高中数学一课一练

(选择性必修二)

主编　朱华伟
编者　董正林　周峻民　林　健

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是《高中数学精讲(选择性必修二)》(ISBN：9787302655947)的配套练习册，涵盖新高考所有知识点和考题类型. 每章精选习题，循序渐进、拾级而上，遵循因材施教原则，习题设置兼顾多个层次的学习需求，分为 A，B，C 三层，适合分层教学，学生在实际使用中可以按需取舍. 数学基础较好的学生，可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题；数学基础较弱的学生，可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题. 书后附有所有习题的详细解答.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生的学生学习使用，也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签，无标签者不得销售。

版权所有，侵权必究。举报：010-62782989，beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

高中数学一课一练. 选择性必修二 / 朱华伟主编. —北京：清华大学出版社，2024.3

ISBN 978-7-302-65595-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①中学数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 021478 号

责任编辑：王 定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：马遥遥
责任印制：丛怀宇

出版发行：清华大学出版社
网 址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-83470000 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：13 **字 数**：292 千字
版 次：2024 年 3 月第 1 版 **印 次**：2024 年 3 月第 1 次印刷
定 价：59.80 元

产品编号：102856-01

前　言

课程是学校教育的载体，办好一所学校的落脚点在提升教育质量，提升教育质量的关键点在课程.我国实行的是国家、地方、学校三级课程管理体制，因此学校就有了一定的课程开发自主权，即校本课程.近年来，深圳中学竭尽所能创新开发、打磨完善了一系列高水平的校本课程，目前校本课程已开设有360余门，内容丰富、涵盖面广.同时，我一直鼓励并支持参与校本课程开发的教师，在经验成熟的基础上将教学实践成果化——编写校本教材.

校本课程基于学生差异因材施教，是适合本校学生的课程.20世纪90年代，中国人民大学附属中学、上海中学、华东师范大学二附中、武钢三中、黄冈中学等著名中学为学生开发和编写了具有相当难度和广度的数学学习资料，带动其在高考、竞赛等方面声名鹊起.近年来，深圳中学一直在学习、借鉴、吸取国内外著名中学课程建设的宝贵经验.在深圳中学，我一直倡导在国家数学课程的基础上，学生要学多点、学深点、学难点，要有更多、更好的适合深圳中学学生水平的数学校本课程，给每一位学生提供可充分发展的课程，科学合理地发展学生的智力.目前，深圳中学开设了数学分析、微积分、线性代数、解析几何与群论初步、射影几何、统计学、初等数论、离散数学、算法导论、博弈论、数理经济学原理、逻辑导论、AP微积分、AP统计学等大学先修课程，以及数学文化与数学史、数学思想方法、数学建模、数学问题选讲、数学竞赛、欧氏几何、强基计划数学等选修课；出版了《数学培优竞赛讲座》《数学培优竞赛一讲一练》丛书(三、四、五、六、七、八、九、高一、高二、高三年级，共20册，清华大学出版社).

我从2003年开始参加新课标湘教版高中数学教科书的研发工作，在这个过程中积极向张景中院士等前辈、老师学习，得到了很好的锻炼和提高，后来担任湘教版高中数学教科书的副主编，同时我个人也出版了一些高考备考、数学培优和数学竞赛方面的书籍，对新课标、新教材、新高考有较深入的学习和理解.因此，在深圳中学工作的数年来，我一直希望能够有机会借助自己多年积累的经验，带头开发一套适合所有深圳中学学生的数学校本教材.

众所周知，2022年全国高考数学创下了近些年的难度新高，以此为契机，我决定将这个酝酿多年的想法付诸实施.在2022年高考数学结束后的第二天，我组织深圳中学数学组十余位高三一线教师和骨干教师召开研讨会议，动员大家集思广益、群策群力，编写一套贴合新课标、适应新高考、匹配深圳中学学生水平的深圳中学数学校本教材，于是《高中数学精讲》《高中数学一课一练》丛书应运而生.如今呈现在各位读者面前的这套丛书，凝结了深圳中学数学教师多年来的教学经验、教育智慧和辛勤付出.

在本丛书的撰写过程中，我们以最新的《高中数学课程标准》精神为指导，以高中生数学认知能力为基础，以最新的《高中数学课程标准》知识脉络为主线，以提高学生核心素养为宗旨，对标新高考，注重提升学生数学学习的质量，充分将新课标、新教材和新高考理念融入其中.

《高中数学精讲》涵盖高中数学课程和新高考数学的所有内容，难度不超过高考数学，按

章、节编写,每章开头简明扼要地介绍该章的内容、方法和意义,给出该章的知识结构框图,方便学生形成自己的知识结构.每节包括如下三个栏目.

内容提要:梳理每节中的基本概念、公式、定理,突出重点、难点和数学思想方法技巧,提供一个知识网络,授人以渔.

释疑解惑:通过精心设置的一系列问题与解答,解释学生数学学习过程中经常遇到的疑难问题,主要包括对概念、性质的解析,公式的理解和应用,定理的条件分析和使用要领,方法技巧的归纳总结,对某些似是而非的论断的辨析等,授业解惑.

典型例题:每节精讲具有典型性、新颖性、启迪性的例题,覆盖该节的知识方法技巧,遵循可接受性原则,按由浅入深、从易到难排序,通过分析、求解和点评,介绍与该例题有关的解题方法与技巧,帮助学生归纳解题规律,提高解题能力;每道例题后配有相关性、发展性的练习,帮助学生熟练演算技巧,巩固、拓展、深化对知识的理解和认知,培养分析问题、解决问题的能力,举一反三.

