数学培优竞赛讲座

（七年级，第 2 版）

朱华伟　编著

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，按照初中数学课程的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径；在巩固深化初中数学教材知识的同时，拓宽有关中考数学和竞赛数学的知识，介绍令人耳目一新的解题方法与技巧，有助于激发学生创新与发现的灵感，开发智力，提高学生中考数学和初中数学竞赛的成绩.

本书可供初中生及准备参加初中数学竞赛的学生使用，同时也适合中学数学教师、数学爱好者及高等师范院校数学教育专业的大学生、研究生和数学教师参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 七年级 / 朱华伟编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，2023.9

ISBN 978-7-302-64000-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课－初中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2023)第 117580 号

责任编辑：王 定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：马遥遥
责任印制：

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-83470000 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：19.5 **字 数**：462 千字
版 次：2021 年 8 月第 1 版 2023 年 9 月第 2 版 **印 次**：2023 年 9 月第 1 次印刷
定 价：79.80 元

产品编号：102853-01

前　　言

提升基础学科的科研水平，培养世界一流的拔尖创新人才，是推动人类文明进步和世界持续发展的重要动力．培养拔尖创新人才，一定要从娃娃抓起、从基础教育抓起．因此，重视并加强基础教育阶段的数学、物理等教育迫在眉睫，尤其是对于数理拔尖人才的早期识别和培养，适合的、特殊的成长机会及高水平的、有效的学习资源至关重要．

为了给对数学感兴趣的初中资优生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，笔者以中考数学难题和国内外初中数学竞赛为背景，根据多年辅导初中数学资优生参加中考数学和初中数学竞赛积累的素材、经验和体会，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（七年级、八年级、九年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（七年级、八年级、九年级）．

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分．

培优篇　按照初中数学教科书的进度分专题编写，在内容的安排上力求与课堂教学同步，采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往中考数学、著名重点高中自主招生和初中数学竞赛的捷径；在学生力所能及的范围内帮助学生扩展知识视野，提高思维能力；在有利于学生把初中数学教材知识巩固深化的同时，又恰到好处地为学生拓宽有关中考数学、自主招生和竞赛数学的知识．

竞赛篇　以初中数学竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生创新与发现的灵感．这类问题涉及的数学知识较少而包含的技巧性强，理解和解决时往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法相当困难，没有固定的模式可套．它要求学生去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、构造、对应、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法技巧，发现规律，找到解决问题的途径，这恰是数学竞赛试题应有的风格．

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下．

名人名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅．

知识方法述要：详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和考点，对于初中数学教科书中没有的内容，尽可能给出新知识、新方法的产生背景．

例题精讲：含“分析”“解”和“评注”，从易到难，拾级而上，由基础题、提高题、综合题组成．部分例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系．总之，评注一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然．

同步训练：含选择题、填空题、解答题，遵循因材施教原则，同步训练题的设置兼顾多个层次的学习需求，分为 A，B，C 三层，便于分层教学，师生在实际教学中可按需取舍．例如，对于数学基础较好的学生，可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题；对于数学基础较弱的学生，可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题．为方便自学，在书后每题均给出了详细解答过程．

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测．书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度．《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果．

本书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸显科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析解决问题能力的培养．希望通过学习本书，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而增强学习数学的兴趣．

数学大师陈省身为 2002 年 8 月在北京举行的第 24 届国际数学家大会题词：“数学好玩．”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣．著名数学家陈景润说：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到!”

本书是初中生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点高中自主招生、破解中考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友．

在本书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢．由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正．

2023 年 5 月于深圳中学新校区

目　　录

培优篇/1

竞赛篇/166

优 培优篇

第1讲　有理数和数轴

> 数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞？
> 数缺形时少直观，形少数时难入微.
> 数形结合百般好，隔离分家万事休.
> 切莫忘，几何代数统一体，永远联系，切莫分离.
>
> ——华罗庚

知识方法述要

从算术到代数，数学进入了一个全新的世界.由于表示相反意义的量的需要，引入了正、负数的概念.数的概念由小学算术中的数扩展到有理数.

1. 正数和负数

自然界有许多具有相反意义的量，如上升与下降、向东与向西、盈余与亏损等，这些量都可以用正、负数来表示.

如$+5$，$+78$，$+2.4$等带有正号的数叫正数，正号通常可以省略.如-65，-78，-92.4等带有负号的数叫负数."0"既不是正数，也不是负数，它是正数和负数的界限，它小于一切正数，而大于一切负数，是唯一的没有符号的数.

2. 有理数的分类

(1) $\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ 0\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$　(2) $\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{正分数}\end{cases}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}$　(3) $\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{有限小数}\\ \text{无限循环小数}\end{cases}\end{cases}$

3. 数轴

如图1-1所示，规定了原点O、正方向和单位长度的直线称为数轴，其中原点O、正方向和单位长度称为数轴的三要素.

