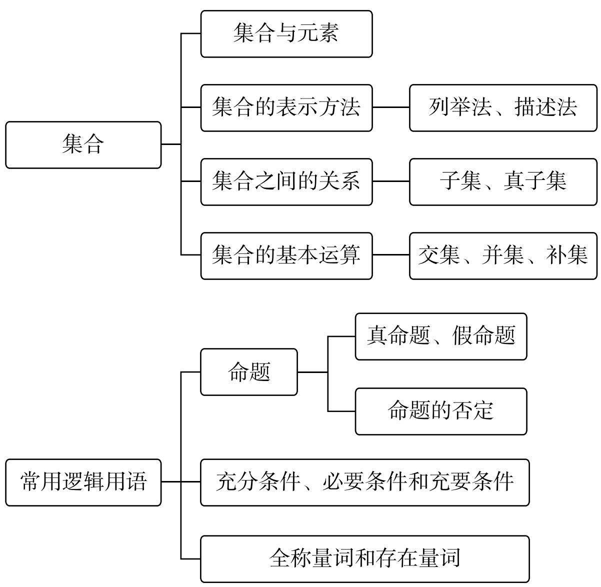
2023年6月

目　　录

第1章 集合与逻辑

本章主要介绍集合和常用逻辑用语.具体包括元素与集合的含义,元素与集合的关系,集合的表示方法;集合与集合的关系;集合的基本运算;命题的条件与结论;三个常用逻辑用语,即充分条件、必要条件和充要条件;全称量词和存在量词的概念,含有量词的命题及否定.

本章知识结构框图如下:



1.1 集合

一、内容提要

1. 元素与集合的含义

在数学语言中,把一些对象放在一起考虑时,就说这些对象组成了一个集合或集.集合中研究的每一个对象,都叫作这个集合的一个元素.

集合的元素未必有共性,如奶瓶和书桌,虽然它们没有什么共同特征,但在研究某些问题时可以把这些对象放在一起组成集合.集合本身也可以是研究对象,如由集合$\{a,b\}$的元素组成的所有集合可以构成一个集合$\{\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,这个集合的元素就是三个集合.

2. 元素与集合的关系

集合中最基本的关系是集合和它的元素之间的归属关系.元素与集合的关系是“属于”或“不属于”,对应的符号是“$\in$”或“$\notin$”.

3. 集合中元素的性质

集合的元素具有互异性、确定性、无序性.具体地,同一集合中的元素是互不相同的;集合中的元素是确定的,亦即给定一个集合,任何一个元素属于或不属于这个集合是确定的;集合中的元素没有顺序.

4. 集合的表示方法

把集合中的元素一一列举出来,并用大括号“{ }”括起来表示集合的方法叫作列举法.把集合中元素共有的,也只有该集合中元素才有的属性描述出来,以确定这个集合,这种方法叫作描述法.

描述法主要用符号语言描述,但也可以用自然语言描述,如{我校高一的学生}.在使用符号语言描述时,要严格遵循格式要求,其基本格式是{元素(的代表符号) | 元素的性质},不能交换竖线前后的内容.

在一些情况下,同一个集合既可以用列举法表示,也可以用描述法表示.例如,$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1,x\in \mathbf{Z},y\in \mathbf{Z}\}$与$\{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$是同一个集合.面对具体集合时,根据情况选择更合适的方法进行表示.

5. 集合的分类

集合的分类方式不唯一,如果按照研究对象分类,常见的有数集和点集;按照元素的个数分类,可以分为有限集(包括空集)和无限集.

要记住常用数集符号,例如,**N** 表示自然数集(nature),**Z** 表示整数集(“整数”的拼音首字母),**Q** 表示有理数集(quotient,商),**R** 表示实数集(real),这为后续学习提供了简洁的符号表示.

6. 区间

数学里最常用的一类集合是区间,用这种简化的符号表示实数集中某一连续范围的集合.

根据左端点、右端点的情况可分为开区间、闭区间、左闭右开区间，等等. “∞”是一个符号，不是数. 所以“$-\infty$”或“$+\infty$”作为区间一端时，这一端必须是小括号.

注意，要充分熟悉区间的形式，同时能把区间在数轴上表示出来，体会数形结合的思想.

不是任何数集都能用区间表示. 例如，集合$\{2\}$就不能用区间表示，根据区间的定义，区间$[a,b]$的隐含条件是$a<b$，不能是$a=b$，或$a>b$.

二、释疑解惑

【问题 1-1】举例说明，初中接触的“集合”有哪些？今天学习集合的概念之后有哪些新的认识？

答：初中接触的“集合”有不等式的解集，例如，不等式$3x-2>x+2$的解集为$x>2$；在同一平面内，到定点的距离等于定长的点的集合叫作圆. 集合是一个原始的、不定义的概念，教科书采用了描述式的定义方式. 集合是一种语言，借助集合的语言可以更简洁、准确地表达数学的研究对象，例如，数集、不等式(组)的解集，函数的定义域和值域，立体几何中的点、线、面之间的关系，平面解析几何中的曲线与方程，等等.

高中要求更规范地表示集合，不等式$3x-2>x+2$的解集应写为$\{x\in \mathbf{R}\mid x>2\}$. 以后，变量的取值范围都要写成集合的形式. 例如，使关于x的方程$ax=3$有负实数解的a的取值范围是$(-\infty,0)$.

【问题 1-2】如何选用列举法、描述法？利用描述法表示集合有哪些需要注意的地方？

答：要根据集合元素所具有的属性选择适当的表示方法. 列举法的特点是能清楚地展现集合的元素，通常用于表示元素个数较少的集合，当集合中元素较多或无限时，就不宜采用列举法，例如，看到$\{1,3,5,7,9,\cdots,97,99\}$，我们只能猜想这是100以内的正奇数的集合，但如果用描述法$\{x\mid x=2k-1,k\in \mathbf{Z}_+$，且$k\leqslant 50\}$就清楚多了；描述法的特点是形式简单、应用方便，通常用于表示元素具有明显共有属性的集合，当元素共有属性不易寻找或元素的限制条件较多时，就不宜采用描述法，例如，$\{1,25,\pi\}$用描述法表示就没有必要.

利用描述法表示集合应该注意以下三点：

(1) 写清楚该集合代表元素的符号. 例如，集合$\{x\in \mathbf{R}\mid x<3\}$不能写成$\{x<3\}$.

(2) 所有描述的内容都要写在大括号内，例如，$\{x\in \mathbf{Z}\mid x=3k\}$，$k\in \mathbf{Z}$，这种表达方式就不符合要求，应将$k\in \mathbf{Z}$也写进大括号内，即$\{x\in \mathbf{Z}\mid x=3k,k\in \mathbf{Z}\}$.

(3) 不能出现未被说明的字母. 例如，$\{x\mid x=3k\}$，在这里，k是实数还是整数区别很大.

【问题 1-3】将所有不是自身元素的集合构成一个集合S，即$S=\{x\mid x\notin S\}$. 请问：S是否属于S？

答：根据S的定义，S不属于S；反之，如果S不属于S，同样根据定义，S就属于S. 所以这个问题无法回答，这就是著名的罗素悖论(俗称“理发师悖论”).

传说理发师的广告词是“我只给所有不给自己刮胡子的人刮胡子”，那么他能不能给自己刮胡子呢？“理发师悖论”引发了第3次数学危机.

三、典型例题

【例 1-1】 已知集合 $A=\{2,a^2-a+2,1-a\}$,若 $4\in A$,求实数 a 的值.

分析 本题要求根据元素与集合的关系,确定参数的值.因为元素的无序性,所以 4 可能是其中两个元素中的任意一个.求出 a 的值后要检验,确保集合 A 中有三个不同的元素.

【解析】 根据条件,(1) 若 $a^2-a+2=4$,则 $a=-1$ 或 $a=2$,

当 $a=-1$ 时,集合 A 中的元素依次为 2,4,2,与"互异性"矛盾,故 $a=-1$ 舍去;

当 $a=2$ 时,$A=\{2,4,-1\}$,满足条件.

(2) 若 $1-a=4$,则 $a=-3$,此时 $A=\{2,14,4\}$,满足条件.

综上所述,$a=2$ 或 $a=-3$.

点评 集合是由元素唯一确定的,这也是集合的本质,不可忽视元素的三个特性(互异性、确定性、无序性).

【练习 1-1】 已知集合 $A=\{0,1,a\}$,且 $a^2\in A$,求 a 的值.

【练习 1-2】 设 $x\in\mathbf{R}$,集合 A 中含有三个元素 $3,x,x^2-2x$.

(1) 求元素 x 应满足的条件;

(2) 若 $-2\in A$,求实数 x.

【例 1-2】 用列举法写出以下集合.

(1) $A=\left\{x\in\mathbf{N}\mid \dfrac{12}{6-x}\in\mathbf{N}\right\}$;

(2) $B=\left\{\dfrac{12}{6-x}\in\mathbf{N}\mid x\in\mathbf{N}\right\}$.

分析 本题要求将描述法表示的集合用列举法改写.描述法中竖线左边是集合的元素,所以集合 A 中的元素是 x,且 $x\in\mathbf{N}$;集合 B 中的元素是 $\dfrac{12}{6-x}$,且 $\dfrac{12}{6-x}\in\mathbf{N}$.

【解析】 (1) 因为 x 是自然数,$\dfrac{12}{6-x}$ 也是自然数,所以 $6-x$ 是 12 的正约数.于是 $6-x$ 可以为 1,2,3,4,6,得 x 的值为 0,2,3,4,5,所以 $A=\{0,2,3,4,5\}$.

(2) 由(1) 知,$\dfrac{12}{6-x}$ 的值可以为 2,3,4,6,12,故 $B=\{2,3,4,6,12\}$.

点评 例 1-2 帮助我们理解集合的两种不同的表示方法,注意,用描述法表示集合时,形式要规范,尤其注意竖线两边的含义不同,不能随意交换,否则就会导致对象与性质发生变化,得到不同的集合.

【练习 1-3】 用列举法写出以下集合.

(1) $A=\{x\in\mathbf{N}\mid \dfrac{8}{6-x}\in\mathbf{N}\}=$ ________________;

(2) $B=\left\{\frac{8}{6-x}\in\mathbf{N}\mid x\in\mathbf{N}\right\}=$________________.

【练习 1-4】下面四个集合：

$A=\{x\in\mathbf{R}\mid y=x^2+1\}$；$B=\{y\in\mathbf{R}\mid y=x^2+1\}$；$C=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$；$D=\{y=x^2+1\}$.

它们各自的含义是什么？哪些集合是相同的集合？

【例 1-3】已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid mx^2-2x+1=0\}$，在下列条件下分别求实数 m 的取值范围.

(1) $A=\varnothing$；

(2) A 恰有一个元素.

分析 集合 A 是方程 $mx^2-2x+1=0$ 的解集，要注意，只有在 $m\neq 0$ 时该方程才是一元二次方程，才有判别式.

【解析】(1) 若 $A=\varnothing$，则关于 x 的方程 $mx^2-2x+1=0$ 没有实数解，则 $m\neq 0$，且 $\Delta=4-4m<0$，所以 $m>1$，实数 m 的取值范围是 $(1,+\infty)$；

(2) 若 A 恰有一个元素，则关于 x 的方程 $mx^2-2x+1=0$ 恰有一个实数解，

① 当 $m=0$ 时，$x=\frac{1}{2}$，满足题意；

② 当 $m\neq 0$ 时，$\Delta=4-4m=0$，所以 $m=1$.

