CHAPTER 1

第1章 线性规划及单纯形法

学习目标与要求

1. 掌握线性规划的有关概念，会化非标准型线性规划为标准型线性规划。
2. 初步建立数学模型的概念。
3. 掌握求解线性规划的单纯形法并会用 Matlab 求解线性规划问题。

1.1 线性规划问题及其标准型

线性规划 (linear programming, LP) 是运筹学中一个基础而重要的分支，很多其他运筹学问题的求解都以线性规划问题为基础。线性规划开创性的工作可以追溯到 1939 年苏联数学家、经济学家康托洛维奇 (L. V. Kantorovich，1912—1986) 的著作《生产组织和计划中的数学方法》。他把资源最优利用这一传统的经济学问题，由定性研究和一般的定量分析推进到现实计量阶段，对于在企业范围内如何科学地组织生产和在国民经济范围内怎样最优地利用资源等问题做出了独创性的研究。此外，美国经济学家库普曼斯 (T. C. Koopmans) 和美国数学家丹兹格 (G. B. Dantzig) 在线性规划的发展历史中也作出了开创性的卓越贡献。前者在“二战”期间重新独立地研究了运输问题；后者则发明了 20 世纪最伟大的算法之一，用于求解线性规划问题的单纯形法。从理论上来说，单纯形法不是多项式时间算法，后来出现的椭球算法和内点算法是求解线性规划问题的多项式时间算法，但在实际计算中，特别是对中小规模的线性规划问题，单纯形法的表现仍然很好。因此，对于现在学习运筹学的人来说，单纯形法仍然是必须掌握的算法。

1.1.1 线性规划问题的提出

所谓线性规划是指求解一组决策变量，该组决策变量在满足一些线性约束条件的基础上，使得某个线性函数的值达到最大或最小。下面通过两个例子加以说明。

✍ **模型引入 1.1 (生产安排问题)** 某工厂生产甲、乙两种产品，生产这两种产品需要用到原材料 A 和 B。该厂可以利用的原料 A 有 16kg，原料 B 有 12kg。生产一个单位甲产品需要消耗 2kg 原料 A 和 4kg 原料 B，生产一个单位乙产品需要消

耗 3kg 原料 A 和 1kg 原料 B。经过测算，一个单位的甲产品可以获得 6 元的利润，一个单位的乙产品可以获得 7 元的利润。问：该厂应如何安排生产才能获得最大的利润?

解 这个问题问的是如何安排生产才能获得最大的利润。什么叫安排生产呢? 在这个简化的题目中，所谓安排生产当然指的是生产甲、乙两种产品各多少个单位。所以这是我们要回答的，是不知道的量。设生产甲、乙两种产品各为 x_1 和 x_2 个单位，于是按照题目的假设，该厂此时可以获利 $z = 6x_1 + 7x_2$(元)。生产不能是随意的，在这里，生产所耗费的原料当然不能超过该厂的拥有量。于是，生产必须在如下约束下进行：

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 16 \quad &\text{(原料 A 的限制)} \\ 4x_1 + x_2 &\leqslant 12 \quad &\text{(原料 B 的限制)} \end{aligned}$$

此外，x_1, x_2 是甲、乙产品的计划生产量，所以有 $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$。我们用 max 表示 maximize(即最大)，用 subject to 或 such that 表示受约束 (其缩写为 s.t.)，于是，我们可以将上面的分析表示为

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 6x_1 + 7x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 16 \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

这就是该问题的数学模型。它将原问题用数学的语言完全表达出来了。

✍ **模型引入 1.2** (**最佳下料问题**) 某汽车制造过程中需要用到 1.5m、1m、0.7m 的钢轴各一根。用于制造这些钢轴的原料是 4m 长的圆钢。现在要制造 1000 辆汽车，问最少需要多少根圆钢?

解 由于三种规格的钢轴长度之和为 3.2m，一个自然的做法是在一根圆钢上截取就可以完成该项任务。但是，这样做的话将会出现 0.8m 的料头。制造 1000 辆汽车将会出现 800m 的料头，如果这些料头不能做其他用途，则相当于浪费了 200 根原材料。那么，有没有什么办法减少浪费呢? 仔细阅读题目不难发现，我们需要的是 1.5m、1m、0.7m 的钢轴各一根，并没有要求这些钢轴来自于同一根圆钢。也就是说，只要获得 1.5m、1m、0.7m 的钢轴各 1000 根就行了。于是，我们可以按照这样的思路来考虑：假设在圆钢上的切口厚度忽略不计，那么，若在一根圆钢上截取 2 根 1.5m、1 根 1m 的钢轴，则没有任何余料，若在一根圆钢上截取 2 根 1.5m、1 根 0.7m 的钢轴，则只有 0.3m 的余料……把这些方案列举出来 (见表 1.1)。

只要余料小于 0.8m，那么都是比原始想法好的截取方案，这样，通过各种截取方案获得的 1.5m、1m 和 0.7m 的钢轴只要都有 1000 根这项任务就完成了。这样做的目的当然是让产生的余料之和达到最小。于是，可以设 $x_i(i = 1, 2, \cdots, 10)$ 表示采用第 i 种方案时圆钢的数目，则将得到规格为 1.5m，1m 和 0.7m 的钢轴分别为

表 1.1　优于原始方案的下料方案

钢轴规格 (根) \ 方案	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	需求量
1.5m	2	2	1	1	1	0	0	0	0	0	1000
1m	1	0	2	1	0	4	3	2	1	0	1000
0.7m	0	1	0	2	3	0	1	2	4	5	1000
余料 (m)	0	0.3	0.5	0.1	0.4	0	0.3	0.6	0.2	0.5	

$$
\begin{aligned}
&2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5 && (1.5\text{m 钢轴})\\
&x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9 && (1\text{m 钢轴})\\
&x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10} && (0.7\text{m 钢轴})
\end{aligned}
$$

按照这样的做法，将会产生的余料表达式为

$$0.3x_2+0.5x_3+0.1x_4+0.4x_5+0.3x_7+0.6x_8+0.2x_9+0.5x_{10}$$

于是，我们得到该问题的数学模型：

$$
\begin{aligned}
&\min\quad z=0x_1+0.3x_2+0.5x_3+0.1x_4+0.4x_5+0x_6+0.3x_7+0.6x_8+0.2x_9+0.5x_{10}\\
&\text{s.t.}\\
&\begin{cases}
2x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=1000\\
x_1+2x_3+x_4+4x_6+3x_7+2x_8+x_9=1000\\
x_2+2x_4+3x_5+x_7+2x_8+4x_9+5x_{10}=1000\\
x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,10)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.1.2}
$$

以上两个问题都是求一组决策变量使得某线性函数 (称为目标函数) 达到最大或最小的优化问题。这些决策变量满足一定的线性函数，这些函数称为约束条件。这样的问题就是所谓的线性规划问题。将其推广就得到如下线性规划的一般数学表达：

$$
\begin{aligned}
&\max(\min)\quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s.t.}\quad
\begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_2\\
\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_m\\
x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.1.3}
$$

在模型 (1.1.3) 中，称 $z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$ 为目标函数，对于该函数可能是求极大 (max)，也可能是求极小 (min)。模型中写成 max(min) 是为了将两种情况写在一起以便于说明，并非同时求极大和极小。称 $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant(=,\geqslant)b_i(i=$

$1,2,\cdots,m)$ 为约束条件。同样，上式右边的 $\leqslant (=,\geqslant)$ 是将可能的三种约束情况写在一起以便于说明。最后 $x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 称为决策变量的非负约束。由于线性规划问题在经济学上的含义，我们称 $c_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为价值系数，称 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$ 为资源系数，称 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 为技术系数。值得注意的是，今后所遇到的问题并不全是经济学问题，但我们仍然这样称呼这些参数。

求解线性规划 (1.1.3) 只能通过算法进行，没有解析解的方法，也就是说，不能通过将上述参数带入某个公式然后求得该问题。因此，我们必须指定一种表达形式为标准形式，这种标准形式必须是能很容易地将其他非标准形式化为该标准形式。本书规定的线性规划问题的标准形式为

$$\begin{aligned}
&\max \quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases}
a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\
a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
\cdots\cdots\\
a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\
x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

它有三个特点：

(1) 目标函数求极大。由于对于任何函数均有 $\min z=-\max(-z)$，可见，如果原问题是对目标函数 z 求极小，则可以先求其相反函数 (即 $-z$) 的极大，得到极大值之后，再将函数值反号即可。

(2) 所有约束条件都是等式约束。实际上，若第 i 个约束条件是“$\leqslant$”，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\leqslant b_i$$

则表明表达式左边比右边少了某一个非负数，称该非负数为松弛变量，在经济学上表明该种资源 (即 b_i) 没有用完的部分。设该非负数为 x_s(具体的下标视原问题的变量个数以及有多少个松弛变量而定，一般与原问题的变量下标连续)，则一定有

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n+x_s=b_i$$

x_s 作为新的变量加入原问题中，在整个模型求解后其值也就出来了。第 i 个约束条件也可能是“$\geqslant$”，即

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n\geqslant b_i$$

这时，表达式左边比右边多了某一个非负数，称该非负数为剩余变量，也可继续称为松弛变量。在经济学上的意义是该种资源 (即 b_i) 用超过的部分，比如，某种产品中某种成分的含量至少达到 b_i，则就会出现这样的约束。类似地，设该非负数为 x_s(具体的下标视原问题的变量个数以及有多少个松弛变量而定，一般与原问题的变量下标连续)，则一定有

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - x_s = b_i$$

x_s 也作为新的变量加入原问题中，在整个模型求解后其值同样出来了。

(3) 所有决策变量非负。实际上，对于决策变量的符号，总共有三种可能。若某变量本来就是非负的，则不用改变；若某变量非正，则用其相反的变量取代。即若原模型中要求 $x_i \leqslant 0$，则令 $x_i' = -x_i$，或者说 $x_i = -x_i'$，并将其带入原模型中，则 x_i 被 x_i' 取代，且 $x_i' \geqslant 0$；若原模型中对 x_i 没有符号要求，即正负均可，则可令

$$x_i = x_i' - x_i'', \quad x_i', x_i'' \geqslant 0$$

代入原模型中，则出现的变量均是非负变量。

通过这三点，任何一个线性规划问题都可以容易地化为标准形式。今后讨论线性规划问题的有关理论以及有关算法时都是针对模型 (1.1.4) 进行的。此外，还常常用到模型 (1.1.4) 的向量表达形式 (1.1.5) 和矩阵表达形式 (1.1.6)，相应地，称 (1.1.4) 为线性规划问题的分量表达形式。

$$\begin{aligned} &\max \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ &\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{P}_j x_j = \boldsymbol{b} \\ x_j \geqslant 0 (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

其中，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{P}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^m (j = 1, 2, \cdots, n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^m$。

$$\begin{aligned} &\max \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ &\text{s.t.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

其中，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n} \in \boldsymbol{R}^{m \times n}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$。根据向量和矩阵的相关运算，容易看出上面三种表达形式是一样的，只是在讨论有关问题时，不一样的表达方式有时更方便，特别是线性规划的矩阵表达形式。最后需要强调的是，在线性规划的标准形式中要求资源向量 $\boldsymbol{b} \geqslant \boldsymbol{0}$。这点容易办到而且意义明显。

例 1.1　将线性规划 (1.1.1) 化为标准形式。

解　线性规划 (1.1.1) 原为

$$\begin{aligned} &\max \quad z = 6x_1 + 7x_2 \\ &\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 16 \\ 4x_1 + x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

对照上面的三个特点逐一检查：目标函数已是求极大，决策变量已是非负，但两个约束条件都是“$\leqslant$”，故需要引入两个松弛变量，分别记为 x_3, x_4。无论是松弛变量还是剩余变量都是非负变量，故 (1.1.1) 等价于如下标准形式：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 6x_1 + 7x_2 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 16 \\ 4x_1 + \ \ x_2 \qquad + x_4 = 12 \\ x_i \geqslant 0,\ i = 1,2,3,4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

写成矩阵形式为

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{c} = (6,7,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = (16,12)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X} = (x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm{T}}$。

例 1.2 将下述线性规划化为标准形式。

$$
\begin{aligned}
&\min \quad z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + \ \ x_3 \geqslant 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3\text{无符号限制} \end{cases}
\end{aligned}
$$

解 由于 x_3 无符号限制，故令 $x_3 = x_4 - x_5, x_4, x_5 \geqslant 0$，并在第一个约束条件引入一个松弛变量 $x_6 \geqslant 0$，在第二个约束条件引入剩余变量 (松弛变量)$x_7 \geqslant 0$，则得到原问题的标准形式：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 - 2x_2 + 3x_4 - 3x_5 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ \ x_4 - \ \ x_5 + x_6 \qquad = 7 \\ x_1 - x_2 + \ \ x_4 - \ \ x_5 \qquad - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 \qquad\qquad = 5 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0, x_7 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

其矩阵形式为

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中，

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&-1&1&0\\1&-1&1&-1&0&-1\\-3&1&2&-2&0&0\end{pmatrix},\quad c=(1,-2,3,-3,0,0)^{\mathrm{T}},$$

$$b=(7,2,5)^{\mathrm{T}},\quad X=(x_1,x_2,x_4,x_5,x_6,x_7)^{\mathrm{T}}.$$

1.1.2　图解法及基本概念

由于线性规划问题的目标函数和约束条件都是线性函数，在只有两个决策变量的时候，我们可以在笛卡尔直角坐标系上画出相应的约束函数并可以直观地看出其最优解。这就是线性规划的图解法。图解法只适用于两个决策变量的情形，超过两个决策变量的线性规划问题无法利用图解法求解，因此，图解法除了帮助初学者直观地了解线性规划的有关概念和基本原理以外，没有其他作用。图解法的基本步骤如下。