在书的后半部分,我们提供了所有练习题的详细解答,帮助学生自学及自我评价.

与《高中数学精讲》配套使用的是《高中数学一课一练》.

《高中数学一课一练》按章、节编写,涵盖新高考所有知识点,并增加多选题型.每节与《高中数学精讲》对应,精选习题循序渐进、拾级而上,遵循因材施教原则,习题设置兼顾多个层次的学习需求,分为A,B,C三层,适合分层教学,学生在实际使用中可以按需取舍.例如,数学基础较好的学生,可以在完成A组和B组习题的基础上努力尝试完成C组习题;数学基础较弱的学生,可以在完成A组习题的前提下努力尝试完成B组习题.书后附有所有习题的详细解答,《高中数学一课一练》与《高中数学精讲》配套使用,能更好地达到预期的学习效果.

本丛书包括《高中数学精讲》《高中数学一课一练》(必修一、必修二、选择性必修一、选择性必修二),共8册.

本丛书的编委会由深圳中学数学组的优秀中青年教师组成,他们是:洪建明、曾劲松、张红兵、董正林、黄文辉、张文涛、周峻民、许苏华、罗承成、邱际春、赵志伟、林健.在本丛书的编写过程中,我们力求精益求精,但其中难免存在一些疏漏与不足之处,敬请广大读者给予批评指正.

希望更多的同学喜欢数学,取得自己理想的成绩!

朱华伟

2023年6月

目　　录

第1章 导数及其应用

1.1 导数的概念与几何意义

A 组

1. 已知物体做直线运动对应的位移 S 与时间 t 的函数关系为 $S=S(t)$，则 $S'(4)=10$ 表示的意义是（　　）.

A. 经过 4 s 后物体向前走了 10 m　　B. 物体在前 4 秒内的平均速度为 10 m/s

C. 物体在第 4 秒内向前走了 10 m　　D. 物体在第 4 秒时的瞬时速度为 10 m/s

2. 如图 1-1 所示是一个装满水的圆台形容器，若在底部开一个孔，并且任意相等时间间隔内所流出的水体积相等. 记容器内水面的高度 h 随时间 t 变化的函数为 $h=f(t)$，定义域为 D. 设 $t_0\in D$，$t_0\pm\Delta t\in D$，k_1，k_2 分别表示 $f(t)$ 在区间 $[t_0-\Delta t,t_0]$，$[t_0,t_0+\Delta t]$ $(\Delta t>0)$ 上的平均变化率，则（　　）.

A. $k_1>k_2$　　B. $k_1<k_2$

C. $k_1=k_2$　　D. 无法确定 k_1，k_2 的大小关系

3.（多选题）为满足人们对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱. 已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图 1-2 所示，则下列结论中正确的有（　　）.

A. 在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强

B. 在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强

C. 在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放都已达标

D. 甲企业在 $[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 这三段时间中，在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强

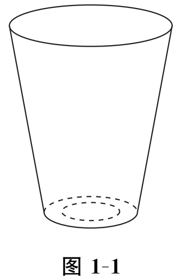


图 1-1

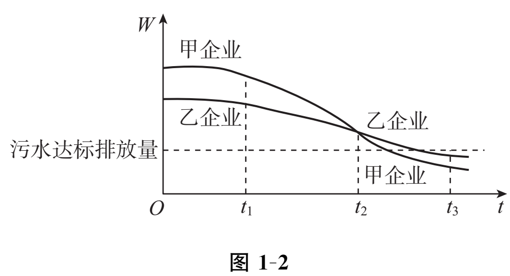


图 1-2

4. 吹气球时,记气球的半径 r 与体积 V 之间的函数关系为 $r(V)$,$r'(V)$ 为 $r(V)$ 的导函数.已知 $r(V)$ 在 $0\leqslant V\leqslant 3$ 上的图像如图 1-3 所示,若 $0\leqslant V_1<V_2\leqslant 3$,则下列结论中正确的是(　　).

A. $\dfrac{r(1)-r(0)}{1-0}<\dfrac{r(2)-r(1)}{2-1}$

B. $r'(1)\leqslant r'(2)$

C. $r\left(\dfrac{V_1+V_2}{2}\right)<\dfrac{r(V_1)+r(V_2)}{2}$

D. 存在 $V_0\in(V_1,V_2)$,使得 $r'(V_0)=\dfrac{r(V_2)-r(V_1)}{V_2-V_1}$

5. 已知奇函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导,其部分图像如图 1-4 所示,设 $a=\dfrac{f(6)+f(-2)}{6-2}$,则 $f'(-2)$,$f'(6)$,a 之间的大小关系为________.(用“<”连接)

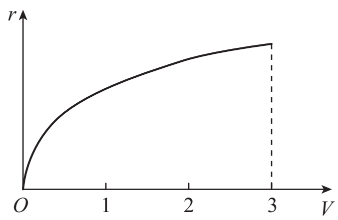


图 1-3

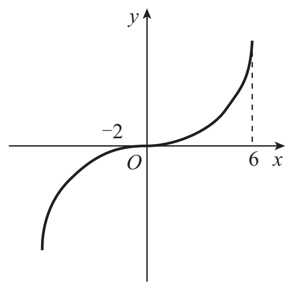


图 1-4

6. 根据 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数的定义可知,当 $d\to 0$ 时,$\dfrac{f(x_0+d)-f(x_0)}{d}\approx f'(x_0)$,据此计算 $\sqrt{9.05}$ 的近似值为________.(精确到小数点后三位)

7. (多选题)曲线 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的倾斜角为 $\dfrac{3}{4}\pi$,则点 $(x_0,f(x_0))$ 的坐标为(　　).

