概率统计
辅导讲义

张立卓 / 编

（第2版）

清华大学出版社
北 京

清华大学出版社

内 容 简 介

本书章节安排与“概率论与数理统计”普通教科书中的章节安排基本平行. 书中每章的各节有内容要点与评注、典型例题以及习题. 各章都设有专题讨论，每个专题以典型例题解析的方式阐述了围绕该专题的解题方法与技巧. 每章末附有单元练习题，是在前各专题的引领下，对知识点融会贯通、综合运用的体现，它包含客观题和主观题，客观题的设置意在考查对该章知识点全面而深入的理解，主观题的设置意在考查对该章知识点的综合运用能力与掌握. 对于典型例题的讲解处理得非常细致，试图营造一对一辅导的氛围，以帮助读者理解和掌握. 对于专题的处理，力图理清知识点之间的脉络与联系，实现对知识的系统理解.

本书可作为学生学习“概率论与数理统计”课程时的同步学习辅导材料，也可作为考研复习的辅导教材.

版权所有，侵权必究. 举报：010-62782989，beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

概率统计辅导讲义/张立卓编. —2 版. —北京：清华大学出版社，2024.6
ISBN 978-7-302-66345-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①概率统计 Ⅳ. ①O211

中国国家版本馆 CIP 数据核字(2024)第 105972 号

责任编辑：刘 颖
封面设计：傅瑞学
责任校对：王淑云
责任印制：曹婉颖

出版发行：清华大学出版社
网　　址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-83470000　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京嘉实印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：27.75　　**字　　数**：672 千字
版　　次：2018 年 9 月第 1 版　2024 年 6 月第 2 版　　**印　　次**：2024 年 6 月第1次印刷
定　　价：84.80 元

产品编号：103024-01

清华大学出版社

第2版前言

学生们要学好概率论与数理统计，首先必须要弄清概念、理解定理，其次要掌握分析问题和解决问题的方法，而要实现这两点，最好的途径之一就是研读例题和演练习题.因此要学好概率论与数理统计，就必须要演练一定数量的习题.

在课堂教学中，课程的讲授是按知识的逻辑顺序展开的，习题则是按章或节编排的，学生们所受到的解题训练是单一的、不完善的.课堂教学的局限之一是缺乏对融会贯通的综合解题能力的训练与培养，再加上受教学时数的限制，许多解题方法与技巧未能在课堂上讲解与演练，当然更谈不上使学生系统掌握.

一些数学基础课程有开设习题课的做法，这对于学生学习课程无疑是有帮助的.但由于学时和助课人员的短缺等问题，许多学校已取消或削减了习题课的学时.

本辅导讲义试图为改善上述各点做出努力.具体的做法是将知识的细致性和系统性通过讲解的方式得以落实.所谓知识的细致性是指对概念和定理的多角度分析和讲解，使之细化，并在例题和习题中将这些细化的内容展现出来，实现对各个知识点的突破.所谓知识的系统性是指将涉及多个知识点的综合题目归纳为一些专题，对各个专题的解题方法和涉及的技巧进行抽丝剥茧式的分析和讲解，实现各个知识点间的线的突破.讲解是一个交互的过程，通过交互过程来达成讲解和理解的共识，这在书中是不好实现的.为此，笔者根据以往辅导学生时的经验，将问题细化，将解题的梯度细化，减少读者在阅读和理解本书过程中的阻力，努力营造出一对一辅导时的良好氛围.这也是书名“辅导讲义”的寓意所在.

本书内容的展开与普通教科书基本平行，每章各节有内容要点与评注、典型例题以及习题，各章还设有专题讨论，每个专题以典型例题解析的方式阐述了围绕该专题的解题方法与技巧.每章末附有单元练习题，是在前面各专题的引领下，对知识点融会贯通、综合运用的体现.它包含客观题和主观题.客观题的设置意在考查对该章知识点全面而深入的理解，主观题的设置意在考查对该章知识点的综合分析能力的领会与掌握.

全书包含了214道例题和490道习题.这些题目内容全面，类型多样，涵盖了概率论与数理统计教学大纲的全部内容，其中不少例题题型新颖、解法精巧.有些例题选自全国硕士研究生入学统一考试数学试题，这些题目都有中等或中等以上的难度.对于例题，大多先给出“分析”，引出解题的思路，然后在分析的基础上给出详细的解答过程，其间注重各个步骤的理论依据，努力做到使读者知其然还要知其所以然，细化概念和定理在解决问题过程中的具体体现.之后通过“注”“评”和“议”的方式将解题的要点提炼出来.一些题目还配以多种解题方法，以帮助读者从多个角度比较与归纳解题方法和技巧.对于习题，给出了答案与提示.

本书的一个特色是大多数例题都配以“分析”“注”“评”或“议”，其中：

“分析”意在分析解题思路；

清华大学出版社

“注”意在强调求解过程中的关键点和重要环节；

“评”意在评述本例的技巧、方法或结论；

“议”意在对本例结论或方法的延伸与拓展.

本书的又一个特色是将知识点分 44 个专题展开，以强调对知识点及解题方法与技巧作系统而深入的阐述.

初学者可以把本书作为教辅书与课堂教学同步学习，以帮助其弄清概念、理解定理，掌握解题方法与技巧. 进一步，本书提供的丰富材料将帮助学习者在期末总复习或备考硕士研究生时，作全面而深入的总结性复习或专题性研究.

本书是笔者多年来从事概率论与数理统计教学经验的积累与总结.

感谢对外经济贸易大学，是这片沃土滋养了这枚果实；感谢清华大学出版社刘颖老师；感谢书末参考文献所有的专家们，他们的著作为我的编著工作带来了启发与指导.

历时多年，数度修改，完成此稿，自知错误和不当之处在所难免，恳请专家与读者不吝赐教，万分感激.

作　者

2023 年 5 月

于对外经济贸易大学惠园

清华大学出版社

目　录

清华大学出版社

清华大学出版社

清华大学出版社

清华大学出版社

清华大学出版社

清华大学出版社

第1章 随机事件与概率

随机现象 在个别试验(观察)中其结果呈现不确定性,但在大量重复试验(观察)中其结果具有统计规律性的现象称为随机现象.

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1 样本空间与随机事件

一、内容要点与评注

随机试验 如果观察随机现象的试验具有如下特点:

(1) 可以在相同的条件下重复进行;

(2) 每次试验的可能结果不止一个,并且能事先明确试验的所有可能结果;

(3) 试验之前不能确定哪一个结果会出现.

称具有上述特点的试验为随机试验,简称试验,通常记作 E.

样本点 在随机试验 E 中,每个可能出现的结果称为样本点,常用 $\omega_1,\omega_2,\cdots$表示.

样本空间 在随机试验 E 中,全体样本点的集合称为样本空间,记作 Ω.

样本空间有如下三种类型:

(1) 有限集合:样本空间所含样本点的个数是有限的.例如,掷一枚匀质的骰子,观察朝上的点数,则样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

(2) 无限可列集合:样本空间所含样本点的个数是无限的,但可一一列出.例如,如果某人射击,直至击中目标为止,观察射击的次数,则样本空间 $\Omega=\{1,2,3,\cdots\}$.

(3) 无限不可列集合:样本空间所含样本点的个数是无限的,且不可一一列出.例如,任取一灯泡,连续使用直至损坏为止,考查它的寿命,则样本空间 $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$.

样本点和样本空间的选取不是唯一的.在同一随机试验中,可以用不同的样本空间来描述试验的结果.比如:在某种产品中任取 n 件作检验,讨论其中合格品的数量.记 $v_k(k=0,1,2,\cdots,n)$代表 n 件产品中有 k 件合格品,于是样本空间为

$$\Omega=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}.$$

又如抽取的第 j 件产品是正品用“1”表示,次品用“0”表示,$j=1,2,\cdots,n$,于是样本空间也可表示为

$$\Omega=\{(0,0,\cdots,0),(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,1,\cdots,1),(1,1,\cdots,1)\},$$

其中样本点$(0,1,0,\cdots,0)$表示抽检的第 2 件产品是正品,其余 $n-1$ 件产品都是次品,以此类推.

清华大学出版社

同一样本空间可以表示不同的随机试验. 比如样本空间 $\Omega=\{0,1\}$,既可以描述产品检验中出现“正品”或“次品”的试验,也可以描述掷一枚硬币出现“正面”或“反面”的试验,等等.

随机事件　样本空间的子集称为随机事件,简称事件. 随机事件有以下几种:

(1) **基本事件**　由样本点构成的单点集称为基本事件,用 $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots$表示.

(2) **复合事件**　由至少两个基本事件构成的事件称为复合事件,用 $A,B,C,\cdots$表示.

