第 1 章　趣谈概率

骰子，一种古老的赌具，据说人类在 5000 年前就开始使用它。它最早由埃及人发明出来，并且在其他几大文明古国的历史中也有独自发明类似物件的记载。不过，虽然人类将骰子甩来抛去几千年，却没有明白其中深藏的数学奥秘，直到距今 400 多年前……

1. 帕斯卡和法国数学：概率论的诞生

17 世纪时，从意大利开始的文艺复兴运动已经席卷欧洲，也波及法国，给这里带来了科学与艺术的蓬勃发展和革命。法国数学界人才济济、群星璀璨，人们称其为数学之邦，它也不愧是概率论之故乡。

谈及 17 世纪的法国数学，不可不提一位举足轻重的人物：马兰·梅森（Marin Mersenne，1588—1648）。梅森是一位数学家，但他的主要贡献不是在学术方面，这方面能列得出来的成果只有一个“梅森素数”。梅森出身于法国的农民家庭，不是贵族却成为许多爱好科学的贵族间的联系纽带。梅森少年时毕业于耶稣会学校，是笛卡儿的同校学长，于 1611 年进入修道院，成为法国天主教的一名教士。1626 年，他把自己在巴黎的修道室，办成了科学家们的聚会场所和交流信息中心，称为“梅森学院”（图 1-1-1）。这个联系和组织人才的“科学沙龙”，实际上是后来开明君王路易十四所创建并给予丰厚赞助的“巴黎皇家科学院”的前身（图 1-1-2）。因此，梅森为法国科学（特别是数学）的发展做出了巨大的贡献。

梅森见多识广，才华不凡，性格随和，平易近人，在他的身边很快聚集起一批优秀的学者，他们定期到修道室聚会。此外，当时的梅森科学沙龙还经常使

图 1-1-1　梅森及梅森学院的部分数学家

图 1-1-2　油画：1666 年，柯尔贝尔向路易十四引荐巴黎皇家科学院成员

（引自维基百科 French Academy of Sciences 词条。）

用通信方式互相联系，或单独与梅森联系，报告交流研究成果和新思想，因此人们称它为“移动的科学刊物”。梅森去世后的遗产中留下了与其他 78 位学者之

间的珍贵信函，其中包括笛卡儿、伽利略、费马、托里拆利、惠更斯等欧洲各国多个领域的科学家。例如，笛卡儿有20多年隐居荷兰，在那里完成了他在哲学、数学、物理学、生理学等领域的许多主要著作，在此期间只有梅森定期与他保持通信联系。

我们熟悉的笛卡儿，全名为勒内·笛卡儿(René Descartes，1596—1650)，就是那位以说出“我思故我在”而闻名于世的现代哲学之父及解析几何的奠基人。笛卡儿出生在法国北部的都兰城，他的父亲是当地的一个议员，母亲在他1岁多时因肺结核去世，并将这个当时被列为不治之症的疾病传染给了他，因此，这个贵族家庭对体弱多病的笛卡儿宠爱有加。

另一位法国数学家，布莱兹·帕斯卡(Blaise Pascal，1623—1662)出生于法国中部小城克莱蒙费朗的小贵族家庭。帕斯卡比笛卡儿小27岁，但两位数学家的童年却有不少共同之处，都是母亲早逝、父亲富有、身体羸弱、智力过人。其实不仅仅是童年生活，两位学者的学术生涯也有不少共同点，都兴趣广泛、博学多思，他们除在科学上的许多领域做出杰出贡献之外，也都在人文和哲学方面取得了非凡成就。并且，在成名之后，笛卡儿和帕斯卡两人不约而同地选择了半隐居式的生活。帕斯卡于39岁时在巴黎英年早逝，笛卡儿也逝于54岁，不过这位“现代哲学之父”之死颇具传奇性。笛卡儿原本企图追求“安宁和平静”的隐居生活，平生的习惯是“睡懒觉”，躲在暖和的被窝里思考数学和哲学问题。据说他的解析几何坐标概念的灵感就是在做了“三个奇怪的梦”之后得来的。可是，笛卡儿在晚年，被瑞典的克里斯汀女王看中，召见其给她讲哲学晨课。女王喜欢早起，可怜的已经年过五旬的笛卡儿只好违背他多年的作息习惯，每天早上5点爬起来给女王上课，最后因为适应不了北欧严寒多雪的冬天，于1650年因肺炎去世了！