A. $(1,1)$　　B. $(-1,-1)$　　C. $\left(\dfrac{1}{2},2\right)$　　D. $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$

B　组

8. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(5-x)-3}{x-2}=2$,$f(3)=3$,$f(x)$ 在 $(3,f(3))$ 处的切线方程为(　　).

A. $2x+y+9=0$　　B. $2x+y-9=0$

C. $-2x+y+9=0$　　D. $-2x+y-9=0$

9. 已知车轮旋转的角度 θ(单位:rad)与时间 t(单位:s)之间的关系为 $\theta(t)=\dfrac{25\pi}{8}t^2$,则车轮转动开始后第 3.2 s 时的瞬时角速度为________ rad/s.

10. 如图 1-5 所示，现有一个圆柱形空杯子，盛液体部分的底面半径为 2 cm，高为 8 cm. 现用一个注液器向杯中注入溶液，已知注液器向杯中注入的溶液的容积 V（单位：ml）关于时间（单位：s）的函数解析式为 $V=\pi t^3+3\pi t^2(t\geqslant 0)$，不考虑注液过程中溶液的流失，则当 $t=2$ 时，杯中溶液上升高度的瞬时变化率为（ ）.


图 1-5

A. 4 cm/s　　B. 5 cm/s

C. 6 cm/s　　D. 7 cm/s

C 组

11. 已知 $y=f(x)$ 的图像如图 1-6 所示，设 $S(t)(a\leqslant t\leqslant b)$ 是由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=a$，$x=t$ 及 x 轴围成的平面图形的面积，则在区间 $[a,b]$ 上，$S'(t)$ 的最大值为________，最小值为________.

① $S'(a)$；　② $S'(b)$；　③ $S'(c)$.

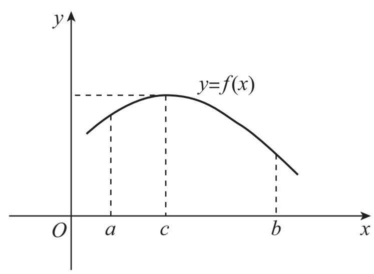


图 1-6

12. 若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$；

若 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 存在，则称 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$ 为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数，记为 $f'_y(x_0,y_0)$. 若二元函数 $f(x,y)=x^2-2xy+y^3$，则下列结论正确的有________.

① $f'_x(1,2)=-2$；　② $f'_y(1,2)=10$；　③ $f'_x(m,n)+f'_y(m,n)$ 的最小值为 -1.

1.2　导数的运算

A　组

1．(多选题)下列结论中正确的有(　　).

A．$(\cos x)'=\sin x$　　B．$(x^{\frac{5}{3}})'=x^{\frac{2}{3}}$

C．$(\log_3 x)'=\dfrac{1}{x\ln 3}$　　D．$(e^{-x})'=-e^{-x}$

2．记 $f_1(x)=\sin x$，当 $n\geqslant 2$ 时，$f_n(x)=f'_{n-1}(x)$，则 $f_{2022}(x)=$(　　).

A．$\cos x$　　B．$-\cos x$　　C．$\sin x$　　D．$-\sin x$

3．(多选题)已知函数 $f(x)$及其导函数 $f'(x)$，若存在 x_0 使得 $f(x_0)=f'(x_0)$，则称 x_0 是 $f(x)$的一个“巧值点”. 下列选项中有“巧值点”的函数是(　　).

A．$f(x)=x^2$　　B．$f(x)=e^{-x}$

C．$f(x)=\ln x$　　D．$f(x)=\tan x$

4．已知函数 $f(x)=e^x\ln x-e^x+a\ln x$ 的图像在点 $T(1,f(1))$处的切线经过坐标原点，则 $a=$(　　).

A．$-e$　　B．e　　C．$-e-e^{-1}$　　D．e^{-1}

5．用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”. 现代建筑讲究线条感，曲线之美让人称奇. 衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若 $f'(x)$是 $f(x)$的导函数，$f''(x)$是 $f'(x)$的导函数，则曲线 $y=f(x)$在点$(x,f(x))$处的曲率 $K=\dfrac{|f''(x)|}{\{1+[f'(x)]^2\}^{\frac{3}{2}}}$，则曲线 $f(x)=\ln x-\cos(x-1)$在$(1,-1)$处的曲率为________.

6．已知 $f(x)$为定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$g(x)=\dfrac{f'(x)}{\ln 2}$，且 $f(x)+g(x)=2^{x+1}$，则函数 $f(x)$的解析式为________.

7．计算下列函数的导数.

(1) $y=e^x\cos x+\sqrt{x}-t^2$(t 为常数)；　　(2) $y=x\ln(1+x^2)$；

(3) $y=\ln(2x+5)^3+\dfrac{\ln x}{x}$；　　(4) $y=e^{1-x}\sin 2x$.