综上所述，m 的取值范围为 $\{0,1\}$.

点评 例 1-3 以初中知识为载体，讨论形如 $ax^2+bx+c=0$ 的方程的根的情况，体会集合语言，以及分类讨论思想.

【练习 1-5】已知集合 $A=\{x\mid ax^2-3x+2=0,x\in\mathbf{R},a\in\mathbf{R}\}$.

(1) 若 A 是空集，求 a 的取值范围；

(2) 若 A 中只有一个元素，求 a 的值，并求集合 A；

(3) 若 A 中至少有一个元素，求 a 的取值范围.

【练习 1-6】已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$，若集合 A 与 B 是同一集合，求 q 的值.

【例 1-4】设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$，求证：

(1) 一切奇数属于 M；

(2) 偶数 $4k-2(k\in\mathbf{Z})$ 不属于 M；

(3) 属于 M 的两个整数，其积仍属于 M.

分析 要证明某元素属于 M，就要将该元素构造为集合元素所需要的形式.

(1) 就是证明一切奇数都可以表示为两个整数的平方差，采取待定系数法分析，令 $2k-1=x^2-y^2=(x+y)(x-y)$，注意到 $x+y$ 与 $x-y$ 奇偶性一致，试着令 $x-y=1$，则 $x+y=2k-1$，这就把 x,y 确定下来了；

(2) $4k-2$ 只是偶数中的一种,现在要证明这种形式的偶数不可能表示为两个整数的平方差,可以尝试反证法;

(3) 要证明"若两个整数分别可以表示为 x^2-y^2 的形式,那么它们的积也可以表示为 x^2-y^2 的形式",即证明 $(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)$ 可表示为 x^2-y^2 的形式,问题转化为整式的恒等变形.

证明:(1) 设 a 为任意奇数,则 $a=2k-1(k\in\mathbf{Z})$,

因为 $2k-1=k^2-(k-1)^2$,且 $k,k-1$ 均为整数,所以 $a\in M$.

由 a 的任意性知,一切奇数属于 M.

(2) 假设 $(4k-2)\in M$,则存在 $x,y\in\mathbf{Z}$,使得 $4k-2=x^2-y^2$,

即 $2(2k-1)=(x+y)(x-y)$. 所以 $x+y$ 与 $x-y$ 必有一个是偶数.

又 $x+y$ 与 $x-y$ 具有相同的奇偶性,所以 $x+y$ 与 $x-y$ 同为偶数.

所以 $(x+y)(x-y)$ 必定能被 4 整除,但 $2(2k-1)$ 表示不能被 4 整除的偶数,矛盾.

综上所述,偶数 $4k-2(k\in\mathbf{Z})$ 不属于 M.

(3) 设 $a,b\in M$,则存在 $x_1,y_1,x_2,y_2\in\mathbf{Z}$,使得 $a=x_1^2-y_1^2$,$b=x_2^2-y_2^2$.

$$
\begin{aligned}
\text{因为 } ab&=(x_1^2-y_1^2)(x_2^2-y_2^2)\\
&=x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-2x_1x_2y_1y_2+2x_1x_2y_1y_2-x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2\\
&=(x_1x_2-y_1y_2)^2-(x_1y_2-x_2y_1)^2,
\end{aligned}
$$

而 $x_1x_2-y_1y_2\in\mathbf{Z}$,$x_1y_2-x_2y_1\in\mathbf{Z}$,

所以 $ab\in M$.

点评 例 1-4 利用整式的运算来研究集合的元素,需要较高的变形技巧. 第(3) 问的难点是将 $x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2-(x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2)$ 化为 m^2-n^2 的形式,想到了分成两组,前一组 $x_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2$ 化为 $(x_1x_2+y_1y_2)^2-2x_1x_2y_1y_2$,后一组 $x_1^2y_2^2+x_2^2y_1^2$ 化为 $(x_1y_2+x_2y_1)^2-2x_1y_2x_2y_1$.

【练习 1-7】(多选题) 设 $M=\{a\mid a=x^2-y^2,x,y\in\mathbf{Z}\}$,则对任意整数 n,形如 $4n$,$4n+1$,$4n+2$,$4n+3$ 的数中,集合 M 中的元素为(　　).

A. $4n$　　B. $4n+1$　　C. $4n+2$　　D. $4n+3$

【练习 1-8】 设 S 是满足下列两个条件的实数所构成的非空集合:① $1\notin S$,② 若 $a\in S$,则 $\dfrac{1}{1-a}\in S$,请解答下列问题.

(1) 若 $2\in S$,则 S 中必有另外两个数,求出这两个数;

(2) 求证:若 $a\in S$,则 $1-\dfrac{1}{a}\in S$;

(3) 求证:集合 S 中至少有三个不同的元素.

1.2　子集和补集

一、内容提要

1. 子集关系

如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，就说 A 包含于 B，或者说 B 包含 A，记作 $A \subseteq B$（或 $B \supseteq A$），读作“A 包含于 B”（或“B 包含 A”）. 若 A 包含于 B，则称 A 是 B 的一个子集. 如果 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$，就说两个集合相等，记作 $A = B$. 如果 $A \subseteq B$ 但 $A \neq B$，就说集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A \subsetneqq B$，读作“A 真包含于 B”.

子集的性质：① 任何一个集合都是它本身的子集，即 $A \subseteq A$. 空集是任意集合的子集. ② 包含关系的传递性，若 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$，则有 $A \subseteq C$；若 $A \subsetneqq B$，$B \subsetneqq C$，则有 $A \subsetneqq C$.

子集关系是集合与集合之间的整体关系，这种关系是通过元素与集合的关系进行定义的. 例如，若 A，B 是非空集合，且 $A \subsetneqq B$，从元素的角度看，任意 $x \in A$，都有 $x \in B$，并且存在 $x_0 \in B$，有 $x_0 \notin A$.

区别接连符号“$\in$”与“$\subseteq$”. “$\in$”连接的是元素与集合，表示元素与集合之间的关系；而“$\subseteq$”连接的是集合与集合，表示集合与集合之间的关系.

通过归纳，我们知道 n 元集合的子集个数为 2^n；非空子集个数为 $2^n - 1$；非空真子集个数为 $2^n - 2$.

2. 全集与补集

如果在某个特定的场合，要讨论的对象都是集合 U 的元素和子集，就可以约定把集合 U 叫作全集（或基本集）. 若 A 是全集 U 的子集，U 中不属于 A 的元素组成的子集叫作 A 的补集，记作 $\complement_U A = \{x \mid x \in U，且\ x \notin A\}$.

不论 A 是否是 B 的子集，都可用 $B \backslash A$ 表示 B 中不属于 A 的元素组成的子集，即 $B \backslash A = \{x \mid x \in B，且\ x \notin A\}$，叫作 B 与 A 的差集. 显然，补集是差集的特殊情形，$\complement_U A = U \backslash A$.

补集的性质：$\complement_U(\complement_U A) = A$；若 $A = U$，则 $\complement_U A = \varnothing$；若 $A = \varnothing$，则 $\complement_U A = U$.

补集不仅体现集合间的关系，也是一种集合基本运算. 有些数学问题，当正向解决比较困难时，可以考虑先解决其对立情形，反过来便可解决原问题，即“正难则反”，可以认为这种想法就是补集思想.

3. 韦恩图

在数学中，用平面上封闭曲线的内部表示集合间关系（或集合）的示意图叫作韦恩图（即 Venn 图），如图 1-1 所示.

韦恩图可以形象直观地表示集合之间的关系. 对于本节的子集与补集，不仅要会用自然语言、符号语言来描述，还要学会用图形语言（韦恩图）来表示.

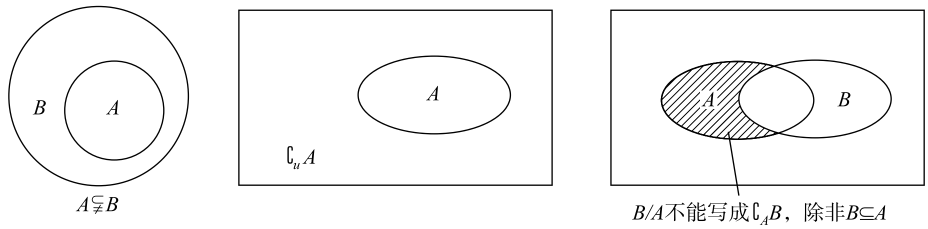


图 1-1

二、释疑解惑

【问题 1-4】(1) 根据子集的定义，“A 是 B 的子集”等价于“对于任何 $x \in A$，有 $x \in B$”，请说出“A 不是 B 的子集”的等价条件；

(2) 空集是任何集合的子集. 已知集合 $A=\{x \in \mathbf{R} \mid a<x<b\}$，$B=\{x \in \mathbf{R} \mid 1<x<5\}$，那么“$A$ 是 B 的子集”等价于“$1 \leqslant a \leqslant 5$，且 $1 \leqslant b \leqslant 5$”，对吗？

答：(1)“A 不是 B 的子集”的等价条件是“存在 $x_0 \in A$，使 $x_0 \notin B$”.

(2) 不对. 以上说法忽视了 $a \geqslant b$(A 是空集)时，并不要求 a，b 属于$[1,5]$. 例如，当 $a=6$，$b=0$ 时，$A=\varnothing$，有 $A \subseteq B$. 因此，“A 是 B 的子集”等价于“$1 \leqslant a<b \leqslant 5$，或者 $b \leqslant a$”，其中 $b \leqslant a$ 包括 $1 \leqslant b \leqslant a \leqslant 5$ 但又不限于这种情形.

【问题 1-5】一个含有 n 个元素的集合有多少个子集？你是如何得到这个结论的？

答：一元集合$\{a_1\}$的子集为：$\varnothing$，$\{a_1\}$，共 $2(2^1)$ 个；二元集合$\{a_1, a_2\}$的子集为：$\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_1, a_2\}$，共 $4(2^2)$ 个；三元集合$\{a_1, a_2, a_3\}$的子集为：$\varnothing$，$\{a_1\}$，$\{a_2\}$，$\{a_3\}$，$\{a_1, a_2\}$，$\{a_1, a_3\}$，$\{a_2, a_3\}$，$\{a_1, a_2, a_3\}$共 $8(2^3)$ 个 …… 我们发现：如果在原有集合中增加一个元素，那么将原有的每一个子集添加这个新元素，恰好得到所有新增加的子集，所以子集数正好增加一倍. 因此，猜想 n 元集合$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$的子集个数为 2^n；非空子集个数为 2^n-1；非空真子集个数为 2^n-2. 由特例归纳得到的一般结论需要论证，在学习计数原理之后，我们知道，要形成集合$\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$的一个子集，共有 $2 \times 2 \times \cdots \times 2$($n$ 个 2 相乘)种方法，所以它有 2^n 个子集.

【问题 1-6】(1) 集合$\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{x}>0\}$的补集是$\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{x} \leqslant 0\}$，对吗？

(2) 若 $A \subseteq B$，则 $\complement_U B \subseteq \complement_U A$，对吗？请说明理由.