(3) **必然事件**　在随机试验中,必然出现的事件称为必然事件,用 Ω 表示.

(4) **不可能事件**　在随机试验中,不可能出现的事件称为不可能事件,用$\varnothing$表示.

必然事件和不可能事件虽然都不是随机事件,但可视为随机事件的两个特殊情形.

事件 A 发生　当且仅当 A 所包含的一个样本点出现.

随机事件之间的关系　设随机试验 E 和样本空间 Ω,事件 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$.

(1) **包含关系**　如果 A 发生必导致 B 发生,则称 B 包含 A,记作 $A\subset B$.

(2) **相等关系**　如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,即当且仅当 A 发生时 B 发生,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

(3) **事件的和**　当且仅当 A 与 B 至少有一个发生时 C 发生,则称 C 是 A 与 B 的和(或并),记作 $C=A\cup B$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$,可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的和记作 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(4) **事件的积**　当且仅当 A 与 B 同时发生时 C 发生,则称 C 是 A 与 B 的积(或交),记作 $C=A\cap B$,简记作 $C=AB$.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$,可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的积记作 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(5) **互斥事件**　当且仅当 A 与 B 不能同时发生,即 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互斥事件(或互不相容事件).

注　任意两个基本事件都是互斥事件.

(6) **对立事件**　当且仅当 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 互为对立事件(或互逆事件),记作 $A=\bar{B}$ 或 $B=\bar{A}$.

(7) **差事件**　当且仅当 A 发生而 B 不发生时 C 发生,则称 C 是 A 与 B 的差,记作 $C=A-B$.

注　在随机试验中,互逆的两个事件必有且仅有一个发生,互斥的两个事件不能同时发生,但有可能同时都不发生. 因此互逆事件一定是互斥的,但是互斥事件未必是互逆的.

以上内容可用表 1.1 来汇总.

表　1.1

符号	事件与事件间的关系	事件的发生情况	集合与集合间的关系
Ω	必然事件	每次试验中必然发生	全集
$\varnothing$	不可能事件	每次试验中总不发生	空集
ω	基本事件	试验中有可能发生	元素
A	事件	试验中有可能发生	子集

清华大学出版社

续表

符号	事件与事件间的关系	事件的发生情况	集合与集合间的关系
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生	A 的余集
$A\subset B$	A 包含于 B 中	A 发生必导致 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	A 与 B 相等	A 与 B 同时发生或同时都不发生	A 与 B 相等
$A\cup B$	A 与 B 的和事件	A 与 B 至少有一个发生,即 $A\cup B$ 发生	A 与 B 的并集
$A\cap B$	A 与 B 的积事件	A 与 B 同时发生,即 $A\cap B$ 发生	A 与 B 的交集
$A-B$	A 与 B 的差事件	A 发生而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	A 与 B 互斥	A 与 B 不能同时发生	A 与 B 没有公共元素

事件的运算规则 设 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$表示事件:

交换律 $A\cup B=B\cup A$; $AB=BA$.

结合律 $A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$;$ABC=(AB)C=A(BC)$.

分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$; $(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$;

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)B=\bigcup_{k=1}^{n}(A_kB);\ \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)\cup B=\bigcap_{k=1}^{n}(A_k\cup B).$$

德摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$; $\overline{\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)}=\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}$; $\overline{\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A_k}$;

$$\overline{\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A_k};\ \overline{\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A_k}.$$

事件间的运算顺序约定为:如果有括号,先进行括号内的运算.在括号内先进行逆运算,再进行积运算,最后进行和或差运算.

事件间常用的关系式 设 A,B 为任意事件,则

(1) $\varnothing\subset A\subset\Omega$;

(2) $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$,$A-\varnothing=A$, $\varnothing-A=\varnothing$;

(3) $A\cup\Omega=\Omega$, $A\cap\Omega=A$,$A-\Omega=\varnothing$,$\Omega-A=\overline{A}$;

(4) $A\cup\overline{A}=\Omega$, $A\cap\overline{A}=\varnothing$, $A-\overline{A}=A$,$\overline{A}-A=\overline{A}$;

(5) $A-B\subset A\subset A\cup B$, $AB\subset A\subset A\cup B$, $AB\subset B\subset A\cup B$;

(6) $(A-B)\cup A=A$, $(A-B)\cup B=A\cup B$, $(A-B)\cap A=A-B$, $(A-B)\cap B=\varnothing$;

(7) $(A\cup B)\cup A=A\cup B$, $(A\cup B)\cap A=A$;

(8) $(AB)\cup B=B$, $(AB)\cap B=AB$;

(9) $(A-B)\cup(AB)=A$, $(A-B)\cap(AB)=\varnothing$;

(10) $A-B=A-AB=A\overline{B}$;

(11) $(A-B)\cup(A\cup B)=A\cup B$, $(A-B)\cap(A\cup B)=A-B$.

二、典型例题

例 1.1.1 写出下述随机试验的样本空间:

(1) 在 1,2,3 三个数中有放回地取两个数;

清华大学出版社

(2) 将贴有标签 a,b 的两个球随机地放入编号为 1,2 的两个盒子中，每盒可容两球；

(3) 在一批产品中抽取一件，直到抽到次品为止.

分析　用更简洁的方法表示样本点，比如有序数组.

解　(1)设样本点为 $\omega=(i,j)$，$i,j=1,2,3$，表示第一次取到数 i，第二次取到数 j，则样本空间为 $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

(2) 设样本点$(0,ab)$表示 a,b 两球都在 2 号盒中，(a,b)表示 a 在 1 号盒中，b 在 2 号盒中，以此类推，则样本空间为

$$\Omega=\{(0,ab),\ (ab,0),\ (a,b),\ (b,a)\}.$$

(3) 设样本点$(1,1,0)$表示第一次、第二次是正品，第三次是次品，以此类推，则样本空间为 $\Omega=\{(0),(1,0),(1,1,0),(1,1,1,0),\cdots\}$.

评　(3)中样本空间的形式说明只要没有抽到次品，试验则继续进行.

注　样本点的表示方法有多种，但上述表述简洁明了.

例 1.1.2　抛掷一枚匀质的骰子，记事件 $A=\{$出现偶数点$\}$，$B=\{$点数小于 4$\}$，$C=\{$点数是大于 2 的奇数$\}$，试用集合表示下述事件：

(1) AB；(2) $A\overline{B}C$；(3) $A\cup B$；(4) $A\cup B\cup\overline{C}$；(5) $A-B$；(6) $C-\overline{B}$.

分析　依题设明确 Ω,A,B,C 所包含样本点，再依事件间的关系表述所求事件.

解　依题设，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{2,4,6\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{3,5\}$.

(1) $AB=\{2\}$. (2) $A\overline{B}C=\varnothing$. (3) $A\cup B=\{1,2,3,4,6\}$. (4) $A\cup B\cup\overline{C}=\{1,2,3,4,6\}$.

(5) $A-B=\{4,6\}$. (6) $C-\overline{B}=\{3\}$.

注　因为 $\overline{C}\subset A\cup B$，所以 $A\cup B\cup\overline{C}=A\cup B$.

例 1.1.3　向某一目标射击 4 次，记 $A_k=\{$第 k 次命中目标$\}$，$k=1,2,3,4$，叙述下述事件的概率意义：

(1) $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$；(2) A_2-A_1；(3) $\overline{A_3A_4}$；(4) $A_4-(A_1\cup A_2\cup A_3)$；(5) $A_2\cup A_3A_4$.

分析　和事件或差事件转化为积事件，更易明确事件的意义.

解　依事件间的关系以及运算规则，有

(1) $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$，意指“前三次均未命中目标”.

(2) $A_2-A_1=\overline{A_1}A_2$，意指“第一次未命中目标且第二次命中目标”.

(3) $\overline{A_3A_4}=\overline{A_3}\cup\overline{A_4}$，意指“第三次与第四次至少有一次未命中目标”.

(4) $A_4-(A_1\cup A_2\cup A_3)=A_4\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}A_4$，意指“前三次均未命中目标而第四次命中目标”.

(5) $A_2\cup A_3A_4$，意指“第二次命中目标或第三次和第四次均命中目标”.

注　$A-B=A\overline{B}$，$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}$.

评　将具有某种关系的对立事件转化为对立事件的某种关系，更易阐述事件的概率意义.

议　对于事件，不仅要能用 A,B,C 等表述，还要明确表述的意义.

例 1.1.4　从一批产品中依次取 4 次，每次取 1 件，记事件 $A_k=\{$第 k 次取得正品$\}$，用它们表示下述事件：

(1) 4 件中没有 1 件是次品；　　(2) 4 件中恰有 1 件是次品；

(3) 4 件中至少有 1 件是次品；　　(4) 4 件中至多有 3 件是次品；

清华大学出版社

(5) 4 件中都是次品.