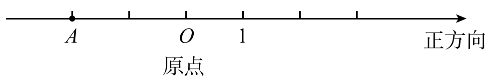

图1-1

数轴能形象地表示数，每个有理数都能用数轴上的一个点来表示，这个点称为有理点. 例如：-2用数轴上的点A表示. 数轴上的某些点(有理点)也可以用一个有理数来表示，原点表示的数是0，正有理数用原点右边的点表示，负有理数用原点左边的点表示，所有的有理数都可以在数轴上找到对应的点.

4. 有理数比大小

数轴上的两个有理数，右边的数总比左边的数大，因此有理数比较大小的规律是：正数大于0，0大于一切负数，负数小于0，正数大于一切负数.

5. 有理数的有序性

对于任意两个有理数a和b，在$a<b$，$a>b$，$a=b$三种关系中，有且只有一种成立. 而且，如果$a>b$，$b>c$，则有$a>c$，我们称有理数的这种性质为**有理数的有序性**. 在数轴上，两个有理数a和b，它们在数轴上对应两个有理点A和B. 这两个有理点或者重合，或者A更靠近正方向，或者B更靠近正方向，三者必居其一.

6. 相反数

只有符号不同的两个数互为相反数，其中一个数叫另一个数的相反数，0的相反数是0. 互为相反数的两个数的和为0.

在数轴上，位于原点两边且与原点距离相等的两个点所表示的数互为相反数，例如：图1-2中的两个点b和$-b$所表示的数是相反数.

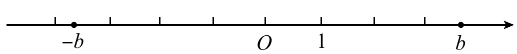

图1-2

7. 有理数的表示

有理数是整数与分数的统称. 由于整数可以看作分母为1的分数，所以有理数都是两个整数的比. 由此可见，任何一个有理数都可以化为既约分数$\frac{m}{n}$(m，n为整数，$n\neq0$，m，n互质)的形式. 反过来，任何一个可以表示为$\frac{m}{n}$(m，n为整数，$n\neq0$，m，n互质)这种形式的数，一定是有理数.

例题精讲

【例 1-1】下面是 6 个结论：

① 任何有理数都有相反数；

② 一个有理数和它的相反数之间必有一个负有理数；

③ 任何有理数都有倒数；

④ 数轴上的每一个点都有一个有理数与这个点对应；

⑤ 圆周率 π 的相反数是有理数；

⑥ 数轴是带有方向的一条直线；

其中正确结论是(　　).

【答案】①.

解　0 的相反数是 0，所以②不正确；0 没有倒数，所以③不正确；从数轴性质可知④不正确；圆周率 π 是无限不循环小数，不是有理数，⑤不正确；规定了原点、正方向和单位长度的一条直线称为数轴，⑥不正确.

【例 1-2】文具店、书店和玩具店依次坐落在一条东西走向的大街上，文具店在书店西边 20 m 处，玩具店在书店东边 100 m 处，小明从书店沿街向东走了 40 m，接着又向东走了 −60 m，此时小明的位置在(　　).

A. 文具店　　B. 玩具店

C. 文具店西边 40 m　　D. 玩具店东边 −60 m

【答案】A.

解　由题意可以画出图 1-3：

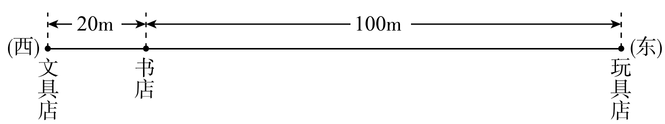

图 1-3

因为向东走了 −60 m 就是向西走了 60 m. 所以小明从书店向东走了 40 m，再向西走了 60 m，结果是小明的位置在书店西边 20 m，也就是文具店的位置.

【例 1-3】如图 1-4 所示，在数轴上有 6 个点，且 $AB=BC=CD=DE=EF$，则与点 C 所表示的数最接近的整数是(　　).

A. −1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

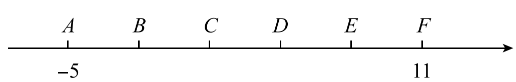

图 1-4

【答案】C.

解　AF 的长度为 $11-(-5)=16$，所以每两个相邻的点之间的距离为 $\frac{16}{5}$，于是点 C 对应

的数为$-5+2\times\frac{16}{5}=1\frac{2}{5}$.所以与点$C$所表示的数最接近的整数是1.

评注 解有关数轴的问题,需要仔细观察点在数轴上的位置,判断点所对应的数的符号,了解不同点所对应的数之间的大小关系和数量关系.

【例1-4】a,b,c在数轴上的位置如图1-5所示.

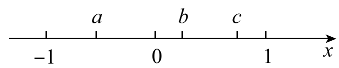

图1-5

则$-\frac{1}{a}$,$-a$,$c-b$,$c+a$中最大的一个是(　　).

