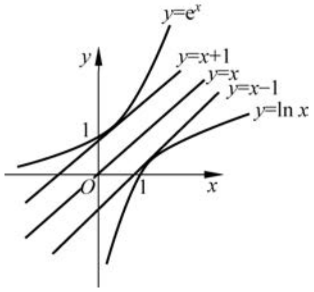
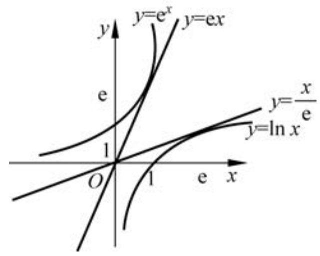
第3章 导数

导数是高考数学中的重难点内容，通常有两道题，选择题或者填空题里有一道，解答题里有一道，基本出现在压轴题的位置，总分值为17分。导数是研究函数的有力工具，但其对思维和逻辑有较高要求。本章收录的是导数的基础题和中档题，若想在导数部分再进一步，可结合使用《决胜800题》。

常见切线不等式：



$e^x \geqslant x+1 > x > x-1 \geqslant \ln x$



$e^x \geqslant ex$，$\frac{x}{e} \geqslant \ln x$

3.1 计　算

本章视频讲解

核心笔记

1. 基本初等函数的导数公式：

(1) 若 $f(x)=C$(C 为常数)，则 $f'(x)=0$；

(2) 若 $f(x)=x^{\alpha}$($\alpha\in\mathbf{Q}$ 且 $\alpha\neq0$)，则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$；

(3) 若 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$；

(4) 若 $f(x)=\cos x$，则 $f'(x)=-\sin x$；

(5) 若 $f(x)=a^{x}$($a>0$ 且 $a\neq1$)，则 $f'(x)=a^{x}\ln a$；

(6) 若 $f(x)=\mathrm{e}^{x}$，则 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}$；

(7) 若 $f(x)=\log_a x$($a>0$ 且 $a\neq1$)，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}$；

(8) 若 $f(x)=\ln x$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$。

2. 导数的四则运算法则：

(1) $[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$；

(2) $[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；

(3) $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f(x)'g(x)-f(x)g'(x)}{g^{2}(x)}$。

【251】(2018·天津·10·)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\ln x$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，则 $f'(1)$的值为________。

【答案】 e。

提示：对 $f(x)=\mathrm{e}^{x}\ln x$ 求导可得 $f'(x)=\mathrm{e}^{x}\ln x+\mathrm{e}^{x}\dfrac{1}{x}=\mathrm{e}^{x}\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$，则 $f'(1)=\mathrm{e}$。

【252】(2016·天津·10·)

已知函数 $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{x}$，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，则 $f'(0)$的值为________。

【答案】 3。

提示：对 $f(x)=(2x+1)\mathrm{e}^{x}$ 求导可得 $f'(x)=2\mathrm{e}^{x}+(2x+1)\mathrm{e}^{x}=\mathrm{e}^{x}(2x+3)$，则 $f'(0)=3$。总结出一个常见小结论：若 $g(x)=\mathrm{e}^{x}f(x)$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x}[f(x)+f'(x)]$。

【253】(2010·江西·4·)

若 $f(x)=ax^{4}+bx^{2}+c$ 满足 $f'(1)=2$，则 $f'(-1)=$(　　)。

A. -1　　B. -2　　C. 2　　D. 0

【答案】 B。

提示：方法一：对 $f(x)=ax^{4}+bx^{2}+c$ 求导可得 $f'(x)=4ax^{3}+2bx$，则 $f'(1)=4a+2b=2$。$f'(-1)=-4a-2b=-(4a+2b)=-2$。故选 B。

方法二：若 $f(x)$是偶函数，则 $f'(x)$是奇函数。

简证：$f(x)$是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，对等式两边求导可得 $-f'(-x)=f'(x)$，即 $f'(-x)=-f'(x)$。

同样地，若 $f(x)$是奇函数，则 $f'(x)$是偶函数。

因为 $f(x)=ax^{4}+bx^{2}+c$ 是偶函数，故 $f'(x)$是奇函数，则 $f'(-1)=-f'(1)=-2$。

【254】(2008·宁夏海南·4·)

设 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则 $x_0=$(　　)。

A. e^{2}　　B. e　　C. $\dfrac{\ln 2}{2}$　　D. $\ln 2$

【答案】 B。

提示：对 $f(x)=x\ln x$ 求导可得 $f'(x)=\ln x+1$，而 $f'(x_0)=\ln x_0+1=2$，解方程得 $x_0=\mathrm{e}$。故选 B。

【255】(2015·天津·11·)

已知函数 $f(x)=ax\ln x$，$x\in(0+\infty)$，其中 a 为实数，$f'(x)$为 $f(x)$的导函数，若 $f'(1)=3$，则 a 的值为________。

【答案】 3。

提示：对 $f(x)=ax\ln x$ 求导可得 $f'(x)=a(\ln x+1)$，而 $f'(1)=a=3$，故 $a=3$。

【256】(2004·贵州·4·)