B　组

8. 已知指数函数 $y=f(x)$ 的图像与直线 $y=x$ 相切，则 $f(x)=$________.

9. (多选题)经济学中经常用弹性函数研究函数的相对变化率和相对改变量.一般地，若函数 $f(x)$ 存在导函数 $f'(x)$，则称 $\frac{Ey}{Ex}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}}=f'(x)\cdot\frac{x}{f(x)}$ 为函数 $f(x)$ 的弹性函数，下列说法中正确的是(　　).

A. 函数 $f(x)=C$(C 非零为常数)的弹性函数是 $\frac{Ey}{Ex}=0$

B. 函数 $f(x)=\cos x$ 的弹性函数是 $\frac{Ey}{Ex}=-x\tan x$

C. $\frac{E(f_1(x)+f_2(x))}{Ex}=\frac{E(f_1(x))}{Ex}+\frac{E(f_2(x))}{Ex}$

D. $\frac{E\left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)}{Ex}=\frac{E(f_1(x))}{Ex}-\frac{E(f_2(x))}{Ex}$

10. 设 $(x-1)(2+x)^3=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4$，则 $a_1=$________，$2a_2+3a_3+4a_4=$________.

C　组

11. 已知直线 $y=2x+1$ 与函数 $f(x)=-2\ln x+xe^x+2m$ 的图像相切，则 $m=$________.

12. 已知 $f'(x)$ 是函数 $f(x)$ 的导函数，且对于任意实数 x，都有 $f'(x)=e^x(2x-1)+f(x)$，$f(0)=-1$，则不等式 $f(x)>5e^x$ 的解集为________.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 函数的单调性与导数

A 组

1. 函数 $y=x+\frac{3}{x}+2\ln x$ 的单调递减区间是(　　).

A. $(-3,1)$　　B. $(0,1)$　　C. $(-1,3)$　　D. $(0,3)$

2. 已知函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$,且 $(x+1)f'(x)<0$,则(　　).

A. $f(0)<f(1)$　　B. $f(1)<f(2)$　　C. $f(-1)<f(2)$　　D. $f(-3)<f(-2)$

3. 若函数 $f(x)=2x^2-\ln x$ 在其定义域内的一个子区间 $(k-1,k+1)$ 内不是单调函数,则实数 k 的取值范围是(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $\left[\frac{3}{2},2\right)$　　C. $[1,2)$　　D. $\left[1,\frac{3}{2}\right)$

4. 已知 $f(x)=2xe^x-ax^2-2ax$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增,则实数 a 的取值范围为(　　).

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,e]$

C. $(-\infty,1)$　　D. $(-\infty,e)$

5. (多选题)已知函数 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的图像如图 1-7 所示,设函数 $g(x)=\frac{f(x)}{e^x}$,则下列结论中正确的是(　　).

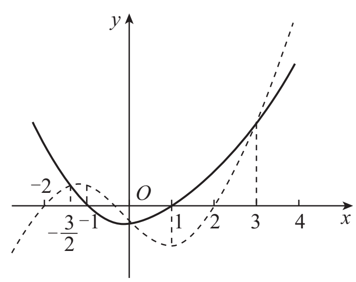


图 1-7

A. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,0)$ 上是减函数,在区间 $(0,+\infty)$ 上是增函数

B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上是增函数,在区间 $(-1,1)$ 上是减函数

C. 函数 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$ 和 $(0,3)$ 上是增函数

D. 函数 $g(x)$ 在 $\left(-\frac{3}{2},0\right)$ 和 $(3,+\infty)$ 上是减函数

6. 已知函数 $f(x)=(a-1)\ln x-\frac{a}{x}-x\ (a\in\mathbf{R})$ 在 $[1,3]$ 上的最大值为 -2,求实数 a 的值.

7. 已知函数 $f(x)=a\ln x+x^2+ax$，$a\in\mathbf{R}$，讨论 $f(x)$ 在定义域内的单调性.

B　组

8. 已知 $a=\ln\sqrt[3]{3}$，$b=e^{-1}$，$c=\dfrac{3\ln 2}{8}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）.

A. $b>c>a$　　B. $a>c>b$　　C. $a>b>c$　　D. $b>a>c$

9. 定义在 $(0,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x)+1>0$，$f(2)=-\ln 2$，则不等式 $f(e^x)+x>0$ 的解集为________.

10. 已知 $f(x)=x^2+2a\ln x+3$，若 $\forall x_1,x_2\in[4,+\infty)$，$(x_1\neq x_2)$，$\exists a\in[2,3]$，$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_1-x_2}<2m$，则 m 的取值范围是________.

C　组

11. 已知函数 $f(x)=e^x+ax+1(a\in\mathbf{R})$，若函数 $f(x)$ 与函数 $f(f(x))$ 的单调区间相同，并且既有单调递增区间，也有单调递减区间，则 a 的取值范围是________.

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2-ax+1}{e^x}(a\in\mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 当 $x\geqslant 0$ 时，关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant\dfrac{a^2}{e}$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

（注：$e=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）

1.3.2 函数的极值与导数

A 组

1. 函数 $f(x)=x^3+\frac{1}{2}x^2-4x$ 的极小值为(　　).

A. $-\frac{4}{3}$　　B. 1　　C. $-\frac{5}{2}$　　D. $\frac{104}{27}$

2. (多选题)已知 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义在 **R** 上的连续函数,如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均当且仅当 $x=0$ 时函数值为 0,且 $f(x)\geqslant g(x)$,那么下列情形可能出现的是(　　).