(1) 首先在笛卡尔直角坐标系上画出所有的约束函数 (直线)，并确定决策变量的取值范围，这个范围内的每个点称为可行点或可行解，其全体称为可行域。

(2) 然后画出至少两条目标函数直线，它们是平行的 (实际上目标函数是平行直线族)，这样可以看到目标函数向某个方向移动时函数值是增加还是减少。当目标函数增加 (原问题是求极大) 到某一点时，如果再增加就跑到了约束域的外面，这点就是所求的最优点 (最优解)。

例 1.3　用图解法求解线性规划问题 (1.1.1)。

解　首先在笛卡尔直角坐标系上画出两条约束函数直线，然后判断约束域。由于有变量非负的要求，所以我们只需要第一象限。原来第一个约束条件是 $2x_1+3x_2\leqslant 16$，故满足该条件的点位于三角形区域 OCD，类似地，满足第二个约束条件的点位于三角形区域 OAB。从而满足所有约束条件的点位于区域 $OAED$。令目标函数 $6x_1+7x_2$ 分别取值 15 和 28(当然也可以是其他值) 并画出这两条直线，即图 1.1 中的左下方的两条虚线。可以看出该直线向右上方移动时函数值是增加的。因此，该直线移动到 E 点时不能再移动了，因为，E 点还属于可行域的一点 (可行点)，继续向上移动时，目标函数值虽然增加，但直线上所有点都不在约束域里面了。这就是说，E 点是约束域里使得 (1.1.1) 目标函数值最大的点，故该点即为所求的最优点。显然这是两条约束直线的交点，解线性方程组即可得到 $x_1^*=2,x_2^*=4$，而最优目标函数值为 $z^*=40$。

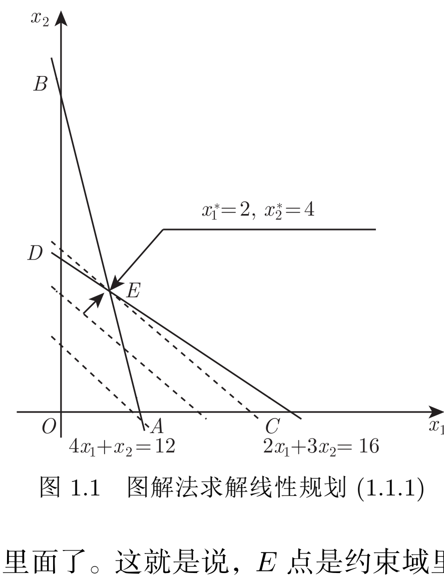

图 1.1　图解法求解线性规划 (1.1.1)

上述例题中的最优解是唯一的，但对于一般的线性规划问题，其解的结果还有可能是无穷多组解、无界解以及无可行解这三种情况。下面通过图解法加以说明。

例 1.4　利用图解法求解线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + (3/2)x_2 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leqslant 16 \\ 4x_1 + \quad x_2 \leqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.1.7}
$$

解　不难看出, 这个线性规划问题与问题 (1.1.1) 只是目标函数不同。这里的目标函数与第一个约束直线是平行的, 用图解法求解的结果见图 1.2。此时, 由于目标函数与约束的边界 DE 段重复时函数值最大, 故此时有无穷多组最优解。最优解 x_1^* 和 x_2^* 满足 $2x_1^* + 3x_2^* = 16$, 且 $0 \leqslant x_1^* \leqslant 2$。最优值 $z^* = 8$。

例 1.5　利用图解法求解线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 2x_1 + 2x_2 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} \quad x_1 - \quad x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.1.8}
$$

解　根据上面所说的步骤画出其可行域 $ABCD$, 见图 1.3。从图上可以看出可行域 $ABCD$ 是无界的。随着目标函数向右上方移动, 目标函数值一直增加, 且一直都有点在可行域里, 这就是说, 目标函数值 (求最大) 是无上界的。

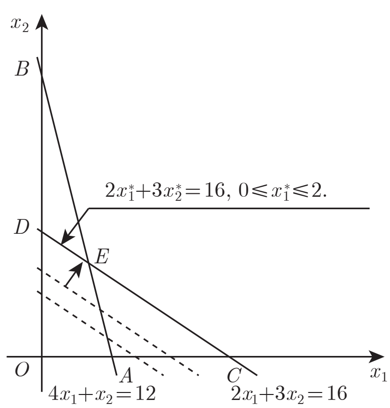

图 1.2　图解法求解线性规划 (1.1.7)

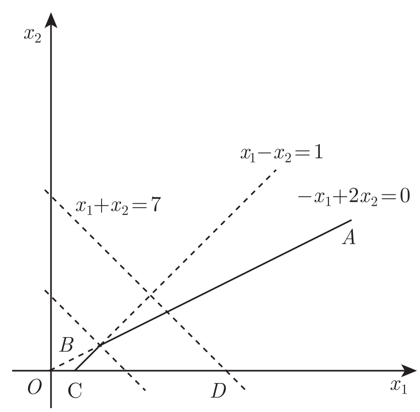

图 1.3　图解法求解线性规划 (1.1.8)

例 1.6　利用图解法求解线性规划问题:

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + x_2 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \geqslant 1 \\ -x_1 - x_2 \geqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.1.9}
$$

解　根据题设约束条件画出图 1.4。从图上可以看出两个约束条件确定的区域 D_1 和变量非负的要求矛盾。所以，该问题不存在可行解，即不存在满足两个约束条件的非负变量 x_1, x_2。

上面我们讨论了线性规划解的四种可能性，即有唯一解、无穷多组解、无界解和无可行解。值得注意的是在例 1.3 中，可行域 $OAED$ 是一个四边形，最后得到的最优解在其中的一个顶点上。可行域里面的点都是可行解，在经济学上意味着在 $OAED$ 中任选一点进行生产都是可行的 (有无穷多个可行点)，因为这样的生产没有超出该厂拥有的资源数量。但最优点 (最优生产计划) 出现在其可行域的一个顶点上，不是可行域内部的某个点。这个题目虽然简单，但上述结论却具有一般性。下节我们将证明线性规划问题的可行域若有界，则其最优解一定可以在其某个顶点或某段边界上得到。下面继续讨论与线性规划的解有关的几个概念。

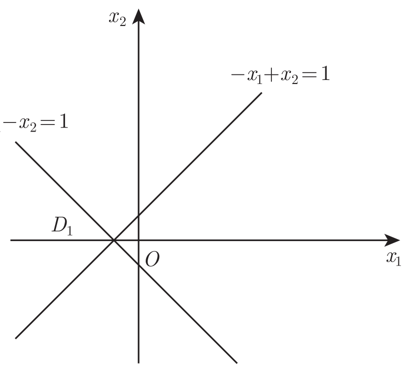

图 1.4　图解法求解线性规划 (1.1.9)

1. 可行解、可行域和最优解

满足线性规划问题的所有约束条件，包括非负约束的解，称为线性规划问题的可行解。所有可行解组成的集合称为可行域，常常记为 $\boldsymbol{D}$。对于线性规划问题 (1.1.6)，有

$$\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}\}$$

容易理解，线性规划问题 (1.1.6) 的解首先要落在可行域 $\boldsymbol{D}$ 里面。单纯从逻辑上来说，约束线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 有无解、有唯一解以及有无穷多组解三种情况。在约束线性方程组有解时还要求满足非负约束。两者都满足了就是可行域 $\boldsymbol{D}$ 里的元素。这时对应的目标函数值可能是有限的，也可能是无限的。因此，线性规划问题 (1.1.6) 共有如下四种情况：(1) 当 $\boldsymbol{D}$ 为空集时，问题 (1.1.6) 是无解的；(2)$\boldsymbol{D}$ 非空，但是一个单点集合，即约束线性方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 只有一个解且刚刚满足 $\boldsymbol{X} \geqslant 0$，在这种情况下，问题 (1.1.6) 谈不上有最优解，因为只有一个目标函数值，但又与 (1) 不同，这时可称问题 (1.1.6) 有一个唯一的可行解；(3) $\boldsymbol{D}$ 非空，且不是单点集合，问题 (1.1.6) 的目标函数有有限的函数值，这时，在所有目标函数值中最大者就是最优目标函数值，对应的解即为最优解；(4) $\boldsymbol{D}$ 非空，且不是单点集合，问题 (1.1.6) 的目标函数值趋于无穷大，这时称问题 (1.1.6) 有无界解。

从上面的讨论中可以看到，线性规划问题 (1.1.6) 无解当且仅当可行域 $\boldsymbol{D}$ 是空集。其他情况将在下面展开讨论。

2. 基、基变量、非基和非基变量

考虑线性规划的标准形式 (1.1.6)，即

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \end{cases} \end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n} \in \boldsymbol{R}^{m\times n}, \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \boldsymbol{R}^n, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^m$。

首先，我们假设技术系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数不大于列数，即假设 $m \leqslant n$。实际上，在后面我们将会学习到线性规划的对偶理论，根据对偶理论，任何一个线性规划问题 (称为原问题) 都有一个对偶线性规划 (对偶问题) 与之对应，两者有非常密切的联系，且两者的技术系数矩阵刚好互为转置。所以，当出现 $m > n$ 的情况时，我们可以转而讨论其对偶问题。因此，这种假设不失一般性。其次，假设 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A}) = m$，即假设 $\boldsymbol{A}$ 是行满秩的。在线性规划的约束 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 中，每一个等式对应一个约束条件。假设 $\boldsymbol{A}$ 行满秩就是假设 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组是线性无关的，也就是假设不会出现多余的约束条件。因此，这种假设也是合理的。

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩总是等于其行向量组的秩，也等于其列向量组的秩，故在上面两种假设下，$\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量组成的向量组 $\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n$ 中至少有 m 个列向量是线性无关的。称这 m 个列向量为线性规划约束方程组的一组基，这组基构成约束方程组的一个子矩阵，记为 $\boldsymbol{B}$。显然，这样的基最多有 C_n^m 组。与基对应的决策变量称为基变量，这部分决策变量也构成决策向量 $\boldsymbol{X}$ 的一个部分，记为 $\boldsymbol{X}_B$。$\boldsymbol{A}$ 中除基以外的其他列向量称为非基，它们构成 $\boldsymbol{A}$ 中除基 $\boldsymbol{B}$ 以外的部分，记为 $\boldsymbol{N}$。相应的变量称为非基变量，这部分决策变量记为 $\boldsymbol{X}_N$。为叙述方便起见，不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 个列向量是线性无关的 (在理论上总是可以通过对决策变量重新编号来得到，但后面将会发现，实际计算中不需要这样做)，则有

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_n) = (\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}), \quad \boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m), \quad \boldsymbol{N} = (\boldsymbol{P}_{m+1}, \boldsymbol{P}_{m+2}, \cdots, \boldsymbol{P}_n)$$

$$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_B = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{X}_N = (x_{m+1}, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$$

3. 基解、基可行解和可行基

根据上面的讨论，此时由线性规划问题的约束方程组 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 得到

$$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})\begin{pmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{pmatrix} = \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{BX}_B + \boldsymbol{NX}_N = \boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N$$

令非基变量 $\boldsymbol{X}_N = \boldsymbol{0}$,则得到 $\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。两项合在一起得到的 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}}, \boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}$ 称为线性规划的一个基解。显然，基选取得不一样，基解也不一样。其中正好满足 $\boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}$ 的基解称为一个基可行解，相应的基 $\boldsymbol{B}$ 称为可行基。若基解中非零分量的个数少于 m 时，称为退化解。

1.1.3　线性规划问题的有关结论

上面一节我们讨论了线性规划的图解法及解的几种可能性，并介绍了一些相关概念，现在讨论线性规划的有关理论问题。

定义 1.1 (**凸组合**)　设 $\boldsymbol{X}^{(i)} \in \boldsymbol{R}^n (i = 1, 2, \cdots, k)$，若存在 $0 \leqslant \mu_i \leqslant 1, i = 1, 2, \cdots, k$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i = 1$ 使得

$$\boldsymbol{X} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \boldsymbol{X}^{(i)}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{X}^{(k)}$ 的凸线性组合，简称凸组合。

定义 1.2 (**凸集**)　设 $\boldsymbol{K}$ 是 n 维欧氏空间的一个点集，若对任意的 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}$，其凸组合仍在 $\boldsymbol{K}$ 集合中，即 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ 中的任何一个 λ 均有

$$\lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}, \quad \boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}$$

则称 $\boldsymbol{K}$ 为凸集 (convex set)。

可以容易地证明，集合 $\boldsymbol{K}$ 是凸集当且仅当其中任意多个点的凸组合仍在该集合中。从几何上来说，定义中的 $\lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}$ 表示了连接 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 两个点中的任何一个点，是两点之间的连线段。因此，凸集的“几何形状”是一个中间没有空洞的、向外突出，至少是平的实心体。若包含边界则为闭凸集，反之则为开凸集。

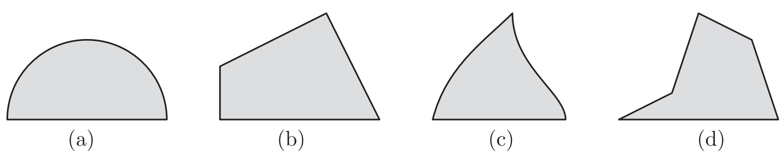

图 1.5　(a)、(b) 为凸集，(c)、(d) 不是凸集

定义 1.3 (**顶点或极点**)　设 $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{R}^n$ 是一个凸集，$\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}$，若 $\boldsymbol{X}$ 不能用 $\boldsymbol{K}$ 中另外两个不同的点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 的凸组合表示，即不存在 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)} \in \boldsymbol{K}$ 以及 $0 < \lambda < 1$，使得

$$\boldsymbol{X} = \lambda \boldsymbol{X}^{(1)} + (1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 为凸集 $\boldsymbol{K}$ 的顶点或极点。