函数 $y=(x+1)^{2}(x-1)$在 $x=1$ 处的导数等于(　　)。

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【答案】 D。

提示：方法一：多项式展开求导，$y=(x+1)^{2}(x-1)=x^{3}+x^{2}-x-1$，得 $y'=3x^{2}+2x-1$，则 $y'_{x=1}=4$。故选 D。

方法二：使用四则运算求导，$y'=2(x+1)(x-1)+(x+1)^{2}=3x^{2}+2x-1$，则 $y'_{x=1}=4$。故选 D。

【257】(2020·新课标全国三·15·)

设函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{x}}{x+a}$，若 $f'(1)=\dfrac{\mathrm{e}}{4}$，则 $a=$________。

【答案】 1。

提示：对 $f(x)=\dfrac{e^x}{x+a}$ 求导可得 $f'(x)=\dfrac{e^x(x+a-1)}{(x+a)^2}$，而 $f'(1)=\dfrac{ae}{(1+a)^2}=\dfrac{e}{4}$，解方程得 $a=1$。

【258】（2009・湖北・14・）

若 $f(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$，则 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值为________。

【答案】1。

提示：对 $f(x)=f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\cos x+\sin x$ 求导得 $f'(x)=-f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin x+\cos x$，则 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}$，解得 $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$，则 $f(x)=(\sqrt{2}-1)\cos x+\sin x$，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=(\sqrt{2}-1)\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{4}=1$。

【259】（2013・江西・13・）

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内可导，且 $f(e^x)=x+e^x$，则 $f'(1)=$________。

【答案】2。

提示：本题先要求得 $f(x)$，再进一步求 $f'(1)$，通过换元求解 $f(x)$。

令 $t=e^x>0$，则 $x=\ln t$，所以 $f(t)=\ln t+t$，即 $f(x)=\ln x+x$，而 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$，所以 $f'(1)=2$。

3.2　切　　线

核心笔记

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $P(a,b)$ 处的切线：$y-b=f'(a)(x-a)$。

2. 函数 $y=f(x)$ 上过点 $P(a,b)$ 的切线：设切点 $Q(x_0,f(x_0))$，则在该切点 Q 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，而切线过 $P(a,b)$，则 $b-f(x_0)=f'(x_0)(a-x_0)$，解关于所设切点 x_0 的方程，再将所解得的 x_0 代入 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$，即可求得所求切线。

注意：利用导数求切线一定需要切点，切点处的导数才是切线斜率。

类型一：求斜率与倾斜角

方法：切线斜率 $k=f'(x_0)=\tan\alpha$（其中 x_0 为切点横坐标，α 为切线倾斜角，$\alpha\in[0,\pi)$）。

【260】（2007・湖北・13・）

已知函数 $y=f(x)$ 的图像在点 $M(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=\dfrac{1}{2}x+2$，则 $f(1)+f'(1)=$________。

【答案】3。

提示：由题意知 $k=f'(1)=\dfrac{1}{2}$，而 $f(1)=\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$，所以 $f'(1)+f(1)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5}{2}=3$。

【261】（2011・湖南・7・）

曲线 $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1}{2}$ 在点 $M\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$ 处的切线的斜率为（　　）。

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B。

提示：对 $y=\dfrac{\sin x}{\sin x+\cos x}-\dfrac{1}{2}$ 求导，得 $y'=\dfrac{1}{(\sin x+\cos x)^2}$，所以 $y'_{x=\frac{\pi}{4}}=\dfrac{1}{\left(\sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}\right)^2}=\dfrac{1}{2}$，则 $k=\dfrac{1}{2}$。故选 B。

【262】（2008・全国一・4・）

曲线 $y=x^3-2x+4$ 在点 $(1,3)$ 处的切线的倾斜角为（　　）。

A. 30°　　B. 45°　　C. 60°　　D. 120°

【答案】B。

提示：对 $y=x^3-2x+4$ 求导，得 $y'=3x^2-2$，所以 $y'_{x=1}=1$，则 $k=\tan\alpha=1$。又 $\alpha\in[0,\pi)$，所以 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，即 $\alpha=45°$。故选 B。

【263】（2008・辽宁・6・）

设 P 为曲线 C：$y=x^2+2x+3$ 上的点，且曲线 C 在点 P 处切线倾斜角的取值范围为 $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$，则点 P 横坐标的取值范围为（　　）。

A. $\left[-1,-\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $[-1,0]$

C. $[0,1]$　　D. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

【答案】A。

提示：对 $y=x^2+2x+3$ 求导，得 $y'=2x+2$，设 $P(x_0,y_0)$，则 $k=2x_0+2$。又 $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，而 $k=\tan\alpha\in[0,1]$，则 $2x_0+2\in[0,1]$，解得 $x_0\in\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$。故选 A。

【264】（2009·江苏·9·）

在平面直角坐标系 xOy 中，点 P 在曲线 C：$y=x^3-10x+3$ 上，且在第二象限内，已知曲线 C 在点 P 处的切线的斜率为 2，则点 P 的坐标为________。