A. $-a$　　B. $c-b$　　C. $c+a$　　D. $-\frac{1}{a}$

【答案】D.

解 从图1-5可见,$-1<a<0$,$0<b<c<1$,所以$-1<c+a<1$.

又因为$c-b<1-0=1$,$-1<a<0$,所以$0<-a<1$,故$-\frac{1}{a}>1$.

因此$-\frac{1}{a}$,$-a$,$c-b$,$c+a$中最大的一个是$-\frac{1}{a}$,故选D.

评注 在数轴上表示的两个数,右边的数总比左边的数大,因此,正数都大于0,负数都小于0,正数大于一切负数.这些结论对比较有理数大小非常有用.

【例1-5】如图1-6所示,圆的周长为4个单位长度,在圆的四等分点处标上数字0,1,2,3.先让圆周上数字0所对应的点与数轴上的数-1所对应的点重合,再将数轴逆时针方向绕在该圆上,那么数轴上的数-2006将与圆周上哪个数字重合?

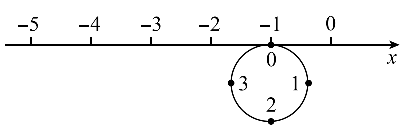

图1-6

解 不难看出:数轴上的数中4的倍数,对应圆周上的数1;数轴上的数中被4除余1的数,对应圆周上的数2;数轴上的数中被4除余2的数,对应圆周上的数3;数轴上的数中被4除余3的数,对应圆周上的数4.

因为$-2006=-502\times4+2$,所以数轴上的数-2006与圆周上的数字3相对应.

【例1-6】求证:两个有理数的和仍是有理数.

分析 只要设法证明两个有理数的和可以表示为$\frac{m}{n}$的形式就可以了.

证明 设两个有理数分别为$\frac{a}{b}$,$\frac{c}{d}$,其中a,b,c,d是整数,并且$b\neq0$,$d\neq0$.

因为$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$,而两个整数的和与积仍是整数,$ad+bc$,$bd$都是整数,

所以$\dfrac{ad+bc}{bd}$是有理数.

故$\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$是有理数,即两个有理数的和仍是有理数.

评注　一般地,任意两个有理数的和、差、积和商(除数不为零)仍是有理数,这就是有理数四则运算的**封闭性**.

【例 1-7】 求证:任意两个不等的有理数之间存在无限多个有理数.

分析　对于任意两个不等的有理数,它们之间必然存在一个有理数.例如,对于 a 与 b(不妨设 $a<b$),有 $c=\dfrac{a+b}{2}$满足 $a<c<b$(c 是有理数).翻译为数轴的语言就是:如图 1-7 所示,数轴上任意两个不同的有理点之间必有有理点.

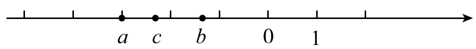

图 1-7

证明　设任意两个有理数 a,b,且 $a\neq b(a<b)$.

因为$\dfrac{a+b}{2}-a=\dfrac{b-a}{2}>0$,$\dfrac{a+b}{2}-b=\dfrac{a-b}{2}<0$,所以 $a<\dfrac{a+b}{2}<b$.

因为 a,b 为有理数,所以$\dfrac{a+b}{2}$也为有理数.

即在 a,b 之间存在有理数$\dfrac{a+b}{2}$.

同理,a 与$\dfrac{a+b}{2}$,$\dfrac{a+b}{2}$与 b 之间也存在有理数.这一过程可以无限地进行下去,所以 a,b 之间存在无穷多个有理数.

评注　有理数的这一性质叫作有理数的稠密性,它表明无论两个有理数多么接近,在它们之间仍有无限多个有理数.在数轴上,表现为在任意两个有理点之间都存在无限多个有理点(数轴上坐标是有理数的点叫作有理点),而整数就不具稠密性,整数在数轴上是离散的点.

【例 1-8】 如图 1-8 所示,数轴上标有 $2n+1$ 个点,对应的整数是

$$-n,\ -(n-1),\ \cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n-1,n$$

它们称为整点.为了确保从这些点中可以任取 2006 个,且其中任何两个点之间的距离都不等于 4,求 n 的最小值.

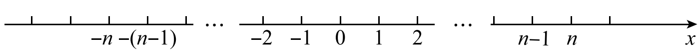

图 1-8

解　首先注意 8 个连续的点,如 0,1,2,3,4,5,6,7.从中可取前 4 个数 0,1,2,3,其中任何两个点的距离都不等于 4.

又由于这 8 个点可以分为 4 组,每组两个点的距离为 4:(0,4),(1,5),(2,6),(3,7),所以每一组只能选一个点,8 个点中只能选出 4 个点,任何两个点之间的距离都不等于 4.