生活在法国南部的著名律师和业余数学家皮埃尔·德·费马(Pierre de Fermat，1601—1665)也是通过书信的方式与梅森及其他数学同行保持联系，他的不少数学成果都是在书信中诞生的。

还有荷兰人克里斯蒂安·惠更斯(Christiaan Huygens，1629—1695)，著名的物理学家、天文学家和数学家。他曾经师从笛卡儿，后来又通过书信交流成为梅森学院重要成员。梅森去世后，巴黎皇家科学院成立，惠更斯为首任院长，

在巴黎待了近 20 年。

• 神童帕斯卡

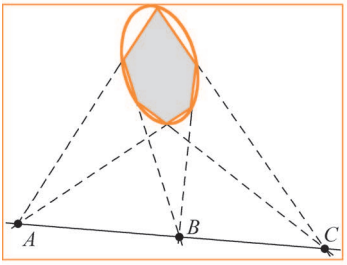
才华横溢的帕斯卡参加梅森学院聚会时才 14 岁，而当时的笛卡儿却已经过了不惑之年。两人身世相仿，关系却并不融洽，似乎有些嫉妒的阴影掺杂其中。

科学神童帕斯卡在他 11 岁那年，创作了一篇关于身体振动发出声音的文章，懂数学的议员父亲担心他荒废拉丁语和希腊文的学习，于是禁止他在 15 岁前继续追求数学知识，但有一天，12 岁的帕斯卡用一块木炭在地板上画图，证明了欧几里得几何的第 32 命题：三角形的内角和等于两直角。从那时起，父亲改变了想法，让小帕斯卡继续独自琢磨几何问题，后来还带着他旁听并参加梅森学院每周一次的科学家聚会。

帕斯卡在 16 岁时写了一篇被称作神秘六边形的短篇论文《圆锥曲线专论》。文章中证明了一个圆锥曲线内接六边形的三对对边延长线的交点共线，这个结论现在被称为“帕斯卡定理”(图 1-1-3(a))。文章被寄给梅森神父后得到众学者的极大赞赏，只有笛卡儿除外。笛卡儿不常亲临巴黎的聚会，但看了帕斯卡的手稿后，一开始拒绝相信这是出自一个 16 岁少年之手，认为是帕斯卡的父亲所写。后来，尽管梅森再三保证这是小帕斯卡的文章，笛卡儿仍然不屑一顾地耸耸肩膀，表明没什么大不了的。但实际上，帕斯卡定理对射影几何早期的发展起了很大的推动作用，向人们展示了射影几何学深刻、优美、直观的一面。

帕斯卡也喜欢研究物理问题，曾针对真空及大气压的性质进行实验。17 世纪 40 年代，伽利略的弟子托里拆利(Torricelli，1608—1647)发明了用水银柱测量气压的方法，确定一个大气压强可以使得水银柱上升大约 76cm。实验结果激发了当时的物理学家们思考和讨论大气压力及空气重量的问题。年轻的帕斯卡首先重复了托里拆利的实验，继而进一步猜测：如果将气压计放在一个高高的塔顶上，其中水银柱上升的高度将比 76cm 低，因为空气更为稀薄。而空气再稀薄下去便是“真空”。帕斯卡计划用实验来证实他的这些想法。1647 年，正好笛卡儿难得地来到巴黎并拜访了这位小天才，据说这是两人唯一的一次见

面。笛卡儿同意帕斯卡的部分观点，却对验证真空存在的实验和研究不以为意。笛卡儿认为真空不存在，也不能用实验来验证，之后还向其他人嘲笑帕斯卡，说他“头脑中的真空太多了”。不过，在那次会面中，年轻的帕斯卡也不服输，更不畏惧笛卡儿的权威。他批驳了笛卡儿的某些哲学观念，并认为：“心灵有自己的思维方式，是理智所不能把握的。”



(a)

(b)

图 1-1-3　帕斯卡研究几何和物理

(a) 帕斯卡定理：A、B、C 共线；(b) 帕斯卡做气压实验

1648 年 9 月 19 日，帕斯卡的姐夫在多姆山上按照帕斯卡的设计进行了气压计实验，证明在山脚和山顶，气压计水银柱的高度相差一个不小的数目：3.15 英寸(约为 8cm)！帕斯卡自己则在巴黎的一个 52m 高的塔顶上重复了类似的实验，见图 1-1-3(b)。实验成功地证实了帕斯卡关于水银柱高度随着海拔高度的增加而减少的猜测，震动了科学界。后人为纪念帕斯卡的贡献，将气压的单位用“帕”(帕斯卡名字中的 Pa)来命名。