【答案】$(-2,15)$。

提示：对 $y=x^3-10x+3$ 求导，得 $y'=3x^2-10$，设 $P(x_0,x_0^3-10x_0+3)$，则 $y'_{x=x_0}=3x_0^2-10=2$，解得 $x_0=\pm2$，又点 P 在第二象限，故 $x_0=-2$，则 $x_0^3-10x_0+3=15$，所以 P 点坐标为 $(-2,15)$。

【265】（2007·全国二·8·）

已知曲线 $y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$ 的一条切线的斜率为 $\frac{1}{2}$，则切点的横坐标为（　　）。

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. $\frac{1}{2}$

【答案】A。

提示：对 $y=\frac{x^2}{4}-3\ln x$ 求导，得 $y'=\frac{x}{2}-\frac{3}{x}$，设切点 $P(x_0,y_0)$，由题意得 $y'_{x=x_0}=\frac{x_0}{2}-\frac{3}{x_0}=\frac{1}{2}$，解得 $x_0=3$。

故选 A。

【266】（2018·新课标全国三·14·）

曲线 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线的斜率为 -2，则 $a=$________。

【答案】-3。

提示：对 $y=(ax+1)\mathrm{e}^x$ 求导，得 $y'=(ax+a+1)\mathrm{e}^x$，由题意得 $y'_{x=0}=a+1=-2$，解得 $a=-3$。

【267】（2008·全国二·7·）

设曲线 $y=ax^2$ 在点 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，则 $a=$（　　）。

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -1

【答案】A。

提示：对 $y=ax^2$ 求导得 $y'=2ax$，则 $y'_{x=1}=2a$。又曲线在 $(1,a)$ 处的切线与直线 $2x-y-6=0$ 平行，即 $y'_{x=1}=2a=2$，解得 $a=1$。故选 A。

【268】（2013·广东·12·）

若曲线 $y=ax^2-\ln x$ 在点 $(1,a)$ 处的切线平行于 x 轴，则 $a=$________。

【答案】$\frac{1}{2}$。

提示：对 $y=ax^2-\ln x$ 求导，得 $y'=2ax-\frac{1}{x}$，则 $y'_{x=1}=2a-1$。

又曲线在 $(1,a)$ 处的切线平行于 x 轴，即 $2a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$。

【269】（2008·全国一·7·）

设曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点 $(3,2)$ 处的切线与直线 $ax+y+1=0$ 垂直，则 $a=$（　　）。

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $-\frac{1}{2}$　　D. -2

【答案】D。

提示：对 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 求导，得 $y'=\frac{-2}{(x-1)^2}$，则 $y'_{x=3}=-\frac{1}{2}$，又曲线在 $(3,2)$ 处的切线与 $ax+y+1=0$ 轴垂直，即 $-\frac{1}{2}(-a)=-1$，解得 $a=-2$。故选 D。

【270】（2020·新课标全国三·21.1·）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直，求 b。

【答案】$-\frac{3}{4}$。

提示：对 $f(x)=x^3+bx+c$ 求导，得 $f'(x)=3x^2+b$，则 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}+b$，又曲线在 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直，即 $\frac{3}{4}+b=0$，解得 $b=-\frac{3}{4}$。

【271】（2019·新课标全国三·6·）

已知曲线 $y=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 在点 $(1,a\mathrm{e})$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则（　　）。

A. $a=\mathrm{e},b=-1$　　B. $a=\mathrm{e},b=1$

C. $a=\mathrm{e}^{-1},b=1$　　D. $a=\mathrm{e}^{-1},b=-1$

【答案】D。

提示：对 $f(x)=a\mathrm{e}^x+x\ln x$ 求导，得 $f'(x)=a\mathrm{e}^x+\ln x+1$，由题意得 $f'(1)=2$，即 $a\mathrm{e}=1$，且

$f(1)=ae=b+2$，解得 $a=e^{-1}$，$b=-1$。故选 D。

【272】（2016 · 北京 · 18.1 · ）

设函数 $f(x)=xe^{a-x}+bx$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)\cdot x+4$。求 a，b 的值。

【答案】$a=2$，$b=e$。

提示：对 $f(x)=xe^{a-x}+bx$ 求导，得 $f'(x)=(1-x)\cdot e^{a-x}+b$，由题意知 $f'(2)=-e^{a-2}+b=e-1$，且 $f(2)=2e^{a-2}+2b=2e+2$，解得 $a=2$，$b=e$。

【273】（2014 · 江苏 · 11 · ）

在平面直角坐标系 xOy 中，若曲线 $y=ax^2+\frac{b}{x}$（a，b 为常数）过点 $P(2,-5)$，且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x+2y+3=0$ 平行，则 $a+b$ 的值是________。