这个顶点的概念是中学平面几何里顶点概念的推广。比如，四边形包括内部在内是凸集，其四个顶点当然满足这个定义，现在还是称为顶点 (见图 1.5 中的 (b))。但图 1.5 中的 (a) 的半圆弧上所有的点也满足这个定义，故都是顶点。当然，在线性规划里，我们所遇到的顶点还是类似传统概念的顶点，也就是在线性规划问题里，图 1.5 中的 (a) 的情况是不会出现的。

定理 1.1　线性规划问题 (1.1.6) 的可行域 $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{X} | \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0}\}$ 是凸集。

证明 任取 $\boldsymbol{D}$ 中的两个点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(i)}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}^{(i)}\geqslant\boldsymbol{0},i=1,2$$

对于 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，$\lambda\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}\geqslant\boldsymbol{0}$ 是显然的，并且

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)})=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(2)}=\lambda\boldsymbol{b}+(1-\lambda)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

这说明，$\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}$。由凸集的定义可知，$\boldsymbol{D}$ 是凸集。

定理 1.2 线性规划问题 (1.1.6) 的可行解 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\}$ 是 $\boldsymbol{D}$ 的顶点等价于 $\boldsymbol{X}$ 是一个基可行解。

证明 首先证明，若 $\boldsymbol{X}$ 是 (1.1.6) 的一个基可行解，则 $\boldsymbol{X}$ 是可行域 $\boldsymbol{D}$ 的一个顶点。根据基可行解的定义，这时一定有一个基 $\boldsymbol{B}$(不妨假设是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列构成) 和非基 $\boldsymbol{N}$，使得 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}]$，且

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\geqslant\boldsymbol{0}$$

若该 $\boldsymbol{X}$ 不是可行域的顶点，则它一定能表示成 $\boldsymbol{D}$ 中两个不同于 $\boldsymbol{X}$ 的点 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 的凸组合。即存在 $\lambda\in(0,1)$，使得

$$\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{X}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}^{(2)}\tag{1.1.10}$$

将 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)}$ 按照 $\boldsymbol{X}$ 的分块进行分块，表示为

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(1)}\\ \boldsymbol{X}_N^{(1)}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(2)}\\ \boldsymbol{X}_N^{(2)}\end{pmatrix}$$

将上述分块带入 (1.1.10)，有 $0=\boldsymbol{X}_N=\lambda\boldsymbol{X}_N^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{X}_N^{(2)}$，由于 $\lambda\in(0,1)$ 以及可行解一定是非负的条件，所以 $\boldsymbol{X}_N^{(1)}=\boldsymbol{X}_N^{(2)}=0$。从而

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(1)}\\ 0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B^{(2)}\\ 0\end{pmatrix}$$

又由于 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)}$ 都是可行解，即都满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}$，故有 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_B^{(1)}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_B^{(2)}=\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{B}$ 是基，是非奇异矩阵，所以 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{X}_B^{(1)}=\boldsymbol{X}_B^{(2)}$。这与前面假设矛盾。故 $\boldsymbol{X}$ 一定是 $\boldsymbol{D}$ 的顶点。

其次证明，若 (1.1.6) 的可行解 $\boldsymbol{X}$ 是其可行域的一个顶点，则它是一个基可行解。由于 $\boldsymbol{X}$ 是可行解，所以我们可以将 $\boldsymbol{X}$ 的分量分成正分量和零两部分，即

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B\\ \boldsymbol{X}_N\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}_B>\boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$$

这里，$\boldsymbol{X}_B$ 的正分量个数不一定为 m，设为 p。不妨假设 $\boldsymbol{X}_B$ 所对应的系数列向量是由 $\boldsymbol{A}$ 的前 p 个列向量组成。于是，对系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 分块如下

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}],\quad 其中\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times p},\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-p)}$$

为证明上面的结论，我们先证明 $\boldsymbol{B}$ 的 p 个列线性无关。假设 $\boldsymbol{B}$ 的列线性相关，则存在一个非零向量 $\boldsymbol{w}\in\boldsymbol{R}^p$，使得 $\boldsymbol{Bw}=0$。由于 $\boldsymbol{BX}_B=\boldsymbol{b}$(由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$ 即 $\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{0X}_N=\boldsymbol{b}$ 得到)，所以

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_B\pm\lambda\boldsymbol{w})=\boldsymbol{BX}_B\pm\lambda\boldsymbol{Bw}=\boldsymbol{b}$$

对于 $\lambda\in\boldsymbol{R}$ 都成立。由于 $\boldsymbol{X}_B>0$，存在充分小的 $\lambda>0$ 使得

$$\boldsymbol{X}_B+\lambda\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{X}_B-\lambda\boldsymbol{w}\geqslant\boldsymbol{0}$$

令

$$\boldsymbol{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B+\lambda\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{X}^{(2)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_B-\lambda\boldsymbol{w}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

则 $\boldsymbol{X}^{(1)}$ 和 $\boldsymbol{X}^{(2)}$ 都是可行的且有 $\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}\neq\boldsymbol{X}^{(2)}$，但 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}^{(1)}+\boldsymbol{X}^{(2)})/2$。这与 $\boldsymbol{X}$ 是可行域的顶点矛盾。从而证明了 $\boldsymbol{B}$ 的列线性无关。既然 $\boldsymbol{B}$ 的列线性无关，根据假设 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})=m$，所以必有 $p\leqslant m$。如果 $p=m$，则 $\boldsymbol{B}$ 就是一组基，从而由基可行解的定义可知，$\boldsymbol{X}$ 就是一个基可行解。如果 $p<m$，则一定可以在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量中除去这 p 个列向量后选取到 $m-p$ 个列向量加入矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中形成一个新的 m 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{B}$，并把原 $\boldsymbol{N}$ 中剩余的列组成新的非基矩阵 $\boldsymbol{N}$，对解向量做同样的组合。显然这也满足基可行解的定义，故此种情况下的 $\boldsymbol{X}$ 也是基可行解。

下面不加证明地介绍一个顶点表示定理，为最后得到我们需要的定理做准备。

定理 1.3 线性规划问题 (1.1.6) 的可行解 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\}$ 都可以表示成 $\boldsymbol{D}$ 的顶点的凸组合。即，若 $\boldsymbol{V}=\{\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(k)}\}$ 为 $\boldsymbol{D}$ 的顶点集合，则总是存在 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1,0\leqslant\lambda_i\leqslant 1(i=1,\cdots,k)$，使得

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)} \tag{1.1.11}$$

最后给出本节的主要定理。

定理 1.4 若线性规划问题 (1.1.6) 的可行域有界，则线性规划问题一定有有限最优值且目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。若在不止一个顶点上达到最优，则 (1.1.6) 一定有无穷多个解。

证明 沿用前面的记号，线性规划问题 (1.1.6) 的可行域为 $\boldsymbol{D}=\{\boldsymbol{X}|\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\}$，设 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(k)}\in\boldsymbol{D}$ 是可行域的顶点，由于可行域有界，即存

在一个正的实数 $M>0$，使得 $\forall \boldsymbol{X}\in\boldsymbol{D}$ 均有 $\|\boldsymbol{X}\|\leqslant M$。根据定理 1.3，总是存在 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i=1, 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1(i=1,\cdots,k)$，使得

$$\boldsymbol{X}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}$$

此时目标函数值的绝对值：

$$\begin{aligned}|z|&=\left|\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\right|\\&=\left|\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\|\boldsymbol{c}\|\|\boldsymbol{X}^{(i)}\|\\&\leqslant M\|c\|\end{aligned}$$

另外，若目标函数在 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 处达到最优，但 $\boldsymbol{X}^{(0)}$ 不是顶点，同样根据顶点表示定理 1.3，$\boldsymbol{X}^{(0)}$ 可以用 $\boldsymbol{D}$ 的顶点的凸组合表示为

$$\boldsymbol{X}^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)},\quad \text{其中}0\leqslant\lambda_i\leqslant 1(i=1,\cdots,k),\sum_{i=1}^{k}\lambda_i=1$$

因此，

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$$

由于 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}(i=1,2,\cdots,k)$ 共有 k 个，是有限的，故一定有一个 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$，比如设为 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}(1\leqslant m\leqslant k)$，是所有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$ 中最大者。这就得到

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}\leqslant\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}$$

根据假设，$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}$ 是最大值，故有 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(0)}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(m)}$。这就是说，线性规划 (1.1.6) 在顶点 $\boldsymbol{X}^{(m)}$ 处也达到最优。

若目标函数在多个顶点处达到最优，设在顶点 $\boldsymbol{X}^{(1)},\boldsymbol{X}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{X}^{(t)}$ 处达到最大值，若 $\hat{\boldsymbol{X}}$ 是这些顶点的凸组合，即

$$\hat{\boldsymbol{X}}=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)},\quad 0\leqslant\lambda_i\leqslant 1(i=1,\cdots,t),\sum_{i=1}^{t}\lambda_i=1$$

根据线性规划可行域的性质，$\hat{\boldsymbol{X}}$ 是 (1.1.6) 的可行解，且

$$\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\boldsymbol{X}^{(i)}=\sum_{i=1}^{t}\lambda_i\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}$$

设 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}^{(i)}=m(i=1,2,\cdots,t)$，所以 $\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{X}}=\sum\limits_{i=1}^{t}\lambda_i m=m$。这就证明了，若线性规划问题在多个顶点处达到最优，则线性规划问题有无穷多个最优解。

最后指出，若可行域无界，则可能无最优解，也可能有最优解，若有也必定在某顶点处得到。

由于顶点与基可行解一一对应，而基可行解与可行基是一一对应的，可行基则不会超过 C_n^m 个，所以这个定理的意义在于，我们在求解线性规划问题时，不需要在无穷多个可行解中去寻找，只需要在有限多个基可行解中去寻找就可以了。

1.2 单纯形法

单纯形法是由美国数学家丹兹格 (G. B. Dantzig) 于 1947 年首先提出的，是公认的 20 世纪最伟大的算法之一。根据上一节的讨论，如果线性规划问题有最优解，则最优解一定可以在其顶点处得到。而每一个顶点又与基可行解是一一对应的。这样，我们需要解决三个问题：(1) 找出一个基可行解，称为初始基可行解。(2) 每个基可行解都是潜在的最优解，因此找到一种判别基可行解是否为最优解的方法。(3) 若经过判别，某个基可行解是最优解，则算法终止。若不是最优解，则还需要找到一种转换的方法，即从一个基可行解转换到另一个基可行解，然后回到第二步。由于基可行解的数目是有限的 (最多 C_n^m 个)，所以经过有限次的迭代就一定能回答线性规划问题是否有解，并在有解的时候求出该最优解。

1.2.1 单纯形法的基本思路

上面所说的三个步骤就是单纯形法的基本思路。下面我们利用矩阵形式进行比较具体的讨论。讨论标准形的线性规划问题 (1.1.6)：

$$\begin{aligned}&\max\quad z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}\\&\text{s.t.}\quad\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{X}\geqslant\boldsymbol{0}\end{cases}\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}\in\boldsymbol{R}^{m\times n},\boldsymbol{c}\in\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\boldsymbol{R}^n,\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{R}^m$。并假设 $m\leqslant n$ 以及 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=m$。

由于矩阵的秩等于其行秩和列秩，所以在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个列向量中至少有 m 个列向量是线性无关的，不妨设这 m 个列向量位于 $\boldsymbol{A}$ 的前 m 列，也就是前面所称的基，将这 m 个列向量组成的子矩阵记为 $\boldsymbol{B}$，剩下的列向量 (非基) 记为 $\boldsymbol{N}$，相应的将决策向量 $\boldsymbol{X}$ 和价值系数向量 $\boldsymbol{c}$ 也做同样的划分，这样就有

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}],\quad \boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{c}=(\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}. \tag{1.2.1}$$

其中 $\boldsymbol{B}\in\boldsymbol{R}^{m\times m},\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{R}^{m\times(n-m)}$，且 $|\boldsymbol{B}|\neq 0$。$\boldsymbol{X}_B,\boldsymbol{c}_B\in\boldsymbol{R}^m,\boldsymbol{X}_N,\boldsymbol{c}_N\in\boldsymbol{R}^{n-m}$。

此时由约束方程组 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{b}$，得到 $\boldsymbol{BX}_B+\boldsymbol{NX}_N=\boldsymbol{b}$，从而

$$\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{NX}_N \tag{1.2.2}$$

令 $\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{0}$ 得到 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。此为基解。若此时有 $\boldsymbol{X}_B\geqslant\boldsymbol{0}$，则为基可行解，在几何上就是线性规划问题的一个顶点。是潜在的最优解。现在考虑目标函数

$$z=\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_B+\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\sigma}_N\boldsymbol{X}_N. \tag{1.2.3}$$

由 (1.2.3) 可以看出，目标函数值由两部分组成，第一部分是与线性规划问题的参数有关的常数，第二部分则与 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 和 $\boldsymbol{X}_N$ 有关。由于 $\boldsymbol{X}_N\geqslant\boldsymbol{0}$，所以当 $\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{N}}\leqslant 0$ 时，若 $\boldsymbol{X}_N\neq 0$，则在求极大值的情况下，(1.2.3) 表明目标函数值将会下降。这时若 $\boldsymbol{X}_B\geqslant\boldsymbol{0}$，就说明 $\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{X}_B^{\mathrm{T}},\boldsymbol{X}_N^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-\mathrm{T}},\boldsymbol{0})^{\mathrm{T}}$ 就是最优解，相应的 $z=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 就是最优目标函数值。但是，$\boldsymbol{\sigma}_N$ 中的某些分量也可能大于零，此时，若令大于零的分量所对应的 $\boldsymbol{X}_N$ 的分量大于零，则目标函数值将会增加，也就是说，此时尚未得到最优解。故 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 的分量是否全部小于或等于零就成为判别一个基可行解是否是最优解的标准。称 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 为检验数。当 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 中的某些分量大于零时，由于检验数就是目标函数中非基变量前面的系数，所以找出其中最大者，并令相应的非基变量大于零将会使得目标函数值比当前的值要大，这个非基变量就是所谓的换入变量。该变量相应的系数列向量就要加入基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中去。但由于 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=m$，此时必须要找出原来基变量中的某一个，将其换出，变成非基变量并将其相应的系数列向量从原来的基矩阵中剔除，这个变量称为换出变量。挑选换出变量的原则是一直保持各变量的非负性。具体方法下面将详细介绍。一旦新的基确定以后就重新计算 $\boldsymbol{\sigma}_N$ 并重复上面的做法。