A. 0 是 $f(x)$ 的极大值,也是 $g(x)$ 的极大值

B. 0 是 $f(x)$ 的极小值,也是 $g(x)$ 的极小值

C. 0 是 $f(x)$ 的极大值,但不是 $g(x)$ 的极值

D. 0 是 $f(x)$ 的极小值,但不是 $g(x)$ 的极值

3. (多选题)已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图像如图 1-8 所示,则下列叙述中正确的是(　　).

A. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-4)$ 上单调递减

B. 函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 处取得极大值

C. 函数 $f(x)$ 在 $x=-4$ 处取得极值

D. 函数 $f(x)$ 只有一个极值点

4. (多选题)如图 1-9 所示,已知直线 $y=kx+m$ 与曲线 $y=f(x)$ 相切于两点,则 $F(x)=f(x)-kx$ 有(　　).

A. 1 个极大值点,2 个极小值点　　B. 2 个零点

C. 0 个零点　　D. 2 个极小值点,无极大值点

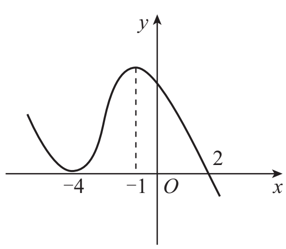


图 1-8

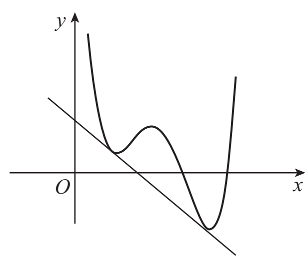


图 1-9

5. 函数 $f(x)=\sin x+x^3-x$ 的极值点个数为(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 4

6. 已知函数 $f(x)=x^2+a\mathrm{e}^x-1(a\in\mathbf{R})$有两个极值点，则实数 a 的取值范围为（　　）.

A. $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$　　B. $\left(-\frac{2}{\mathrm{e}},0\right)$　　C. $\left(-\frac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$　　D. $\left(-\frac{2}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

7. 已知函数 $f(x)=x^2-a\ln(2x+1)$在定义域内不存在极值点，则实数 a 的取值范围是________.

B　组

8. 已知函数 $f(x)=x^4+ax^3+2x^2+b$，其中 $a,b\in\mathbf{R}$. 若 $f(x)$仅在 $x=0$ 处有极值，则 a 的取值范围是________；若 $a=4$，则 $f(x)$的所有极值点之和为________.

9.（多选题）已知函数 $f(x)=ax^2-\mathrm{e}^x$ 有两个极值点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$，则下列结论中正确的是（　　）.

A. $a<\frac{\mathrm{e}}{2}$　　B. $0<x_1<1$

C. $-\frac{\mathrm{e}}{2}<f(x_1)<-1$　　D. $x_1\mathrm{e}^{x_2}>1$

10. 讨论函数 $f(x)=\ln(x+1)+a(x^2-x)$，其中 $a\in\mathbf{R}$ 的极值点情况.

C　组

11. 已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$.

(1) 若 $a=0$，证明：当$-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

(2) 若 $x=0$ 是 $f(x)$的极大值点，求 a.

12. 已知函数 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-ax^2-(2a+1)x$，$a\in\mathbf{R}$.

(1) 若 $f(x)$在定义域内是减函数，求 a 的最小值；

(2) 若 $f(x)$有两个极值点分别是 x_1,x_2，证明：$x_1+x_2>\frac{1}{a}-2$.

1.3.3 三次函数的性质:单调区间与极值

A 组

1. 函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 在$[-3,5]$上的最小值为(　　).

A. -9　　B. $-\frac{13}{3}$　　C. 0　　D. $\frac{5}{3}$

2. 已知函数 $f(x)=2x^3-mx^2+2(m>0)$的单调递减区间为(a,b),若 $b-a\leqslant 2$,则 m 的最大值为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 6

3. 已知函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+3$,若函数 $g(x)=f(x)-m$ 在$[-2,5]$上有三个零点,则 m 的取值范围为(　　).

A. $(-24,8)$　　B. $(-24,1]$　　C. $[1,8]$　　D. $[1,8)$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x\geqslant 0,\\ -x^3+3x+a, x<0\end{cases}$ 的值域为$[1,+\infty)$,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $[1,+\infty)$　　B. $(1,+\infty)$　　C. $(3,+\infty)$　　D. $[3,+\infty)$

5. (多选题)已知函数 $f(x)=x^3-x+1$,则(　　).

A. $f(x)$有两个极值点　　B. $f(x)$有三个零点

C. 点$\left(0,\frac{1}{2}\right)$是曲线 $y=f(x)$的对称中心　　D. 直线 $y=2x-1$ 是曲线 $y=f(x)$的切线

6. 若函数 $f(x)=x^3-ax^2+1$ 在区间$(0,2)$内单调递减,则实数 a 的取值范围为________.

7. 已知函数 $f(x)=x^3+x$,$g(x)=-x^2+a$,曲线 $y=f(x)$在点$(x_0,f(x_0))$处的切线也是曲线 $y=g(x)$的切线.

(1) 若 $x_0=1$,求 a;

(2) 求 a 的取值范围.

