第 1 章　群体智能算法简介

本章主要对群体智能算法进行简单介绍。其中，1.1 节概述群体智能算法；1.2 节介绍群体智能算法的三个特点；1.3 节介绍常见的几类群体智能算法；1.4 节简述基于随机过程分析群体智能算法的三类数学模型；1.5 节介绍群体智能算法的收敛性分析；1.6 节则介绍群体智能算法的时间复杂度分析。

1.1　群体智能算法的起源

自然界中的一些生物群体，如空中的鸟群和蜂群、地上的蚁群和水中的鱼群，其单个个体的行为非常简单，但这些个体通过协同工作表现出来的行为能力却十分复杂。这种群体的协同工作行为被称为群集行为。群体智能算法是根据自然界中不同的生物活动而构建的算法模型，主要模拟了昆虫、兽群、鸟群和鱼群的群集行为，用于求解复杂优化问题 [1]。这些生物群体以合作的方式来寻找食物，群体中的每个成员通过学习自身和其他成员的经验来不断改变搜索方向，所以群体智能算法的突出特点就是协同搜索，即利用启发信息来引导局部搜索和全局搜索，从而在解空间内找到最优解或者近似最优解。

群体智能算法具有良好的通用性，可以用于求解不同类型的优化问题。首先，群体智能优化不需要解析函数的梯度等信息，只需要利用目标函数值，就能够有效地求解复杂的非线性优化问题。其次，对于多峰优化问题，传统的优化算法非常容易陷入局部最优解，而群体智能算法可以同时在决策空间的多个区域进行搜索，并以一定的概率跳出局部最优解，不断逼近全局最优解。最后，由于群体智能算法的搜索过程是以多个个体同步进行的，每次迭代优化后都可以提供多个解，因此还适用于求解多目标优化问题。整体而言，群体智能算法不需要使用问题的可微性、单峰、多峰等相关信息，不受搜索空间限制条件的约束，具有较强的适应性和良好的进化操作性等特点。

由于上述原因，群体智能算法在工业生产、数据挖掘、模式识别、社会科学、数字滤波设计、人工神经网络、机器学习、过程控制、经济预测和工程预测等诸多领域有着广泛的应用。

1.2 群体智能算法特点

群体智能算法的应用范围广泛，主要是因为这类算法具有良好的通用性、高效的并行性和解的近似性这三个特点。群体智能算法良好的通用性使得其适用于各种问题；并行性主要是指种群内的个体具有独立性，可以使用多处理器实现并行编程，适用于求解大规模问题；解的近似性则使算法可以获得问题的近似最优解。

群体智能算法通过模拟自然界中某些生命现象或自然现象的规律来求解问题，包含了自然界生命现象所具有的自组织、自学习和自适应等特点。这一类算法在运算过程中通过所获得的计算信息自行组织种群对解空间进行搜索。种群在搜索过程中依据事先设定的适应值函数值，采用适者生存、优胜劣汰的方式迭代进化，所以群体智能算法与进化算法有一定的相似性。由于群体智能算法具有群体迭代更新的优点，应用其求解问题时不需要事先对问题进行详细的求解思路描述，所以能够快速求得复杂优化问题的可行解。群体智能算法所具有的自适应性、自组织性和不依赖于问题本身的特点使其具有较强的通用性。群体智能算法具有良好的容错性，对初始条件不敏感，能在不同条件下以迭代进化的方法寻找目标函数值更优的解。

群体智能算法通过设定相应的种群进化机制来完成计算。种群内的个体具有一定的独立性，个体之间本质上具有一种隐并行的性质。如果使用分布式多处理机来完成群体智能算法，则可以将算法设置为多个种群并分别放置于不同的处理机以实现进化，迭代期间完成一定的信息交流。迭代完成后，根据适应值进行优胜劣汰。因此，群体智能算法所具有的并行性使其能够更充分地利用多处理器机制，实现并行编程，提高算法的求解能力。此类算法基本上是以群体协作的方式对问题进行迭代式求解，非常适合并行处理大规模问题。