【答案】-3。

提示：对 $y=ax^2+\frac{b}{x}$ 求导，得 $y'=2ax-\frac{b}{x^2}$，由题意知曲线过点 $P(2,-5)$ 且在 P 处切线与 $7x+2y+3=0$，则 $y'_{x=2}=4a-\frac{b}{4}=-\frac{7}{2}$，$4a+\frac{b}{2}=-5$。联立解方程组得 $a=-1$，$b=-2$，所以 $a+b=-3$。

类型二：求切线方程

方法：(1) 仔细审题，搞清楚是求在点处的切线，还是求过点的切线，切点处的导数才是切线斜率；

(2) 若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数，若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数；

(3) 若切线过 (m,n)，切点为 (x_0,y_0)，则 $k=f'(x_0)=\frac{y_0-n}{x_0-m}$。

【274】（2018 · 新课标全国二 · 13 · ）

曲线 $y=2\ln x$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程为________________。

【答案】$y=2x-2$。

提示：对 $y=2\ln x$ 求导，得 $y'=\frac{2}{x}$，这是在点处的切线问题，那么给定的点就是切点了，所以 $k=y'_{x=1}=2$，则所求切线为 $y=2(x-1)=2x-2$。

【275】（2017 · 新课标全国一 · 14 · ）

曲线 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程为________________。

【答案】$y=x+1$。

提示：对 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 求导，得 $y'=2x-\frac{1}{x^2}$，还是在点处的切线问题，那么 $(1,2)$ 必是切点，所以 $k=y'_{x=1}=1$，则所求切线为 $y-2=x-1$，即 $y=x+1$。

【276】（2020 · 新课标全国一 · 6 · ）

函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为(　　)。

A. $y=-2x-1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+1$

【答案】B。

提示：对 $f(x)=x^4-2x^3$ 求导，得 $f'(x)=4x^3-6x^2$，这依然是在点处的切线问题，那么给定的点依然是切点，所以 $k=f'(1)=-2$，$f(1)=-1$，则所求切线为 $y-(-1)=-2(x-1)$，即 $y=-2x+1$。故选 B。

【277】（2019 · 天津 · 11 · ）

曲线 $y=\cos x-\frac{x}{2}$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为________________。

【答案】$y=-\frac{1}{2}x+1$。

提示：对 $f(x)=\cos x-\frac{x}{2}$ 求导，得 $f'(x)=-\sin x-\frac{1}{2}$，显然还是在点处切线问题，$(0,1)$ 是切点，所以 $k=y'_{x=0}=-\frac{1}{2}$，则所求切线为 $y-1=-\frac{1}{2}(x-0)$，即 $y=-\frac{1}{2}x+1$。

【278】（2019 · 新课标全国二 · 10 · ）

曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi,-1)$ 处的切线方程为(　　)。

A. $x-y-\pi-1=0$

B. $2x-y-2\pi-1=0$

C. $2x+y-2\pi+1=0$

D. $x+y-\pi+1=0$

【答案】C。

提示：对 $f(x)=2\sin x+\cos x$ 求导，得 $f'(x)=2\cos x-\sin x$，这是在点处切线问题，$(\pi,-1)$ 是切点，所以 $k=y'_{x=\pi}=-2$，则所求切线为 $y-(-1)=-2(x-\pi)$，即 $2x+y-2\pi+1=0$。故选 C。

【279】（2021 · 新课标全国甲 · 13 · ）

曲线 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程

为________。

【答案】$y=5x+2$。

提示：对 $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ 求导，得 $y'=\dfrac{5}{(x+2)^2}$，还是在点处切线问题，$(-1,-3)$ 是切点，所以 $k=y'_{x=-1}=5$，则所求切线为 $y-(-3)=5(x+1)$，即 $y=5x+2$。

【280】（2023·新课标全国甲·8·）

曲线 $y=\dfrac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\dfrac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为（　　）。

A. $y=\dfrac{e}{4}x$　　B. $y=\dfrac{e}{2}x$

C. $y=\dfrac{e}{4}x+\dfrac{e}{4}$　　D. $y=\dfrac{e}{2}x+\dfrac{3e}{4}$

【答案】C。

提示：$y'=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$，$y'_{x=1}=\dfrac{e}{4}$，那么所求切线为 $y-\dfrac{e}{2}=\dfrac{e}{4}(x-1)$，即 $y=\dfrac{e}{4}x+\dfrac{e}{4}$。故选 C。

【281】（2019·新课标全国一·13·）

曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为________。

【答案】$y=3x$。

提示：对 $y=3(x^2+x)e^x$ 求导，得 $y'=(3x^2+9x+3)e^x$，这是在点处切线问题，$(0,0)$ 是切点，所以 $k=y'_{x=0}=3$，则所求切线为 $y=3x$。

【282】（2017·天津·10·）

已知 $a\in\mathbf{R}$，设函数 $f(x)=ax-\ln x$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线为 l，则 l 在 y 轴上的截距为________。

【答案】1。

提示：对 $f(x)=ax-\ln x$ 求导，得 $f'(x)=a-\dfrac{1}{x}$，则 $k=f'(1)=a-1$，而 $f(1)=a$，所以所求切线为 $y-a=(a-1)(x-1)$，即 $y=(a-1)x+1$，故 l 在 y 轴上的截距为 1。