B 组

8. 已知函数 $f(x)=(a-3)x-ax^3$ 在$[-1,1]$上的最小值为-3,则实数 a 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-1]$　　B. $[12,+\infty)$　　C. $[-1,12]$　　D. $\left[-\frac{3}{2},12\right]$

9. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x+b(a,b\in\mathbf{R})$.

(1) 若 $f(x)$有两个极值点,求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1,x_2 分别是 $f(x)$的极大值点与极小值点,若$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant 32$,求 a 的取值范围.

10. 已知 $f(x)=x^3-6ax^2+9a^2x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 讨论函数的单调性;

(2) 当 $a>0$ 时,若 $\forall x\in[0,3]$,$f(x)\leqslant 4$,求实数 a 的取值范围.

C　组

11. (多选题)已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+2x$,设方程 $f(x)=t(t>0)$的三个根分别为 $x_1,x_2,x_3(x_1<x_2<x_3)$,则下列说法中正确的是(　　).

A. $x_1+x_2>x_3$

B. $x_1+x_2+x_3=3$

C. $f\left(\frac{2}{7}x_1+\frac{3}{7}x_2+\frac{2}{7}x_3\right)<t$

D. 若 $x_i+x_{i+3}=2(i=1,2,3)$,则 $f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)=0$

12. 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1(a>0,b\in\mathbf{R})$有极值,且 $f'(x)$的极值点是 $f(x)$的零点.

(1) 求 b 关于 a 的函数关系式,并写出定义域;

(2) 若 $f(x)$,$f'(x)$这两个函数的所有极值之和不小于$-\frac{7}{2}$,求实数 a 的取值范围.

1.3.4 不等式的证明与导数

A 组

1. 证明:$x\ln x+2>x-\dfrac{2}{x}$.

2. 证明:$xe^{x}\geqslant x+\ln x+1$.

3. 已知函数 $f(x)=x^{2}+ax+2\ln x(a\in\mathbf{R})$,且 $f(x)$在定义域内有两个极值点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设函数 $f(x)$的两个极值点分别为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$,求 $f(x_1)-f(x_2)$的取值范围.

4. 若 $0<a\leqslant1$,证明:$ax\ln x+x^{2}<e^{x}+x-1$.

5. 已知函数 $f(x)=ax-1-\ln x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 若函数 $f(x)$的最小值为 0,且对 $\forall x\in(0,+\infty)$,$f(x)\geqslant bx-2$,求实数 b 的取值范围;

(2) 当 $0<x<y<e^{2}$ 且 $x\neq e$ 时,试比较$\dfrac{y}{x}$与$\dfrac{1-\ln y}{1-\ln x}$的大小.

6. 已知函数 $f(x)=x-\ln(x+1)-kx^2(k\in\mathbf{R})$.

(1) 当 $k=\dfrac{1}{2}$时,讨论函数 $f(x)$在$[0,+\infty)$上的单调性;

(2) 证明:$\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2}{2i+1}-\ln(2n+3)<0,n\in\mathbf{N}_+$.

B　组

7. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-1-x-ax^2,x\geqslant0$,且 $f(x)\geqslant0$ 恒成立.

(1) 求实数 a 的最大值;

(2) 证明:$f(x)+x\sin x\geqslant0$.(参考数据:$\mathrm{e}^{\pi}=23.1$)

8. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}ax^2-x+2a^2\ln x(a\neq0)$.

(1) 讨论 $f(x)$的单调性;

(2) 若 $f(x)$存在两个极值点 x_1,x_2,证明:$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

9．已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x(k\in\mathbf{R})$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数.

(1) 当 $k=6$ 时，

① 求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

② 求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\dfrac{9}{x}$的单调区间和极值.

(2) 当 $k\geqslant-3$ 时，求证：对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有$\dfrac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

10．已知函数 $f(x)=nx-x^n$，$x\in\mathbf{R}$. 其中 $n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant2$.

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 设曲线 $y=f(x)$与 x 轴正半轴的交点为 P，曲线在点 P 处的切线方程为 $y=g(x)$. 求证：对于任意的正实数 x，都有 $f(x)\leqslant g(x)$；

(3) 设 $n=5$，若关于 x 的方程 $f(x)=a$(a 为实数)有两个正实根 x_1,x_2，求证：$|x_2-x_1|<2-\dfrac{a}{4}$.

C　组

11. 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数，且 $b\ln a-a\ln b=a-b$，证明：$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$.

12. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-x+\mathrm{e}^3a$，其中 $-\dfrac{6}{5}\leqslant a<\dfrac{3}{\mathrm{e}^3}-1$，函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$上的零点为 x_0，函数 $g(x)=\begin{cases}x+a-\dfrac{x-a}{\mathrm{e}^x},0\leqslant x\leqslant x_0,\\(1-x)\ln x-a(x+1),x>x_0.\end{cases}$

(1) 证明：①$3<x_0<4$；②函数 $g(x)$有两个零点；

(2) 设 $g(x)$的两个零点为 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，证明：$\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}-x_2}{\mathrm{e}^{x_1}-x_1}>\mathrm{e}^{\frac{x_1+x_2}{2}}$.

(参考数据：$\mathrm{e}\approx2.72$，$\mathrm{e}^2\approx7.39$，$\mathrm{e}^3\approx20.09$，$\ln2\approx0.69$，$\ln3\approx1.1$)

1.3.5 不等式的恒成立(存在性)问题与导数

A 组

1. 若存在 $x\in(-1,1]$,使得 $e^{2x}-ax<a$ 成立,则实数 a 的取值范围是( ).