答：(1) 不对. 研究一个集合 A 的补集要有两个前提条件：一是确定全集 U，二是 $A \subseteq U$. 不能脱离这两个条件研究补集. 对任意 $x \in U$，$x \in A$ 与 $x \in \complement_U A$，有且只有一个成立，但全集 U 不同，补集也会不同. 本问中，设 $A=\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{x}>0\}$，如果全集 $U=\{x \in \mathbf{R} \mid x \neq 0\}$，那么 $\complement_U A=\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{x} \leqslant 0\}$，但如果全集 $U=\mathbf{R}$，那么 $\complement_{\mathbf{R}} A=\{x \in \mathbf{R} \mid \frac{1}{x} \leqslant 0$ 或 $x=0\}$ $=\{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant 0\}$. 数学研究中，明确在什么范围内讨论问题非常重要，否则易出逻辑上的

错误.

(2) 对.集合与逻辑关系密切.对任意 $x \in \complement_U B$,则 $x \notin B$.因为 $A \subseteq B$,所以 $x \notin A$,所以 $x \in \complement_U A$,所以 $\complement_U B \subseteq B$.

三、典型例题

【例 1-5】 用符号"$\in$""$\notin$""$\subseteq$""$\nsubseteq$"填空.

(1) 2________$\mathbf{N}$;$\{2\}$________$\mathbf{N}$;$\{-2,2\}$________$\mathbf{N}$.

(2) $\varnothing$________$\mathbf{R}$;$\{\varnothing\}$________$\mathbf{R}$;$\varnothing$________$\{0\}$;0________$\varnothing$.

分析 先区分空格两边是元素与集合,还是集合与集合,从而决定是用"属于"符号还是"包含于"符号.

【答案】(1) $\in$;$\subseteq$;$\nsubseteq$;(2) $\subseteq$;$\nsubseteq$;$\subseteq$;$\notin$.

点评 "$\in$"与"$\subseteq$"容易混淆,要理解它们的区别.研究对象的理解不同,答案也可能不同,例如,(1) 中$\{2\}$与 $\mathbf{N}$,如果将$\{2\}$看作集合,那么$\{2\} \subseteq \mathbf{N}$;如果将$\{2\}$看作元素,那么 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$中并没有$\{2\}$这个元素,于是$\{2\} \notin \mathbf{N}$,所以答案并不唯一.(2) 中 $\varnothing$ 是空集,它没有元素,相当于$\{\ \ \}$,$\{\varnothing\}$与$\{0\}$都不是空集,前者有一个元素 $\varnothing$,后者有一个元素 0.

【练习 1-9】(多选题)下列各式中正确的是(　　).

A. $\{0\} \in \{0,1,2\}$　　B. $\{0,1,2\} \subseteq \{2,1,0\}$

C. $\{0,1\}=\{(0,1)\}$　　D. $\varnothing \in \{\varnothing\}$

【练习 1-10】(多选题)设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$,集合 $S=\{1,2,3,4\}$,则 $\complement_U S$ 的子集为(　　).

A. $\{5\}$　　B. $\{1,2,5\}$　　C. $\{2,3,4\}$　　D. $\varnothing$

【例 1-6】(1) 满足条件$\{1,2\} \subsetneqq A \subseteq \{1,2,3,4,5\}$的集合 A 的个数是________;

(2) 设 $A=\{x \mid 1<x<2\}$,$B=\{x \mid x<a\}$,若 $A \subsetneqq B$,则 a 的取值范围是________.

分析 (1) 集合 A 形如$\{1,2,\cdots\}$,省略号的位置至少有一个元素,并且来自集合$\{3,4,5\}$,于是问题转化为求集合$\{3,4,5\}$的非空子集数.

(2) 将集合在数轴上表示出来,注意边界情况.

【答案】(1) 7;　(2) $[2,+\infty)$.

点评 (1) 问将问题等价于求集合的子集(真子集)的个数问题,体现了数学中的"同构"思想.(2) 问探究集合的包含关系,渗透数形结合思想,提升直观想象素养.

【练习 1-11】 集合 A 满足$\{1,3\} \subsetneqq A \subseteq \{x \mid y=\frac{15}{x}, x \in \mathbf{N}_+, y \in \mathbf{N}_+\}$,则集合 A 的个数为________个.

【练习 1-12】 已知 $A=\{x \mid -1<x<5\}$,$B=\{x \mid 1-a<x<a\}$,$a \in \mathbf{R}$.若 $B \subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

【例 1-7】 若关于x的方程$x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$中至少有一个方程有实根,试求实数a的取值范围.

分析 "三个方程至少有一个方程有实根",从正面考虑有七种情形,而其反面只有一种,即"三个方程均无实根".因此,先求得使$\Delta_1<0$,$\Delta_2<0$,$\Delta_3<0$同时成立的a的取值范围,再求其补集.

【解析】 若三个方程均无实根,则有

$$\begin{cases}\Delta_1=(4a)^2-4(-4a+3)<0,\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0,\\ \Delta_3=(2a)^2-4(-2a)<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2a+3)(2a-1)<0,\\ (3a-1)(a+1)>0,\\ a(a+2)<0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{3}{2}<a<\dfrac{1}{2},\\ a<-1\text{ 或 }a>\dfrac{1}{3},\\ -2<a<0.\end{cases}$$

解得$-\dfrac{3}{2}<a<-1$.

于是三个方程中至少有一个方程有实根的实数a的取值范围是$\left\{a \mid a\leqslant-\dfrac{3}{2}\text{ 或 }a\geqslant-1\right\}$.

点评 例 1-7 从正面解决有困难,所以反向思考,这是数学思维方式——正难则反,利用了逻辑上的对立关系与补集关系之间的关联性.可以看出,补集不仅是集合之间的关系,补集思想也是一种重要的思维方式.

【练习 1-13】 已知三个集合:$A=\{x \mid x^2+2x+a-1=0\}$,$B=\{x \mid x^2+x+a=0\}$,$C=\{x \mid x^2+4x-a+8=0\}$,求使三个集合中至少有一个集合为非空集合的实数$a$的取值范围.

【练习 1-14】 已知$A=\{x \mid x^2-2x-8=0\}$,$B=\{x \mid x^2+ax+a^2-12=0\}$,若$B$不包含于$A$,求实数$a$的取值范围.

【例 1-8】 设集合$S_n=\{1,2,3,\cdots,n\}(n\in\mathbf{N}_+)$,若$X\subseteq S_n$,把$X$的所有元素的乘积称为$X$的容量(若$X$中只有一个元素,则该元素的数值即为它的容量,规定空集的容量为 0).若X的容量为奇(偶)数,则称X为S_n的奇(偶)子集.

(1) 记S_n的所有子集的容量之和为Y_n,试探索Y_3与Y_4的关系;

(2) 若$n=4$,求S_n的所有偶子集的容量之和.

分析 Y_3表示$S_3=\{1,2,3\}$的所有子集的容量之和,不妨列出S_3的所有子集及对应的容量,得到Y_3,同样,得到Y_4,在这一过程中要注意S_3与S_4的子集的关系,从而发现容量之间的联系.(1)问提醒我们,Y_n与Y_{n-1}之间有关系,因此,由Y_1依次可得到Y_2,Y_3,Y_4,而Y_4是两个数的和:偶子集的容量之和+奇子集的容量之和,想想这两个数哪个容易得到.

【解析】 (1) 集合$S_3=\{1,2,3\}$共有 8 个子集,分别为:$\varnothing$,$\{1\}$,$\{2\}$,$\{3\}$,$\{1,2\}$,$\{1,3\}$,$\{2,3\}$,$\{1,2,3\}$,这些子集的容量分别记为:$y_1,y_2,\cdots,y_8$,其中$y_1=0$;

集合$S_4=\{1,2,3,4\}$的子集包括了S_3的 8 个子集,在这些子集内各添加 4,又得到 8 个不同的子集,所以S_4共有 16 个子集,显然这些子集的容量分别为:$y_1,y_2,\cdots,y_8,4,4y_2,\cdots,4y_8$,

其中 $y_1=0$,

所以 $Y_3=y_2+\cdots+y_8$,$Y_4=(y_2+\cdots+y_8)+4+4(y_2+\cdots+y_8)$,

所以 $Y_4=5Y_3+4$.

(2) 同理可得:$Y_3=4Y_2+3$,$Y_2=3Y_1+2$.

因为 $Y_1=1$,所以 $Y_2=3Y_1+2=5$,$Y_3=4Y_2+3=23$,$Y_4=5Y_3+4=119$.

因为 $S_4=\{1,2,3,4\}$ 的奇子集只有 3 个:$\{1\}$,$\{3\}$,$\{1,3\}$,它们的容量之和显然为 7,

所以 $S_4=\{1,2,3,4\}$ 所有偶子集的容量之和为 $119-7=112$.

点评 例 1-8 是基于“对应”设计的数学问题.(1) 问是要找到递推关系,这也是等价转化思想的具体应用;(2) 问将“偶子集的容量之和”,转化为“奇子集的容量之和”,是“正难则反”思维的又一次尝试.

【练习 1-15】 由无理数论引发的数字危机一直延续到 19 世纪,直到 1872 年,德国数学家戴德金从连续性的要求出发,用有理数的“分割”来定义无理数(史称“戴德金分割”),并把实数理论建立在严格的科学基础上,才结束了无理数被认为“无理”的时代,也结束了持续 2000 多年的数学史上的第一次大危机.所谓戴德金分割,是指将有理数集 $\mathbf{Q}$ 划分为两个非空子集 M 与 N,这两个子集没有公共元素,所有元素又组成 $\mathbf{Q}$.例如,$M=\{x\in\mathbf{Q}\mid x\neq 3\}$,$N=\{x\in\mathbf{Q}\mid x=3\}$.若 M 中的每一个元素都小于 N 中的每一个元素,则称(M,N)为戴德金分割.试判断,对于任一戴德金分割(M,N),下列选项中,可能成立的是__________.

① M 没有最大元素,N 有一个最小元素;

② M 没有最大元素,N 也没有最小元素;

③ M 有一个最大元素,N 有一个最小元素;

④ M 有一个最大元素,N 没有最小元素.

【练习 1-16】 已知集合 A 为非空数集,定义:$S=\{x\mid x=a+b,a,b\in A\}$,$T=\{x\mid x=|a-b|,a,b\in A\}$.

(1) 若集合 $A=\{1,3\}$,求证:$2\in S$,并直接写出集合 T;

(2) 若集合 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$,$x_1<x_2<x_3<x_4$,且 $T=A$,求证:$x_1+x_4=x_2+x_3$;

(3) 若集合 $A\subseteq\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2021,x\in\mathbf{N}\}$,$S$ 与 T 无公共元素,记 $|A|$ 为集合 A 中元素的个数,求 $|A|$ 的最大值.

1.3　集合的交与并

一、内容提要

1. 交集

在数学里,把所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合,称为 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$,读作"A 交 B",即 $A \cap B=\{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$. 如图 1-2 所示.

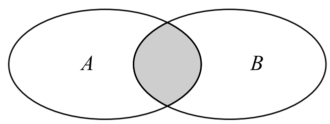


图 1-2

注意定义中"所有"一词,$A \cap B$ 是由 A,B 中全部的公共元素组成. 若 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,3,4,5\}$,那么 $A \cap B=\{2,3,4\}$,而不是$\{2,3\}$.