【283】（2012·辽宁·12·）

已知 P,Q 为抛物线 $x^2=2y$ 上两点，点 P,Q 的横坐标分别为 $4,-2$，过 P,Q 分别作抛物线的切线，两切线交于点 A，则点 A 的纵坐标为（　　）。

A. 1　　B. 3　　C. -4　　D. -8

【答案】C。

提示：由题意知抛物线方程为 $y=\dfrac{1}{2}x^2$，对其求导得 $y'=x$，所以 $y'_P=4$，$y'_Q=-2$。又 $x_P=4$，$x_Q=-2$，故 $y_P=8$，$x_Q=2$，所以抛物线在点 P 处的切线为 $y-8=4(x-4)$，即 $y=4x-8$；在点 Q 处的切线为 $y-2=-2(x+2)$，即 $y=-2x-2$。联立两条切线方程解得 $A(1,-4)$，即 $y_A=-4$。故选 C。

【284】（2020·新高考全国一·21.1·）

已知函数 $f(x)=ae^{x-1}-\ln x+\ln a$，当 $a=e$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积。

【答案】$\dfrac{2}{e-1}$。

提示：当 $a=e$ 时，$f(x)=e^x-\ln x+1$，对其求导得 $f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x}$，则 $f'(1)=e-1$，$f(1)=e+1$，则曲线在 $(1,e)$ 处的切线方程为 $y-(e+1)=(e-1)(x-1)$，即 $y=(e-1)x+2$，故该切线与两坐标轴的交点分别为 $\left(\dfrac{2}{1-e},0\right)$，$(0,2)$，所以 $S_\triangle=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{1-e}\right|\times 2=\dfrac{2}{e-1}$。

【285】（2018·新课标全国一·5·）

设函数 $f(x)=x^3+(a-1)x^2+ax$。若 $f(x)$ 为奇函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为（　　）。

A. $y=-2x$　　B. $y=-x$

C. $y=2x$　　D. $y=x$

【答案】D。

提示：由题意知 $f(x)$ 是奇函数，即 $f(-x)+f(x)=2(a-1)x=0$，则 $a=1$。所以，$f(x)=x^3+x$，对 $f(x)=x^3+x$ 求导得 $f'(x)=3x^2+1$，还是个在点处切线问题，$(0,0)$ 是切点，所以 $k=f'(0)=1$，则所求切线为 $y=x$。故选 D。

【286】（2016·新课标全国三·文·16·）

已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=e^{-x-1}-x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,2)$ 处的切线方程是________。

【答案】$y=2x$。

提示：方法一：利用对称性求出 $(0,+\infty)$ 的解析式，再求导得斜率，利用点斜式求出切线方程。

设 $x>0$，则 $-x<0$，所以 $f(-x)=e^{-(-x)-1}-(-x)=e^{x-1}+x$。因为 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)=f(-x)=e^{x-1}+x$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=e^{x-1}+x$，此时 $f'(x)=e^{x-1}+1(x>0)$，故 $f'(1)=2$，则曲线在 $(1,2)$ 处的切线为 $y-2=$

$2(x-1)$，即 $y=2x$。

方法二：在前一节计算中我们提到过：若 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数；若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f'(x)$ 是偶函数。这里再给同学们简证下。

简证：因为 $f(x)$ 是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，对等式两边求导可得 $-f'(-x)=f'(x)$，即 $f'(-x)=-f'(x)$。

若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，对等式两边求导可得 $-f'(-x)=-f'(x)$，即 $f'(-x)=f'(x)$。

因为 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数，则 $f'(1)=-f'(-1)$，而当 $x\leqslant 0$，$f'(x)=-e^{-x-1}-1$，故 $f'(1)=-f'(-1)=2$，则曲线在 $(1,2)$ 处的切线为 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$。

【287】（2016・新课标全国三・理・15・）

已知 $f(x)$ 为偶函数，当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+3x$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程是________。

【答案】 $y=-2x-1$。

提示：方法一：利用对称性求出 $(0,+\infty)$ 的解析式，再求导得斜率，利用点斜式求出切线方程。

设 $x>0$，则 $-x<0$，所以 $f(-x)=\ln[-(-x)]+3(-x)=\ln x-3x$。因为 $f(x)$ 是偶函数，故 $f(x)=f(-x)=\ln x-3x$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)=\ln x-3x$，此时 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-3(x>0)$，故 $f'(1)=-2$，则曲线在 $(1,-3)$ 处的切线为 $y-(-3)=-2(x-1)$，即 $y=-2x-1$。

方法二：因为 $f(x)$ 是偶函数，则 $f'(x)$ 是奇函数，则 $f'(1)=-f'(-1)$，而当 $x<0$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+3$，故 $f'(1)=-f'(-1)=-2$，则曲线在 $(1,2)$ 处的切线为 $y-(-3)=-2(x-1)$，即 $y=-2x-1$。