群体智能算法模拟大自然中某种生命或其他事物的智能协作进化现象，利用某种机制引导种群对解空间进行搜索。由于该类算法的机理缺乏严格的数学理论支持，在解空间中采用反复迭代的方式进行随机搜索，所以会存在早熟、不稳定或解精度较低等问题。因此，群体智能算法在求解问题时得到的通常是近似最优解。

1.3 常见的几类群体智能算法

群体智能算法的框架简单且收敛速度快。各类群体智能算法通过模拟生物的群体行为而具有较强的搜索能力，能被用于解决实际生活中复杂的优化问题，因此众多学者提出各类群体智能算法，例如粒子群优化（particle swarm optimization，PSO）算法[2]、蚁群优化（ant colony optimization，ACO）算法[3]、头脑风暴优化（brain storm optimization，BSO）算法[4]、鸽群优化（pigeon-inspired optimization，PIO）算法[5]、烟花算法（fireworks algorithm，FWA）[6]等。1.3.1 节∼1.3.5 节主要介绍这 5 类重要的群体智能算法。

1.3.1　粒子群优化算法

粒子群优化算法的机制是信息全局共享。图 1.1 展示了粒子群优化算法的搜索过程，在第 t 次迭代中，群体中的第 i 个粒子 $\boldsymbol{x}_i^t$ 根据当前速度 $\boldsymbol{v}_i^t$、全局最优解 $\boldsymbol{g}^t$ 和个体最优解 $\boldsymbol{p}_i^t$ 所提供的信息，调整自身的运动方向和速度，移动至 $\boldsymbol{x}_i^{t+1}$ 位置，从而在全局解空间中搜索问题的最优解。大量研究表明，粒子群优化算法具有良好的寻优搜索能力和收敛性能。

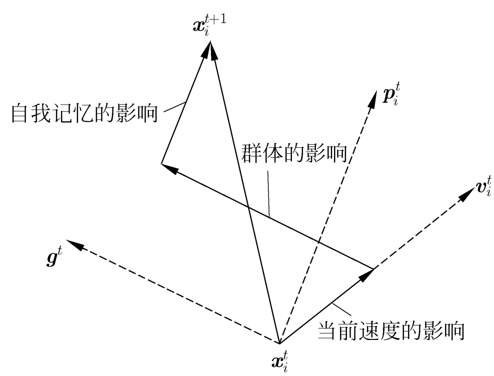

图 1.1　粒子群优化算法搜索过程

粒子群优化算法的基本流程包括以下 5 个步骤：

（1）种群初始化；

（2）评估每个粒子的适应值；

（3）更新粒子的个体最优解和全局最优解；

（4）更新每个粒子的位置和速度；

（5）判断是否终止并进行下一次迭代。

与遗传算法[7]相比，粒子群优化算法没有交叉变异算子，主要依靠粒子来完成解的搜索，并在迭代的过程中把最好的粒子传递给其他粒子，让其他粒子学习。另外，粒子群优化算法具有记忆功能，能够记忆整个种群的最好位置并传递给其他粒子，使算法有较快的搜索速度。粒子群优化算法主要有以下 7 个优点：

（1）不依赖问题信息，通用性强；

（2）直接以目标函数值作为搜索信息；

（3）群体搜索，具有内在的并行性；

（4）具有记忆功能，保留个体局部和种群全局的最优信息；

（5）协同搜索，同时利用个体局部信息与种群全局信息；

（6）原理简单，容易实现；

（7）计算效率高。

粒子群优化算法也存在一些缺点。例如，动态速度的调节能力差，容易陷入局部最优解，导致算法的求解精度下降；对于不同的优化问题，参数设置敏感。根据上述特点，粒子群优化算法主要应用于多变量、多峰值与多目标的函数优化以及工件加工、智能控制器优化、最优控制器优化、图像处理等领域。

1.3.2 蚁群优化算法

蚁群优化算法是模拟蚂蚁群体觅食行为的一种群体智能算法。蚁群优化算法的基本原理是：蚁群会分泌信息素，可以吸引更多蚂蚁靠近，导致越来越多的蚂蚁朝着信息素多的路径前进（靠近当前最优解）。而随着时间流逝，信息素会挥发，使蚁群有机会去探索其他路径（避免陷入局部最优解）。蚁群之间通过信息素进行交流，每个个体通过环境的动态变化去影响其他个体的行为，从而形成一种正反馈机制。图 1.2 展示了蚁群经过路径的信息素累积过程，从起点 A 到终点 B 的较短路径积累了更多的信息素。