交集有如下运算性质:$A \cap B=B \cap A$(交换律); $A \cap A=A$;$A \cap \varnothing=\varnothing \cap A=\varnothing$;若 $A \subseteq B$,则 $A \cap B=A$;若 $A \cap B=A$,则 $A \subseteq B$;$(A \cap B) \subseteq A$;$(A \cap B) \subseteq B$.

2. 并集

把集合 A,B 中的元素放在一起组成的集合,称为 A 与 B 的并集,记作 $A \cup B$,读作"A 并 B",即 $A \cup B=\{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$.

注意定义中的"或"与生活用语中的"或"的含义有所不同,生活用语中的"或",常常是两者中只取其一,并不兼顾;但并集中的"或"则两者可兼有,即"$x \in A$ 或 $x \in B$"包含三种情形:① $x \in A$,但 $x \notin B$;② $x \in B$,但 $x \notin A$;③ $x \in A$,且 $x \in B$. 在并集中,两个集合的公共元素只能出现一次,这是因为集合元素满足互异性,因此并集中任何一个元素只会是 ①②③ 中的一种情况. 如图 1-3 所示.

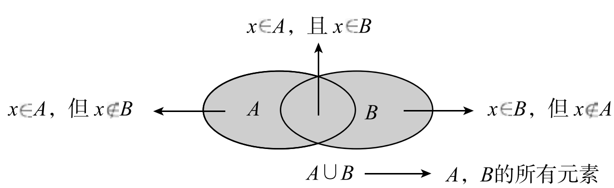


图 1-3

并集有如下运算性质:$A \cup B=B \cup A$(交换律);$A \cup A=A$;$A \cup \varnothing=\varnothing \cup A=A$;若 $A \subseteq B$,则 $A \cup B=B$;若 $A \cup B=B$,则 $A \subseteq B$;$A \subseteq (A \cup B)$,$B \subseteq (A \cup B)$.

3.(拓展)集合中元素的个数

在部分有限集中,我们经常遇到有关集合中元素的个数问题,可用韦恩图表示两集合的

交、并、补. 如果用 card 表示有限集合元素的个数，即 card(A) 表示有限集 A 的元素个数，则有如下结论：

(1) $\mathrm{card}(A \cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A \cap B)$；

(2) $\mathrm{card}(A \cup B \cup C)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(C)-\mathrm{card}(A \cap B)-\mathrm{card}(A \cap C)-\mathrm{card}(B \cap C)+\mathrm{card}(A \cap B \cap C)$.

这一结论，在计数上称为容斥原理. 如图 1-4 所示.

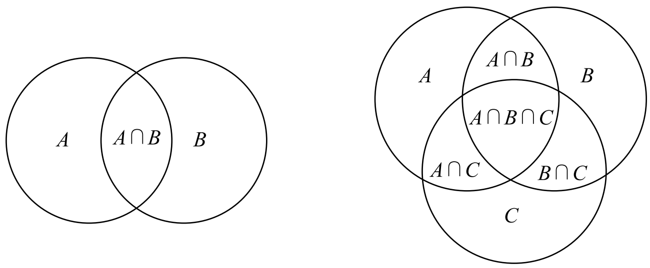


图 1-4

二、释疑解惑

【问题 1-7】 类比实数的运算性质，集合的交与并除了满足交换律之外，是否还满足其他运算性质？请用韦恩图验证下列结论是否成立，并尝试从理论上证明.

结合律：

(1)$A \cap B \cap C=(A \cap B) \cap C=A \cap (B \cap C)$；

(2)$A \cup B \cup C=(A \cup B) \cup C=A \cup (B \cup C)$.

分配律：

(3)$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$；

(4)$A \cup (B \cap C)=(A \cup B) \cap (A \cup C)$.

答： 选择(3) 来研究，先画出等式两边的韦恩图，如图 1-5 所示.

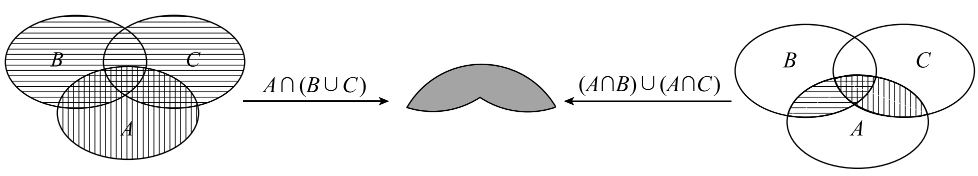


图 1-5

图 1-5 中三个图，左图水平纹路的阴影表示 $B \cup C$，竖直纹路的阴影表示 A，于是网络纹路的阴影表示 $A \cap (B \cup C)$；右图水平纹路的阴影表示 $A \cap B$，竖直纹路的阴影表示 $A \cap C$，于是两种阴影合起来表示$(A \cap C) \cup (B \cap C)$. 对比发现，$A \cap (B \cup C)=(A \cap B) \cup (A \cap C)$(中图). 同样的方法可以验证其他等式成立. 但要注意这并不是理论证明.

我们从理论上证明(3)：① 任取 $x \in A \cap (B \cup C)$，则 $x \in A$，且 $x \in B \cup C$. 若 $x \in B$，则 $x \in A \cap B$；若 $x \in C$，则 $x \in A \cap C$. 总之，有 $x \in A \cap B$，或 $x \in A \cap C$，所以

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,所以 $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. ② 任取 $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$,则 $x \in A \cap B$,或 $x \in A \cap C$,必有 $x \in A$. 又 $x \in B$ 或 $x \in C$,所以 $x \in B \cup C$,所以 $x \in A \cap (B \cup C)$,所以$(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. 综合 ①②,有 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

【问题 1-8】要想认识更复杂的运算性质,先论证一些简单的运算性质,你能证明下列两条性质吗?

(1) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$; $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$;

(2) 若 $A \subseteq B$,则 $A \cap (\complement_U B) = \varnothing$.

答:选(2) 来研究. 若 $A \subseteq B$,则对于任意的 $x \in A$,有 $x \in B$,于是 $x \notin \complement_U B$,所以 $A \cap (\complement_U B) = \varnothing$.

【问题 1-9】利用韦恩图可以直观地表示集合运算的结果,如图 1-6 所示,全集为U,试用集合 A 与 B 的运算表示阴影部分对应的集合. 说说你的理由.

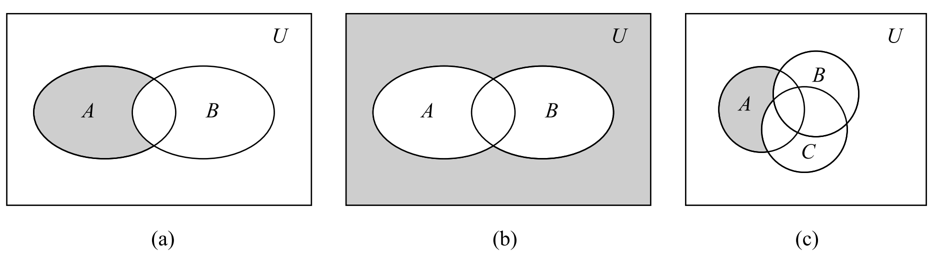


图 1-6

答:集合是由元素唯一确定的,因此,弄清阴影部分中元素的特征是关键.

从图 1-6(a) 的阴影部分任取一个元素 x,则 $x \in A$,且 $x \notin B$,从而 $x \in A$,且 $x \in \complement_U B$,所以 x 组成的集合是$\{x \mid x \in A$,且 $x \in \complement_U B\}$,即 $A \cap \complement_U B$.

从图 1-6(b) 的阴影部分任取一个元素 x,则 $x \notin A$,且 $x \notin B$,从而 $x \in \complement_U A$,且 $x \in \complement_U B$,所以 x 组成的集合是$\{x \mid x \in \complement_U A$,且 $x \in \complement_U B\}$,即 $\complement_U A \cap \complement_U B$. 此外,还可以是 $\complement_U (A \cup B)$.

从图 1-6(c) 的阴影部分任取一个元素 x,则 $x \in A$,且 $x \notin B$,且 $x \notin C$,所以 x 组成的集合是$\{x \mid x \in A$ 且 $x \in \complement_U B$ 且 $x \in \complement_U C\} = A \cap (\complement_U B \cap \complement_U C)$. 此外,还可以是$A \cap \complement_U (B \cup C)$.

以上的做法是从阴影部分中任取一个元素 x,并研究 x 的所有属性,进而实现用集合运算表示阴影部分.

三、典型例题

【例 1-9】已知全集 $U = \{x \mid x \leqslant 6\}$,集合 $A = \{x \mid -2 < x \leqslant 3\}$,$B = \{x \mid -3 \leqslant x < 2\}$,求 $\complement_U (A \cap B)$,$A \cap (\complement_U B)$,$(\complement_U A) \cup B$.

分析 根据所求目标式,先求 $\complement_U A$,$\complement_U B$,$A \cap B$,再进一步运算,得到最终结果.

【解析】在数轴上表示出集合 U,A,B,如图 1-7 所示.

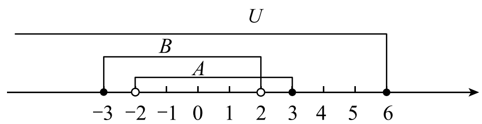


图 1-7

易知 $\complement_U A=\{x \mid x \leqslant -2$ 或 $3<x \leqslant 6\}$，$\complement_U B=\{x \mid x<-3$ 或 $2 \leqslant x \leqslant 6\}$，$A \cap B=\{x \mid -2<x<2\}$.

所以，$\complement_U(A \cap B)=\{x \mid x \leqslant -2$ 或 $2 \leqslant x \leqslant 6\}$，

$A \cap(\complement_U B)=\{x \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$，

$(\complement_U A) \cup B=\{x \mid x<2$ 或 $3<x \leqslant 6\}$.

点评 关于"交、并、补"的混合运算，要注意运算的顺序，分级完成，一般先运算括号内的部分. 在求交集、并集时，注意边界元素取还是不取，求补集时要先确定全集.

【练习 1-17】《西游记》《三国演义》《水浒传》和《红楼梦》是中国古典文学瑰宝，并称为中国古典小说四大名著. 某中学为了解本校学生阅读四大名著的情况，随机调查了 100 位学生，其中阅读过《西游记》或《红楼梦》的学生共有 90 位，阅读过《红楼梦》的学生共有 80 位，阅读过《西游记》且阅读过《红楼梦》的学生共有 60 位，则该校阅读过《西游记》的学生人数与该校学生总数比值的估计值为(　　).

A. 0.5　　B. 0.6　　C. 0.7　　D. 0.8

【练习 1-18】已知全集 $U=\{x \mid x<4\}$，集合 $A=\{x \mid \frac{3}{2} \leqslant x<2\}$，$B=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

(1) 如图 1-8(a) 所示，阴影部分表示集合 M，求 M；

(2) 如图 1-8(b) 所示，阴影部分表示集合 N，求 N.

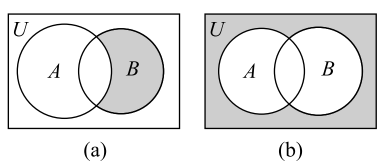


图 1-8

【例 1-10】对于集合 A, B，定义 $A \backslash B=\{x \mid x \in A$，且 $x \notin B\}$，$A \nabla B=(A \backslash B) \cup(B \backslash A)$. 设 $A=\{x \mid x \geqslant -2\}$，$B=\{x \mid x<1\}$，则 $A \nabla B=$________.