之后几年，帕斯卡又做了一系列物理实验，研究了液体压强的规律，不断取得新发现，并有多项重大发明。帕斯卡总结了这些实验，于 1654 年发表论文《论液体的平衡》，提出了著名的帕斯卡定律：密闭液体任一部分的压强，将大小不变地向液体的各个方向传递。如图 1-1-4(a)所示，左边是液面面积较小(面积为 A_1)的活塞，右边液面的面积(A_2)是左边的 10 倍($A_2=10A_1$)。如果在左边的活塞上施加一个不太大的力 F_1，因为压强 P 可以大小不变地通过液体从

左边传递到右边（$P_1=P_2$），就将在右边液面得到一个比 F_1 大 10 倍的升力（$F_2=P_2A_2=10F_1$）。这个如今看来十分简单的原理却成为液压起重机以及所有液压机械的工作基础。

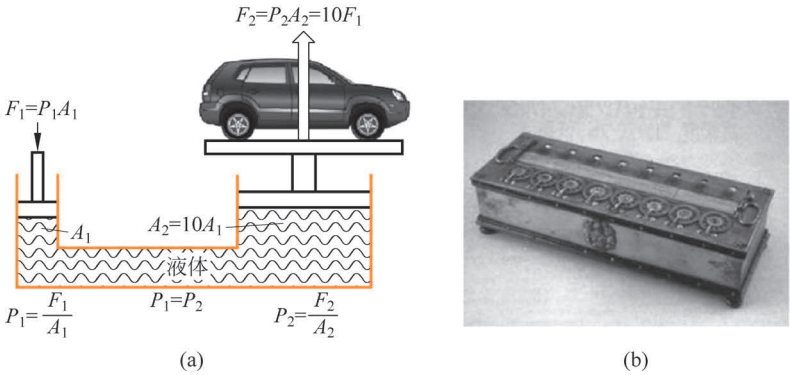


图 1-1-4　帕斯卡原理和计算器

（a）帕斯卡原理应用到液压起重机；（b）帕斯卡发明的机械计算器

说到重大发明，不可忽略帕斯卡设计的计算器，那是帕斯卡在未满 19 岁时为了减轻他父亲重复计算税务收支的一项发明。虽然它巨大、笨重、难以使用，且只能做加减法，却可以被列为最早的、首次确立计算机器概念的机械计算器之一，算是我们现在人手一件的电子计算器的老祖宗了（图 1-1-4(b)）。

也许是身体不好的原因，长期与病魔的斗争使得帕斯卡心力交瘁。也有人认为帕斯卡这颗非比寻常的敏感灵魂被当时病态的宗教所扭曲。总之，帕斯卡在生命的最后几年里，不再进行科学研究，而是将时间贡献给了神学和哲学，不过其间他也写出了被法国大文豪伏尔泰称为“法国第一部散文杰作”的《思想录》。在这部处处闪现思想火花的文集中，帕斯卡以浪漫简洁的方式、清明如水的文笔，探讨若干宗教和哲学问题。与笛卡儿提出理性计算的逻辑不同，帕斯卡提出心灵的逻辑：“思想形成人的伟大”（出自《人是一根会思考的芦苇》）。可惜这本书尚未完成，39 岁的帕斯卡便溘然长逝，真正到天国寻找他的上帝去了。

帕斯卡对数学还有一个大的贡献：与费马一起开拓了概率论这个重要的数学分支。下面就谈谈概率论的诞生。

• 概率论的诞生

当时欧洲许多国家的贵族盛行赌博之风，赌博方式倒是特别简单：掷骰子或者抛硬币。不过，如此简单的赌具中却蕴藏着不一般的数学原理，因为其中涉及的游戏结果是与众不同的一类变量。比如抛硬币，硬币有正反两面，抛出的硬币落下后的结果不确定，可能是正面，也可能是反面。结果的正反是随机的、难以预料的，却按照一定的概率出现，因而被称为“随机变量”。现在，我们把研究随机变量及其概率的数学理论称为“概率论”。