分析 依实际意义表示事件,比如,{ 4 件中没有 1 件是次品}$=A_1A_2A_3A_4$.

解 依题设,有

(1) $A_1A_2A_3A_4$;

(2) $\overline{A_1}A_2A_3A_4\cup A_1\overline{A_2}A_3A_4\cup A_1A_2\overline{A_3}A_4\cup A_1A_2A_3\overline{A_4}$;

(3) $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}$ 或者 $\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

(4) $\overline{\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}}$ 或者 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$;

(5) $\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}$ 或者 $\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}$.

注 {4 件中至多有 3 件是次品}={4 件中至少有 1 件是正品}.

评 依德摩根律,有 $\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}\cup\overline{A_4}=\overline{A_1A_2A_3A_4}$;

$$\overline{A_1}\ \overline{A_2}\ \overline{A_3}\ \overline{A_4}=\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4}.$$

例 1.1.5 设 A,B,C 是随机事件,说明下列关系式的概率意义:

(1) $ABC=A$;(2) $A\cup B\cup C=B$;(3) $BC\subset A$;(4) $B\subset A\cup C$;(5) $C\subset\overline{AB}$;(6) $\bar{C}\subset B$.

分析 利用事件间的关系判断表达式的概率意义.

解 (1) 因为 $ABC\subset A$,所以 $ABC=A\Rightarrow A\subset ABC\subset BC$,说明 A 发生必导致 B,C 同时发生.

(2) 因为 $B\subset A\cup B\cup C$,$A\cup B\cup C=B\Rightarrow A\cup C\subset A\cup B\cup C\subset B$,说明 A 或 C 发生必导致 B 发生.

(3) B,C 同时发生必导致 A 发生.

(4) B 发生必导致 A 发生或 C 发生.

(5) $C\subset\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$,$C$ 发生必导致 A 与 B 至少有一个不发生.

(6) C 不发生必导致 B 发生.

注 由 $C\subset\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$ 更易明确事件的关系.

评 对于事件,不仅要明确所含样本点,还要清楚其意义以及事件间的关系.

例 1.1.6 证明 $(A-B)\cup(AB)=A$.

分析 依事件间的关系和运算规则证明.

证法一 依事件间的关系与运算规则,有

$$(A-B)\cup(AB)=(A\bar{B})\cup(AB)=A(\bar{B}\cup B)=A\Omega=A.$$

证法二 $(A-B)\subset A$, $AB\subset A$,则$(A-B)\cup(AB)\subset A$. 又设 A 发生.

(1) 若 B 不发生,则 $A-B$ 发生;(2) 若 B 发生,则 AB 发生. 上两种情形表明,

$$A\subset(A-B)\cup(AB).$$

注 两个事件相等当且仅当同时发生或同时都不发生.

评 两种证明方法值得借鉴.

习题 1-1

1. 写出下述随机试验的样本空间:

(1) 同时掷两枚骰子,观察所得的点数之和;

(2) 在一批产品中每次任取一件,直至取到 5 件次品为止,记录所需抽取的次数.

清华大学出版社

2. 在一学生回答的 6 道选择题中，记 $A_k=\{$第 k 道选择题正确$\}(k=1,2,3,4,5,6)$，试用 $A_k(k=1,2,3,4,5,6)$表示下述事件：

(1) 6 道题中没有 1 道题错；　　(2) 6 道题中仅有 1 道题错；

(3) 6 道题中至少有 1 道题错；　　(4) 6 道题中至少有 2 道题错；

(5) 6 道题中至多有 5 道题错；　　(6) 6 道题都错.

3. 如图 1-1 所示，设随机事件 A,B,C，请用 A,B,C 表示图中事件①～④.

4. 设随机事件 A,B,C 分别表示订购报纸 A,B,C，试用 A,B,C 表示下述事件：

(1) 只订购报纸 B；　　(2) 只订购一种报纸；

(3) 至少订购一种报纸；　　(4) 订购的报纸不多于一种；

(5) 只订购报纸 B 和 C；　　(6) 只订购报纸 B 或 C；

(7) 恰好订购两种报纸；　　(8) 至少订购两种报纸；

(9) 订购的报纸不多于两种；　(10) 三种报纸都不订.

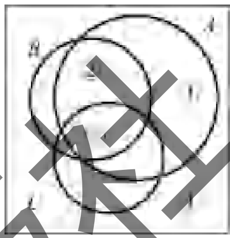

图　1-1

5. 证明$(A-B)\cap(AB)=\varnothing$.

6. 设 A 与 B 为两个随机事件，试求事件 C，使得$(C\cup A)\cap\overline{(C\cup\overline{A})}=B$.

1.2　古典概型

一、内容要点与评注

古典概型　在随机试验中，如果

(1) 样本空间包含有限个样本点，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$，

(2) 每个样本点发生的可能性相等，即 $P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)$，

则称这类试验的概率模型为古典概型.

在古典概型中，设事件 $A=\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},\cdots,\omega_{k_m}\}$，即 A 包含 m 个样本点，称 $P(A)=\dfrac{m}{n}$为 A 的**古典概率**，其中 n 为样本空间所含样本点的总数.

抽样的两种方式：

(1) 有放回抽样：每次抽样后记下结果再放回.

(2) 不放回抽样：每次抽样后不放回.

乘法原理　如果完成一件事需要经过两个过程，进行第一过程有 n_1 种方法，进行第二过程有 n_2 种方法，则完成这件事共有 $n_1\times n_2$ 种方法.

加法原理　如果完成一件事需要经过两个过程中的任一个过程，进行第一过程有 n_1 种方法，进行第二过程有 n_2 种方法，则完成这件事共有 n_1+n_2 种方法.

排列组合的定义及其运算公式：

排列　在不放回抽样中，从 n 个不同的元素中任取 r 个元素进行排列，其排法种数为

$$\mathrm{A}_n^r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

在放回抽样中，从 n 个不同的元素中任取 r 个元素进行排列，其排法种数为

$$\underbrace{n\cdot n\cdot\cdots\cdot n}_{r\text{个}}=n^r.$$

清华大学出版社

组合 在不放回抽样中，从 n 个不同的元素中任取 r 个元素而不考虑其先后顺序，其取法种数为 $C_n^r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

计数的两种方法：

(1) 依抽取的先后顺序将样品进行排列.

(2) 不依抽样的先后顺序，只要样品相同，视为同一种.

组合具有下述性质 设 n,k 都是整数，且 $n\geqslant 1, 0\leqslant k\leqslant n$，则

(1) $C_n^0=1$；

(2) $C_n^k=C_n^{n-k}(k\leqslant n)$；

(3) $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k(1\leqslant k\leqslant n)$；

证 $C_{n+1}^k=\dfrac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}=\dfrac{n+1}{n+1-k}\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n+1}{n-k+1}C_n^k$，因此

$$C_{n+1}^k-C_n^k=\left(\frac{n+1}{n-k+1}-1\right)C_n^k=\frac{k}{n-k+1}C_n^k$$
$$=\frac{k}{n-k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=C_n^{k-1}.$$

(4) $C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$；

证 依二项展开式，$2^n=(1+1)^n=C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n$.

(5) $C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+\cdots+C_n^nC_n^0=C_{2n}^n$，即 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$；

证 依二项展开式，有

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n,$$
$$(1+x)^{2n}=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots+C_{2n}^nx^n+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n}.$$

因为 $(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}$，即

$$(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n)(C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n)$$
$$=C_{2n}^0+C_{2n}^1x+\cdots+C_{2n}^nx^n+\cdots+C_{2n}^{2n-1}x^{2n-1}+C_{2n}^{2n}x^{2n},$$

等式左端括号乘开后，项 x^n 的系数为

$$C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}C_n^1+C_n^nC_n^0,$$

等式右端 x^n 的系数为 C_{2n}^n，依多项式相等当且仅当同次幂项的系数相等，有

$$C_n^0C_n^n+C_n^1C_n^{n-1}+C_n^2C_n^{n-2}+\cdots+C_n^{n-1}C_n^1+C_n^nC_n^0=C_{2n}^n.$$

又因为 $C_n^k=C_n^{n-k}$，因此 $(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$.

同理可证

$$C_{n_1}^0C_{n_2}^r+C_{n_1}^1C_{n_2}^{r-1}+C_{n_1}^2C_{n_2}^{r-2}+\cdots+C_{n_1}^{r-1}C_{n_2}^1+C_{n_1}^rC_{n_2}^0=C_{n_1+n_2}^r,$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{r}C_{n_1}^kC_{n_2}^{r-k}=C_{n_1+n_2}^r$，其中 n_1,n_2 是正整数，非负整数 $r\leqslant\min\{n_1,n_2\}$.