分析 根据定义，依次求出 $A \backslash B$ 与 $B \backslash A$，再求并集.

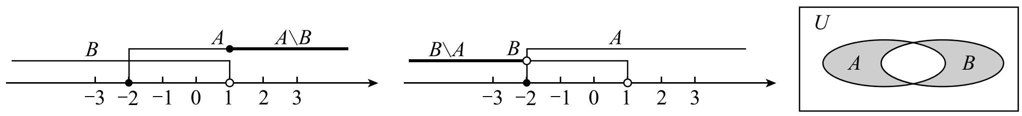
【答案】$\{x \mid x \geqslant 1$ 或 $x<-2\}$.

【解析】$A \backslash B=\{x \mid x \geqslant -2$，且 $x \geqslant 1\}=\{x \mid x \geqslant 1\}$，$B \backslash A=\{x \mid x<1$，且 $x<-2\}=\{x \mid x<-2\}$，

所以，$A \nabla B=\{x \mid x \geqslant 1$ 或 $x<-2\}$.

点评 例 1-10 通过新定义考查集合的运算. 现在我们将新定义还原为"交、并、补"的基本

运算. $A \backslash B$ 就是由 A 中不属于 B 的元素组成的集合,也就是在 A 中去掉 $A\cap B$,所以 $A\backslash B = A\cap \complement_{\mathbf{R}}B$,这里的全集 U 就是 $\mathbf{R}$. 如图 1-9(a) 所示,粗线对应的部分就是 $A\backslash B$. 同理,$B\backslash A = B\cap \complement_{\mathbf{R}}A$,如图 1-9(b) 所示. 因此,利用数轴可以直观地看到 $A\nabla B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)=(A\cap \complement_{\mathbf{R}}B)\cup(B\cap \complement_{\mathbf{R}}A)$,用韦恩图表示为图 1-9(c). 我们感觉到,$A\nabla B$ 就是在 $A\cup B$ 中去掉 $A\cap B$,即 $(A\cup B)\cap \complement_U(A\cap B)$. 于是 $(A\cap \complement_U B)\cup(B\cap \complement_U A)=(A\cup B)\cap \complement_U(A\cap B)$,请研究这一等式是否普遍适用.



(a) (b) (c)

图 1-9

【练习 1-19】 若全集为 $\mathbf{R}$,$f(x)$ 和 $g(x)$ 均为二次函数,$A=\{x \mid f(x)<0\}$, $B=\{x \mid g(x)\geqslant 0\}$,则不等式组 $\begin{cases} f(x)<0, \\ g(x)<0 \end{cases}$ 的解集可用 A,B 表示为________.

【练习 1-20】(多选题)定义 $A-B=\{x \mid x\in A, 且 x\notin B\}$,$A*B=(A-B)\cup(B-A)$ 叫作集合的对称差,若集合 $A=\{y \mid y=x+2, -1\leqslant x\leqslant 3\}$,$B=\left\{y \mid y=\dfrac{2}{x}, \dfrac{1}{5}\leqslant x\leqslant 1\right\}$,则以下说法正确的是( ).

A. $B=[2,10]$　　　　B. $A-B=[1,2)$

C. $A*B=(1,2]\cup(5,10]$　　　　D. $A*B=B*A$

【例 1-11】 已知集合 $A=(-2,6)$,$B=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup[m+1,+\infty)$,$m>-\dfrac{1}{2}$.

(1) 当 $m=1$ 时,求 $A\cap B$;

(2) 若 $A\cap B$ 中含有四个自然数,试求 m 的取值范围.

分析 对于两个不等式的解集或两个区间,求交集时,一般借助数轴,两个集合的交集对应两个集合在数轴上所覆盖部分的公共区域. 移动含参数的端点,直至满足条件为止.

【解析】(1) 当 $m=1$ 时,$B=\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$,$A\cap B=\left(-2,\dfrac{1}{2}\right]\cup[2,6)$.

(2) 当 $m>-\dfrac{1}{2}$ 时,$m+1>\dfrac{1}{2}$. 如图 1-10 所示,观察 $A\cap B$.

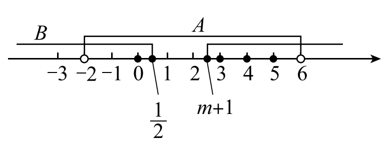


图 1-10

公共区域分为两部分,左部分有自然数 0,因此右部分必须有 3,4,5,

所以 $2 < m+1 \leqslant 3 \Rightarrow 1 < m \leqslant 2$，

所以 m 的取值范围是$(1,2]$.

点评 要关注 m 的取值范围的端点是否能取到. 例 1-11 能很好地帮助学生形成分类讨论思想，培养学生严谨的数学思维习惯. 通过数轴展示两个集合的交集或并集更具直观性.

【练习 1-21】已知集合 $A=\{0,1,2,3,4\}$，$B=\{x \mid x>m\}$，若 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$ 有三个元素，则实数 m 的取值范围是(　　).

A. $[3,4)$　　B. $[1,2)$　　C. $[2,3)$　　D. $(2,3]$

【练习 1-22】已知全集 $U=\mathbf{R}$，集合 $A=\{x \mid -3 \leqslant x \leqslant 4\}$，$B=\{x \mid m-1 \leqslant x \leqslant 3m-2\}$. 若 $B \cap (\complement_U A)=B$，求实数 m 的取值范围.

【例 1-12】已知集合 $A=\{x \mid x^2+px+q=0\}$，$B=\{x \mid qx^2+px+1=0\}$，同时满足①$A \cap B \neq \varnothing$，②$A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)=\{-2\}$，$p \cdot q \neq 0$. 求 p，q 的值.

分析 集合 A，B 的方程的系数顺序相反，说明两个方程的根有关系. 条件 ① 说明集合 A，B 有相同的元素，条件 ② 说明 $-2 \in A$ 但 $-2 \notin B$.

【解析】设 $x_0 \in A$，则有 $x_0^2+px_0+q=0$，显然 $x_0 \neq 0$，

两端同除以 x_0^2，得 $1+p\left(\dfrac{1}{x_0}\right)+q\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^2=0$，即 $q\left(\dfrac{1}{x_0}\right)^2+p\left(\dfrac{1}{x_0}\right)+1=0$，

则知 $\dfrac{1}{x_0} \in B$，故集合 A，B 中元素互为倒数.

由条件 ①② 知，集合 A，B 都有两个元素，即若 $A=\{x_1,x_2\}$，则 $B=\left\{\dfrac{1}{x_1},\dfrac{1}{x_2}\right\}$.

由 $A \cap B \neq \varnothing$，若 $x_1=\dfrac{1}{x_2}$，则 $x_2=\dfrac{1}{x_1}$，从而 $A=B$，与题意不符.

不妨设 $x_1=\dfrac{1}{x_1}$，解得 $x_1=\pm 1$.

又 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)=\{-2\}$，则 $-2 \in A$，所以 $A=\{1,-2\}$ 或 $A=\{-1,-2\}$.

由此得 $B=\left\{1,-\dfrac{1}{2}\right\}$ 或 $B=\left\{-1,-\dfrac{1}{2}\right\}$.

由根与系数的关系，有 $\begin{cases}1+(-2)=-p, \\ 1 \times (-2)=q,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}-1+(-2)=-p, \\ (-1) \times (-2)=q,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}p=1, \\ q=-2,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}p=3, \\ q=2.\end{cases}$

点评 这是一个综合性较强的问题，以二次方程为载体，考查综合分析集合运算的能力.

【练习 1-23】设集合 S，T，$S \subseteq \mathbf{N}_+$，$T \subseteq \mathbf{N}_+$，S，T 中至少有两个元素，且 S，T 满足：① 对于任意 x，$y \in S$，若 $x \neq y$，都有 $xy \in T$；② 对于任意 x，$y \in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x} \in S$. 下列命题正确的是(　　).

A. 若 S 有 4 个元素,则 $S \cup T$ 有 7 个元素

B. 若 S 有 4 个元素,则 $S \cup T$ 有 6 个元素

C. 若 S 有 3 个元素,则 $S \cup T$ 有 5 个元素

D. 若 S 有 3 个元素,则 $S \cup T$ 有 4 个元素

【练习 1-24】 已知集合 $A=\{(x,y) \mid ax+y=1\}$,$B=\{(x,y) \mid x+ay=1\}$,$C=\{(x,y) \mid x^2+y^2=1\}$,则

(1) 当 a 取何值时,$(A \cup B) \cap C$ 是一个二元集?

(2) 当 a 取何值时,$(A \cup B) \cap C$ 是一个三元集?

1.4　命题、充分条件和必要条件

一、内容提要

1. 命题

可以判断为可能成立,也可能不成立,两者必居其一且仅居其一的陈述句叫作命题.如果一个语句不是陈述句,而是疑问句、祈使句、感叹句等,那么它就不是命题.对于像 $x>0$ 这样的含有变量的语句称为开语句,由于未将研究对象局限在特定的集合上,故不是命题.

成立的命题叫作真命题,不成立的命题叫作假命题.判断一个命题为真命题要进行严谨的推理、论证. 我们学过的公理、基本事实、定理都是真命题,而要判断一个命题是假命题,则只需举出一个反例.

命题只有“真”“假”两种判断,没有第三种选择.数学中暂时不知道真假的命题可以叫作猜想.好的猜想对数学的发展能起到很大的推动作用.如费马定理“当整数 $n\geqslant 3$ 时,方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有整数解”,相当长一段时间内都是作为猜想而存在的.

如果 p 是一个命题,则“p 不成立”也是一个命题,叫作 p 的否定,记作$\neg p$,读作“非 p”,显然,p 也是$\neg p$ 的否定,在 p 和$\neg p$ 两者之中,一定有一个为真,有一个为假.正是因为命题 p 和$\neg p$ 的真假相反,所以当 p 的真假不易判断时,可通过判断$\neg p$ 的真假来判断 p 的真假.

命题的一般形式为“若 p,则 q”.其中 p 叫作命题的条件,q 叫作命题的结论.当命题“若 p,则 q”为真,则记作 $p\Rightarrow q$,读作“p 推出 q”;当命题“若 p,则 q”为假,则记作 $p\nRightarrow q$,读作“p 推不出 q”.

2.(拓展)命题的四种形式

命题有四种不同的形式,设原命题为“若 p,则 q”的形式,则逆命题为“若 q,则 p”;否命题为“若$\neg p$,则$\neg q$”;逆否命题为“若$\neg q$,则$\neg p$”.原命题与逆命题的真假没有必然联系.原命题与逆否命题同真同假,即“若 p,则 q”为真(假),则“若$\neg q$,则$\neg p$”亦为真(假).

3. 充分条件与必要条件

当“若 p,则 q”成立,即 $p\Rightarrow q$ 时,把 p 叫作 q 的充分条件,q 叫作 p 的必要条件.如果 p 是 q 的充分条件,那么命题“若 p,则 q”是真命题.若 $p\nRightarrow q$,则 p 不是 q 的充分条件,q 也不是 p 的必要条件.