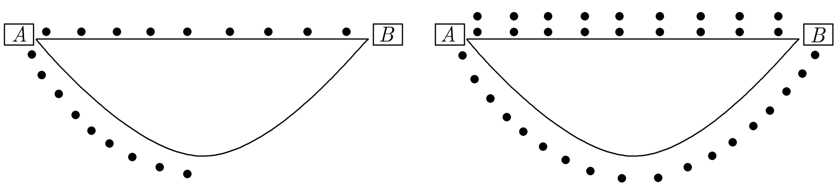

图 1.2 蚁群信息素累积过程

蚁群优化算法的基本流程包括以下 5 个步骤：

（1）种群初始化；

（2）每个个体根据信息素在问题空间中移动生成新解；

（3）根据个体经过的路径进行信息素累积和挥发；

（4）评估适应值并记录最优解；

（5）判断是否终止并进行下一次迭代。

蚁群优化算法具有以下 4 个优点：

（1）采用正反馈机制，使搜索过程不断收敛，最终逼近最优解；

（2）每个个体都可以通过释放信息素来改变共享的信息素矩阵，而且能够感知周围环境的实时变化，个体间通过信息素矩阵进行间接通信；

（3）搜索过程采用分布式计算方式，多个个体同时进行并行计算，大大增强了算法的计算能力，并提高了其运行效率；

（4）类似模拟退火的启发式搜索方式不易陷入局部最优解，有利于寻找到全局最优解。

蚁群优化算法已被成功应用于多个领域，其中主要用于求解离散组合优化问题，如旅行商问题、生产调度问题、指派问题、加工车间调度问题、车辆路由问题、图着色问题和网络路由问题等。近年来，越来越多的学者关注该算法在网络路由问题中的应用，并提出了一些新的基于蚁群优化算法的路由算法。该算法在网络路由中具有信息分布式、动态性、随机性和异步性等特点，而这些特点正好能满足网络路由的需要。

1.3.3　头脑风暴优化算法

头脑风暴优化算法作为一种新型的智能群体算法，在解决经典优化算法难以求解的大规模高维多峰函数问题上具有优势。头脑风暴优化算法受到头脑风暴会议的启发，模拟人类创造性解决问题的过程，采用聚类思想搜索局部最优解，通过比较局部最优解得到全局最优解；采用变异思想增强算法的多样性，避免算法陷入局部最优，在这“聚与散”相辅相成的过程中搜索最优解，思想新颖，适用于解决多峰高维函数问题。头脑风暴优化算法中的每一个个体代表一个候选解，通过个体的演化和融合实现个体更新，这一过程与人类头脑风暴的过程相似。图 1.3 展示了头脑风暴优化算法的搜索过程，聚类产生的分类使用不同的形状符号表示。

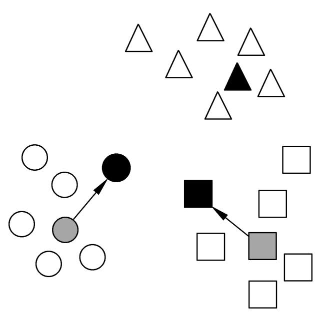

图 1.3　头脑风暴优化算法搜索过程

头脑风暴优化算法的基本流程包括以下 6 个步骤：

（1）种群初始化；

（2）采用聚类方法将个体进行分类；

（3）通过评估个体，对每一类中的个体进行排序，选出每一类中最优的个体作为该类的中心个体；

（4）随机选中一个类的中心个体，按概率大小判断它是否被一个随机产生的个体所替代；

（5）对个体进行更新；

（6）判断是否终止并进行下一次迭代。

头脑风暴优化算法具有以下 4 个优点：

（1）模型简单、参数少；

（2）收敛精度高；

（3）鲁棒性强；

（4）全局搜索能力强，适用于解决高维多峰问题。

与其他群体智能算法相比，头脑风暴优化算法也存在一些不足，如收敛速度慢、容易陷入局部最优等。目前，头脑风暴优化算法已被应用于多个领域以求解复杂优化问题，如路径优化问题、频谱感知技术优化问题、集卡调度与箱位分配问题等。