(6) 把 n 个不同的元素分成 k 个部分，第 i 个部分为 r_i 个元素 $(i=1,2,\cdots,k)$，$r_1+r_2+\cdots+r_k=n$，则不同分法的总数为 $C_n^{r_1}C_{n-r_1}^{r_2}C_{n-r_1-r_2}^{r_3}\cdots C_{n-r_1-\cdots-r_{k-1}}^{r_k}=\dfrac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_k!}$.

清华大学出版社

二、典型例题

例 1.2.1　在 10 件产品中有 6 件一等品，4 件二等品，从中任取 3 件，求下述事件概率：

(1) 所取的 3 件中有 1 件一等品；　　(2) 所取的 3 件全是一等品；

(3) 所取的 3 件全是二等品；　　(4) 所取的 3 件全是一等品或全是二等品；

(5) 所取的 3 件中既有一等品又有二等品.

分析　该试验属于古典概型，其概率计算公式为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 所包含的样本点数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 所包含的样本点数}}.$$

解　依题设，样本空间 Ω 包含 C_{10}^3 个样本点.

(1) 记事件 $A=\{$所取的 3 件中有 1 件一等品$\}$，则 A 包含 $C_6^1C_4^2$ 种取法，依古典概率的计算公式，有 $P(A)=\frac{C_6^1C_4^2}{C_{10}^3}=\frac{3}{10}$.

(2) 记事件 $B=\{$所取的 3 件全是一等品$\}$，则 B 包含 C_6^3 种取法，且 $P(B)=\frac{C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{6}$.

(3) 记事件 $C=\{$所取的 3 件全是二等品$\}$，则 C 包含 C_4^3 种取法，且 $P(C)=\frac{C_4^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{30}$.

(4) 记事件 $D=\{$所取的 3 件全是一等品或全是二等品$\}$，$D=B\cup C$，且 $BC=\varnothing$，则 D 包含 $C_4^3+C_6^3$ 种取法，且 $P(D)=\frac{C_4^3+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{5}$.

(5) 记事件 $E=\{$所取的 3 件中既有一等品又有二等品$\}$，$E=\Omega-D$，则 E 包含 $C_{10}^3-(C_4^3+C_6^3)$种取法，且 $P(E)=\frac{C_{10}^3-(C_4^3+C_6^3)}{C_{10}^3}=\frac{4}{5}$.

注　$C\neq\overline{B}$，$E=\overline{D}$.

评　利用古典概率的计算公式求概率的关键是确定样本空间所含的样本点数及事件所含的样本点数.

例 1.2.2　从 6 双不同尺码的鞋子中随机抽取 4 只，求下述事件的概率：

(1) 4 只鞋子中任何两只不成双；　　(2) 4 只鞋子恰成两双；

(3) 4 只鞋子中恰有两只成双；　　(4) 4 只鞋子全部是左脚；

(5) 4 只鞋子中 2 只左脚，2 只右脚，但都不成双.

分析　该试验属于古典概型. 样本空间共有 C_{12}^4 个样本点. 如果在 6 双中取一整双，有 C_6^1 种取法，如果取两个不成双的单只，有 $C_6^2C_2^1C_2^1$ 种取法. 其他情形同理.

解　依题设，样本空间包含 C_{12}^4 个样本点.

(1) 记事件 $A=\{$4 只鞋子中任何两只不成双$\}$，即分别取自不同尺码的 4 双鞋子中的各一只(或左脚或右脚)，则 A 包含 $C_6^4(C_2^1)^4$ 种取法，依古典概率的计算公式，有

$$P(A)=\frac{C_6^4(C_2^1)^4}{C_{12}^4}=\frac{16}{33}.$$

(2) 记事件 $B=\{$4 只鞋子恰成两双$\}$，即在 6 双鞋子中任取 2 双，则 B 包含 $C_6^2C_2^2$ 种取

清华大学出版社

法，且 $P(B)=\dfrac{C_6^2C_2^2}{C_{12}^4}=\dfrac{1}{33}$.

(3) 记事件 $C=\{4$ 只鞋子中恰有两只成双$\}$. 方法①先从 6 双鞋子中任取 1 双，再从其余 5 双鞋子中任取两双，两双中各任取 1 只，C 包含 $C_6^1C_5^2(C_2^1)^2$ 种取法，且

$$P(C)=\frac{C_6^1C_5^2(C_2^1)^2}{C_{12}^4}=\frac{16}{33}.$$

方法② $C=\Omega-A-B$，则 C 包含 $C_{12}^4-C_6^4(C_2^1)^4-C_6^2$ 种取法，且

$$P(C)=\frac{C_{12}^4-C_6^4(C_2^1)^4-C_6^2}{C_{12}^4}=\frac{16}{33}.$$

方法③先在 6 双鞋子中任取 1 双，再从其余 10 只中任选 2 只，减去有可能成双的，则 C 包含 $C_6^1(C_{10}^2-C_5^1)$ 种取法，且 $P(C)=\dfrac{C_6^1(C_{10}^2-C_5^1)}{C_{12}^4}=\dfrac{16}{33}$.

方法④先在 6 双鞋子中任取 1 双，从余下的 10 只中任取 1 只，在剩余的 9 只去掉与那只成双的，再从其余下的 8 只中任取 1 只，则 C 包含 $C_6^1(C_{10}^1C_8^1/2)$ 种取法(注意后两次取法有重复)，且 $P(C)=\dfrac{C_6^1\left(\frac{1}{2}C_{10}^1C_8^1\right)}{C_{12}^4}=\dfrac{16}{33}$.

(4) 记事件 $D=\{4$ 只鞋子全部是左脚$\}$，则 D 包含 $C_6^4(C_1^1)^4$ 种取法，且

$$P(D)=\frac{C_6^4(C_1^1)^4}{C_{12}^4}=\frac{1}{33}.$$

(5) 记事件 $E=\{4$ 只鞋子中 2 只左脚，2 只右脚，但都不成双$\}$，先在 6 双鞋子中任取 4 双，分为 2 组，左脚的 4 只一组，右脚的 4 只一组，则 E 包含 $C_6^4C_4^2C_2^2$ 种取法，且

$$P(E)=\frac{C_6^4C_4^2C_2^2}{C_{12}^4}=\frac{2}{11}.$$

或者事件 $E=A-\{$取出的 4 只都是左脚或都是右脚$\}-\{$取出的 4 只中恰有 3 只左脚或 3 只右脚(不成双)$\}$，则 E 包含 $C_6^4(C_2^1)^4-2C_6^4C_4^4-2C_6^4C_4^3C_1^1$ 种取法，且

$$P(E)=\frac{C_6^4(C_2^1)^4-2C_6^4C_4^4-2C_6^4C_4^3C_1^1}{C_{12}^4}=\frac{2}{11}.$$

注　在(3)的方法④中，取定 1 双后，在其余的 10 只中取不成双的 2 只时，应有 $\dfrac{1}{2}C_{10}^1C_8^1$ 种取法，而不是 $C_{10}^1C_8^1$ 种取法. 这是因为，设 5 双鞋编号为 $a_1/a_2,b_1/b_2,c_1/c_2,e_1/e_2,f_1/f_2$，标号 1 的均为左脚，先从 10 只中取 1 只，再从不与之成双的其余 8 只中取 1 只，所有可能的取法有

$(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,c_1),(a_1,c_2),(a_1,e_1),(a_1,e_2),(a_1,f_1),(a_1,f_2)$,

$(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,c_1),(a_2,c_2),(a_2,e_1),(a_2,e_2),(a_2,f_1),(a_2,f_2)$,

$(b_1,a_1),(b_1,a_2),(b_1,c_1),(b_1,c_2),(b_1,e_1),(b_1,e_2),(b_1,f_1),(b_1,f_2)$,

$(b_2,a_1),(b_2,a_2),(b_2,c_1),(b_2,c_2),(b_2,e_1),(b_2,e_2),(b_2,f_1),(b_2,f_2),\cdots$

可以看到，(a_1,b_1) 与 (b_1,a_1) 属一种情形，被重复计数为两种，同理可说明其他样本点均被重复计数一次，因此所有样本点总数应为 $\dfrac{1}{2}C_{10}^1C_8^1$.

清华大学出版社

评　本例是古典概型中常见的类型之一，所用方法为不放回抽样的组合法.