如果既有 $p\Rightarrow q$,又有 $q\Rightarrow p$,就记作 $p\Leftrightarrow q$,即 p 既是 q 的充分条件,又是 q 的必要条件,此时我们称 p 是 q 的充分必要条件,简称充要条件.当然,此时 q 也是 p 的充要条件.换句话说,如果一个命题和它的逆命题都成立,则此命题的条件和结论互为充分必要条件.

条件 p 与结论 q 的关系如下:

(1) 若 $p\Rightarrow q$,但 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的充分不必要条件;

(2) 若 $q\Rightarrow p$,但 $p\nRightarrow q$,则 p 是 q 的必要不充分条件;

(3) 若 $p\Rightarrow q$ 且 $q\Rightarrow p$,即 $p\Leftrightarrow q$,则 p 与 q 互为充要条件;

(4) 若 $p\nRightarrow q$,且 $q\nRightarrow p$,则 p 是 q 的既不充分也不必要条件.

以上均包含两个方面.例如要证明 p 是 q 的充分不必要条件,对于命题“若 p,则 q”,既要证明原命题是真命题,又要证明逆命题是假命题,两个方面都不可少.

因此,要理解充分条件与判定定理、必要条件与性质定理、充要条件与数学定义的关系,体会逻辑在数学中的重要地位.

二、释疑解惑

【问题 1-10】 当 $p\Rightarrow q$ 时,把 p 叫作 q 的充分条件,q 叫作 p 的必要条件.如何理解这里的“必要”?

答: 当 $p\Rightarrow q$ 时,$\neg q\Rightarrow \neg p$,也就是说,若 q 不成立,则 p 必不成立,所以说 q 对于 p 的成立是必要的.比如“心脏是人的一个必要器官”,没有心脏,人不可活,所以“必要”体现的就是“没它不行”的含义.$x=1\Rightarrow x^2=1$ 表示没有 $x^2=1$ 就没有 $x=1$,因此 $x^2=1$ 是必要的.

【问题 1-11】 当 $p\Rightarrow q$ 时,对于 q,它的充分条件唯一吗?对于条件 p,它的必要条件唯一吗?举例说明充分条件、必要条件、充要条件和判定定理、性质定理、数学定义之间的关系.

答: 设 p:四边形的两组对角分别相等,q:四边形是平行四边形.对于 q,它的充分条件不唯一,例如,p_1:四边形的两组对边分别相等,等等.条件 p,p_1 分别与 q 构成的命题就是平行四边形的判定定理.一般地,数学中的每一条判定定理都给出了相应数学结论成立的一个充分条件.

设 p:四边形为平行四边形,q:四边形的两组对角分别相等.对于 p,它的必要条件不唯一,例如,q_1:四边形的两组对边分别相等,等等.条件 p 分别与 q,q_1 构成的命题就是平行四边形的性质定理.一般地,数学中的每一条性质定理都给出了相应数学结论成立的一个必要条件.

“四边形的两组对边分别平行”是“四边形是平行四边形”的一个充要条件.由此我们给出平行四边形的定义:两组对边分别平行的四边形叫作平行四边形.因为“四边形是平行四边形”的充要条件并不唯一,所以还可以给出平行四边形的其他形式的定义.一般地,数学定义就是给出相应数学概念成立的一个充要条件.

以上内容的具体关系如图 1-11 所示.

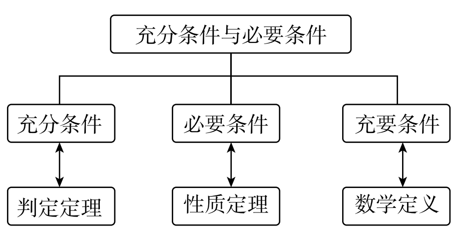


图 1-11

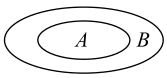
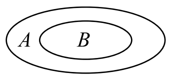
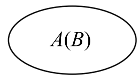
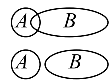
【问题 1-12】 如何用集合间的关系判断充分、必要条件?

答: 集合 P,Q 如果满足 $P\subsetneqq Q$,可得到 $x\in P\Rightarrow x\in \mathbf{Q}$,且 $x\in \mathbf{Q}\nRightarrow x\in P$,所以 $x\in P$

是 $x \in \mathbf{Q}$ 的充分不必要条件.可见,用集合间的包含关系能够判断充分与必要条件.

设语句 $p(x)$ 中变量 x 的取值范围为集合 A,语句 $q(x)$ 中变量 x 的取值范围为集合 B,即 $A=\{x \mid p(x)\}$,$B=\{x \mid q(x)\}$.$A \subseteq B$ 就是说x 满足$p(x)$,则x 必满足$q(x)$,所以 $p \Rightarrow q$.类似地,$B \subseteq A$ 与 $q \Rightarrow p$ 等价,$A=B$ 与 $p \Leftrightarrow q$ 等价.如表 1-1 所示.

表 1-1

记法	$A=\{x \mid p(x)\}$,$B=\{x \mid q(x)\}$			
关系	$A \subsetneqq B$	$B \subsetneqq A$	$A=B$	$A \not\subseteq B$ 且 $B \not\subseteq A$
图示				
结论	p 是 q 的充分不必要条件	p 是 q 的必要不充分条件	p,q 互为充要条件	p 是 q 的既不充分也不必要条件

当所研究的 p,q 含有变量,即涉及方程的解集、不等式的解集、与集合有关或所描述的对象可以用集合表示的问题时,可以借助集合间的包含关系,利用韦恩图或数轴解题的技巧.

用集合的观点也可以轻松理解充分条件与必要条件的"传递性":① 若 p 是q 的充分条件,q 是 s 的充分条件,即 $p \Rightarrow q$,$q \Rightarrow s$,则有 $p \Rightarrow s$,即 p 是 s 的充分条件;② 若 p 是 q 的必要条件,q 是 s 的必要条件,即 $q \Rightarrow p$,$s \Rightarrow q$,则有 $s \Rightarrow p$,即 p 是 s 的必要条件;③ 若 p 是 q 的充要条件,q 是 s 的充要条件,即 $p \Leftrightarrow q$,$q \Leftrightarrow s$,则有 $p \Leftrightarrow s$,即 p 是 s 的充要条件.

三、典型例题

【例 1-13】将下列命题改写成"若 p,则 q"的形式,并写出其逆命题、否命题、逆否命题.

(1) 负数的立方是负数;

(2) 对顶角相等.

分析 先明确命题的条件和结论,再改写成"若 p,则 q"的形式.交换原命题的条件和结论就得到逆命题;同时否定原命题的条件和结论就得到否命题;同时否定原命题的条件和结论后,再交换就得到逆否命题.

【解析】(1) 原命题:若一个数是负数,则这个数的立方是负数;

逆命题:若一个数的立方是负数,则这个数是负数;

否命题:若一个数不是负数,则这个数的立方不是负数;

逆否命题:若一个数的立方不是负数,则这个数不是负数.

(2) 原命题:若两个角是对顶角,则这两个角相等;

逆命题:若两个角相等,则这两个角是对顶角;

否命题:若两个角不是对顶角,则这两个角不相等;

逆否命题:若两个角不相等,则这两个角不是对顶角.

点评 将命题写成"若 p,则 q"的形式时,要注意语言的简洁性、准确性、完整性.改写后的命题可以清楚地看出其条件和结论,为进一步研究作铺垫.高中阶段对于命题的四种形式中

的否命题和逆否命题不作要求,了解即可.

【练习 1-25】将下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并判断其真假.

(1) 末位数字是 0 或 5 的整数,能被 5 整除;

(2) 方程 $x^2-x+1=0$ 有两个实数根.

【练习 1-26】将下列命题改写成“若 p,则 q”的形式,并判断其真假.

(1) 正 n 边形($n\geqslant 3$) 的 n 个内角全相等;

(2) 已知 x,y 为实数,当 $x+y\neq 5$ 时,$x\neq 2$ 或 $y\neq 3$.

【例 1-14】(多选题) $\dfrac{x}{y}>1$ 的一个充分不必要条件是(　　).

A. $x>y$　　B. $x>y>0$　　C. $x<y$　　D. $x<y<0$

分析 本题要找出一个选项,使得这个选项能推出$\dfrac{x}{y}>1$,但$\dfrac{x}{y}>1$ 推不出这个选项. 可以先找到$\dfrac{x}{y}>1$ 的充要条件再调整.

【答案】B,D.

【解析】因为$\dfrac{x}{y}>1\Leftrightarrow(x-y)y>0\Leftrightarrow x>y>0$ 或 $x<y<0$. 所以 $x>y>0$(或 $x<y<0$) 是$\dfrac{x}{y}>1$ 的一个充分不必要条件.

点评 例 1-14 告诉我们,p 的充分不必要条件不唯一. 此外,要注意“p 是q 的充分不必要条件”与“p 的充分不必要条件是 q”的区别,前者表示“$p\Rightarrow q$,且 $q\nRightarrow p$”,后者表示“$q\Rightarrow p$,且$p\nRightarrow q$”.

【练习 1-27】已知 a,b 是实数,则 $|2a-1|=|a-1|+|a|$ 是 $a\geqslant 1$ 的(　　).

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

【练习 1-28】(多选题) 给出四个条件:

① $xt^2>yt^2$;② $xt>yt$;③ $x^2>y^2$;④ $0<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$.

其中能成为 $x>y$ 的充分条件的有(　　).

A. ①　　B. ②　　C. ③　　D. ④

【例 1-15】设 $x,y\in\mathbf{R}$,求证:$xy\geqslant 0$ 是$|x+y|=|x|+|y|$的充要条件.

分析 设 $p:xy\geqslant 0$,$q:|x+y|=|x|+|y|$. 要证明 p 是q 的充要条件,先证明充分性,即 p 是q 的充分条件($p\Rightarrow q$),再证明必要性,即 p 是q 的必要条件($q\Rightarrow p$).

证明:(1) 充分性:如果 $xy\geqslant 0$,则有 $xy=0$ 和 $xy>0$ 两种情况.

当 $xy=0$ 时,有 $x=0$ 或 $y=0$.

若 $x=0$,则$|x+y|=|y|$,$|x|+|y|=|y|$,等式成立;若 $y=0$,同理有等式成立.

所以当 $xy=0$ 时,等式成立.

当 $xy>0$ 时,有 $x>0,y>0$ 或 $x<0,y<0$.

若 $x>0,y>0$,则 $|x+y|=x+y$,$|x|+|y|=x+y$,所以等式成立;

若 $x<0,y<0$,则 $|x+y|=-(x+y)$,$|x|+|y|=-x-y$,所以等式成立.

总之,当 $xy\geqslant 0$ 时,$|x+y|=|x|+|y|$ 成立.

(2) 必要性:如果 $|x+y|=|x|+|y|$,则 $|x+y|^2=(|x|+|y|)^2$,

即 $x^2+2xy+y^2=x^2+y^2+2|x||y|$,所以 $|xy|=xy$,所以 $xy\geqslant 0$.

综合(1)(2) 可知,$xy\geqslant 0$ 是 $|x+y|=|x|+|y|$ 成立的充要条件.

点评 证明充要条件需要从两方面进行,既要证明充分性,又要证明必要性,注意不可将充分性与必要性混淆.

【练习 1-29】 设 $x,y\in \mathbf{R}$,且 $xy\neq 0$,求证:$x+y=1$ 成立的充要条件是 $x^3+y^3+xy-x^2-y^2=0$.