1.2.2 单纯形法的计算步骤

为了更好地理解单纯形法，下面先从一个具体的例子开始，然后介绍单纯形法的计算步骤。

例 1.7 根据单纯形法的思路求解模型引入 1.1 中的线性规划的最优解。

解 模型引入 1.1 中的线性规划

$$\max\quad z=6x_1+7x_2$$
$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}2x_1+3x_2\leqslant 16\\4x_1+\ \ x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

首先引入两个松弛变量 $x_3,x_4\geqslant 0$ 将其化为标准形

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad = 16 \\ 4x_1 + \quad x_2 \qquad + x_4 = 12 \\ x_i \geqslant 0 \ (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}
\end{aligned}
$$

其系数矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，容易看到 $\boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4$ 是线性无关的，故它们组成问题的一个初始基 ($\boldsymbol{B}$)。$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2$ 则为非基 ($\boldsymbol{N}$)，如果想写成上面用矩阵进行讨论时的形式，则可以对 x_1, x_2, x_3, x_4 重新编号。但是在讨论具体问题时是没有这个必要的。相应地，x_3, x_4 就是初始基变量，x_1, x_2 就是非基变量。由约束方程组得到

$$
\begin{cases} x_3 = 16 - 2x_1 - 3x_2 \\ x_4 = 12 - 4x_1 - x_2 \end{cases} \tag{1.2.4}
$$

令 $x_1 = x_2 = 0$，得到 $x_3 = 16, x_4 = 12$，两者合在一起即有 $\boldsymbol{X} = (0, 0, 16, 12)^{\mathrm{T}}$，这就是初始基可行解，是潜在的最优解。将 (1.2.4) 代入目标函数中得到

$$
z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6x_1 + 7x_2 \tag{1.2.5}
$$

目标函数中非基变量 x_1, x_2 前面的系数就是所谓的检验数，由于两个检验数都是大于零的，这说明如果 x_1, x_2 不等于零 (即大于零) 的话，目标函数值将会比当前值大。事实上，当前的基可行解意味着不作任何生产，$x_3 = 16, x_4 = 12$ 是剩下的资源 (其实这时根本未用)。从几何上来说，该基可行解就是图 1.1中的原点 (四个顶点中的一个)。由于 x_2 前面的系数较大，我们选择 x_2 为换入变量，它将取代初始基变量 x_3, x_4 中的某一个。首先观察系数矩阵 A 中 x_2 所在列向量，如果其分量全部小于或等于零，则原问题是无界的，终止计算 (原因在后面总结该方法时讨论)。当然，这里的系数列向量是 $(3, 1)^{\mathrm{T}}$。确定 x_2 为换入变量后，还需要在原基变量 x_3, x_4 中确定换出变量。原则是让所有的变量非负，由于 x_1 仍然是非基变量，故在 (1.2.4) 中令 $x_1 = 0$，且要求所有变量非负，则有

$$
\begin{cases} x_3 = 16 - 3x_2 \geqslant 0 \\ x_4 = 12 - x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.2.6}
$$

现在要确定的是哪个基变量变为非基变量。由于非基变量总是为零，所以我们在让某个原来的基变量变为零时，保持别的基变量非负就是挑选的原则。显然，若 $x_2 = \min(16/3, 12/1) = 16/3$ 时，$x_3 = 0$，而 $x_4 > 0$。这说明我们应该用 x_2 去取代 x_3。于是在 (1.2.4) 中将 x_3 与 x_2 的位置互换。这种互换不是简单的交换位置，而是通过高斯消去法得到的。这样才是恒等变换。首先由 (1.2.4) 中的第一个式子，得到

$$
x_2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3
$$

将其代入第二个式子并化简，有

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 - \dfrac{1}{3}x_3 \\ x_4 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3}x_1 + \dfrac{1}{3}x_3 \end{cases} \tag{1.2.7}$$

现在，新的基变量是 x_2, x_4，非基变量是 x_1, x_3。令非基变量为零，则新的基可行解为 $\boldsymbol{X} = (0, 16/3, 0, 20/3)^{\mathrm{T}}$，它对应着图 1.1 中的 D 点。相应的函数值是 $z = 112/3$，这表明生产乙产品 16/3 个单位时，利润为 112/3 元，比前一个方案要优。这个解是否是最优解呢？再将 (1.2.7) 代入目标函数，有

$$z = 6x_1 + 7x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6x_1 + 7\left(\frac{16}{3} - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = \frac{112}{3} + \frac{4}{3}x_1 - \frac{7}{3}x_3 \tag{1.2.8}$$

可以看到非基变量 x_1 前面的系数是 4/3，说明还不是最优解。此时若让 $x_1 > 0$，函数值还会增加。即现在确定 x_1 为换入变量，x_3 仍然为非基变量。类似上一步的分析，在 (1.2.7) 中，令 $x_3 = 0$，则有

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3}x_1 \\ x_4 = \dfrac{20}{3} - \dfrac{10}{3}x_1 \end{cases} \tag{1.2.9}$$

若 $x_1 = \min((16/3)/(2/3), (20/3)/(10/3)) = 2$ 时，$x_4 = 0$，而 $x_2 > 0$。这说明我们应该用 x_1 去取代 x_4。于是在 (1.2.7) 中将 x_4 与 x_1 通过高斯消去法进行位置互换，先从第二个式子得到

$$x_1 = 2 - \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{10}x_3$$

然后代入第一个式子，有

$$\begin{cases} x_2 = 4 + \dfrac{1}{5}x_4 - \dfrac{2}{5} \\ x_1 = 2 - \dfrac{3}{10}x_4 + \dfrac{1}{10}x_3 \end{cases} \tag{1.2.10}$$

于是，我们得到了第三个基可行解 $\boldsymbol{X} = (2, 4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$，该基可行解实际上就是图 1.1 中的 E 点。通过图解法我们已经知道了这就是原问题的最优解，但现在还是需要我们通过计算证实这个结论。实际上，此时目标函数变为

$$z = 6x_1 + 7x_2 = 6\left(2 - \frac{3}{10}x_4 + \frac{1}{10}x_3\right) + 7\left(4 + \frac{1}{5}x_4 - \frac{2}{5}\right) = 40 - \frac{2}{5}x_4 - \frac{10}{3}x_3 \tag{1.2.11}$$

可以看到，非基变量 x_4, x_3 的系数都小于零。这说明，第三个基可行解 $X = (2, 4, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ 就是我们要求的最优解，最优值为 $z = 40$。这与我们利用图解法求得的结果是一致的。

通过上述例题不仅可以清楚地看到单纯形法的计算步骤，而且可以看到每次迭代都对应着线性规划问题可行域的一个顶点。在变量个数较多时，上述做法是不可取的。这里只是通过上述例题来理解单纯形法的计算步骤。考虑标准形式的线性规划问题 (1.1.6)，单纯形法的计算步骤如下。

(1) 确定一个初始基可行解。为了快速地找到一个初始可行基，最简单的情况就是在其系数矩阵里面出现了一个单位子矩阵。这总是能办到的。对于标准形式的线性规划问题共有两种情况：(a) 将原问题划为标准形式后，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 里面自然出现一个单位子矩阵。这可能是原问题本身所具有的，也可能原问题的所有约束条件都是“$\leqslant$”，这样添加松弛变量变为标准形式后，这些松弛变量在系数矩阵里面的系数列向量就组成了一个单位子矩阵。(b) 将原问题划为标准形式后没有单位子矩阵，这时可以通过人工变量法很容易地得到一个单位子矩阵。关于人工变量法，我们将在单纯形法的进一步讨论中详细介绍。现在假设这时的线性规划问题为

$$\begin{aligned}&\max \quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\&\text{s.t.}\quad\begin{cases}x_1 \qquad\qquad +a_{1,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \qquad x_2 \qquad\quad +a_{2,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \qquad\qquad \cdots\\ \qquad\qquad x_m \ +a_{m,m+1}x_{m+1}+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n\end{cases}\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为初始基变量，$x_{m+1},\cdots,x_n$ 为非基变量。令非基变量为零，则有初始基可行解

$$\boldsymbol{X}=(b_1,b_2,\cdots,b_m,0,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$$

这里虽然假设初始基变量是前 m 个变量，但实际上不需要按照这个顺序。这样叙述只是为了方便。若基变量在其他位置，做法是一样的。后面也同样如此。

(2) 计算非基变量的检验数。非基变量的检验数实际上就是非基变量在目标函数中的系数。根据前面的推导，用矩阵表示的一般计算公式为

$$\boldsymbol{\sigma}_N=\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$$

相关符号及推导见上面一节。但是，若线性规划化为了 (1.2.12) 的形式，则上述检验数为

$$\boldsymbol{\sigma}_N=\boldsymbol{c}_N^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N},\quad \text{或用分量形式为：}\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}, j=m+1,\cdots,n$$

也就是，第 j 个非基变量的检验数等于其价值系数 c_j 减去基变量价值系数与该非基变量系数列向量的乘积之和。顺便提一下，由于 $\boldsymbol{\sigma}_B=\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$，故检验数更一般的表达式可以写为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{c}_B^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}$$

检验数计算后有如下判别准则：

(a) 若所有非基变量检验数都小于或等于零，则原问题得到最优解，且当非基变量的检验数至少有一个零时，原问题有无穷多组最优解，但其目标函数值相等。

(b) 非基变量的检验数至少有一个大于零，且某个大于零的检验数所对应的非基变量的系数列向量中没有正数，则原问题具有无界解。实际上，每次迭代后目标函数是由一项常数与非基变量与其检验数的乘积之和构成的 (即 $z = c^{\mathrm{T}}B^{-1}b + \sigma_N \boldsymbol{X}_N$)，当某个非基变量的检验数大于零，但其在约束方程组中的系数列向量小于或等于零时，令除该非基变量以外的其他非基变量为零，而令该非基变量为任意正数时，可得到满足约束方程组的非负解，即可行解，同时，目标函数值将会趋于正无穷，故此种情况下原问题为无界解。

值得提出来的是，这些讨论针对的是求最大值的标准形线性规划。如果是求最小值的线性规划问题，要么将其化为求最大值的标准形，要么将上面的准则中检验数小于或等于零改为大于或等于零。

(3) 基变换。当初始基可行解不是最优解也不能判断为无界时，需要找到一个新的基可行解。做法是先从非基变量中选一个换入变量，由于这时非基变量的检验数 σ_j 有至少一个大于零，且该检验数就是该非基变量在目标函数中的系数，所以往往选择检验数中大于零的最大值所对应的非基变量为换入变量。即若 $\max\limits_j \sigma_j = \sigma_k$，则选择 x_k 为换入变量。其目的显然是直观上这样做会尽快地增加目标函数值。但也可任选检验数大于零所对应的非基变量为换入变量或按照检验数大于零的最小下标来选。接下来，从原基变量中换出一个变量变为非基变量，该变量称为换出变量。选择换出变量的原则是保持所有变量非负，同时让该换出变量为零。具体可由所谓的 θ 规则确定。计算

$$\theta = \min\left(\frac{b_i}{a_{ik}} \middle| a_{ik} > 0\right) = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

即 x_k 的系数列向量中的正数 a_{ik} 为分母，相应的 b_i 为分子，两者商的最小值所对应的基变量 x_l 为换出变量。

(4) 迭代 (旋转运算)。现在选择了非基变量 x_k 取代原基变量 x_l，这时就需要通过矩阵的初等行变换以 a_{lk} 为旋转主元将 x_k 对应的系数列向量化为原来 x_l 的系数列向量的形式，即

$$\boldsymbol{P}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{lk} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

到此为止，我们得到了一个新的基可行解，现在就要回到 (2) 去重新计算新的检验数并继续迭代下去。

1.2.3　单纯形表

为便于操作上面介绍的单纯形法，在手工计算的情况下，可以利用一种单纯形表进行。对于形如 (1.2.12) 的线性规划问题，其单纯形表如表 1.2 所示。表的前两行称为表头，是线性规划问题的价值系数和所有变量列表。第二列是基变量列表，第一列则是相应的价值系数。在迭代过程中，基变量发生改变，则相应的价值系数从第一行中找到并重新填上。第三列至倒数第二列为单纯形表的主体，实际上就是约束方程组的增广矩阵。最后一列为 θ 列，用于挑选换出变量。最后一行为检验数行。每个非基变量的检验数等于该非基变量的价值系数减去基变量的价值系数与该非基变量的系数列向量对应元素乘积之和。基变量 $\boldsymbol{X}_B$ 的值等于 $\boldsymbol{b}$ 列 (就是前面矩阵描述时的 $\boldsymbol{X}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$)，不在 $\boldsymbol{X}_B$ 这一列的其他变量都是非基变量，非基变量的值都是 0。一个线性规划问题只要得到了初始单纯形表，那么所有的计算都可在单纯形表上进行了。

表 1.2　标准形式的线性规划 (1.2.12) 的初始单纯形表

c_j			c_1	c_2	$\cdots$	c_m	c_{m+1}	$\cdots$	c_n	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	$\cdots$	x_m	x_{m+1}	$\cdots$	x_n	
c_1	x_1	b_1	1	0	$\cdots$	0	$a_{1,m+1}$	$\cdots$	a_{1n}	
c_2	x_2	b_2	0	1	$\cdots$	0	$a_{2,m+1}$	$\cdots$	a_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	
c_m	x_m	b_m	0	0	$\cdots$	1	$a_{m,m+1}$	$\cdots$	a_{mn}	
$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			0	0	$\cdots$	0	σ_{m+1}	$\cdots$	σ_n	