1.3.4 鸽群优化算法

受自然界中鸽子归巢行为的启发，研究者提出一种基于鸽子归巢行为的新型群体智能算法——鸽群优化算法。影响鸽子归巢的主要因素包括太阳、地球磁场和地标。鸽子在旅途的不同阶段会使用不同的导航工具。当鸽子开始飞行时，大部分时间会依靠类似指南针的导航工具；在旅途中，鸽子会将导航工具切换至地标，同时重新评价自己的路线并进行必要的修正。研究者通过模仿“鸽子在寻找目标的不同阶段使用不同导航工具”这一机制，提出了两种算子模型以描述鸽群归巢的群集行为，分别是地图和指南针算子以及地标算子，其中地图和指南针算子代表太阳和地球磁场对鸽群的影响，而地标算子则表示地标对鸽群的影响。图 1.4 展示了鸽群优化算法的搜索过程。

鸽群优化算法的基本流程包括以下 5 个步骤：

（1）种群初始化；

（2）根据地图和指南针算子更新鸽子的速度和位置；

（3）计算适应值，保留适应值更好的个体并舍弃其余个体；

（4）根据地标算子更新个体；

（5）判断是否终止并进行下一次迭代。

鸽群优化算法具有以下 3 个优点：

（1）算法的参数少，原理简单，易于理解和实现；

（2）收敛速度快；

（3）同时借助局部和全局搜索信息协同搜索。

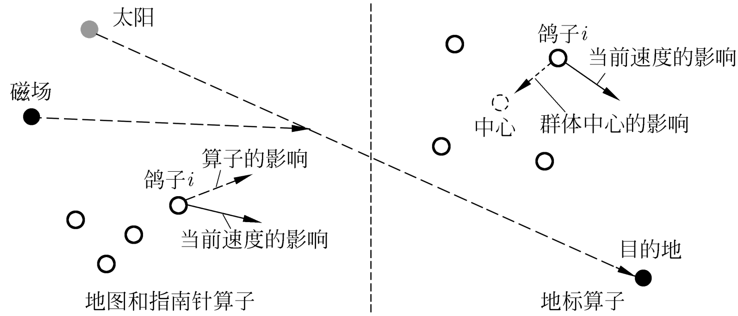

图 1.4　鸽群优化算法搜索过程

除上述优点外，鸽群优化算法由于鸽群信息交互不足，存在收敛精度偏低、稳定性较差、容易陷入局部最优解、多样性欠佳等缺点。鸽群优化算法主要应用于图像处理、控制参数的优化、无人机编队以及生命科学等多个领域，在改进方法和实际应用等方面成果丰硕。

1.3.5　烟花算法

烟花算法通过模拟燃放的烟花在空中爆炸的现象进行算法建模，并通过引入随机因子和选择策略形成一种并行爆炸式搜索方式，是一种新型的、平衡全局搜索和局部搜索的随机搜索方法。烟花算法模拟烟花爆竹产生大量火花的过程，进而对烟花所在的领域进行搜索。适应值越好，烟花爆炸的范围就越小（搜索范围变小），产生的火花就越多（增加多样性）。反之，如果适应值很差，烟花爆炸的范围会扩大（搜索范围变大），并产生较少的火花。图 1.5 展示了烟花算法的搜索过程。