议　从 n 双不同尺码的鞋子中随机地抽取 $2k(4\leqslant 2k<n)$ 只，求下述事件的概率：

(1) 记 $A_1=\{2k$ 只鞋子中没有成双的$\}$；(2) 记 $A_2=\{2k$ 只鞋子中恰有 4 只成两双$\}$；

(3) 记 $A_3=\{2k$ 只鞋子中恰成 k 双$\}$；　(4) 记 $A_4=\{2k$ 只鞋子中全部是左脚$\}$；

(5) 记 $A_5=\{2k$ 只鞋子中 k 只左脚，k 只右脚，但都不成双$\}$.

解　(1) $P(A_1)=\dfrac{C_n^{2k}(C_2^1)^{2k}}{C_{2n}^{2k}}=\dfrac{2^{2k}C_n^{2k}}{C_{2n}^{2k}}$.

(2) $P(A_2)=\dfrac{C_n^2C_{n-2}^{2k-4}(C_2^1)^{2k-4}}{C_{2n}^{2k}}=\dfrac{2^{2k-4}C_n^2C_{n-2}^{2k-4}}{C_{2n}^{2k}}$.

(3) $P(A_3)=\dfrac{C_n^kC_2^2}{C_{2n}^{2k}}$.

(4) $P(A_4)=\dfrac{C_n^{2k}(C_1^1)^k}{C_{2n}^{2k}}=\dfrac{C_n^{2k}}{C_{2n}^{2k}}$.

(5) $P(A_5)=\dfrac{C_n^{2k}C_{2k}^kC_k^k}{C_{2n}^{2k}}=\dfrac{C_n^{2k}C_{2k}^k}{C_{2n}^{2k}}$.

例 1.2.3　袋中有 m 个红球，n 个黑球，把球一个一个取出来，求第 $k(1\leqslant k\leqslant m+n)$ 次取出红球的概率.

分析　依同颜色球是可区别的和不可区别的两种情形分别讨论.

解　(1) 假设 m 个红球，n 个黑球是带有不同编号的. 该试验属于古典概型. 样本空间 Ω 包含 $(m+n)!$ 个样本点，记事件 $A=\{$第 k 次取出红球$\}$，将取出的球依次放在直线上的 $m+n$ 个位置，共有 $(m+n)!$ 种放法，而第 k 个位置放红球，有 m 种放法，其余 $m+n-1$ 个球任意放置在其余 $m+n-1$ 位置，依乘法原理，A 包含 $m(m+n-1)!$ 个样本点，依古典概率的计算公式，有 $P(A)=\dfrac{m(m+n-1)!}{(m+n)!}=\dfrac{m}{m+n}$.

(2) 假设 m 个红球是相同的(不可区分的)，n 个黑球是相同的，如果把取出的球依次放在一直线上的 $m+n$ 个位置，红球占有 m 个位置，即样本空间 Ω 包含 C_{m+n}^m 个样本点，而第 k 个位置要放一红球，其余红球要在其余 $m+n-1$ 个位置占有 $m-1$ 个位置，即 A 包含 C_{m+n-1}^{m-1} 个样本点，则 $P(A)=\dfrac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}=\dfrac{m}{m+n}$.

注　两种不同方法所得结果一致：

$$P(A)=\frac{m(m+n-1)!}{(m+n)!}=\frac{m}{m+n},\quad P(A)=\frac{C_{m+n-1}^{m-1}}{C_{m+n}^m}=\frac{m}{m+n}.$$

评　在计算概率时，重要的不是采用何种计数模式(考虑顺序还是不考虑顺序)来计算样本空间和随机事件中所包含的样本点数目，而是要保证对两者采用同一种计数模式.

议　本题结果与 k 无关，说明抽签与顺序无关. 即无论第几个抽取，中签的概率都相等，都等于这类签(指中奖的签)在所有签中所占的比例.

例 1.2.4　n 名女生，m 名男生$(m\leqslant n+1)$随机地排成一列，求事件 $A=\{$任意 2 名男生都不相邻$\}$的概率.

分析　该试验属于古典概型. 将 $n+m$ 个学生随机地排成一排，有 $(n+m)!$ 种排法，将

清华大学出版社

女生排成一排，每名男生在任两名相邻女生间插空排入，再依古典概率的计算公式求概率.

解 依题设，样本空间 Ω 包含 $(n+m)!$ 个样本点，将 n 名女生随机地排成一排，有 $n!$ 种排法，相邻两名女生间有 $n-1$ 个位置，连同两头，共有 $n-1+2=n+1$ 个空位可供男生插空排入，因此 A 包含 $n!m!\mathrm{C}_{n+1}^{m}$ 个样本点，则 $P(A)=\dfrac{n!m!\mathrm{C}_{n+1}^{m}}{(n+m)!}$.

注 男生有 $n+1$ 个位置可选择，共有 $m!\mathrm{C}_{n+1}^{m}$ 种排法.

评 本例是古典概型中常见的类型之一，所用方法为不放回抽样的排列法.

议 n 名女生，m 名男生($m\leqslant n$)随机地围圆桌而坐，求事件 $A=\{$任意 2 名男生都不相邻$\}$的概率.

解 $n+m$ 个人围圆桌而坐，所有坐法有 $(n+m-1)!$，即样本空间 Ω 包含 $(n+m-1)!$ 个样本点. 围圆桌就座的 n 名女生共有 $(n-1)!$ 种坐法，之间有 n 个空位，男生可插空就座，能使任意 2 名男生都不相邻的坐法有 $m!\mathrm{C}_{n}^{m}$ 种，即 A 所包含的样本点数为 $(n-1)!m!\mathrm{C}_{n}^{m}$，依古典概率的计算公式，$P(A)=\dfrac{(n-1)!\mathrm{C}_{n}^{m}m!}{(n+m-1)!}=\dfrac{\mathrm{C}_{n}^{m}}{\mathrm{C}_{n+m-1}^{m}}$.

注 k 名女生排成一排有 $k!$ 种排法，而直线上的 k 种排法对应于圆桌边的一种排法，例如以顺时针方向

$$1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k,\ 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot k\cdot 1,\ 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot k\cdot 1\cdot 2,\ \cdots 和\ k\cdot 1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(k-1)$$

等都对应于圆桌边的一种排列，所以 k 名女生围圆桌而坐的圆形排法有 $\dfrac{k!}{k}=(k-1)!$ 种.

例 1.2.5 某宿舍有 5 名学生，求下述事件的概率：

(1) $A=\{$5 人的生日都在星期一$\}$；

(2) $B=\{$5 人中仅有 2 人生日在星期一$\}$；

(3) $C=\{$5 人中仅有 2 人生日在星期一，其余人的生日在星期二至星期日不同时间$\}$；

(4) $D=\{$5 人中有 2 人生日在星期一，有 3 人生日在星期二$\}$；

(5) $E=\{$5 人中有 2 人生日在星期一，有 2 人生日在星期二，有 1 人生日在星期三$\}$；

(6) $F=\{$5 人的生日不都在星期一$\}$；

(7) $G=\{$5 人的生日都不在星期一$\}$；

(8) $H=\{$5 人的生日恰好在星期一至星期五$\}$；

(9) $I=\{$5 人的生日恰好在星期一至星期日 7 天中的不同 5 天$\}$.

分析 该试验属于古典概型. 每个人的生日按星期一到星期日共有 7 种选法，5 个人的生日共有 7^5 种可能选法，再依古典概率的计算公式求概率.

解 依题设，样本空间 Ω 包含 7^5 个样本点.

(1) A 包含 1^5 个样本点，则 $P(A)=\dfrac{1}{7^5}$.

(2) B 包含 $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_1^1 6^3$ 个样本点，则 $P(B)=\dfrac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_1^1 6^3}{7^5}=\dfrac{2160}{7^5}$.

(3) C 包含 $\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_6^3$ 个样本点，则 $P(C)=\dfrac{\mathrm{C}_5^2\mathrm{C}_1^1\mathrm{A}_6^3}{7^5}=\dfrac{1200}{7^5}$.

清华大学出版社

(4) D 包含 $C_5^2C_1^1C_3^3$ 个样本点,则 $P(D)=\dfrac{C_5^2C_1^1C_3^3C_1^1}{7^5}=\dfrac{10}{7^5}$.

(5) E 包含 $C_5^2C_1^1C_3^2C_1^1$ 个样本点,则 $P(E)=\dfrac{C_5^2C_1^1C_3^2C_1^1C_1^1}{7^5}=\dfrac{30}{7^5}$.

(6) F 包含 7^5-1 个样本点,则 $P(F)=\dfrac{7^5-1}{7^5}=1-\dfrac{1}{7^5}$.

(7) G 包含 6^5 个样本点,则 $P(G)=\dfrac{6^5}{7^5}$.