【288】（2020・新课标全国一・15・）

曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2，则该切线的方程为________。

【答案】 $y=2x$。

提示：对 $f(x)=\ln x+x+1$ 求导，得 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+1$，设切点 $P(x_0,f(x_0))$，由题意知 $k=f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0}+1=2$，解得 $x_0=1$，则切点 P 为 $(1,2)$。所以，斜率为 2 的切线为 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$。

【289】（2022・新高考全国二・14・）

曲线 $y=\ln|x|$ 的过原点的两条切线为________，________。

【答案】 $y=\dfrac{x}{e}$，$y=-\dfrac{x}{e}$。

提示：当 $x>0$ 时，$y=\ln x$，$y'=\dfrac{1}{x}$，设切点 $P(x_1,\ln x_1)$，$O(0,0)$，所以 $y'_{x=x_1}=\dfrac{1}{x_1}=\dfrac{\ln x_1}{x_1}=k_{OP}$，解得 $x_1=e$，所以切点 $P(e,1)$，$y'_{x=e}=\dfrac{1}{e}$，切线为 $y=\dfrac{x}{e}$。

当 $x<0$ 时，$y=\ln(-x)$，$y'=\dfrac{1}{x}$，设切点 $Q(x_2,\ln(-x_2))$，$O(0,0)$，所以 $y'_{x=x_2}=\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{\ln(-x_2)}{x_2}=k_{OQ}$，解得 $x_2=-e$，所以切点 $P(-e,1)$，$y'_{x=e}=-\dfrac{1}{e}$，切线为 $y=-\dfrac{x}{e}$。

注意：因为 $y=\ln|x|$ 是偶函数，所以其过原点的两条切线也关于 y 轴对称，即两切线斜率互为相反数。

【290】（2022・新高考全国一・15・）

若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________。

【答案】 $(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$。

提示：$y'=(x+a+1)e^x$，设切点 $P(x_0,(x_0+a)e^{x_0})$，则 $y'_{x=x_0}=(x_0+a+1)e^{x_0}=\dfrac{(x_0+a)e^{x_0}}{x_0}=k_{OP}$，即 $x_0{}^2+ax_0-a=0$。因为 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，所以 $x_0{}^2+ax_0-a=0$ 有两个不等实根，则需 $\Delta=a^2+4a>0$，解得 $a>0$ 或 $a<-4$，故 $a\in(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$。

3.3 单调性与最值

核心笔记

已知 $f(x)$ 在 $x\in D$ 上可导，若 $f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $x\in D$ 上单调递增；若 $f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在 $x\in D$ 上单调递减。

类型一：利用导数求函数的单调区间

方法：在定义域上求得导数为正的区间即为函数的增区间，导数为负的区间即为函数的减区间。

【291】（2011·江西·4·）

若 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$，则 $f'(x)>0$ 的解集为（　　）。

A. $(0,+\infty)$　　B. $(-1,0)\cup(2,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-1,0)$

【答案】 C。

提示：对函数 $f(x)=x^2-2x-4\ln x$ 求导，得 $f'(x)=2x-2-\dfrac{4}{x}=\dfrac{2(x-2)(x+1)}{x}(x>0)$，令 $f'(x)>0$，即 $(x-2)(x+1)>0$，由定义域得 $x>0$，解得 $x>2$，所以 $f'(x)>0$ 得解集为 $(2,+\infty)$。故选 C。

【292】（2005·广东·6·）

函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 是减函数的区间为（　　）。

A. $(2,+\infty)$　　B. $(-\infty,2)$

C. $(-\infty,0)$　　D. $(0,2)$

【答案】 D。

提示：对函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 求导，得 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)(x\in\mathbf{R})$，令 $f'(x)<0$，即 $3x(x-2)<0$，得 $0<x<2$，故 $f(x)$ 的减区间为 $(0,2)$。故选 D。

【293】（2015·天津·20.1·）

已知函数 $f(x)=4x-x^4$，$x\in\mathbf{R}$，求 $f(x)$ 的单调区间。

【答案】 增区间为 $(-\infty,1)$，减区间为 $(1,+\infty)$。

提示：对函数 $f(x)=4x-x^4$ 求导，得 $f'(x)=4-4x^3=4(1-x)(1+x+x^2)(x\in\mathbf{R})$，其中 $1+x+x^2=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$，令 $f'(x)>0$，即 $1-x>0$，解得 $x<1$；令 $f'(x)<0$，即 $1-x<0$，解得 $x>1$。

所以 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty,1)$，减区间为 $(1,+\infty)$。

【294】（2012·辽宁·8·）

函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ 的单调递减区间为（　　）。

A. $(-1,1]$　　B. $(0,1)$

C. $[1,+\infty)$　　D. $(0,+\infty)$

【答案】 B。

提示：对函数 $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$ 求导，得 $y'=x-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x^2-1}{x}(x>0)$，令 $y'<0$ 得 $x^2-1<0$，且定义域 $x>0$，经计算得 $0<x<1$，所以函数的单调递减区间为 $(0,1)$。故选 B。