例 1.8　用单纯形表计算模型引入 1.1 中的线性规划。

解　首先将模型引入 1.1 中的线性规划化为标准形式，见例 1.7。在例 1.7 中已经通过单纯形法的逐一分析得到了其最优解，现在只是通过单纯形表再次求解以便于了解单纯形表的构造及迭代运算。其初始单纯形表及后继迭代过程见表 1.3。表中带“[ ]”的数字表示旋转主元。

从初始单纯形表中可以看到 $\sigma_1=6,\sigma_2=7$，故选择 x_2 为换入变量。x_2 的系数列向量的正数做分母，b 相应的值做分子，计算比值并填写到 θ 栏。其中最小者即第一行所对应的基变量 x_3 为换出变量，第一行和第二列交叉处的元素 3 为旋转主元，用“[ ]”标记。于是，在第二张单纯形表中，基变量变为 x_2,x_4，然后 c_B 一栏相应地改变。接下来，将旋转主元变为 1，这只需要在单纯形表的主体部分的第一行所有元素除以 3 即可，然后将第二列其他元素变为 0。计算新的检验数并继续进行判断和迭代。在最终单纯形表中，非基变量 x_3,x_4 的检验数都为负数，故已得到最优解。$x_1^*=2,x_2^*=4$，最优值为 $z^*=40$。最后需要说明的是，这个题目迭代了三次。由于表头部分在迭代

过程中不会改变，所以在空间足够的情况下，可以在初始单纯形表的下方继续添加进行迭代。

表 1.3 模型引入 1.1 中问题的初始单纯形表及其迭代

c_j			6	7	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	16	2	[3]	1	0	16/3
0	x_4	12	4	1	0	1	12
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			6	7	0	0	
7	x_2	16/3	2/3	1	1/3	0	8
0	x_4	20/3	[10/3]	0	−1/3	1	2
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			4/3	0	−7/3	0	
7	x_2	4	0	1	2/5	−1/5	
6	x_1	2	1	0	−1/10	3/10	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	−11/5	−2/5	

例 1.9 利用单纯形法求解：

$$\min \quad z = 2x_1 - 2x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 5 \\ -x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 首先将其化为标准形。对于目标函数求极小，可以化为求 $\max(-z)$。也可以不变。如果不变，则在单纯形表中除了判断准则与求极大时相反以外，其他的一概不变。本例采用求极小的方式。引入三个松弛变量 x_3, x_4, x_5，则其标准形为

$$\min \quad z = 2x_1 - 2x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

显然，x_3, x_4, x_5 是初始基变量。于是可得到其初始单纯形表 1.4 并迭代如下。

在最终单纯形表中可以看到，非基变量检验数 $\sigma_1 = 4 > 0, \sigma_3 = 2 > 0$，满足求极小值时的判别准则，故得到最优解 $x_1^* = 0, x_2^* = 5, x_3^* = 0, x_4^* = 1, x_5^* = 11$，最优目标函数值为 $z^* = -10$。

根据上面的讨论，在绝大多数情况下，单纯表 (单纯形法的手工计算方式) 可以回答某个线性规划问题是无解、无界解还是有限解并在有限解的情况下给出最优解及最优值。但必须指出的是，在某些极端情况下严格按照单纯形法的迭代次序将会出现迭代循环的情形，即经过若干次迭代后又回到初始基可行解，如果继续迭代将会反复循环无法得到最优解。比如考虑下面的线性规划问题：

$$\max \quad z=\frac{3}{4}x_4-20x_5+\frac{1}{2}x_6-6x_7$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_1 + \frac{1}{4}x_4-8x_5-x_6+9x_7=0 \\ x_2+\frac{1}{4}x_4-12x_5-\frac{1}{2}x_6+3x_7=0 \\ x_3+x_6=1 \\ x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,7 \end{cases} \tag{1.2.13}$$

该问题的最优解为 $x_1^*=3/4, x_2^*=0, x_3^*=0, x_4^*=1, x_5^*=0, x_6^*=1, x_7^*=0$，最优值为 $z^*=5/4$。但是，若利用上面介绍的单纯形法进行计算将会在迭代 6 次后回到初始状态，继续迭代就会循环下去。感兴趣的读者可以自行验证。这类问题称为退化循环问题，解决这类问题的方法是由 A. Charnes 于 1952 年提出的摄动法，后经完善已经成熟。由于这类问题在实际中很难碰到，所以不再花时间介绍，同时，提到求解线性规划问题的算法时，主要还是指单纯形法。但若在计算没有错误的情况下出现循环则需要知道问题是属于退化循环的。

表 1.4　例 1.9 的初始单纯形表及其迭代

c_j			2	−2	0	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	[1]	1	0	0	5
0	x_4	6	−1	1	0	1	0	6
0	x_5	21	6	2	0	0	1	21/2
$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	−2	0	0	0	
−2	x_2	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	1	−2	0	−1	1	0	
0	x_5	11	4	0	−2	0	1	
$\sigma_j=c_j-\sum\limits_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			4	0	2	0	0	

1.2.4　利用 Matlab 实现单纯形法

显然，当线性规划问题的变量数较多时，利用单纯形表进行计算不仅烦琐，而且容易出错。根据单纯形法的计算步骤，编者编写了一个 Matlab 程序：Ssimplex.m。该程序利用 Matlab 实现了如上所述的单纯形表计算过程，程序里有详细的注释，供学习之用。程序代码如下。

☞ Matlab 程序 1.1 (标准单纯形法的 Matlab 程序)

```
% Ssimplex.m利用单纯形法求解如下简单的标准线性规划问题
% max c'x
% s.t.
% Ax=b
% x>=0
% 这里 A\in R^{m\times n},c,x'\in R^n,b\in R^m,b\geq 0
% 且矩阵A里有一个单位子矩阵，不需要引入人工变量。
% By Gongnong Li 2013
function [xstar,fxstar,iter]=Ssimplex(A,b,c)
[m,n]=size(A);E=eye(m);IB=zeros(1,m);k=0;
for i=1:m
    for j=1:n
       if A(:,j)==E(:,i)
           IB(i)=j;SA(i)=j; %IB记录基变量下标，SA记录松弛变量下标。
       elseif A(:,j)==(-E(:,i))
           SA(i)=j; %SA也记录剩余变量(松弛变量)下标。
       end
    end
end
A0=[b,A];N=1:n; N(IB)=[]; IN=N; x(IB)=A0(:,1)';
x(IN)=zeros(1,length(IN)); cB=c(IB);
%IN为非基变量下标。
sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1); t=length(find(sigma>0));
%计算原问题的检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数。
while t~=0
    [sigmaJ,jj]=max(sigma);
%这里的jj是sigma中值最大者所在列，即A0中的第jj+1列(A0中第一列为b)，该列对应的
%非基变量x(jj)为换入变量，而sigmaJ则是相应的检验数。
tt=find(A0(:,jj+1)>0);kk=length(tt);
% 检查增广系数矩阵A0中第jj+1列元素是否有大于零的元素。
        if kk==0
           disp('原问题为无界解')
        else
            theta=zeros(1,kk);
            for i=1:kk
                theta(i)=A0(tt(i),1)/A0(tt(i),jj+1);
            end
            [thetaI,ii]=min(theta); Temp=tt(ii);
%比值最小的theta值，选择换出变量。这时A0(Temp,jj+1)为旋转主元。
            for i=1:m
                if i~=Temp
                   A0(i,:)=A0(i,:)-(A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1))*A0(i,jj+1);
                else
                   A0(Temp,:)=A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1);
                end
            end
            TT=IB(Temp);IB(Temp)=jj;IN(jj)=TT; x(IB)=A0(:,1)';
            N=1:n;N(IB)=[];IN=N; x(IN)=zeros(1,length(IN));cB=c(IB);
```

```
%新的基可行解及其价值系数。
            sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1); t=length(find(sigma>0));
%再次计算检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数。
       end
       k=k+1;
end
IB
IN
B=A(:,IB);
InverseOfB=inv(B)
%这是基矩阵B的逆矩阵，用于灵敏度分析。不做灵敏度分析则将其注释掉。
xstar=x;fxstar=x(IB)*c(IB);iter=k;
```

例 1.10　利用 Matlab 程序 Ssimplex.m 求解如下线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \leqslant 15 \\ (1/3)x_1 + \quad x_2 + 5x_3 \leqslant 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

解　本程序求解的是极大值情形下的标准形线性规划问题，故先将其化为如下标准形式：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = x_1 + 2x_2 + x_3 \\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad = 15 \\ (1/3)x_1 + \quad x_2 + 5x_3 + \qquad x_5 = 20 \\ x_i \geqslant 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}
\end{aligned}
$$

在 Matlab 提示符下输入相应的矩阵 $\boldsymbol{A}$、价值系数向量 c 和资源向量 $\boldsymbol{b}$ (均按照列向量输入) 即可调用该程序计算。

```
>> A=[2 -3 2 1 0;1/3 1 5 0 1];
>> b=[15 20]';
>> c=[1 2 1 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=Ssimplex(A,b,c)
IB =
      1            2
IN =
      3            4            5
InverseOfB =
     1/3           1
    -1/9          2/3
xstar =
     25          35/3          0            0            0
fxstar =
   145/3
```

```
iter =
     2
```

计算结果表明，该题经过两次迭代得到的最优解为 $x_1^*=25, x_2^*=35/3, x_3^*=x_4^*=x_5^*=0$，最优值为 $z^*=145/3$。

1.3 单纯形法的进一步讨论

上面介绍的单纯形法只适用于线性规划的标准形式 (1.2.12)，这是一种特殊的标准形式。特殊之处在于其系数矩阵里有一个单位子矩阵。显然，更一般的线性规划的标准形式不一定在其系数矩阵里有这样的单位子矩阵。这时就不能用单纯形表进行求解。但这个问题比较容易解决。为了得到这样的单位子矩阵，可以引入人工变量来人为地“创造”单位子矩阵。这个方法称为人工变量法。值得注意的是，人工变量是为了得到单位子矩阵而人为添加到约束条件中去的。如果线性规划问题的系数矩阵本身含有一个单位子矩阵，则相应的变量有其自身的含义。如果所有约束条件都是“$\leqslant$”，那么在化为标准形式时需要添加松弛变量，这样也会得到单位子矩阵，这时，相应的松弛变量的意思是该种资源没有用完的部分。而人工变量则没有任何实际含义，纯粹是为了得到单位子矩阵而添加的。人工变量法有两种，分别是大 M 法和两阶段法，下面逐一介绍。

1.3.1 大 M 法

考虑线性规划问题的标准形式 (1.1.4)，假设其系数矩阵不含有单位子矩阵，则考虑下述由原问题构造的一个新问题：

$$\max \quad z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n-M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+\quad x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+\quad x_{n+m} = b_m \\ x_i \geqslant 0(i=1,2,\cdots,n+m) \end{cases} \tag{1.3.1}$$

其中，$x_{n+i}\geqslant 0(i=1,2,\cdots,m)$。

与将不等式约束化为等式约束时添加的松弛变量不同，原问题的约束条件已经是等式约束了，这些变量是为了得到单位子矩阵而在原约束方程组上面添加的，没有什么具体的含义，因此称这 m 个变量为人工变量。M 则表示任意大的正数。对于这个构造的新问题 (1.3.1)，首先它是可以利用单纯形表进行计算的，其次，问题 (1.3.1) 可能有如下几种情形：(1) 问题 (1.3.1) 无解。出现这种情况说明问题 (1.3.1) 的约束条件是互相矛盾的，即其约束方程组无解，此时原问题的约束方程组也无解，实际上，若

原问题的约束方程组有解，那么令这 m 个人工变量为零，则问题 (1.3.1) 的约束方程组也有解。这与前面的结论矛盾。所以，这种情况下原问题也无解。(2) 问题 (1.3.1) 有解，但在其最终单纯形表中依然有大于零的人工变量为基变量，这时说明原问题的约束方程组无解，实际上，若原约束方程组有解，则这些人工变量应该等于零。故在这种情况下能够得知原问题是无解的。(3) 问题 (1.3.1) 有解，且在其最终单纯形表中所有人工变量均为非基变量，即全部为零，这时，问题 (1.3.1) 完全等价于原问题，故其最优解也是原问题的最优解。

值得注意的是，构造的新问题 (1.3.1) 的目标函数在求极大值的情况下是原目标函数减去 M 与人工变量的乘积之和。若是加上 M 与人工变量的和，则问题 (1.3.1) 一般将是无界的，且与原问题没有什么关系了。同时，在计算过程中检验数一定是与 M 有关的表达式，为避免判断检验数的正负时出错，不能用具体的某个“大的”正数代替 M。

使用这个方法需要注意三点：(1) 若原问题化为标准形式后系数矩阵里某一列是 $(0,\cdots,1,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$，即是单位子矩阵的第 i 列，则在 (1.3.1) 中就不需要添加第 i 个人工变量。(2) 在求解 (1.3.1) 的过程中某一次迭代将某人工变量换出后，由于其检验数不可能再为正数，则在下一次迭代时该人工变量所在列可以不再参与运算。这样做可以减少一些计算量。(3) 若目标函数是求最小，则可将目标函数改为求其相反函数的最大，也可在原目标函数后面加上 M 与所有人工变量的乘积从而继续求最小。

例 1.11　利用大 M 法求解线性规划问题：

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - x_3\\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases}
-4x_1 + 3x_2 + x_3 \geqslant 4\\
x_1 - x_2 + 2x_3 \leqslant 10\\
-2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\\
x_1, x_2, x_3 \geqslant 0
\end{cases}
\end{aligned}
$$

解　引入剩余变量 $x_4 \geqslant 0$ 和松弛变量 $x_5 \geqslant 0$，并将第三个约束条件右端项化为正数，得到其标准形

$$
\begin{aligned}
&\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - x_3\\
&\text{s.t.} \quad \begin{cases}
-4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4\\
x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10\\
2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\\
x_i \geqslant 0 \ \ (i = 1,2,3,4,5)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