(8) H 包含 A_5^5 个样本点,则 $P(H)=\dfrac{A_5^5}{7^5}=\dfrac{5!}{7^5}$.

(9) I 包含 A_7^5 个样本点,则 $P(I)=\dfrac{A_7^5}{7^5}=\dfrac{360}{7^4}$.

注　$F=\overline{A}$, $G\neq\overline{A}$.

评　本例是古典概型中常见的类型之一,所用方法为有放回抽样的排列法.

例 1.2.6　从 1,2,3,…,9 这 9 个数字中,有放回地取 3 次,每次任取一个,求下述事件的概率:

(1) $B_1=\{3$ 个数字全不同$\}$;

(2) $B_2=\{3$ 个数字没有偶数$\}$;

(3) $B_3=\{3$ 个数字中最大数字为 $6\}$;

(4) $B_4=\{3$ 个数字形成一个严格单调数列$\}$;

(5) $B_5=\{3$ 个数字之乘积能被 10 整除$\}$;

(6) $B_6=\{3$ 个数字组成的三位数大于 $500\}$.

分析　该试验属于古典概型. 从 1,2,3,…,9 中有放回地取 3 次,共有 9^3 种取法,再依古典概率的计算公式求概率.

解　依题设,样本空间 Ω 包含 9^3 个样本点.

(1) “3 个数字全不同”意指从 1,2,3,…,9 中取 3 个不同的数字,因此 B_1 包含 $C_9^1C_8^1C_7^1$ 个样本点,则 $P(B_1)=\dfrac{C_9^1C_8^1C_7^1}{9^3}=\dfrac{56}{81}$.

(2) “3 个数字没有偶数”意指先从 1,3,5,7,9 中有放回地取三次,因此 B_2 包含 5^3 个样本点,则 $P(B_2)=\dfrac{5^3}{9^3}=\dfrac{125}{729}$.

(3) “3 个数字中最大数字为 6”意指从数字 1～6 中任取 3 个数字的所有排法,减去从数字 1～5 中任取 3 个数字的所有排法,因此 B_3 包含 6^3-5^3 个样本点,则

$$P(B_3)=\frac{6^3-5^3}{9^3}=\frac{91}{729}.$$

或者“3 个数字中最大数字为 6”意指“3 个数字都是 6,或者其中 2 个数字是 6 另一个数字小于 6,或者其中 1 个数字是 6 另 2 个数字小于 6”,因此 B_3 包含 $(C_1^1)^3+C_3^2(C_1^1)^2C_5^1+C_3^1C_1^1(C_5^1)^2$ 个样本点,则 $P(B_3)=\dfrac{(C_1^1)^3+C_3^2(C_1^1)^2C_5^1+C_3^1C_1^1(C_5^1)^2}{9^3}=\dfrac{1+15+75}{9^3}=\dfrac{91}{729}$.

清华大学出版社

(4)"3个数字形成一个严格单调数列"意指从1,2,3,…,9中有放回地取三个不同的数字,依由大到小排序或者由小到大排序,因此B_4包含$2C_9^3$个样本点,则

$$P(B_4)=\frac{2C_9^3}{9^3}=\frac{56}{243}.$$

(5)"3个数字之乘积能被10整除"意指取出的三个数字中有两个偶数、一个5,或者一个偶数、两个5,或者一个偶数、一个5和一个非5的其他奇数,于是B_5包含$C_3^1C_1^1(C_4^1)^2+C_3^2(C_1^1)^2C_4^1+C_3^1C_1^1C_2^1C_4^1C_4^1$个样本点,则

$$P(B_5)=\frac{C_3^1C_1^1(C_4^1)^2+C_3^2(C_1^1)^2C_4^1+C_3^1C_1^1C_2^1C_4^1C_4^1}{9^3}=\frac{48+12+96}{9^3}=\frac{52}{243}.$$

(6)"3个数字组成的三位数大于500",即百位数要从5,6,7,8,9中取,于是B_6包含$C_5^19^2$个样本点,则$P(B_6)=\frac{C_5^19^2}{9^3}=\frac{5}{9}$.

注 同一个事件可以从多个不同的角度来分析,因此概率的求法就有多种.

评 注意比较事件$B_1,B_2,\cdots,B_6$之间的区别和概率求法的不同.

习题 1-2

1. 从一副抽出大小王的扑克牌中任取4张,求下述事件的概率:

(1) 它们分属不同的花色; (2) 它们全是红桃;

(3) 它们属于同一种花色; (4) 它们属于同色(比如草花和黑桃).

2. 8个人随机地排成一排,求其中指定的3人排在一起的概率.

3. 编号1~7的学生任意排成一排,试求下述事件的概率:

(1) F_1={1号学生在旁边}; (2) F_2={1号和7号学生都在旁边};

(3) F_3={1号或7号学生在旁边}; (4) F_4={1号和7号学生都不在旁边};

(5) F_5={1号学生正好在正中}; (6) F_6={1号和7号学生相邻}.

4. 设n个人排成一排,求其中甲与乙之间恰有m人的概率.

5. 同时掷5枚骰子,试求下述事件的概率:

(1) 5枚骰子恰有不同点;

(2) 5枚骰子恰有2枚同点;

(3) 5枚骰子恰有2枚同一点,其余3枚同是另一点;

(4) 5枚骰子恰有2枚同一点,其余2枚同是另一点,剩余一枚是第三点.

6. 从0,1,2,…,9中有放回地取5次,组成包含"0"在首位的整数,从中任取1个整数,求下述事件的概率:

(1) B_1={恰有一个数字出现两次}; (2) B_2={5个数字全不同};

(3) B_3={5个数字没有偶数}; (4) B_4={5个数字中最大数字为7};

(5) B_5={5个数字形成一个严格单调序列}.

清华大学出版社

1.3　几何概型

一、内容要点与评注

几何概型　如果随机试验的所有可能结果等可能地出现在一个有界可度量的区域 Ω 中，向 Ω 中随机地投一点，这点落入 Ω 中某区域 A（可度量）的概率 P 与 A 的度量（一维指长度，二维指面积，三维指体积）成正比，与其位置和形状无关，称 $P=\dfrac{m(A)}{m(\Omega)}$ 为事件 A 的**几何概率**，其中 $m(A)$，$m(\Omega)$ 分别表示 A 和 Ω 的度量，并称利用上式来刻画概率的试验为几何概型.

注　几何概型的特点：

(1)样本空间包含无限多个样本点；(2)每个样本点发生的可能性相等.

因此几何概型不是古典概型.

评　向区间$[0,1]$上随机地掷一个点，$\Omega=[0,1]$，记 $A=\{$该点落在区间中点$\}$，则 $A=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$，其长度 $L(A)=0$，则 $P(A)=\dfrac{L(A)}{L(\Omega)}=\dfrac{0}{1}=0$. 显然 $A=\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\neq\varnothing$，说明概率为 0 的事件未必是不可能事件. 此时 $P(\overline{A})=1-P(A)=1$，但是 $\overline{A}=\left[0,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},1\right]\neq\Omega$，说明概率为 1 的事件未必是必然事件.

二、典型例题

例 1.3.1　随机地向单位圆内掷一点 M，求 M 点到原点距离小于$\dfrac{1}{4}$的概率.

分析　该试验属于几何概型，依计算公式，$P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$，其中

$$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\},A=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^2\right\}.$$

解　依题设，样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则 Ω 的面积 $S(\Omega)=\pi\cdot 1^2=\pi$，记事件 $A=\left\{M\text{ 点到原点的距离小于}\dfrac{1}{4}\right\}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right\}$，则 A 的面积 $S(A)=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{16}$，依几何概率的计算公式，有 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{\frac{\pi}{16}}{\pi}=\dfrac{1}{16}$.

注　$\Omega=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，$A=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\right\}$.

评　在几何概型中，明确事件及其“度量”是关键.

例 1.3.2　在长度为 1 的线段上任取两点，将线段分成长度分别为 $x,y,z(x+y+z=1)$的三段，试求可以用这三条线段为边组成三角形的概率.