因为 $2006=4\times501+2$,$8\times501+2=4010$,所以在 $n=2005$ 时,$2n+1=4011$,从左到右,每8个连续的点中取前4个点,剩下的3个点中取2个,共取2006个点,任何两点间的距离都不等于4.

另一方面,如果 $n\leqslant2004$,那么 $2n+1\leqslant4009$.从左到右,每8个连续点为一组,至多502组,其中最后一组只有1个点.因此不论怎么取2006个点,前501组中总有一组取的点多于4个,从而有两个点的距离为4.

综上所述,n 的最小值是2005.

同步训练

A组

1. 下列结论中,正确的有(　　)个.

① 两个正数的和一定是正数;

② 两个正数的差可以是正数;

③ 两个负数的和一定是负数;

④ 两个负数的差可以是负数.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

2. 一个数与它的倒数、相反数比较,总是这个数最大,而这个数的相反数最小,那么(　　).

A. 这个数是正整数　　B. 这个数是正的真分数

C. 这个数是负的假分数　　D. 以上说法都不对

3. 数轴上坐标是整数的点称为整点. 某数轴的单位长度是1 cm,若在这个数轴上随意画出一条长为1995 cm的线段 AB,则线段 AB 盖住的整点有(　　)个.

A. 1994或1995　　B. 1994或1996　　C. 1995或1996　　D. 1995或1997

4. 如图1-9所示,有一个半径为 $\frac{1}{2}$ 个单位长度的圆,将圆上的点 A 放在原点,并把圆沿数轴逆时针滚动一周,点 A 到达点 A' 的位置,则点 A' 表示的数是________.

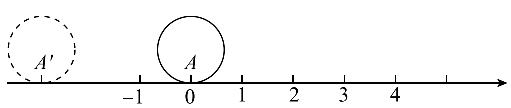

图1-9

5. 如果数轴上点 A 到原点的距离为3,点 B 到原点的距离为5,那么 A,B 两点的距离为________.

6. 若 x,y 都是有理数,且使得四个互不相等的数 $x+4$,$2x$,$2y-7$,y 能分成两组,每组的两个数互为相反数,则 $x+y$ 的值等于________.

7. 已知数轴上有 A,B 两点,A,B 之间的距离为1,点 A 与原点 O 的距离为3,求所有满足条件的点 B 与原点 O 的距离之和.

8. 电子跳蚤落在数轴上的某点 k_0,第一步从 k_0 向左跳1个单位到 k_1,第二步由 k_1 向右跳

2 个单位到 k_2，第三步由 k_2 向左跳 3 个单位到 k_3，第四步由 k_3 向右跳 4 个单位到 k_4，……按以上规律跳了 100 步时，电子跳蚤落在数轴上的点 k_{100} 所表示的数恰是 19.94. 问：电子跳蚤的初始位置点 k_0 所表示的数是多少？

B 组

9. 数轴上的点 A，B，C 分别对应数 0，-1，x，C 与 A 的距离大于 C 与 B 的距离，则(　　).

A. $x>0$　　B. $x>-1$　　C. $x<-\frac{1}{2}$　　D. $x<-1$

10. 若有理数 a，b 在数轴上的位置如图 1-10 所示，则下列各式中错误的是(　　).

A. $-ab<2$　　B. $\frac{1}{b}>-\frac{1}{a}$　　C. $a+b<-\frac{1}{2}$　　D. $\frac{a}{b}<-1$

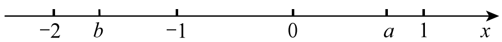

图 1-10

11. 一滴墨水洒在一个数轴上，如图 1-11 所示，试根据图中标出的数值，判定墨迹盖住的整数共有________个.

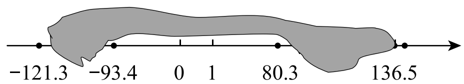

图 1-11

12. 数轴上 10 个点所表示的数分别为 a_1，a_2，…，a_{10}，且当 i 为奇数时，$a_{i+1}-a_i=2$，当 i 为偶数时，$a_{i+1}-a_i=1$，那么 $a_{10}-a_6=$________.

13. 在比有理数 a 小的有理数中，有没有最大的数？

C 组

14. 将有理数 $\frac{85}{84}$，$-\frac{88}{87}$，$\frac{84}{83}$，$-\frac{87}{86}$，$\frac{86}{85}$ 两两相乘得到 10 个积，将这 10 个积按从大到小的顺序排列，问：第 5 个是哪两个有理数的乘积？

15. 已知 x_1，x_2，…，x_{100} 的取值只可能是 1 和 -1. 若 $x_1+x_2+\cdots+x_{100}=4$，$x_1\geqslant x_2\geqslant\cdots\geqslant x_{100}$，求 $x_1+2x_2+3x_3+\cdots+100x_{100}$ 的值.