容易看出，系数矩阵里不含有单位子矩阵。但松弛变量 x_5 的系数列向量是单位子矩阵的第三列。所以这里只需要添加 $x_6 \geqslant 0$ 和 $x_7 \geqslant 0$ 两个人工变量。于是有下面的人工变量问题

$$
\max \quad z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \cdots, 7) \end{cases}
$$

该人工变量问题的初始单纯形表见表 1.5。由于大 M 表示任意大的正数，所以检验数中如果有大 M，则其正负由大 M 前面的符号决定。同样含有大 M，则认为大 M 前面的系数大者，检验数也大。故这里认为 σ_3 是最大的正数。因此 x_3 为换入变量。与前面做法一样，根据 θ 规则，x_7 应该被换出。继续迭代下去 (见表 1.6)。

在最终单纯形表中，非基变量的检验数小于零，故得到了人工变量问题的最优解，且人工变量此时全部是非基变量，故其最优解就是原问题的最优解。$x_1^* = 31/3, x_2^* = 13, x_3^* = 19/3$，最优值为 $z^* = 3 \times (31/3) + 2 \times 13 - (19/3) = 50.67$。

表 1.5　人工变量问题的初始单纯形表

c_j			3	2	-1	0	0	$-M$	$-M$	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-M$	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
$-M$	x_7	1	2	-2	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$3-2M$	$2+M$	$-1+2M$	$-M$	0	0	0	

表 1.6　例 1.11 的后续迭代过程

c_j			3	2	-1	0	0	$-M$	$-M$	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-M$	x_6	3	-6	[5]	0	-1	0	1		3/5
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		8/3
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$5-6M$	$5M$	0	$-M$	0	0		
2	x_2	3/5	$-6/5$	1	0	$-1/5$	0			
0	x_5	31/5	[3/5]	0	0	3/5	1			31/3
-1	x_3	11/5	$-2/5$	0	1	$-2/5$	0			
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			5	0	0	0	0			
2	x_2	13	0	1	0	1	2			
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3			
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3			
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	0	-5	$-25/3$			

例 1.12　利用大 M 法求解下述线性规划问题

$$\min \quad z = 5x_1 - 8x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 \leqslant 6 \\ \ \ x_1 - 2x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

解　首先引入松弛变量 $x_3 \geqslant 0$ 和剩余变量 $x_4 \geqslant 0$，将其化为标准形：

$$\min \quad z = 5x_1 - 8x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad = 6 \\ \ \ x_1 - 2x_2 - \qquad x_4 = 4 \\ x_i, x \geqslant 0 \ \ (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

可以看出，这里需要一个人工变量 x_5，加入人工变量后的问题及其单纯形表如表 1.7 所示。

$$\min \quad z = 5x_1 - 8x_2 + Mx_5$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 3x_1 + \ \ x_2 + x_3 \qquad\qquad = 6 \\ \ \ x_1 - 2x_2 - \qquad x_4 + x_5 = 4 \\ x_i, x \geqslant 0 \ \ (i = 1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

表 1.7　例 1.12 的初始单纯形表及其迭代

c_j			5	-8	0	0	M	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	6	[3]	1	1	0	0	2
M	x_5	4	1	-2	0	-1	1	4
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$5 - M$	$-8 + 2M$	0	M	0	
5	x_1	2	1	$1/3$	$1/3$	0	0	
M	x_5	2	0	$-7/3$	$-1/3$	-1	1	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	$-29/3 + (7/3)M$	$-5/3 + (1/3)M$	M	0	

在最后的单纯形表中，非基变量的检验数都大于零，所以在求极小的情况下已经得到最优解。但是，最优解中含有人工变量 x_5，这说明原问题无解。

实际上，由第一个约束条件与非负条件形成的区域 D_1 和第二个约束条件与非负约束形成的区域 D_2 没有任何交点，即原问题没有可行解，当然是无解的。见图 1.6。

1.3.2 两阶段法

仍然考虑线性规划问题的标准形式 (1.1.4)。假设其系数矩阵不含有单位子矩阵，第一个阶段是构造一个目标函数只含有人工变量的辅助问题，如下所示：

$$
\min \quad z=\sum_{i=1}^{m} x_{n+i}
$$

$$
\text{s.t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n+x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n+\quad x_{n+2} = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n+\quad x_{n+m}=b_m \\ x_i\geqslant 0\ (i=1,2,\cdots,n+m) \end{cases} \tag{1.3.2}
$$

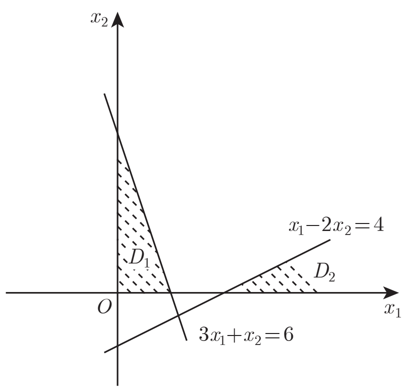

图 1.6 例 1.12 的图解法

显然，该辅助问题可以利用单纯形表求解。若 (1.3.2) 无最优解或虽有最优解但目标函数值不为零，则表明原问题无最优解。道理与在大 M 法中讨论的相同。若 (1.3.2) 有最优解且其目标函数值为零，则得到了原问题的一个初始基可行解，这时转为第二阶段求解。在第一阶段的最终单纯形表中，将其表头换为原问题的表头并重新计算检验数。表的主体 (当然去掉人工变量) 不变，然后按照单纯形法的要求进行下去。实际上，第一阶段是以人工变量为媒介，通过线性变换在原线性规划问题的系数矩阵中找到一个单位子矩阵。这样，第二阶段就回到了原来单纯形表的要求上。所以，总是可以通过两阶段法回答原问题。在大 M 法中讲过添加人工变量时需要注意的几点，在这里仍然是适用的。

大 M 法的优点在于一次性地解决原问题，缺点是无法利用计算机求解。这是因为大 M 不能用具体的正数代替，否则，作为一个程序，大 M 取得太大，将会出现数据溢出，取得不够大又有可能误将非负或非正的检验数判断为相反。两阶段法的优缺点与大 M 法相反。

例 1.13 利用两阶段法求解例 2.11。

解 该线性规划问题及其标准形参见例 2.11。针对其标准形，需要两个人工变量，构造辅助问题如下：

$$
\min \quad z=x_6+x_7
$$

$$
\text{s.t.}\quad \begin{cases} -4x_1+3x_2+x_3-x_4+x_6=4 \\ x_1-x_2+2x_3+x_5=10 \\ 2x_1-2x_2+x_3+x_7=1 \\ x_i\geqslant 0\ \ (i=1,2,\cdots,7) \end{cases}
$$

利用单纯形表求解该辅助问题，见表 1.8。

表 1.8　第一阶段辅助问题的单纯形表

c_j			0	0	0	0	0	1	1	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
1	x_7	1	2	-2	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			2	-1	-2	1	0	0	0	
1	x_6	3	-6	[5]	0	-1	0	1		3/5
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		8/3
0	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			6	-5	0	1	0	0		
0	x_2	3/5	$-6/5$	1	0	$-1/5$	0			
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1			
0	x_3	11/5	$-2/5$	0	1	$-2/5$	0			
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	0	0	0			

在上面最后的单纯形表中可以看到，得到了辅助问题的最优解，且其最优目标函数值为零。这说明得到了原问题的一个初始基可行解 $X = (0, 3/5, 11/5, 0, 31/5)^{\mathrm{T}}$。按照上面所说，将最终单纯形表的两个人工变量去掉并将表头换为原问题的表头，重新计算检验数，见表 1.9。

表 1.9　第二阶段问题 (原问题) 的单纯形表

c_j			3	2	-1	0	0	θ
c_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_2	3/5	$-6/5$	1	0	$-1/5$	0	
0	x_5	31/5	3/5	0	0	3/5	1	31/3
-1	x_3	11/5	$-2/5$	0	1	$-2/5$	0	
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			5	0	0	0	0	
2	x_2	13	0	1	0	1	2	
3	x_1	31/3	1	0	0	1	5/3	
-1	x_3	19/3	0	0	1	0	2/3	
$\sigma_j = c_j - \sum\limits_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	0	-5	$-25/3$	

在最终单纯形表中，非基变量的检验数全部小于零。对于求极大值的原问题来说，已经求得最优解：$x_1^* = 31/3, x_2^* = 13, x_3^* = 19/3, x_4^* = x_5^* = 0$，最优值为 $z^* = 50.67$。

1.3.3 进一步讨论 Matlab 实现

在讨论了人工变量法以后，对于任何一个线性规划问题都可以利用单纯形表进行求解了。但是手工计算是非常烦琐的。编者针对一般的线性规划问题编写了 Matlab 程序 MMSimplex.m，称为一般单纯形法。该程序不仅能求得最优解及最优值，而且可以求出最优基变量及最终单纯形表。程序里有详细的注释供学习之用。代码如下。

☞ **Matlab 程序 1.2** (**一般单纯形法的 Matlab 程序**)

```
% 单纯形法求解线性规划问题
% max c'x
% s.t.
% Ax=b
% x>=0
% 这里 A\in R^{m\times n},c,x'\in R^n,b\in R^m,b\geq 0
% 在需要添加人工变量时将采用两阶段法求解上述问题。
% 输出项:
% 最优解: xstar;最优值: fxstar;迭代次数: iter;A0:最终单纯形表;
% 最优基变量下标为:IB;非基变量下标为: IN;  松弛变量下标为: SA;
% 松弛量取值为: xSA;最终检验数为: sigma(可不显示);
% 最终单纯性表为(第一列为b): A0;
% 基矩阵B的逆矩阵:InverseOfB=inv(B)(用于灵敏度分析)。输出项按需要选择。
% By Gongnong Li 2013
function [xstar,fxstar,iter,A0,IB,IN,SA,xSA,InverseOfB,exitflag]=MMSimplex(A,b,c)
A0=A;[m,n]=size(A0);E=eye(m);IB=zeros(1,m);SA1=zeros(1,n);
IR1=zeros(1,m);IR=1:m;k=0;
%检查原问题(标准形式)系数矩阵中是否含有E(:,i)。
tic;
for i=1:m
    for j=1:n
       if A0(:,j)==E(:,i)
           IB(i)=j;IR1(i)=i;SA1(i)=j;
       elseif A(:,j)==(-E(:,i))
           SA1(i)=j;
       end
    end
end
s1=find(SA1~=0);
if length(s1)~=0
  for i=1:length(s1)
     SA(i)=SA1(s1(i));
  end
else
    SA=[];
end
IR=find(IR~=IR1);s=find(IR~=0);
for p=1:length(s)
  A0(:,n+p)=E(:,IR(p)); IB(IR(p))=n+p; IR(p)=n+p;
end
```

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% IB记录了原问题系数矩阵有多少个E(:,i)，即m-length(s)个,对应的x(i)为初始基变量。
% IR则记录了原问题系数矩阵缺少的E(:,i)下标，即i，这些是需要通过人工变量补齐的，
% 共length(s)个人工变量，这些变量也是初始基变量。SA记录松弛变量(剩余变量)下标。
% IB记录了基变量的下标，而IR记录了人工变量的下标(共有length(s)个人工变量)。退出时
% 矩阵A0具有一个单位子矩阵，可能含有人工变量。若有人工变量，则下面先求第一阶段问
% 题，将会得到原问题的一个初始基可行解。
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
A0=[b,A0];flag=0;
while (length(IR)~=0)&(flag==0) %这表明有人工变量才需要求解第一阶段问题。
c0=zeros(n+length(s),1); c0(IR)=-ones(length(s),1); %第一阶段的相关矩阵和向量。
N=1:n+length(s); N(IB)=[]; IN=N; IN(find(IN==0))=[];
%IB记录基可行解的下标，IN记录非基可行解的下标。
x(IN)=zeros(1,length(IN)); x(IB)=A0(:,1)'; cB=c0(IB);
%第一阶段的初始基可行解及其价值系数。
sigma=c0'-cB'*A0(:,2:n+length(s)+1); %检验数，是一个行向量。
t=length(find(sigma>0)); %假设检验数中有t个大于零的检验数。
   while t~=0
      [sigmaJ,jj]=max(sigma);
%这里的jj是sigma中绝对值最大者所在列，即A0中的第jj+1列(A0中第一列为b)，对应的非基
%变量x(jj)为换入变量，而sigmaJ则是相应的检验数。
      tt=find(A0(:,jj+1)>0); kk=length(tt);
%检查增广系数矩阵A0中第jj+1列元素是否有大于零的元素。
      if kk==0
         disp('原问题为无界解'); %即A0的第jj+1列元素全部小于或等于零。
         xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
         flag=1;
      else
         theta=zeros(1,kk);
         for i=1:kk
             theta(i)=A0(tt(i),1)/A0(tt(i),jj+1);
         end
         [thetaI,ii]=min(theta); Temp=tt(ii);
%比值最小的theta值，选换出变量，Temp为换出变量下标。这时A0(Temp,jj+1)为旋转主元。
         for i=1:m
             if i~=Temp
                A0(i,:)=A0(i,:)-(A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1))*A0(i,jj+1);
             else
                A0(Temp,:)=A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1);
             end
         end
%以上为旋转运算。
        TT=IB(Temp); IB(Temp)=jj;
         for i=1:length(IR)
             if IR(i)==TT
                IR(i)=0;
             end
         end
         d=find(IR==0);IR(d)=[]; %这里记录的是人工变量的变化。
         IN(jj)=TT; x(IB)=A0(:,1)'; IN(find(IN==0))=[];
```