A. $\left(-\infty,\frac{2}{e}\right)$ B. $\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$ C. $\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$ D. $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$

2. 已知函数 $f(x)=x^2-\ln x$, $x\in[1,e]$,若存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in[1,e]$,使得 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_{n-1})\leqslant f(x_n)$成立,则正整数 n 的最大值为( ).

A. 7 B. 6 C. 5 D. 4

3. 已知函数 $f(x)=a(x+1)e^x-x$,若存在唯一的正整数 x_0,使得 $f(x_0)<0$,则实数 a 的取值范围是( )

A. $\left[-\frac{1}{2e},\frac{3}{4e^3}\right)$ B. $\left[\frac{3}{4e^3},\frac{2}{3e^2}\right)$ C. $\left[\frac{2}{3e^2},\frac{1}{2e}\right)$ D. $\left[\frac{1}{2e},\frac{1}{2}\right)$

4. 不等式 $ae^x+x\ln x-2x+1\geqslant 0$ 恒成立,则实数 a 的取值范围为________.

5. 若 $\forall x>0$, $\ln x+2+\frac{a}{x}\geqslant b(a>0)$,则$\frac{b}{a}$的最大值为________.

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3-ax+1, 0\leqslant x<1,\\ a\ln x, x\geqslant 1,\end{cases}$ 若 $f(x)\geqslant f(1)$恒成立,则正实数 a 的取值范围是________.

B 组

7. 已知函数 $f(x)=(x-a)^2+(2\ln x-2a)^2$,若存在 x_0,使得 $f(x_0)\leqslant\frac{4}{5}$成立,则实数 $a=$________.

8. 若$\frac{1+\ln(x+1)}{x}>\frac{k}{x+1}$对 $\forall x\in(0,+\infty)$恒成立,则正整数 k 的最大值为________.

9. 已知函数 $f(x)=ax+\ln x+1$,若对任意的 $x>0$, $f(x)\leqslant xe^{2x}$ 恒成立,求实数 a 的取值范围为________.

10. 已知 $f(x)=e^x\sin x$,若对 $\forall x_1,x_2\in[0,\pi]$, $x_1<x_2$,都有$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2^2-x_1^2}+a>0$ 成立,求实数 a 的取值范围.

C　组

11. 已知函数 $f(x)=x-a\ln x-1$，$a>0$.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上不单调，求 a 的取值范围；

(2) 若不等式 $a(x-1)\mathrm{e}^{x}\geqslant|f(x)|$ 对 $\forall x\in[1,+\infty)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

12. 已知函数 $f(x)=\ln(x+1)-x+a(1-\cos x)$.

(1) 当 $a=0$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1,f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}-1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2) 若存在正实数 t，使得当 $x\in(-t,t)$ 时，$xf(x)\geqslant 0$ 恒成立，求实数 a 的值.

单元测试

一、单选题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 若曲线 $y=f(x)$ 在某点 $(x_0,f(x_0))$ 处切线的斜率为 1,则该曲线不可能是(　　).

A. $y=-\dfrac{1}{x}$　　B. $y=\sin x$　　C. $y=xe^x$　　D. $y=x+\ln x$

2. 函数 $f(x)=\cos 2x+\sin x$,$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$的极值点为 x_0,则 $\tan x_0$ 的值为(　　).

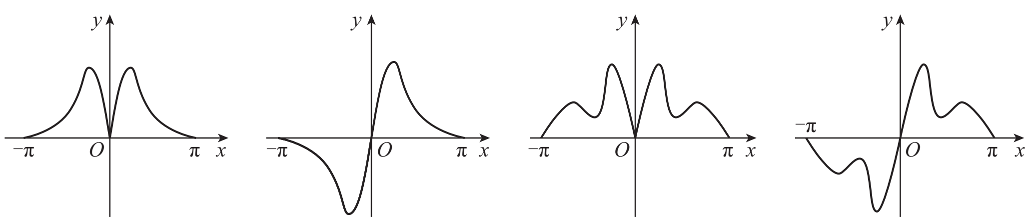
A. $\dfrac{\sqrt{15}}{15}$　　B. $\sqrt{15}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3. 若函数 $f(x)=x^3-12x$ 在区间 $(k-1,k+1)$ 上不是单调函数,则实数 k 的取值范围是(　　).

A. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,-3]\cup[-1,1]\cup[3,+\infty)$

C. $(-2,2)$　　D. $(-3,-1)\cup(1,3)$

4. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^{|x|}}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上大致的图像为(　　).



A.　　B.　　C.　　D.

5. 若 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+b\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数,则 b 的取值范围是(　　).

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$　　C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-\infty,-1)$

6. 已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{3}x^3+x$ 在区间 (a^2-6,a) 上有最小值,则 a 的取值范围为(　　).

A. $(-1,2]$　　B. $(-1,\sqrt{5}]$　　C. $(-2,2]$　　D. $(-1,1]$

7. 若对任意的 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,有 $\dfrac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_2-x_1}<2$,则 m 的最小值是(　　).