这里需要特别提醒同学们注意两个重要问题：

① 定义域很重要，解决函数问题始终是先求定义域，函数的一切性质变化都在定义域上，导数同样如此，只研究导数在定义域上的正负，所以通过求解导数正负后的范围记得要跟定义域取交集；

② 对于单调性而言，通过导数等于0所得的区间端点通常可取也可不取，因为这样的点不影响单调性。

【295】（2007·广东·12·）

函数 $f(x)=x\ln x(x>0)$ 的单调递增区间是__________。

【答案】 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$。

提示：对函数 $f(x)=x\ln x$ 求导，得 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$，令 $f'(x)>0$ 得 $\ln x>-1$，且定义域 $x>0$，经计算得 $x>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，所以该函数的单调递增区间为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$。

【296】（2009·广东·8·）

函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^x$ 的单调递增区间是（　　）。

A. $(-\infty,2)$　　B. $(0,3)$

C. $(1,4)$　　D. $(2,+\infty)$

【答案】 D。

提示：对函数 $f(x)=(x-3)\mathrm{e}^x$ 求导，得 $f'(x)=(x-2)\mathrm{e}^x(x\in\mathbf{R})$，令 $f'(x)>0$，得 $(x-2)\mathrm{e}^x>0$，而 $\mathrm{e}^x>0$ 恒成立，经计算得 $x>2$，所以该函数的单调递增区间为 $(2,+\infty)$。故选 D。

【297】（2020·新课标全国一·文·20.1·）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-a(x+2)$。当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性。

【答案】 减区间为 $(-\infty,0)$，增区间为 $(0,+\infty)$。

提示：由题意知 $f(x)=\mathrm{e}^x-(x+2)$，求导得 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1(x\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 单调递增且 $f'(0)=0$。

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

【298】（2020·新课标全国一·理·21.1·）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+ax^2-x$，当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性。

【答案】 减区间为 $(-\infty,0)$，增区间为 $(0,+\infty)$。

提示：由题意知 $f(x)=e^x+x^2-x$，求导得 $f'(x)=e^x+2x-1(x\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 单调递增且 $f'(0)=0$。

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

【299】（**2021·新高考全国一·22.1·**）

已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$，讨论 $f(x)$ 的单调性。

【答案】 增区间为 $(0,1)$，减区间为 $(1,+\infty)$。

提示：对函数 $f(x)=x(1-\ln x)$ 求导，得 $f'(x)=-\ln x\ (x>0)$，$f'(x)$ 单调递减且 $f'(1)=0$。

所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

【300】（**2021·新课标全国甲·21.1·**）

已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\dfrac{x^a}{a^x}(x>0)$。当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间。

【答案】 增区间为 $\left(0,\dfrac{2}{\ln2}\right)$，减区间为 $\left(\dfrac{2}{\ln2},+\infty\right)$。

提示：由题意知 $f(x)=\dfrac{x^2}{2^x}$，求导得 $f'(x)=\dfrac{x\cdot2^x(2-x\ln2)}{4^x}(x>0)$，其中 $\dfrac{x\cdot2^x}{4^x}>0$。

令 $f'(x)>0$，即 $2-x\ln2>0$，解得 $0<x<\dfrac{2}{\ln2}$；令 $f'(x)<0$，即 $2-x\ln2<0$，解得 $x>\dfrac{2}{\ln2}$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{2}{\ln2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\dfrac{2}{\ln2},+\infty\right)$ 上单调递减。

【301】（**2019·天津·理·20.1·**）

设函数 $f(x)=e^x\cos x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数，求 $f(x)$ 的单调区间。

【答案】 增区间为 $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$（其中 $k\in\mathbf{Z}$），减区间为 $\left(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$（其中 $k\in\mathbf{Z}$）。

提示：由题意得 $f'(x)=e^x(\cos x-\sin x)=e^x\cdot\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$，其中 $e^x>0$ 恒成立。

令 $f'(x)>0$，即 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)>0$，解得 $-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi<x<\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$（其中 $k\in\mathbf{Z}$），令 $f'(x)<0$，即 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，解得 $\dfrac{\pi}{4}+2k\pi<x<\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$（其中 $k\in\mathbf{Z}$），故 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{3\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\right)$（其中 $k\in\mathbf{Z}$）上单调递增，在 $\left(\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$（其中 $k\in\mathbf{Z}$）上单调递减。

【302】（**2019·天津·文·20.1·**）

设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$。若 $a\leqslant0$，讨论 $f(x)$ 的单调性。

【答案】 见提示。

提示：由题意知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-axe^x(x>0)$，因为 $x>0$，$e^x>0$，$a\leqslant0$，$\dfrac{1}{x}>0$，$-a\geqslant0$，$xe^x>0$，$-axe^x\geqslant0$，进而 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-axe^x>0$，所以若 $a\leqslant0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

【303】（**2011·天津·19.1·**）

已知 $a>0$，函数 $f(x)=\ln x-ax^2$，$x>0$（$f(x)$ 的图像连续不断），求 $f(x)$ 的单调区间。

【答案】 增区间为 $\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$，减区间为 $\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$。