```
         x(IN)=zeros(1,length(IN)); cB=c0(IB); %新的基可行解及价值系数。
         sigma=c0'-cB'*A0(:,2:n+length(s)+1); t=length(find(sigma>0));
%再次计算检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数。
      end
        k=k+1;
   end
  if sum(x(IR))~=0
   disp('原问题无解');%此时没有检验数小于零，但第一阶段有最优解，从而原问题无解。
   xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
    flag=2;exitflag=flag;
   else
    x=x(1:n);
  end
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%第一阶段问题求解完毕，得到原问题的一个基可行解。
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
if (flag==1)|(flag==2)
    return
  else
IB;N=1:n; N(IB)=[]; IN=N; IN(find(IN==0))=[];x(IN)=zeros(1,length(IN));
cB=c(IB); A0=A0(:,1:n+1); %回到原问题的有关矩阵和向量。
sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1); t=length(find(sigma>0));
%计算原问题的检验数并假设检验数中有t个大于零的检验数。
while  (t~=0)&(flag==0)
    [sigmaJ,jj]=max(sigma);
%jj是sigma中绝对值最大者所在列，即A0中的第jj+1列(A0中第一列为b)，该列对应的非基
%变量x(jj)为换入变量，而sigmaJ则是相应的检验数。
tt=find(A0(:,jj+1)>0);kk=length(tt);
%检查增广系数矩阵A0中第j+1列元素是否有大于零的元素。
        if kk==0
           disp('原问题为无界解');
           xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
           flag=1;
        else
            theta=zeros(1,kk);
            for i=1:kk
                theta(i)=A0(tt(i),1)/A0(tt(i),jj+1);
            end
            [thetaI,ii]=min(theta); Temp=tt(ii);
%比值最小的theta值，选择换出变量。这时A0(Temp,jj+1)为旋转主元。
            for i=1:m
                if i~=Temp
                   A0(i,:)=A0(i,:)-(A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1))*A0(i,jj+1);
                else
                   A0(Temp,:)=A0(Temp,:)/A0(Temp,jj+1);
                end
            end
    TT=IB(Temp);IB(Temp)=jj;IN(jj)=TT; x(IB)=A0(:,1)';
    N=1:n;N(IB)=[];IN=N; IN(find(IN==0))=[];x(IN)=zeros(1,length(IN));cB=c(IB);
```

```
%新的基可行解及其价值系数。
         sigma=c'-cB'*A0(:,2:n+1);
         t=length(find(sigma>0)); %再次计算检验数并设检验数中有t个大于零的数。
       end
       k=k+1;
end
end
if flag==1
   xstar=[];fxstar=[];A0=[],IB=[];iter=k;
   disp('原问题为无界解');exitflag=flag;
elseif flag==2
   xstar=[];fxstar=[];A0=[];IB=[];iter=k;
   disp('原问题无解');exitflag=flag;
else
   xstar=zeros(1,n);xstar(IB)=A0(:,1)';fxstar=xstar(IB)*c(IB);iter=k;
   B=A(:,IB);InverseOfB=inv(B);xSA=x(SA);
 exitflag=flag;
end
toc;
```

以上程序在约束方程组系数矩阵不是行满秩矩阵时可能失效。另外，Matlab 自身带有一个优化工具箱。求解线性规划问题的程序名为 linprog.m。下面简要地叙述如何利用该程序求解线性规划问题。

```
>> help linprog
 LINPROG Linear programming.
    X = LINPROG(f,A,b) attempts to solve the linear programming problem:
             min f'*x    subject to:   A*x <= b
              x
    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq) solves the problem above while additionally
    satisfying the equality constraints Aeq*x = beq.

    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB) defines a set of lower and upper
    bounds on the design variables, X, so that the solution is in
    the range LB <= X <= UB. Use empty matrices for LB and UB
    if no bounds exist. Set LB(i) = -Inf if X(i) is unbounded below;
    set UB(i) = Inf if X(i) is unbounded above.

    X = LINPROG(f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0) sets the starting point to X0. This
    option is only available with the active-set algorithm. The default
    interior point algorithm will ignore any non-empty starting point.
    ......
```

通过这个帮助可以看出，函数linprog求解的线性规划问题具有如下几个特点：(1) 目标函数求极小，若是求极大，则需求其相反函数。(2) 命令中出现的向量都按列向量输入，其中 f 即为价值系数向量。该函数允许线性规划问题既有不等式约束也有等式约束，不需要将不等式化为等式。但等式约束指的是“$\leqslant$”。如果是“$\geqslant$”，则要在不等式两边乘以“-1”将其化为“$\leqslant$”。该函数还允许决策向量有下界向量 **LB** 和上

界向量 **UB**。(3) 如果线性规划问题只有等式约束，则可令`A=[],b=[]`。该函数还允许从某一个初始点 X_0 开始求解，当然这主要是针对所谓大规模问题而言的。同时，还可通过适当的选项来决定采用何种算法，是否打开大规模问题的算法，等等。(4) 输出有多种选项。比如选择`[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=linprog(f,A,b)`时就意味着可得到最优解`X`，最优目标函数值`FVAL`，计算结束时退出标记`EXITFLAG`，该标记取“1”表示`linprog` 求得的点列收敛到最优解`X`，取“0”则表示迭代到预先设定的最大迭代次数后终止，此时的解不一定是最优解，取“-2”则表示原问题无可行解，取“-3”则表示原问题为无界解，等等。而`OUTPUT`里面的信息则有迭代次数，采用的算法等。

例 1.14 利用程序 MMSimplex.m 计算例 2.1.11。

解 本程序求解的是标准形式的线性规划问题。只需将原线性规划问题化为标准形式即可调用该程序求解，不需添加人工变量 (该程序在需要添加的时候会自动添加)。该问题的标准形式参见例 2.1.11。在 Matlab 的提示符下输入相应的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$、价值系数向量 $\boldsymbol{c}$ 和资源向量 $\boldsymbol{b}$，然后调用该程序。

```
>> A=[-4 3 1 -1 0;1 -1 2 0 1;2 -2 1 0 0];
>> c=[3 2 -1 0 0]';
>> b=[4 10 1]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.073668 seconds.
xstar =
      31/3          13           19/3           0            0
fxstar =
     152/3
iter =
       3
```

计算结果表明，经过三次迭代得到 $x_1^* = 31/3, x_2^* = 13, x_3^* = 19/3, x_4^* = x_5^* = 0, z^* = 152/3$。

例 1.15 利用 Matlab 自带程序 linprog.m 计算例 2.1.11。

解 当我们采用`linprog`进行求解时，需要将约束条件中“$\geqslant$”化为“$\leqslant$”，这只需在原不等式两边乘以“-1”即可。这样，b 向量可能会出现负数，这是允许的。计算过程如下。

```
>> A=[4 -3 -1 ;1 -1 2];
>> b=[-4 10]';
>> f=[-3 -2 1]';
>> Aeq=[2 -2 1];
>> beq=[1];
>> lb=[0 0 0]';
>> ub=[inf inf inf]';
>> [X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]=linprog(f,A,b,Aeq,beq)
Optimization terminated.
Elapsed time is 0.006504 seconds.
X =
```

```
      31/3
      13
      19/3
FVAL =
    -152/3
EXITFLAG =
       1
OUTPUT =
      iterations: 4
       algorithm: 'large-scale: interior point'
    cgiterations: 0
         message: 'Optimization terminated.'
```

上述计算结果表明经过 4 次迭代求得最优解 (EXITFLAG=1)，最优解为 $x_1^* = 31/3, x_2^* = 13, x_3^* = 19/3$，最优值为 $z^* = 152/3$。

例 1.16 利用上面给出的程序 MMSimplex.m 求解模型引入 2.2(最佳下料问题)。

解 模型引入 2.2 的线性规划问题参见 (1.1.2)。该问题有 10 个变量，如果手工计算还需要 1 个人工变量。计算量较大。原问题是求极小，现求其相反函数的极大。利用 MMSimplex.m 计算如下：

```
>> A=[2 2 1 1 1 0 0 0 0 0;1 0 2 1 0 4 3 2 1 0;0 1 0 2 3 0 1 2 4 5];
>> b=[1000 1000 1000]';
>> c=-[0 0.3 0.5 0.1 0.4 0 0.3 0.6 0.2 0.5]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.000763 seconds.
xstar =
     500    0    0    0    0   125/2    0    0   250    0
fxstar =
     -50
iter =
       3
```

计算结果表明 $x_1^* = 500, x_6^* = 62.5, x_9^* = 250$，其他变量为 0。最优值 $z^* = 50$。这就是说用 500 根圆钢采用第 1 种方案剪裁，用 62.5 根圆钢采用第 6 种方案剪裁，用 250 根圆钢采用第 9 种方案剪裁。这样剪裁产生的料头只有 50m，共用圆钢 812.5 根。

1.3.4 应用举例

利用线性规划解决实际问题是数学建模的一个重要方面。除了前已述及的数学建模的一般原则外，还需注意目标函数和约束条件是否可以表示成线性函数。提高数学建模的能力需要长期的训练，下面通过几个例题说明线性规划在实际中的应用。

例 1.17 (生产安排问题) 某种产品由 3 种不同零件各一个组成。每种零件均可由 4 个部门各自生产，但它们的生产效率和生产能力各不同。表 1.10 给出了每个部门的能力限制和每个部门生产每种零件的效率。问各部门生产每一种零件的工作时数是多少时，使得完成产品的件数最多。

表 1.10 各部门的生产能力及其效率

部门	能力限制 (小时)	生产效率 c_{ij}(件/小时)		
		零件 1	零件 2	零件 3
1	100	10	15	5
2	150	15	10	5
3	80	20	5	10
4	200	10	15	20

解 该问题问的是各部门生产每一种零件的工作时数，这是本题的决策变量，需要我们回答。因此，不妨假设 x_{ij} 表示第 i 个部门生产第 j 种零件的小时数 $(i=1,2,3,4;j=1,2,3)$。除此以外，还需要我们回答的是完成产品的件数应该是多少。根据题意，若 c_{ij} 表示第 i 个部门生产第 j 种零件的效率，则可以生产得到第 $j(j=1,2,3)$ 种零件 $\sum\limits_{i=1}^{4}c_{ij}x_{ij}(j=1,2,3)$ 个。题目还假设最终的产品是由这三种零件各一个组成，但由于生产效率和能力的限制，得到的每种零件的数量是不一样的。所以，能够获得的最终产品的数量是 $\sum\limits_{i=1}^{4}c_{ij}x_{ij}(j=1,2,3)$ 之中的最小值，该值记为 x，这就是最终产品的数量，目标函数显然就是对其求最大。结合每个部门生产能力的限制，最后得到如下数学模型：

$$
\begin{aligned}
&\max\quad z=x\\
&\text{s.t.}\quad \begin{cases}
10x_{11}+15x_{21}+20x_{31}+10x_{41}-x\geqslant 0\\
15x_{12}+10x_{22}+5x_{32}+15x_{42}-x\geqslant 0\\
5x_{13}+5x_{23}+10x_{33}+20x_{43}-x\geqslant 0\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}\leqslant 100\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}\leqslant 150\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}\leqslant 80\\
x_{41}+x_{42}+x_{43}\leqslant 200\\
x,x_{ij}\geqslant 0\quad (i=1,2,3,4;j=1,2,3)
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.3.3}
$$

模型 (1.3.3) 中有 13 个变量，为了求解，将其化为标准形还需要 3 个剩余变量，4 个松弛变量。故最后该模型的标准形将会有 20 个变量。显然，利用单纯形表手工计算是不可行的。下面我们利用程序 MMSimplex.m 求解该模型。在利用该程序前，注意将原线性规划问题化为标准形式，但不需要添加人工变量。具体的标准形式这里省略。下面只是将化为标准形式后在 Matlab 的提示符下的操作列举出来。

```
>> A=[10 0 0 15 0 0 20 0 0 10 0 0 -1 -1 0 0 0 0 0 0;...
0 15 0 0 10 0 0 5 0 0 15 0 -1 0 -1 0 0 0 0 0;...
0 0 5 0 0 5 0 0 10 0 0 20 -1 0 0 -1 0 0 0 0;...
```

```
1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;...
0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0;...
0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0;...
0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 1];
>> b=[0 0 0 100 150 80 200]';
>> c=[0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.002019 seconds.
xstar =
  1.0e+003 *
  Columns 1 through 13
  0  0.1000  0  0.0883  0.0617  0  0.0800   0  0  0  0.0538  0.1462  2.9241
  Columns 14 through 20
  0   0   0   0   0   0   0
fxstar =
  2.9241e+003
iter =
     7
```

计算结果表明，经过 7 次迭代得到最优解为

$$\begin{aligned}&x_{11}=0, \quad x_{12}=100, \quad x_{13}=0, \quad x_{21}=88.3, \quad x_{22}=61.7, \quad x_{23}=0,\\&x_{31}=80, \quad x_{32}=0, \quad\ \ x_{33}=0, \quad x_{41}=0, \quad\ \ \ x_{42}=53.8, \quad x_{43}=146.2.\end{aligned}$$

最优值 $z^*=2924.1$。即第一个部门用 100 小时生产第 2 种零件，第二个部门用 88.3 小时生产第 1 种零件，用 61.3 小时生产第 2 种零件，第三个部门用 80 小时生产第 1 种零件，第四个部门用 53.8 小时生产第 2 种零件，用 146.2 小时生产第 3 种零件。这时能够得到最多的产品 2924.1 件。

例 1.18 (**人员安排问题**) 某服务机构通过一段时间的运行，统计出一周内每天对服务人员的需求，如表 1.11 所示。根据有关要求，每位服务人员每周工作 5 天，休息 2 天。且这两天休息是连续的。问应如何安排服务人员的休息，使得在满足工作需要的同时总的服务人员最少？

表 1.11 服务机构每天需要的服务人员

时间	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五	星期六	星期天
所需服务人员数	28	15	24	25	19	31	28

解 根据题目要求和给出的信息，安排服务人员的休息就是指安排服务人员哪两天休息，这等价于安排服务人员从哪一天开始上班。这里没有给出具体的服务人员，所以就是安排哪一天有几个服务人员开始上班。按照这个思路，可以设 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ 表示星期一至星期天上班的人数。按规定每人上班是连续工作 5 天，于是星期天在岗的服务人员就应该是星期天开始上班的服务人员以及上一周从星期三至星期六开始上班的服务人员，这可以表示为 $x_3+x_4+x_5+x_6+x_7$。其他每天的安排类似。一周总的

服务人员数当然是每天开始上班的服务人员之和。因此，可建立如下数学模型 (1.3.4)。

$$\min \quad z=\sum_{i=1}^{7} x_i$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_3+x_4+x_5+x_6+x_7 \geqslant 28 \\ x_4+x_5+x_6+x_7+x_1 \geqslant 15 \\ x_5+x_6+x_7+x_1+x_2 \geqslant 24 \\ x_6+x_7+x_1+x_2+x_3 \geqslant 25 \\ x_7+x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 19 \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \geqslant 31 \\ x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \geqslant 28 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,\cdots,7) \end{cases} \tag{1.3.4}$$

该线性规划问题有 7 个变量，化为标准形还需要 7 个剩余变量。若要用单纯形表的方法求解则还需要 7 个人工变量。这样将会有 21 个变量。显然，手工计算是非常烦琐的。利用程序 MMSimplex.m 求解如下 (与前例一样，需将其化为标准形，略)。