话说当年的法国有一位叫德 • 梅雷的贵族，在掷骰子游戏之余，也思考一点相关的数学问题。他苦思不得其解时，便向以聪明著称的帕斯卡请教。1654 年，他向帕斯卡请教了一个亲身经历的“分赌注问题”。故事大概如此：梅雷和赌友各自出 32 枚金币，共 64 枚金币作为赌注。掷骰子为赌博方式，如果结果出现“6”，梅雷赢 1 分；如果结果出现“4”，对方赢 1 分；谁先得到 10 分，谁就赢得全部赌注。赌博进行了一段时间后，梅雷已得了 8 分，对方也得了 7 分。但这时，梅雷接到紧急命令，要立即陪国王接见外宾，于是只好中断赌博。那么，问题就来了，这 64 枚金币的赌注应该如何分配才合理呢？

这个问题实际上在 15、16 世纪时就已经被提出过，被称为“点数分配问题”，意思就是说，在一场赌博半途中断的情况下，应该如何分配赌注？人们提出各种方案，但未曾得到大家都认为合理的答案。

就上面梅雷和赌友的例子来说，将赌注原数退回显然不合理，没有考虑赌博中断时的输赢情况，相当于白赌了一场。将全部赌注归于当时的赢家也不公平，比如当时梅雷比对方多得 1 分，但他还差 2 分才能赢，而对方差 3 分，如果继续赌下去的话，对方也有赢的可能性。

帕斯卡对这个问题十分感兴趣。直观而言，上面所述的两种方案显然不合理，赌博中断时梅雷应该多得一些，但到底应该多得多少呢？也有人建议以当时两人比分的比例来计算：梅雷 8 分，对方 7 分，那么梅雷得全部赌注的 8/15，对方得 7/15。这种分法也有问题，比如说，如果甲乙双方只赌了一局就中断了，甲得 1 分，乙得 0 分。按照刚才的分法，甲拿走全部赌注，显然也是极不合理的分法。

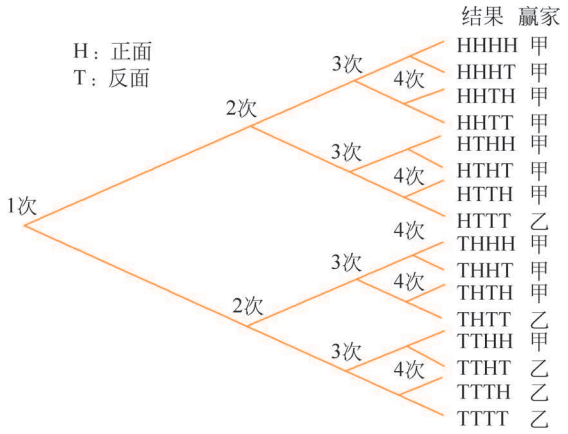
帕斯卡从直觉意识到，中断赌博时赌注的分配比例，应该与当时的输赢状态以及双方约定的最终判据的差距有关。比如说，梅雷已经得了 8 分，距离 10 分的判据差 2 分；赌友得了 7 分，还差 3 分到 10 分。因此，帕斯卡认为需要研究从中断赌博那个“点”开始，如果继续赌博的各种可能性。为了尽快地解决这个问题，帕斯卡以通信的方式与住在法国南部的费马讨论[1]。费马不愧是研究纯数学的数论专家，很快列出了“梅雷问题”中赌博继续下去的各种结果。

梅雷原来的问题是掷骰子赌“6 点”或“4 点”的问题，但可以简化成抛硬币的问题：甲乙两人抛硬币，甲赌“正”，乙赌“反”，每次赢家得 1 分，各下赌注 10 元，先到达 10 分者获取所有赌注。如果赌博在“甲 8 分、乙 7 分”时中断，问应该如何分配这 20 元赌注。图 1-1-5(a)显示了费马的分析过程：从赌博的中断点出发，还需要抛 4 次硬币来决定甲乙最后的输赢。这 4 次随机抛掷产生 16 种等概率的可能结果。因为“甲赢”需要结果中出现 2 次“正”，“乙赢”需要结果中出现 3 次“反”，所以在 16 种结果中，有 11 种是“甲赢”，5 种是“乙赢”。换言之，如果赌博没有中断，而是从中断点的状态继续到底的话，可以算出甲赢的概率是 11/16，乙赢的概率是 5/16。赌博的中断使得双方失去了最后赢得全部赌注的机会，因此，按此比例来分配赌注应该是合理的方法。所以，根据费马的分析思路，甲方应该得 20 元×11/16＝13.75 元，乙方则得剩余的 20 元×5/16＝6.25 元。