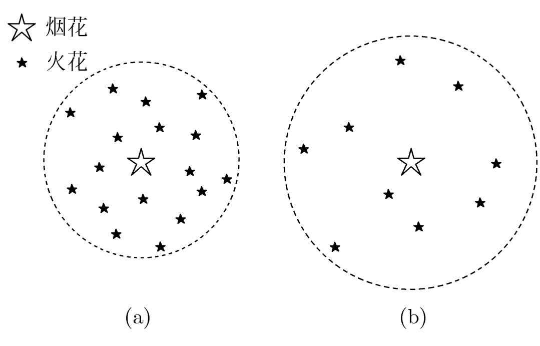

图 1.5　烟花算法搜索过程

（a）适应值好；（b）适应值差

烟花算法的主要流程包括以下 4 个步骤：

（1）种群初始化；

（2）评估烟花适应值，根据适应值来控制火花个数和爆炸范围大小；

（3）产生火花并从整个群体中选择新一代的烟花；

（4）判断是否终止并进行下一次迭代。

烟花算法具有以下 4 个优点：

（1）每个烟花感知自身周围的信息，局部搜索能力强；

（2）对求解问题的要求低，适应范围广；

（3）各个烟花单独对邻域并行搜索，具有分布式特性；

（4）种群多样性好，不容易陷入局部最优解。

和其他群体智能算法一样，烟花算法也存在着不足，如解的精度较低、计算复杂度高等。目前，烟花算法已被成功应用到许多工程领域，如大数据优化问题求解、动态优化问题求解等。

1.4 群体智能算法分析的数学模型

由于群体智能算法的求解过程带有一定的随机性，而随机过程可以用一族无穷多个随机变量来描述具有随机性的变化过程，因此，群体智能算法可以表示为一种随机过程的数学模型。分析群体智能算法随机过程的数学模型种类繁多，其中较为常用的三类模型分别是马尔可夫过程 [8]、漂移分析模型 [9] 和平均增益模型 [10]。这三类模型皆被用于本书后续的算法分析中，本节先简要介绍这三类模型。

1.4.1 马尔可夫过程

马尔可夫过程是随机过程分析中重要的工具，已被广泛应用于物理学、计算机科学等领域。马尔可夫过程定义如下：

定义 1.1 (马尔可夫过程) 设 $\{X_t, t \in T\}$ 为一随机过程，Y 为其状态空间，若对任意的 $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$，任意的 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x \in Y$，随机变量 X_t 满足

$$P(X_t \leqslant x | X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \cdots, X_{t_1} = x_1) = P(X_t \leqslant x | X_{t_n} = x_n)$$

则称随机过程 $\{X_t, t \in T\}$ 为马尔可夫过程。

马尔可夫过程所展示的特性是：随机过程转移到下一时刻任意给定状态的概率仅依赖于当前状态，独立于以前的所有状态。因此，当群体智能算法的迭代更新仅与当前迭代状态有关，即种群 P_{t+1} 的状态仅取决于种群 P_t，与之前种群的

历史信息无关时，根据定义 1.1，马尔可夫过程是一个较为合适的数学模型。目前学术界在马尔可夫过程的收敛性方面已有较为成熟的研究结果，因此该模型常被用于分析群体智能算法的收敛性。本书将介绍如何用马尔可夫过程对蚁群优化算法和烟花算法的收敛性进行分析（分别见 3.3 节和 6.3 节）。该方法虽然可用于分析群体智能算法的收敛性，但难以直接应用在群体智能算法的时间复杂度分析上。这是因为群体智能算法的个体之间通常存在信息交换，这使得个体的状态依赖于其历史状态或其他个体的状态，不服从马尔可夫过程的假设。即使能将群体智能算法建模为马尔可夫过程，由于个体的多样性和随机性，状态空间巨大，马尔可夫过程为了计算和存储所有可能状态的转移概率会产生较多的冗余信息，并且计算量较大。

1.4.2　漂移分析模型

漂移分析模型是由 He 等于 2001 年提出的[9]，被用来分析群体智能算法的时间复杂度。该模型是在马尔可夫过程基础上的变形，通过距离与漂移的计算量构建群体智能算法的数学模型。其中距离和漂移定义如下：

定义 1.2 (距离)　*假设全局最优解为* $\boldsymbol{x}^*$，*解* $\boldsymbol{x}$ *与全局最优解的距离记为* $d(\boldsymbol{x})$，*则种群* $X=\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_N\}$ *与全局最优解的距离为* $d(X)=\min f_0\{d(\boldsymbol{x})|\boldsymbol{x}\in X\}$。

定义 1.3 (漂移)　*记* t *时刻的种群为* ϕ_t，*则* $\{d(\phi_t),t=0,1,2,\cdots\}$ *为优化过程产生的随机序列，其在* t *时刻的偏移为* $\Delta(d(\phi_t))=d(\phi_t)-d(\phi_{t+1})$。