【练习 1-30】 求证:关于 x 的方程 $ax^2+2x+1=0$ 至少有一个负根的充要条件是 $a\leqslant 1$.

【例 1-16】 已知 p:$|2x+1|\leqslant 3$,q:$1-m\leqslant x\leqslant 1+m$,若 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,求实数 m 的取值范围.

分析 先化简 p 中的不等式,再将 $\neg p$ 与 $\neg q$ 的关系转换为 p 与 q 之间的关系,以此确定参数 m 的取值范围.

【解析】 由题意得 p:$-2\leqslant x\leqslant 1$.

设 $P=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 1\}$,$Q=\{x\mid 1-m\leqslant x\leqslant 1+m\}$,

因为 $\neg p$ 是 $\neg q$ 的充分不必要条件,所以 q 是 p 的充分不必要条件,所以 $Q\subsetneqq P$.

当 $1-m>1+m$,即 $m<0$ 时,Q 为空集,符合题意;

当 $1-m\leqslant 1+m$,即 $m\geqslant 0$ 时,$\begin{cases}1-m\geqslant -2,\\1+m\leqslant 1,\end{cases}$ (等号不能同时成立),

由不等式组解得 $m\leqslant 0$;等号同时成立的条件是 $m=3$ 且 $m=0$,舍去.

又 $m\geqslant 0$,所以 $m=0$.

综上所述,$m\leqslant 0$.

点评 根据 p 与 q 的关系确定参数的范围,转换为由集合 P 与 Q 的包含关系求参数的范围.

【练习 1-31】 已知 p:$x<-2$ 或 $x>10$,q:$x<1-a$ 或 $x>1+a$,其中 $a>0$.若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的充分不必要条件,求 a 的取值范围.

【练习 1-32】 已知关于 x 的方程 $(1-a)x^2+(a+2)x-4=0$,$a\in \mathbf{R}$.求:

(1) 方程有两个正根的充要条件;

(2) 方程至少有一个正根的充要条件.

1.5　全称量词和存在量词

一、内容提要

1. 全称量词与存在量词

短语“任意”“所有”“每一个”等叫作全称量词,数学上用符号“$\forall$”表示,常用的全称量词还有“一切”“任给”等.短语“存在某个”“至少有一个”等叫作存在量词,数学上用符号“$\exists$”表示,常用的存在量词还有“有些”“对某个”“有的”等,它们都表示个体和局部的含义.

2. 全称命题与特称命题

开语句$x>0$不是命题,但如果添加$\forall x\in\mathbf{R}$的范围就能使之变成命题$\forall x\in\mathbf{R}$,$x>0$.将含有变量x的陈述句用$p(x)$表示,将语句$p(x)$中变量x的取值范围用集合M表示,则语句“对M的任一个元素x,有$p(x)$成立”叫作全称命题.用符号简单地表示为$\forall x\in M$,$p(x)$.语句“存在M的某个元素x,使$p(x)$成立”叫作特称命题.用符号简单地表示为$\exists x\in M$,$p(x)$.将文字语言表述的命题转换成用符号语言表达的含量词命题,使之更准确,更简洁.

3. 判断含量词命题的真假

在判断全称命题为真时,要对限定集合内的每个元素验证性质$p(x)$成立.在判断特称命题为假时,要证明限定集合内的所有元素都不具有$p(x)$.也就是说,判定全称命题为真或特称命题为假时,需要进行推理证明;而判定全称命题为假或特称命题为真时,只需举例说明即可.

4. 含量词命题的否定

对一个命题进行否定,得到一个新的命题,称其为原命题的否定.一般地,命题$\forall x\in M$,$p(x)$的否定是$\exists x\in M$,$\neg p(x)$;命题$\exists x\in M$,$p(x)$的否定是$\forall x\in M$,$\neg p(x)$.

要正确地对全称命题或特称命题进行否定,一方面要充分理解全称量词与存在量词的含义,对原命题否定时,改量词、否结论,但范围不变;另一方面要充分利用原命题与它的否定在形式上只能一个为真、一个为假来加以判断.

注意“命题的否定”与“否命题”(见1.4节拓展)的区别.原命题“若p,则q”,其否命题是“若$\neg p$,则$\neg q$”.原命题与否命题的真假并无必然联系,例如,原命题为“若$x=1$,则$x^3=1$”,否命题为“若$x\neq1$,则$x^3\neq1$”,两个命题均为真.命题与命题的否定必然是一真一假,在高中阶段只需要掌握“全称量词命题与存在量词命题的否定”.

5.(拓展)逻辑联结词“非”“且”“或”

已经学习了联结词“非”,知道p的否定,记作$\neg p$,读作“非p”.下面谈“且”“或”.

用联结词“且”把命题p和命题q联结起来,就得到一个新命题,记作$p\wedge q$,读作“p且q”.一般地,当p,q都是真命题时,$p\wedge q$是真命题;当p,q两个命题中有一个命题是假命题时,$p\wedge q$是假命题.例如,p:平行四边形对角线互相平分,q:平行四边形对角线相等,$p\wedge q$:平行四边

形对角线互相平分且相等，由于 p 是真命题，q 是假命题，所以 $p \wedge q$ 是假命题.

用联结词“或”把命题 p 和命题 q 联结起来，就得到一个新命题，记作 $p \vee q$，读作“p 或 q”. 一般地，当 p，q 两个命题中有一个命题是真命题时，$p \vee q$ 是真命题. 例如，p：集合 A 是 $A \cap B$ 的子集，p：集合 A 是 $A \cup B$ 的子集，$p \vee q$：集合 A 是 $A \cap B$ 的子集或集合 A 是 $A \cup B$ 的子集，由于 p 是假命题，q 是真命题，所以 $p \vee q$ 是真命题. $2 \leqslant 2$ 表示“$2 < 2$，或 $2 = 2$”，所以也是真命题.

如图 1-12(a) 所示，我们可以从串联电路理解联结词“且”的含义. 若开关 p，q 的闭合与断开分别对应命题 p，q 的真与假，则整个电路的接通与断开分别对应命题 $p \wedge q$ 的真与假.

如图 1-12(b) 所示，我们可以从并联电路理解联结词“或”的含义. 若开关 p，q 的闭合与断开分别对应命题 p，q 的真与假，则整个电路的接通与断开分别对应命题 $p \vee q$ 的真与假.

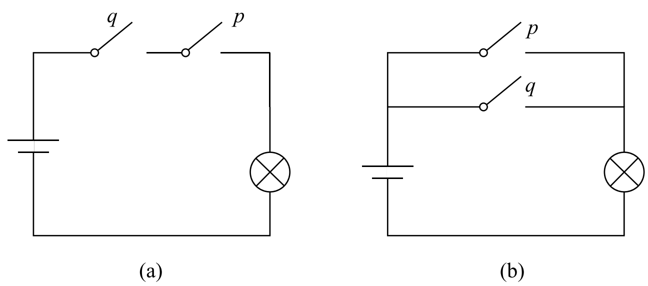


图 1-12

总之，“非命题”的真假特点是“一真一假”；“且命题”的真假特点是“一假即假，要真全真”；“或命题”的真假特点是“一真即真”.

二、释疑解惑

【问题 1-13】全称命题与特称命题一定含有量词吗？

答：有很多情形下，全称量词常常被省略，即没有量词的命题往往是全称命题. 而存在量词则不能省略，它常用“有”字来表述. 例如，“平行四边形的对角线互相平分”是全称命题，但省略了全称量词，它的否定是“有的平行四边形的对角线不互相平分”，则不能省去“有的”.

【问题 1-14】含量词命题的否定要注意否定词语的使用，请列举一些正面叙述词语和它的否定词语.

答：常用的正面叙述词语和它的否定如表 1-2 所示.

表 1-2

原词语	否定词语	原词语	否定词语
等于	不等于	至多一个	至少两个
大于（$>$）	不大于 （小于或等于，$\leqslant$）	至多一个	至少两个

（续表）

原词语	否定词语	原词语	否定词语
小于(<)	不小于 (大于或等于，≥)	至多 n 个	至少 $n+1$ 个
是	不是	所有的	某些
都是	不都是	任意的	某个

【问题 1-15】(1) 从集合的观点，谈谈你对逻辑联结词“非”“且”“或”的理解.

(2) 德·摩根定律是关于命题逻辑规律的一对法则，它在集合论中的表达式为

$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$；$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$.

请从逻辑的角度阐述该定律的表达形式.

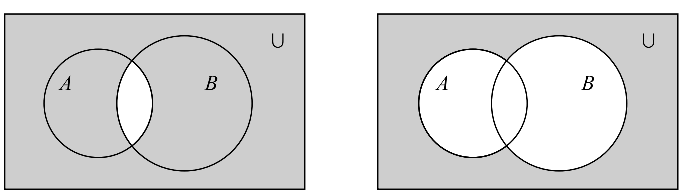
答:(1) 逻辑联结词“且”“或”“非”与集合中的“交”“并”“补”密切相关.

① “且”与“交”的关系：若 p,q 都是真命题，则 $p\wedge q$ 是真命题；若 p,q 中至少有一个是假命题，则 $p\wedge q$ 是假命题. 对于集合的“交”有：若 $x\in P,x\in \mathbf{Q}$，则 $x\in P\cap Q$；若 $x\notin P$ 或 $x\notin Q$，则 $x\notin P\cap Q$. 把命题 p,q 分别对应于集合 P,Q，“真”“假”“$\wedge$”分别对应于“$\in$”“$\notin$”“$\cap$”，那么上述关于“且”与“交”的规定就具有形式的一致性. 具体地说，就是“p 是真命题”对应于 $x\in P$，“q 是真命题”对应于 $x\in \mathbf{Q}$，“$p\wedge q$ 是真命题”对应于 $x\in P\cap Q$，“$p\wedge q$ 是假命题”对应于 $x\notin P\cap Q$.

② “或”与“并”的关系：若 p,q 都是假命题，则 $p\vee q$ 是假命题；若 p,q 中至少有一个是真命题，则 $p\vee q$ 是真命题. 对于集合的“并”有：若 $x\notin P,x\notin Q$，则 $x\notin P\cup Q$；若 $x\in P$ 或 $x\in \mathbf{Q}$，则 $x\in P\cup Q$.

③ “非”与“补”的关系：若 p 是真命题，则 $\neg p$ 是假命题；若 p 是假命题，则 $\neg p$ 是真命题. 设 U 为全集，若 $x\in P$，则 $x\notin \complement_U P$；若 $x\notin P$，则 $x\in \complement_U P$.

(2) 直观地看，如图 1-13(a) 所示，$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ 就是指“交之补”等于“补之并”；如图 1-13(b) 所示，$\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 就是指“并之补”等于“补之交”.



(a) (b)

图 1-13

从逻辑的角度来讲，$\neg(p\wedge q)=(\neg p)\vee(\neg q)$；$\neg(p\vee q)=(\neg p)\wedge(\neg q)$. 例如，“$x>2$ 且 $x<3$”的否定就是“$x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$”；“$x>3$ 或 $x<2$”的否定就是“$x\leqslant 3$ 且 $x\geqslant 2$”.

三、典型例题

【例 1-17】将下列命题用符号语言表达，指出它是全称命题还是特称命题，并判断真假.