分析　该试验属于几何概型，依计算公式，$P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}$，其中

清华大学出版社

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,0<x<1,0<y<1,0<z<1\}.$$

要使三条线段组成三角形，x,y,z 还应满足如下条件：

$$\begin{cases}x+y>z,\\ y+z>x,\\ z+x>y,\end{cases}\text{解之得 } 0<x<\frac{1}{2},0<y<\frac{1}{2},0<z<\frac{1}{2}.$$

解　依题设，则样本空间为

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,0<x<1,0<y<1,0<z<1\}.$$

记事件 $A=\{$折成的三段能组成三角形$\}$，则

$$A=\left\{(x,y,z)\mid x+y+z=1,0<x<\frac{1}{2},0<y<\frac{1}{2},0<z<\frac{1}{2}\right\}.$$

如图 1-2 所示，在空间直角坐标系内，设 B,C,D 就是平面 $x+y+z=1$ 与坐标轴的交点，即 $\Omega=\triangle BCD$，设其面积为 $S(\Omega)$，设 E,F,G 分别是平面 $x=\frac{1}{2},y=\frac{1}{2},z=\frac{1}{2}$ 与 $\triangle BCD$ 的交点，则 $A=\triangle EFG$，设其面积为 $S(A)$，显然 $S(\Omega)=4S(A)$，依几何概率的计算公式，有

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{1}{4}.$$

注　$\Omega=\triangle BCD$，　$A=\triangle EFG$.

评　借助几何概型，$S(\Omega)=4S(A)$，从而 $P(A)=\dfrac{S(A)}{S(\Omega)}=\dfrac{1}{4}$.

例 1.3.3　甲、乙两人约定在早上 7:00～8:00 之间在某处会面，并约定先到者应等候另一人 15min，过时对方不到则离去，求两人能会面的概率.

分析　该试验属于几何概型. 以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达的时刻，则

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\},$$

$A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60,\ |x-y|\leqslant 15\}$，再依几何概率的计算公式求解.

解　依题设，从 7:00 开始计时(单位：min)，以 x 和 y 分别表示甲、乙两人到达的时刻，如图 1-3 所示，则样本空间 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60\}$，其面积为 $S(\Omega)=60^2$，记事件 $A=\{$两人能会面$\}$，则 $A=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60,\ |x-y|\leqslant 15\}$，$A$ 就是阴影区域，其面积为 $S(A)=60^2-2\times\frac{1}{2}\times 45^2=1575$，依几何概率的计算公式，有

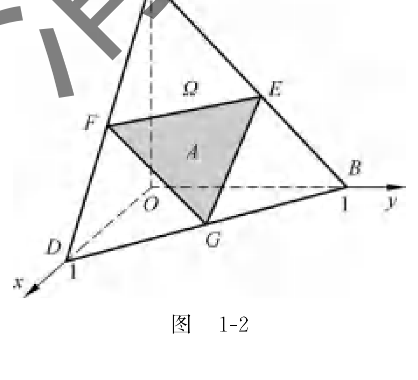

图　1-2

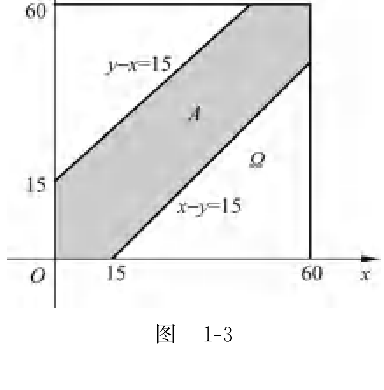

图　1-3

清华大学出版社

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16}.$$

注　$A=\{$阴影区域$\}=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,\ 0\leqslant y\leqslant 60,\ |x-y|\leqslant 15\}$.

评　将实际问题抽象为几何概型,再依几何概率的计算公式求概率.

例 1.3.4　在单位圆 S 内任作一弦,试求弦长大于$\sqrt{3}$的概率.

分析　分三种情形讨论:(1) 在单位圆周上固定弦的一个端点 A,考查弦的另一端点 B;(2) 在单位圆内固定一直径 CD,考查与 CD 垂直的弦 AB;(3) 在单位圆内固定一正三角形以及其内切半径为$\frac{1}{2}$的同心圆 K,考查 AB 的中点 F. 上述三种试验均属于几何概型.

解　(1) 在单位圆周上固定弦 AB 的一个端点 A,如图 1-4(a)所示,下面考查弦的另一端点 B,故样本空间 $\Omega=S$,其圆周长 $L(\Omega)=2\pi$,以 A 为顶点做内接正三角形$\triangle ACD$,其边长等于$\sqrt{3}$,所以当且仅当弦 AB 与 CD 相交时,AB 的长度大于$\sqrt{3}$. 记事件 $H=\{B$ 落在以$\angle CAD$ 为圆周角的圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 上$\}$(B 不与 C,D 重合),此时圆弧的长度为

$$L(H)=\frac{1}{3}\times 2\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

依几何概率的计算公式,有 $P(H)=\dfrac{L(H)}{L(\Omega)}=\dfrac{2\pi/3}{2\pi}=\dfrac{1}{3}$.

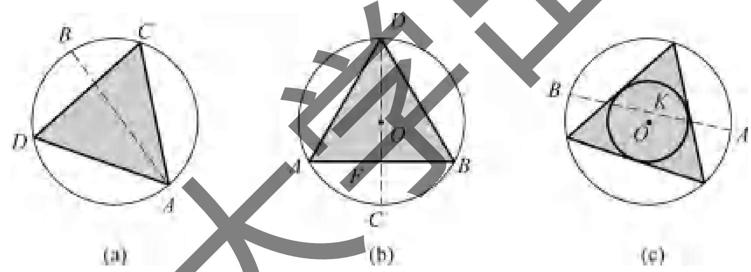

图　1-4

(2) 在单位圆内取定一条直径 CD,如图 1-4(b)所示,下面考查与 CD 垂直的弦 AB,此时弦 AB 的中点 F 必在直径 CD 上,故样本空间 $\Omega=CD$,其长度 $L(\Omega)=2$,所以当且仅当 AB 的中点与圆心 O 的距离小于$\frac{1}{2}$时,弦 AB 的长度大于$\sqrt{3}$,记 $H=\left\{F\mid F\in CD,\ |OF|<\frac{1}{2}\right\}$,则 $L(H)=1$,依几何概率的计算公式,有 $P(H)=\dfrac{L(H)}{L(\Omega)}=\dfrac{1}{2}$.

(3) 在单位圆内固定一正三角形以及半径为$\frac{1}{2}$的同心圆 K,如图 1-4(c)所示,下面考查 AB 的中点 F,当且仅当弦 AB 的中点 F 位于 K 内时,弦 AB 的长度大于$\sqrt{3}$,故样本空间 $\Omega=$单位圆域,其面积为 $S(\Omega)=\pi\times 1^2=\pi$,记事件 $H=\{$弦 AB 的中点在落入 K 内$\}$,其面积为 $S(H)=\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}$,依几何概率的计算公式,有

$$P(H)=\frac{S(H)}{S(\Omega)}=\frac{\frac{\pi}{4}}{\pi}=\frac{1}{4}.$$

清华大学出版社

注　在三种不同的情形下，所得的概率值不同，分别为

$$P(H)=\frac{1}{3},\quad P(H)=\frac{1}{2},\quad P(H)=\frac{1}{4}.$$

评　同一问题有三个不同的答案，究其原因，发现是在取弦时采用不同的等可能性假定造成的. 在解法(1)中，假定端点在圆周上具有等可能性；在解法(2)中，假定弦的中点在直径上具有等可能性；在解法(3)中，假定弦的中点在单位圆域内具有等可能性，这三种答案针对三种不同的随机试验而言，它们都是正确的. 因此在使用“随机”“等可能”时，应明确指明其含义.

议　同一问题产生不同结论的原因在于题目中“作一弦”的含义不够清楚，因而可对其作各种不同的解释，从而导致对样本空间 Ω 和随机事件 H 的不同理解和演化，因此产生多种不同的结论. 上述现象也称为“贝特朗奇论”.

例 1.3.5　平面上画有一族间距为 a 的平行直线，向平面上随机掷一枚长度为 $l(l<a)$ 的针，试求针与直线相交的概率.