A. $\dfrac{2}{e}$　　B. $\dfrac{1}{e}$　　C. $\dfrac{1}{e^2}$　　D. $\dfrac{e}{4}$

8. 函数 $f(x)=x\ln x+a(a>0)$ 的导数为 $f'(x)$，若方程 $f'(x)=f(x)$ 有两个不同的实数根，则实数 a 的取值范围为(　　).

A. $(0,1)$　　B. $(1,\sqrt{2})$　　C. $(1,\sqrt{3})$　　D. $(1,+\infty)$

二、多选题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 函数 $f(x)$ 的导函数是 $f'(x)$，如图 1-10 所示是函数 $y=(x+1)\cdot f'(x)(x\in\mathbf{R})$ 的图像，则下列说法中正确的是(　　).

A. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的零点

B. $x=2$ 是 $f(x)$ 的极大值点

C. $f(x)$ 在区间 $(-2,-1)$ 上单调递减

D. $f(x)$ 在区间 $[-2,2]$ 上不存在极小值

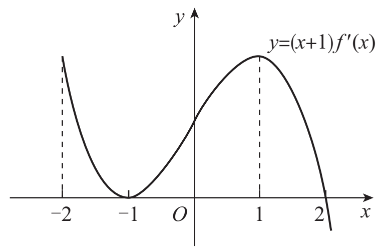


图 1-10

10. 已知函数 $f(x)=e^x-1$，对于满足 $0<x_1<x_2<e$ 的任意 x_1,x_2，下列结论中正确的是(　　).

A. $(x_2-x_1)(f(x_2)-f(x_1))>0$　　B. $x_2f(x_1)>x_1f(x_2)$

C. $f(x_2)-f(x_1)>x_2-x_1$　　D. $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

11. 若 $a=\dfrac{1}{11},b=\sin\dfrac{1}{10},c=\ln\dfrac{11}{10}$，则(　　).

A. $c<a$　　B. $a<c$　　C. $c<b$　　D. $b<c$

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},g(x)=\dfrac{3x+1}{3x^2}$，则下列结论中正确的有(　　).

A. $f(x)$ 有一个零点

B. $f(3)<f(2)<f(e)$

C. $h(x)=g(f(x))-6$ 有三个零点

D. 设实数 $a>0$，若 $x^3f(x)\geqslant ae^{\frac{a}{x}}$ 对任意的 $x\in[e,+\infty)$ 恒成立，则 a 的最大值为 e

三、填空题(本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 已知 $x=a$ 是函数 $f(x)=x^3-(a+3)x^2+5x$ 的极小值点，则 $a=$________.

14. 已知函数 $f(x)=2\ln x,g(x)=x+2$，若 $f(x_1)=g(x_2)$，则 x_1-x_2 的最小值为________.

15. 已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}ax^2$ 的两个极值点，且 $x_2=2x_1$，则实数 a 的值为________.

16. 设函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$ 满足 $f(1)+f(3)=2f(2)$，现给出如下结论：

① 若 $f(x)$ 是 $(0,1)$ 上的增函数，则 $f(x)$ 是 $(3,4)$ 上的增函数；

② 若 $a\cdot f(1)\geqslant a\cdot f(3)$，则 $f(x)$ 有极值；

③ 对任意实数 x_0,直线 $y=(c-12a)(x-x_0)+f(x_0)$与曲线 $y=f(x)$有唯一公共点.

其中正确结论为________.

四、解答题(本题共 6 小题,第 17 小题 10 分,第 18,19,20,21,22 小题每小题 12 分,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax(a\in\mathbf{R})$.

(1) 证明:有且仅有两条经过原点的直线与曲线 $y=f(x)$相切;

(2) 记(1)中两条切线分别为 l_1,l_2,设 l_1,l_2 与曲线 $y=f(x)$异于原点 O 的公共点分别为 A,B. 若 $a=1$,求 $\cos\angle AOB$ 的值.

18. 已知函数 $f(x)=ax-e^x(a\in\mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$的单调区间;

(2) 设 $g(x)=-\frac{3}{2}x^2+ax-1$,求证:$\forall x\in[0,1]$,$f(x)\leqslant g(x)$.

19. 设函数 $f(x)=\ln(x+1)$.

(1) 求函数 $f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程;

(2) 若方程 $f(x)=mx$ 在区间$[0,e^2-1]$上有两个解,求实数 m 的取值范围.

20. 已知函数 $f(x)=x^2+mx+2\ln x$.

(1) 讨论 $f(x)$的极值点个数;

(2) 若$\forall x>0$,$f(x)-2e^x-3x^2\leqslant 0$,求实数 m 的取值范围.

21. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}ax^2-(a+1)x+\ln x, a>0$.

(1) 讨论函数 $f(x)$的单调性;

(2) 当 $a=1$ 时,设 $g(x)=f(x)+(3-m)x-(x+1)\ln x(m\in\mathbf{R})$,函数 $g(x)$有两个极值点 $x_1, x_2(x_1<x_2)$. 若 $3x_1\geqslant x_2$,求证:$x_1+x_2\leqslant 2\ln 3$.

22. 已知 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+a\sin x$.

(1) 若在 $x=\pi$ 处切线的斜率是 $\pi-2$,求当 $\lambda\leqslant f(x)$在$[0,+\infty)$恒成立时,λ 的取值范围;

(2) 设 $g(x)=f(x)-\frac{1}{2}x^2+2x-\ln(x+1)$,当 $x\in(0,\pi)$时,$g(x)$有唯一零点,求 a 的取值范围.