```
>> A=[0 0 1 1 1 1 1 -1 0 0 0 0 0 0;1 0 0 1 1 1 1 0 -1 0 0 0 0 0;...
1 1 0 0 1 1 1 0 0 -1 0 0 0 0;1 1 1 0 0 1 1 0 0 0 -1 0 0 0;...
1 1 1 1 0 0 1 0 0 0 0 -1 0 0;1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1 0;...
0 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 -1];
>> b=[28 15 24 25 19 31 28]';
>> c=-[1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.392200 seconds.
xstar =
  8  0  12  0  11  5  0  0  9  0  0  1  0  0
fxstar =
   -36
iter =
     7
```

计算结果表明，经过 7 次迭代，得到的最优解为 $x_1=8, x_2=0, x_3=12, x_4=0, x_5=11, x_6=0, x_7=5$，即周一应该有 8 人开始上班，周三有 12 人开始上班，周五有 11 人开始上班，周日有 5 人开始上班。这样可在满足工作对服务人员的要求下，总的服务人员最少 (36 人)。

例 1.19 (**连续投资问题**)　某金融机构在今后 5 年内考虑给下列项目投资，已知：项目 A 从第一年到第四年年初需要投资，并于次年末回收本利 115%；项目 B 从第三年年初需要投资，到第五年末能回收本利 125%，但有一定风险，所以规定最大投资额不超过其资金拥有量的 40%；项目 C 在第二年年初需要投资，到第五年年末能回收本利 140%，同样由于风险等原因，规定最大投资额不超过资金拥有量的 30%；项

目 D 为五年内每年年初可购买公债，于当年年末返回，并加利息 6% 。该机构现有资金 100 万元，问该机构应如何确定给这些项目每年的投资额，使得到第五年年末的时候其资金的本利总额为最大？

解　这个问题问的是该机构给这些项目每年的投资额，这是需要解答者回答的问题，所以是本题的决策变量。根据题意，一共有四个项目，有的项目是每年初都需要投资，有的不需要每年投资，因此，可以按每年初投资到某项目来决定决策变量。如果某项目某年初不需投资，则不设该变量。故设 $x_{i1}(i=1,2,3,4)$ 表示第 i 年年初投资到 A 项目的投资额，x_{32} 表示第三年年初投资到 B 项目的投资额，x_{23} 表示第二年年初投资到 C 项目的投资额，$x_{i4}(i=1,2,3,4,5)$ 表示第 i 年年初投资到 D 项目中的投资额。

决策变量确定以后进一步分析：首先容易想到的就是所有投资额之和等于该机构拥有的资金总额。我们想解决的是该机构获利最大的投资方案，所以在考虑投资总额时除了开始拥有的 100 万元以外，第二年开始有了收益 (项目 D)，将此收益也应作为投资总额的一部分。同时，该机构每年用于投资的资金不应剩余。因此，在第一年初有

$$x_{11}+x_{14}=1000000$$

第二年年初，因为第一年给 A 项目的投资到第二年年末才有收益，但 D 项目有了收益，故有

$$x_{21}+x_{23}+x_{24}=1.06x_{14}$$

第三年年初的资金来自于 A 项目在第一年投资的收益以及 D 项目在第二年年初投资的收益，故

$$x_{31}+x_{32}+x_{34}=1.15x_{11}+1.06x_{24}$$

第四年年初的资金来自于 A 项目在第二年年初的投资收益以及 D 项目在第三年年初的投资收益，故

$$x_{41}+x_{44}=1.15x_{21}+1.06x_{34}$$

第五年的资金来自于 A 项目在第三年年初的投资收益和 D 项目在第四年年初的投资收益，故

$$x_{54}=1.15x_{31}+1.06x_{44}$$

题目还假设 B、C 两个项目有投资限额，即

$$x_{32}\leqslant 400000,\qquad x_{23}\leqslant 300000$$

目标函数应该是所有的资金额之和，即

$$z=1.15x_{41}+1.40x_{23}+1.25x_{32}+1.06x_{54}$$

根据如上分析，最后得到数学模型 (1.3.5)。

$$
\max \quad z = 1.15x_{41} + 1.40x_{23} + 1.25x_{32} + 1.06x_{54}
$$

$$
\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_{11} + x_{14} = 1000000 \\ x_{21} + x_{23} + x_{24} = 1.06x_{14} \\ -1.15x_{11} - 1.06x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{34} = 0 \\ -1.15x_{21} - 1.06x_{34} + x_{41} + x_{44} = 0 \\ -1.15x_{31} - 1.06x_{44} + x_{54} = 0 \\ x_{32} \leqslant 400000 \\ x_{23} \leqslant 300000 \\ x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{32}, x_{23}, x_{14}, x_{24}, x_{34}, x_{44}, x_{54} \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.3.5}
$$

该线性规划问题有 11 个原始变量，将其化为标准形还需要两个松弛变量，若用单纯形表计算还需要 1 个人工变量。显然太繁琐。现利用程序 MMSimplex.m 计算，过程如下。

```
>> A=[1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 -1.06 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0;...
-1.15 0 0 0 0 1 1 1 0 0 0 0 0;...
0 0 -1.15 0 0 0 0 -1.06 1 1 0 0 0;0 0 0 0 0 -1.15 0 0 0 -1.06 1 0 0;...
0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 1 0;0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1];
>> b=[1000000,0,0,0,0,300000,400000]';
>> c=[0 0 0 1.40 0 0 1.25 0 1.15 0 1.06 0 0]';
>> [xstar,fxstar,iter]=MMSimplex(A,b,c)
Elapsed time is 0.055076 seconds.
xstar =
  1.0e+005 *
  Columns 1 through 10
  7.1698    2.8302     0    3.0000      0    4.2453    4.0000      0       0       0
  Columns 11 through 13
   4.8821      0       0
fxstar =
  1.4375e+006
iter = 6
```

计算结果表明，经过 6 次迭代得到 $x_{11} = 716980, x_{14} = 283020$，即第一年投资方案为：投资 A 项目 716980 元，投资 D 项目 283020 元，$x_{23} = 300000$ 则表示第二年年初投资 C 项目 300000 元，$x_{31} = 424530, x_{32} = 400000$ 表示第三年投资 A 项目 424530 元，投资 B 项目 400000 元，$x_{41} = 488210$ 表示第四年年初投资 A 项目 488210 元，这样将会获得的最大收益为 $z^* = 1437500$ 元。收益率达到 43.75%。

习题一

1. 将下面的线性规划问题化为标准形式。

(1) $\min \quad z=-3x_1+x_2+x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5 \leqslant x_1+x_2+x_3 \leqslant 10 \\ 3x_1 \geqslant 4x_3 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,3) \end{cases}$$

(2) $\min \quad z=-3x_1+4x_2-2x_3+5x_4$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1-x_2+x_3-x_4=-2 \\ x_1+x_2+x_3-x_4 \leqslant 14 \\ -2x_1+3x_2-x_3+2x_4 \geqslant 2 \\ x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, x_2 \leqslant 0, x_4\text{无限制} \end{cases}$$

(3) $\min \quad z=2x_1-x_2+5x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1+x_2+2x_3=8 \\ 3x_1+x_2-x_3 \geqslant 6 \\ x_1 \leqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3\text{无限制} \end{cases}$$

(4) $\max \quad z=2x-3y$

$$\text{s.t.} \begin{cases} |x|+|y|=3 \\ x-y=1 \end{cases}$$

2. 对下述线性规划问题找出所有基解，指出哪些是基可行解，并确定最优解。

(1) $\max \quad z=3x_1+x_2+2x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 12x_1+3x_2+6x_3+3x_4=9 \\ 8x_1+x_2-4x_3+2x_5=10 \\ 3x_1-x_6=0 \\ x_i \geqslant 0, (i=1,2,\cdots,6) \end{cases}$$

(2) $\min \quad z=5x_1-2x_2+3x_3+2x_4$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7 \\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=3 \\ x_i \geqslant 0(i=1,2,3,4) \end{cases}$$

3. 用图解法求解下列线性规划问题，并指出问题的解的类型 (唯一解、无穷多组解、无界解、无可行解)。

(1) $\min \quad z=2x_1+3x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 4x_1+6x_2 \geqslant 6 \\ 2x_1+2x_2 \geqslant 4 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max \quad z=3x_1+2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1+x_2 \leqslant 2 \\ 3x_1+4x_2 \geqslant 12 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(3) $\max \quad z = x_1 + x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 6x_1 + 10x_2 \leqslant 120 \\ x_1 + x_2 \leqslant 14 \\ 5 \leqslant x_1 \leqslant 10 \\ 3 \leqslant x_2 \leqslant 8 \end{cases}$$

(4) $\max \quad z = 5x_1 + 6x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geqslant 2 \\ -2x_1 + 3x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

4. 分别用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，并指出单纯形法迭代的每一步与图解法中的可行域哪一个点对应。

(1) $\max \quad z = 10x_1 + 5x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leqslant 9 \\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\max \quad z = 2x_1 + x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leqslant 15 \\ 6x_1 + 2x_2 \leqslant 24 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

5. 若 $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2 \in \boldsymbol{R}^n$ 是两个凸集，证明 $\boldsymbol{D}_1 \bigcap \boldsymbol{D}_2$ 也是凸集。

6. 证明若 $\boldsymbol{X}^{(1)}, \boldsymbol{X}^{(2)}$ 均为某线性规划问题的最优解，则在这两点连线上的所有点也是该问题的最优解。

7. 分别用大 M 法和两阶段法求解下列线性规划。

(1) $\max \quad z = 10x_1 - 5x_2 + x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 10 \\ -5x_1 + x_2 - 10x_3 \leqslant 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

(2) $\min \quad z = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 \geqslant 15 \\ 5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leqslant 20 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

8. 某饲养场饲养某种动物出售，设每头动物每天至少需要 700g 蛋白质、30g 矿物质、100mg 维生素。现有 5 种饲料可供选用，各种饲料每 kg 营养成分含量及单价如表 1.12 所示。要求确定既能满足动物生长的营养要求又使费用最省的选用饲料的方案。试建立数学模型，并利用程序 MMSimplex.m 求解。

表 1.12　每种饲料的营养成分含量及价格

饲料	蛋白质 (g)	矿物质 (g)	维生素 (mg)	价格 (元/kg)
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

9. 一艘货轮分前、中、后三个舱位，它们的容积和最大允许载重量如表 1.13 所示。现有三种货物待运，已知有关数据列于表 1.14。为了航运安全，前、中、后舱的

实际载重量大体保持各舱最大载重量的比例关系。具体要求是前、后舱分别与中舱之间载重量比例的偏差不超过 15%，前、后舱之间不超过 10%。问：该货轮应装载 A、B、C 各多少件运费收入最大？试建立这个问题的线性规划模型，并用 Matlab 程序 MMSimplex.m 求解。

表 1.13　各舱位的容积与最大允许载重量

项目	前舱	中舱	后舱
最大允许载重量 (T)	2000	3000	1500
容积 (m^3)	4000	5400	1500

表 1.14　货物的体积、数量及单位运价

商品	数量 (件)	每件体积 (m^3/件)	每件重量 (T/件)	运价 (元/件)
A	600	10	8	1000
B	1000	5	6	700
C	800	7	5	600

10. 某建筑公司需要用 6m 长的塑钢材料制作 A、B 两种型号的窗架。两种窗架所需材料规格及数量如表 1.15 所示。比如，一套 A 型号的窗架由 2 根长度为 1.7 米的 A_1 和 3 根长度为 1.3 米的 A_2 构成。问怎样下料使得余料最少？试建立数学模型，并用 MMSimplex.m 或 linprog.m 求解。

表 1.15　窗架所需材料规格及数量

	型号 A		型号 B	
	长度 (m)	数量 (根)	长度 (m)	数量 (根)
每套窗架所需材料	A_1:　1.7	2	B_1:　2.7	2
	A_2:　1.3	3	B_2:　2.0	3
需要量 (套)	200		150	

11. 某投资人现有下列 4 种投资方案，3 年内每年年初都有 3 万元 (不计利息) 可供投资：方案一，在 3 年内投资人应在每年年初投资，一年结算一次，年收益率是 20%，下一年可继续将本息投入获利。方案二，在 3 年内投资人应在第一年年初投资，两年结算一次，收益率是 50%，下一年可继续将本息投入获利，这种投资最多不超过 2 万元。方案三，在 3 年内投资人应在第二年年初投资，两年结算一次，收益率是 60%，这种投资最多不超过 1.5 万元。方案四，在 3 年内投资人应在第三年年初投资，一年结算一次，年收益率是 30%，这种投资最多不超过 1 万元。问：该投资人应采用怎样的投资决策使得 3 年的总收益最大？试建立数学模型，并用 Matlab 求解。

参考答案