分析　该试验属于几何概型. 设针的中点与最近直线的距离为 ρ，针与平行线的夹角为 α，若针与直线相交，则 $\rho\leqslant\frac{l}{2}\sin\alpha$，则

$$\Omega=\left\{(\rho,\alpha)\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\pi\right\},\quad A=\left\{(\rho,\alpha)\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\rho\leqslant\frac{l}{2}\sin\alpha\right\},$$

再依几何概率的计算公式求概率。

解　依题设，设针的中点与最近直线的距离为 ρ，针与平行线的夹角为 α，如图 1-5(a)所示，故样本空间 $\Omega=\left\{(\rho,\alpha)\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\pi\right\}$，其面积为 $S(\Omega)=\frac{a}{2}\pi$，针与直线相交当且仅当 $\rho\leqslant\frac{l}{2}\sin\alpha$，记事件 $A=\{$针与直线相交$\}$，则

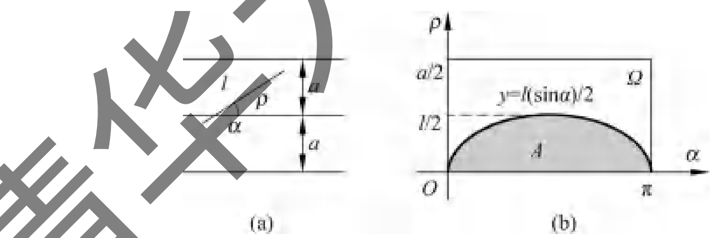

图　1-5

$$A=\left\{(\rho,\alpha)\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\pi,\rho\leqslant\frac{l}{2}\sin\alpha\right\},$$

如图 1-5(b) 所示，其面积为 $S(A)=\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha=l$，依几何概率的计算公式，有

$$P(A)=\frac{S(A)}{S(\Omega)}=\frac{l}{\frac{a}{2}\pi}=\frac{2l}{a\pi}.$$

注　$\Omega=\left\{(\rho,\alpha)\middle|\,0\leqslant\rho\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\alpha\leqslant\pi\right\}$，其中 ρ 表示针的中点与最近平行线的距离，α 为

清华大学出版社

针与平行线的夹角.

议　依本例结论，$\pi=\frac{2l}{aP(A)}\approx\frac{2ln}{am}$，其中 n,m 分别为所掷针的总数和其中与平行线相交的针的个数，则 $P(A)\approx\frac{m}{n}$. 借助几何概率，可得求圆周率 π 近似值的又一种方法.

习题 1-3

1. 设线段 OB 的长为 2，A 为其中点，在 OB 上随机地取一点 C，求 OC，CB，OA 能构成三角形的概率.

2. 在圆周上随机选取三个点 A,B,C，求 $\triangle ABC$ 为锐角三角形的概率.

3. 在一圆周上随机地取三个点，求这三个点在同一半圆周上的概率.

4. 某码头只能容纳一艘大型轮船. 现预知某日将有甲、乙两艘大型轮船独立到达码头，且 24h 内各时刻到达码头的可能性相等，如果它们需要停泊的时间分别为 3h、4h，求有一艘轮船要在江中等待的概率.

5. 从区间(0,1)中随机地取两个数，求下述事件的概率：

(1) 两数之和小于 $\frac{6}{5}$；(2) 两数之积小于 $\frac{1}{4}$.

1.4　概率及其性质

一、内容要点与评注

概率的一般定义　对一个随机事件 A，如果用一个数能表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小，则称这个数为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

例如古典概型、几何概型中的概率.

频率　在相同的条件下，进行了 n 次试验，如果事件 A 出现了 n_A 次，则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率，记作 $f_n(A)$.

频率的性质　(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；(2) $f_n(\Omega)=1$；(3) 如果事件 A 与 B 互斥，则

$$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B).$$

推广：如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥，则 $f_n\left(\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}f_n(A_k)$.

注　频率是一个变量. 当试验的次数 n 增大时，频率 $f_n(A)$ 趋于稳定，即在某一个数 p 的附近波动. 这一现象称为频率的稳定性.

概率的统计定义　若随着试验次数 n 的增大，事件 A 的频率在数 p 的附近波动，则称 p 是事件 A 的统计概率，简称 A 的概率，记作 $P(A)=p$.

注　当试验的次数 n 很大时，可用 $f_n(A)$ 近似表示 A 的概率，即 $P(A)\approx f_n(A)$.

概率的公理化定义　设随机试验 E 和样本空间 Ω，对于 E 中的事件 A，如果函数 $P(A)$ 满足下述条件：

(1) 非负性 $P(A)\geqslant 0$；

清华大学出版社

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性　对任何两两互不相容的事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k),$$

则称 $P(A)$为事件 A 的概率.

概率的性质　设随机试验 E 和样本空间 $\Omega,A,B,C,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为事件.

(1) $0\leqslant P(A)\leqslant 1$;

(2) $P(\Omega)=1,P(\varnothing)=0$;

(3) 有限可加性　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,则 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)$;

(4) $P(\overline{A})=1-P(A)$;

(5) 减法公式　如果 $A\supset B$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,且 $P(A)\geqslant P(B)$;

(6) 加法公式　$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$.

推广 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=\sum_{k=1}^{n} P(A_k)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$;

(7) $P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B})$;

推广 $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)=1-P\left(\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k}\right)=1-P\left(\bigcap_{k=1}^{n}\overline{A_k}\right)$.

(8) 下连续性　设事件序列$\{A_n\}$,且 $A_n\subset A_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$,则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(A_n).$$

证　规定 $A_0=\varnothing$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})$,显然$\{A_n-A_{n-1}\}$两两互斥,依概率的可列可加性,$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n-A_{n-1})$,依正项级数的收敛性,有

$$1\geqslant P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})\right)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n-A_{n-1})=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} P(A_n-A_{n-1}),$$

即 $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)=\lim_{m\to\infty}P(A_m)=\lim_{n\to\infty}P(A_n)$.

(9) 上连续性　设事件序列$\{B_n\}$,且 $B_n\supset B_{n+1}$, $n=1,2,3,\cdots$,则

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\lim_{n\to\infty}P(B_n).$$

证　依题设,$\overline{B_n}\subset\overline{B_{n+1}}$, $n=1,2,3,\cdots$,依概率的下连续性,有

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\right)=\lim_{n\to\infty}P(\overline{B_n}).$$

依德摩根律及概率的性质,有

$$\lim_{n\to\infty}P(\overline{B_n})=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{B_n}\right)=P\left(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n}\right)=1-P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right),$$

清华大学出版社

即$\lim\limits_{n\to\infty}(1-P(B_n))=1-P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)$，因此$P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}B_n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}P(B_n)$.

设事件A,B,AB的概率分别为$P(A)=p$，$P(B)=q$，$P(AB)=r$，依概率的性质，有

(1) $P(\bar{A})=1-P(A)=1-p$；

(2) $P(\bar{B})=1-P(B)=1-q$；

(3) $P(\bar{A}B)=P(B)-P(BA)=q-r$；

(4) $P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=p-r$；

(5) $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})-P(\bar{A}B)=(1-p)-(q-r)=1-p-q+r$；

(6) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=p+q-r$；

(7) $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}B)=(1-p)+q-(q-r)=1-p+r$；

(8) $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})=p+(1-q)-(p-r)=1-q+r$；

(9) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-r$；

(10) $P(\bar{A}B\cup A\bar{B})=P(\bar{A}B)+P(A\bar{B})=(q-r)+(p-r)=p+q-2r$；

(11) $P(\bar{A}\bar{B}\cup AB)=P(\bar{A}\bar{B})+P(AB)=(1-p-q+r)+r=1-p-q+2r$；

(12) $P(\overline{\bar{A}B\cup A\bar{B}})=1-P(\bar{A}B\cup A\bar{B})=1-(p+q-2r)=1-p-q+2r$.

二、典型例题

例 1.4.1　在 1～1000 的整数中随机地取一个数，问：取到的整数既不能被 6 整除，又不能被 8 整除的概率为多少？

分析　记事件$A=\{$取到的数能被 6 整除$\}$，$B=\{$取到的数能被 8 整除$\}$，依概率的性质，

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

解　依题设，样本空间Ω所含的样本点数为 1000，记事件$A=\{$取到的数能被 6 整除$\}$，$B=\{$取到的数能被 8 整除$\}$，则$AB=\{$取到的数能被 24 整除$\}$. 因为

$$166<\frac{1000}{6}<167,\quad \frac{1000}{8}=125,\quad 41<\frac{1000}{24}<42,$$

上式表明 1～1000 中能被 6 整除的数有 166 个，能被 8 整除的数有 125 个，能被 24 整除的数有 41 个，所以$P(A)=\frac{166}{1000}$，$P(B)=\frac{125}{1000}$，$P(AB)=\frac{41}{1000}$，依德摩根律和概率的性质，有

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B})&=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)\\&=1-\frac{166}{1000}-\frac{125}{1000}+\frac{41}{1000}=\frac{750}{1000}=\frac{3}{4}.\end{aligned}$$

注　$AB=\{$能被 6 整除且能被 8 整除$\}=\{$能被 6,8 的最小公倍数 24 整除$\}$. 因为$41<\frac{1000}{24}<42$，所以 1～1000 中能被 6 和 8 整除的数有 41 个. 其他情形同理.

评　依德摩根律和概率的性质，将所求事件的概率转化为已知事件的概率.

例 1.4.2　口袋中有$n-1$个白球和 1 个黑球，每次从中随机地取出一球，并放入 1 个白球，如此进行m次，求第m次取出的球是白球的概率.

清华大学出版社