由定义 1.2 可知，算法的距离为 0 意味着算法找到全局最优解。因此，计算算法时间复杂度就是计算算法距离首次为 0 所需迭代次数的期望。漂移分析模型根据算法的漂移构建随机序列，通过分析漂移的期望以实现对迭代次数期望的分析。图 1.6 展示了漂移分析的模型。近 20 年来，漂移分析模型被用于各类群体智能算法的时间复杂度分析，已成为群体智能算法时间复杂度分析常用的一类方法。但是，该方法需要根据全局最优解的位置进行分析，而实际应用中的问题最优解一般是未知的，所以在面对未知最优解的问题时，无法使用漂移分析模型来计算群体智能算法的时间复杂度。

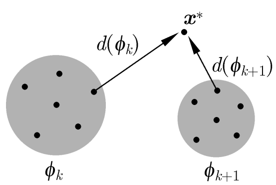

图 1.6　漂移分析模型

1.4.3 平均增益模型

为解决漂移分析模型所存在的问题，黄翰等学者提出了平均增益模型，用于分析群体智能算法的时间复杂度[10]。下面给出适应值差函数和平均增益的定义。

定义 1.4 (适应值差函数) 设函数 $d: S \to \mathbb{R}$ 满足 $d(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}^*), \forall \boldsymbol{x} \in S$，$S$ 代表问题的解空间，$\boldsymbol{x}^*$ 为问题的全局最优解，则称 d 为适应值差函数。

定义 1.5 (平均增益) 称 $G(r,t) = E(d(\boldsymbol{x}_t) - d(\boldsymbol{x}_{t+1})|d(\boldsymbol{x}_t) = r)$ 为算法在 t 时刻关于适应值差 r 的平均增益，即在当前个体与最优解的适应值差为 r 的前提下，个体 $\boldsymbol{x}_t$ 和下一代新个体 $\boldsymbol{x}_{t+1}$ 的期望适应值差。

平均增益模型以鞅论和停时理论为基础，用于分析连续型进化算法的时间复杂度上界，不依赖于特定算法或者优化问题，使拓展后的平均增益模型可用于分析更大范围的进化算法。与漂移分析模型相比，平均增益模型不需要利用全局最优解的位置信息，在计算平均增益的过程中，全局最优解的适应值项可以化简消掉。因此，平均增益模型不需要使用全局最优解的信息，适用于未知全局最优解问题的时间复杂度分析。在本书中，粒子群优化算法、鸽群优化算法和头脑风暴优化算法的时间复杂度便是运用该模型分析的案例。

1.5 群体智能算法的收敛性分析

收敛性分析是群体智能算法理论基础研究的重要内容，也是评估群体智能算法性能的一种重要手段。群体智能算法的收敛性如定义 1.6 所述。

定义 1.6 假定 $\{\gamma_t^{A,K}\}_{t=1}^{+\infty}$ 是群体智能算法 A 求解单目标优化问题 K 的随机过程，相应的 n 阶最优状态空间为 $\Omega_n^{K,\mathrm{opt}}$，当 $\lim_{t=1}^{+\infty} P(\gamma_t^{A,K} \in \Omega_n^{K,\mathrm{opt}}) = 1$，则称群体智能算法 A 求解单目标优化问题 K 会以概率 1 收敛 (强收敛)。

自 20 世纪 90 年代起，研究人员开展了群体智能算法收敛性分析的理论研究。Holland 模式定理[11] 早期经常被研究人员用于分析群体智能算法的收敛性，且仅适用于二进制编码，导致其结论难以被运用到实际分析中。因此，Holland 模式定理并不能较好地揭示群体智能算法的原理。马尔可夫链这一数学工具的引入使得群体智能算法的理论基础研究取得了实质性的突破。例如，Goldberg 等首先提出用有限齐次马尔可夫链分析群体智能算法的收敛性[8]。此后，Eiben 等采用马尔可夫链证明了保留最优个体的群体智能算法在概率意义上的全局收敛性[12]。Rudolph 采用有限齐次马尔可夫链证明了带有复制、交换和突变操作