(1) 每个有理数都是实数；

(2) 有一个实数 x_0，使得 $x_0^2+2x_0+3=0$；

(3) 对任意正整数 n，都有 $n^2<2^n$.

分析 关注每个命题中的量词，(1) 中有全称量词“每个”，(2) 中有存在量词“有一个”，(3) 中有全称量词“任意”，据此可用符号语言表述为全称命题与特称命题并判断其真假.

【解析】(1) 用符号语言表达为 $\forall x\in\mathbf{Q}, x\in\mathbf{R}$，它是全称命题，是真命题.

(2) 用符号语言表达为 $\exists x_0\in\mathbf{R}, x_0^2+2x_0+3=0$，它是特称命题.

因为方程 $x^2+2x+3=0$ 的判别式 $\Delta=-8<0$，

所以该方程无解，所以不存在 $x_0\in\mathbf{R}$，使 $x_0^2+2x_0+3=0$.

所以该命题为假命题.

(3) 用符号语言表达为 $\forall n\in\mathbf{Z}_+, n^2<2^n$，它是全称命题.

当 $n=2$ 时，$n^2=2^n=4$，所以该命题为假命题.

点评 判断一个命题的类型，关键是看量词，全称命题有时会省去全称量词，这时把全称量词补充出来看是否讲得通. 全称命题如果是真命题，需要严格证明命题对指定范围内的所有元素都成立；如果是假命题，只要举出一个反例即可. 特称命题如果是真命题，只需要找到指定范围内的某个变量满足即可；如果是假命题，需要严格地证明命题对指定范围内所有元素都不成立. (3) 中 $n^2<2^n$ 的反例并不止一个，还有 $n=4$ 的情形，但并不需要举出所有反例. (2) 还可以采用配方说明，$x^2+2x+3=(x+1)^2+2>0$，因此使 $x_0^2+2x_0+3=0$ 的 x_0 不存在，所以该命题为假命题.

【练习 1-33】(多选题) 下列命题是 $\exists x\in\mathbf{R}, x^3>x$ 的表述方法的有(　　).

A. 有一个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^3>x$ 成立

B. 对有些 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^3>x$ 成立

C. 任选一个 $x\in\mathbf{R}$，都有 $x^3>x$ 成立

D. 至少有一个 $x\in\mathbf{R}$，使得 $x^3>x$ 成立

【练习 1-34】将下列命题用符号语言表达，指出它是全称命题还是特称命题，并判断真假.

(1) 任一个实数乘以 -1 都小于它本身；

(2) 存在一个实数对 (x,y)，使 $2x+3y+3<0$ 成立；

(3) 有些整数既能被 2 整除，又能被 5 整除；

(4) 某个四边形不是平行四边形.

【例 1-18】写出下列命题的否定，并判断它们的真假.

(1) p：对于任意正整数 n_0，使 $2n_0^2+5n_0+2$ 能被 2 整除；

(2) p：某些三角形是等边三角形；

(3) p:有的偶数的立方不是偶数.

分析 注意关键词"任意""某些""有的",确定所叙述对象的特征,并进行否定.

【解析】(1) $\neg p$:$\exists n_0 \in \mathbf{N}_+$,$2n^2+5n+2$ 不能被 2 整除. $\neg p$ 为真命题.

(2) $\neg p$:所有三角形都不是等边三角形. $\neg p$ 为假命题.

(3) $\neg p$:所有偶数的立方都是偶数. $\neg p$ 为真命题.

点评 书写全称命题与特称命题的否定的步骤是:(1) 确定原命题的类型,注意有些命题省略的量词要补上;(2) 改换量词:把全称量词换为恰当的存在量词;把存在量词换为恰当的全称量词;(3) 否定结论. 当判断 $\neg p$ 的真假有困难时,可转而判断 p 的真假.

【练习 1-35】写出下列命题的否定,并判断它们的真假.

(1) p:所有能被 5 整除的整数都是奇数;

(2) p:每一个四边形的四个顶点共圆;

(3) p:对任意 $x \in \mathbf{Z}$,x^2 的个位数字不等于 8.

【练习 1-36】写出下列命题的否定,并判断它们的真假.

(1) p:$\exists x_0 \in \mathbf{R}$,$x_0^2+2x_0+5 \leqslant 0$;

(2) p:有的四边形是矩形;

(3) p:有一个素数含三个正因数.

【例 1-19】已知命题 p:$\forall x \in \{x \mid x \geqslant 1\}$,$x^2-a \geqslant 0$,命题 q:$\exists x \in \mathbf{R}$,$x^2+2ax+2-a=0$. 若两个命题都是真命题,则实数 a 的取值范围为( ).

A. $a \leqslant -2$ 或 $a=1$ B. $a \leqslant -2$ 或 $1 \leqslant a \leqslant 2$

C. $a \geqslant 1$ D. $-2 \leqslant a \leqslant 1$

分析 命题 p 为真,则 $x^2-a \geqslant 0$ 在 $x \in [1,+\infty)$ 上恒成立;命题 q 为真,则方程 $x^2+2ax+2-a=0$ 有实数解. 由此分别得到参数 a 的取值范围,又两个命题都为真,则求出两个取值范围的交集即可.

【答案】A.

【解析】由命题 p 为真,得 $a \leqslant 1$;由命题 q 为真命题,得 $\Delta=4a^2-4(2-a) \geqslant 0$ 成立,即 $a^2+a-2 \geqslant 0$,所以 $(a+2)(a-1) \geqslant 0$,得 $a \leqslant -2$ 或 $a \geqslant 1$. 因为两个命题都是真命题,所以 $a \leqslant -2$ 或 $a=1$.

点评 已知含量词的命题真假,求参数的取值范围,一般题目中会出现"恒成立""存在"等量词. 解决此类问题的关键是根据含量词命题的真假转换为相关数学知识,利用集合、方程、不等式等知识求解参数的取值范围,解题过程中要注意变量取值范围的限制.

【练习 1-37】已知 $\forall x \in \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$,$m>x$,$\exists x \in \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 2\}$,$n>x$,那么 m,n 的取值范围分别是( ).

A. $m \in \{m \mid m>0\}$,$n \in \{n \mid n>0\}$

B. $m \in \{m \mid m>0\}$,$n \in \{n \mid n>2\}$

C. $m \in \{m \mid m > 2\}$，$n \in \{n \mid n > 0\}$

D. $m \in \{m \mid m > 2\}$，$n \in \{n \mid n > 2\}$

【练习 1-38】x_1 和 x_2 是方程 $x^2 - mx - 2 = 0$ 的两个实根，命题 p：$\forall m \in [-1,1]$，$a^2 - 5a - 3 \geqslant |x_1 - x_2|$；命题 q：$\exists x \in \mathbf{R}$，$ax^2 + 2x - 1 > 0$. 若命题 p 是真命题，命题 q 是假命题，求 a 的取值范围.

【例 1-20】命题 p：$\forall x \in (0,4]$，$\sqrt{x(4-x)} + 1 > ax$；命题 q：$\exists x \in (0,4]$，$|x-1| \leqslant a$. 若 $p \vee q$ 为真，$p \wedge q$ 为假，求 a 的取值范围.

分析 先分别求得 p，q 为真时参数 a 的范围. p 是恒成立问题，不等式两边同除以 x，不等号方向不变，左式是 $\frac{1}{x}(\sqrt{x(4-x)}+1)$，右式是 a，于是转换为求左式的最小值；q 是存在性问题，直接求左式的最小值. 由 $p \vee q$ 为真，$p \wedge q$ 为假，可知 p 与 q 一真一假.

【解析】若 $p \vee q$ 为真，则 p 与 q 至少有一个为真；若 $p \wedge q$ 为假，则 p 与 q 至少有一个为假. 所以 p 与 q 一真一假.

不等式 $\sqrt{x(4-x)} + 1 > ax$ 两边同除以 $x\,(0 < x \leqslant 4)$，得 $\sqrt{\frac{4}{x} - 1} + \frac{1}{x} > a$.

设函数 $y = \sqrt{\frac{4}{x} - 1} + \frac{1}{x}\,(0 < x \leqslant 4)$，则 y 随 x 的增大而减小，

所以当 $x = 4$ 时，y 有最小值 $y_{\min} = \frac{1}{4}$，

所以当命题 p 为真时，$a < \frac{1}{4}$.

设函数 $y = |x-1|\,(0 < x \leqslant 4)$，当 $x = 1$ 时，y 有最小值 $y_{\min} = 0$.

所以当命题 q 为真时，$a \geqslant 0$.

当 p 真 q 假时，$a < 0$；当 p 假 q 真时，$a \geqslant \frac{1}{4}$.

所以 a 的取值范围是 $\left\{a \mid a < 0 \text{ 或 } a \geqslant \frac{1}{4}\right\}$.

点评 (1) 不等式恒成立问题，可用特殊值先得到必要条件，将 $x = 4$ 代入不等式 $\sqrt{x(4-x)} + 1 > ax$，得 $a < \frac{1}{4}$，这就是 p 为真命题的必要条件. 然后证明当 $a < \frac{1}{4}$ 时，不等式恒成立. 因为 $ax < \frac{1}{4}x\,(x > 0)$，所以 $ax - 1 < \frac{1}{4}x - 1$，又由 $x \leqslant 4$，所以 $\frac{1}{4}x - 1 \leqslant 0 \leqslant \sqrt{x(4-x)}$，所以 $ax - 1 < \sqrt{x(4-x)}$，所以 $\sqrt{x(4-x)} + 1 > ax$，这就证明了 $a < \frac{1}{4}$ 是 p 为真命题的充分条件.

(2) p 与 q 一真一假包括“p 真 q 假”和“p 假 q 真”两种情况，在数轴上画出 $a < \frac{1}{4}$ 与 $a \geqslant$

0 的示意图,然后在并集中去掉公共部分,即可得到 $a<0$ 或 $a\geqslant\frac{1}{4}$.

(3) 命题 p 且 q,p 或 q,非 p 的真假判断如表 1-3 所示(称为真值表).

表 1-3

p	q	p 且 q	p 或 q	非 p
真	真	真	真	假
真	假	假	真	假
假	真	假	真	真
假	假	假	假	真

反过来,若 $p\wedge q$ 为真,则 p 与 q 均为真;若 $p\wedge q$ 为假,则 p 与 q 至少有一个为假;若 $p\vee q$ 为真,则 p 与 q 至少有一个为真;若 $p\vee q$ 为假,则 p 与 q 均为假.

【练习 1-39】已知 p:$\exists x\in\mathbf{R},mx^2+1\leqslant 0$, q:$\forall x\in\mathbf{R},x^2+mx+1>0$.若命题 p,命题 q 至少有一个为真命题(即 $p\vee q$ 是真命题),则实数 m 的取值范围为__________.

【练习 1-40】已知命题 p:不等式 $|3x-a|<4$ 的解集中的整数有且仅有 $-1,0,1$.命题 q:集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$ 且 $A\cap\mathbf{R}_+=\varnothing$.

(1) 若 $p\vee q$ 为真,$p\wedge q$ 为假,求实数 a 的取值范围;

(2) 设 $p\wedge q$ 为真时,a 的取值范围为集合 S,$T=(-\infty,-2\sqrt{m}]\cup[2\sqrt{m},+\infty)$,$m>0$,若全集 $U=\mathbf{R}$,$(\complement_U T)\cup S=S$,求实数 m 的取值范围.