帕斯卡十分赞赏费马清晰的思路，费马的计算也验证了帕斯卡自己得到的结论，虽然他用的是与费马完全不一样的方法。帕斯卡在解决这个问题的过程中提出了离散随机变量的“期望值”的概念。期望值是用概率加权后得到的平均值。如图 1-1-5(b)所示，帕斯卡计算出甲方“期望”能得到的赌注为 13.75 元，与费马计算的结果一致。

“期望”是概率论中的重要概念，期望值是概率分布的重要特征之一，它常被用在与赌博相关的计算中。例如，美国赌场有一种轮盘赌。其轮盘上有 38 个数字，每一个数字被选中的概率都是 1/38。顾客将赌注(比如 1 美元)押在其中一个数字上，如果押中了，顾客得到 35 倍的奖金(35 美元)，否则赌注就没了，即损失 1 美元。那么，如何计算顾客“赢”的期望值呢？

根据期望值的定义“概率加权求平均”进行计算，图 1-1-6 显示了计算结果：



(a)

结果				概率	所得(甲)	概率加权所得
H	H			1/4	20	5
H	T	H		1/8	20	5/2
H	T	T	H	1/16	20	5/4
H	T	T	T	1/16	0	0
T	H	H		1/8	20	5/2
T	H	T	H	1/16	20	5/4
T	H	T	T	1/16	0	0
T	T	H	H	1/16	20	5/4
T	T	H	T	1/16	0	0
T	T	T		1/8	0	0

期望值(甲)55/4=13.75元

(b)

图 1-1-5　费马和帕斯卡对点数分配问题的思路

(a) 费马列出所有结果计算分配比例；(b) 帕斯卡引入期望值的概念计算所得(甲)

顾客赢钱的期望值是一个负数，约等于−0.0526 美元。也就是说，对赌徒而言，平均每赌 1 美元就会输掉 5 美分，相当于赌场赢了 5 美分，所以赌场永远不会亏！

从研究掷骰子开始，帕斯卡不仅仅引入了“期望”的概念，还发现了“帕斯卡三角形”(即中国古书中所记载的“杨辉三角形”)(图 1-1-7)，虽然杨辉的发现早于帕斯卡好几百年，但是帕斯卡将此三角形与概率、期望、二项式定理、组合公式等联系在一起，与费马一起为现代概率理论奠定了基础，对数学做出了不凡的贡

变量 X	-1	35
概率 $P(X)$	37/38	1/38

$E(X)=-1\times(37/38)+35\times(1/38)\approx-0.05$

期望值

图 1-1-6　赌场轮盘对赌徒而言的期望值

献。1657 年，荷兰科学家惠更斯在帕斯卡和费马工作的基础上，写成了《论赌博中的计算》一书，被认为是关于概率论的最早系统论著。不过，人们仍然将概率论的诞生日，定为帕斯卡和费马开始通信的那一天——1654 年 7 月 29 日。

$(a+b)^0=1$
$(a+b)^1=1a+1b$
$(a+b)^2=1a^2+2ab+1b^2$
$(a+b)^3=1a^3+3a^2b+3ab^2+1b^3$
$(a+b)^4=1a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+1b^4$
$(a+b)^5=1a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+1b^5$

⇨

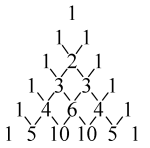


图 1-1-7　帕斯卡三角形

2. 似是而非的答案：概率论悖论

如今，“概率”一词在我们的生活中随处可见，被使用得越来越广泛和频繁，因为这是一个越来越多变的世界：一切都在变化，一切都难以确定。我们的世界可以说是由变量构成的，其中包括很多决定性变量。比如新闻说：“北京时间 2016 年 11 月 3 日 20 时 43 分，长征五号运载火箭在海南文昌成功发射”，这里的时间、地点都是确定的决定性变量。然而，我们的生活中也有许多难以确定的随机变量，比如，明天雾霾的程度或某公司的股票值，等等，都是不确定的随机变量。随机变量不是用固定的数值来表达，而是用某个数值出现的概率来描述。正因为处处都有随机变量，所以处处都能听见“概率”一词。当你打开电视看天气预报，看今天会不会下雨时，气象预报员告诉你说：今天早上 8 点钟的“降水概率”是 90%；当你在手机上查询股市中某只股票的预期价格时，你得到的信息可能是这只股票 3 个月之后翻倍的概率是 67%；当你满怀期望地买了