提示：由题意知 $f'(x)=\dfrac{1}{x}-2ax(x>0)$，因为 $a>0$，则 $y=\dfrac{1}{x}$ 与 $y=-2ax$ 都是单调递减的，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{\dfrac{1}{2a}}$。所以当 $x\in\left(0,\sqrt{\dfrac{1}{2a}}\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(\sqrt{\dfrac{1}{2a}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

【304】（**2011·浙江·21.1·**）

设函数 $f(x)=a^2\ln x-x^2+ax$，$a>0$，求 $f(x)$ 的单调区间。

【答案】 增区间为 $(0,a)$，减区间为 $(a,+\infty)$。

提示：由题意知 $f'(x)=\dfrac{a^2}{x}-2x+a(x>0)$，因为 $y=\dfrac{a^2}{x}$ 与 $y=-2x+a$ 都是单调递减的，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，令 $f'(x)=0$，解得

$x=a>0$。所以当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

类型二：利用导数求函数的最值

方法：利用导数求得函数的单调区间，在指定范围上结合函数单调性进一步确定函数最值。

【305】（2006·浙江·6·）

$f(x)=x^3-3x^2+2$ 在区间$[-1,1]$上的最大值是（　　）。

A. -2　　B. 0　　C. 2　　D. 4

【答案】 C。

提示：对函数 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 求导，得 $f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)(-1\leqslant x\leqslant 1)$，令 $f'(x)<0$，即 $3x(x-2)<0$，解得 $0<x\leqslant 1$；令 $f'(x)>0$，即 $3x(x-2)>0$，解得 $-1\leqslant x<0$。所以 $f(x)$ 的减区间为$(0,1]$，增区间为$[-1,0)$，则 $f(x)_{\max}=f(0)=2$。故选 C。

【306】（2007·湖南·13·）

函数 $f(x)=12x-x^3$ 在区间$[-3,3]$上的最小值是________。

【答案】 -16。

提示：对函数 $f(x)=12x-x^3$ 求导，得 $f'(x)=12-3x^2=3(2+x)(2-x)(-3\leqslant x\leqslant 3)$。令 $f'(x)<0$，即 $3(2+x)(2-x)<0$，解得 $-3\leqslant x<-2$ 或 $2<x\leqslant 3$，所以 $f(x)$ 的减区间为$[-3,-2)$和$(2,3]$；

令 $f'(x)>0$，即 $3(2+x)(2-x)>0$，解得 $-2<x<2$，所以 $f(x)$ 的增区间为$(-2,2)$。因此，$f(x)_{\min}=\min\{f(-2),f(3)\}=\min\{-16,9\}=-16$。

【307】（2007·江苏·13·）

已知函数 $f(x)=x^3-12x+8$ 在区间$[-3,3]$上的最大值与最小值分别为 M，m，则 $M-m=$________。

【答案】 32。

提示：对函数 $f(x)=x^3-12x+8$ 求导，得 $f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)(-3\leqslant x\leqslant 3)$。

令 $f'(x)<0$，即 $3(x+2)(x-2)<0$，解得 $-2<x<2$，所以 $f(x)$ 的减区间为$(-2,2)$。

令 $f'(x)>0$，即 $3(x+2)(x-2)>0$，解得 $-3\leqslant x<-2$ 或 $2<x\leqslant 3$，所以 $f(x)$ 的增区间为$[-3,-2)$和$(2,3]$。

所以，$m=f(x)_{\min}=\min\{f(-3),f(2)\}=\min\{17,-8\}=-8$，$M=f(x)_{\max}=\max\{f(-2),f(3)\}=\max\{24,-1\}=24$，故 $M-m=24-(-8)=32$。

【308】（2020·新课标全国二·21.1·）

已知函数 $f(x)=2\ln x+1$。若 $f(x)\leqslant 2x+c$，求 c 的取值范围。

【答案】 $[-1,+\infty)$。

提示：由题意知 $f(x)=2\ln x+1\leqslant 2x+c$，即 $2\ln x-2x+1\leqslant c$，令 $g(x)=2\ln x-2x+1$，即 $g(x)_{\max}\leqslant c\ (x>0)$ $g'(x)=\dfrac{2}{x}-2$，$g'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $g'(1)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x\in(1,+\infty)$ 时 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减。

因此，$g(x)_{\max}=g(1)=-1$，则 $c\geqslant -1$，即 $c\in[-1,+\infty)$。

【309】（2018·新课标全国三·21.1·）

已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$，若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$。

【答案】 见提示。

提示：若 $a=1$，则 $f(x)=e^x-x^2$，而 $f(x)\geqslant 1$。通过调整结构使得 e^x 能和别的代数式相乘或相除，达到一次求导可解决导数正负的目的。即证 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}\leqslant 1$，则需 $g(x)_{\max}\leqslant 1$，而 $g'(x)=\dfrac{2x-(x^2+1)}{e^x}=\dfrac{-(x-1)^2}{e^x}\leqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，因此 $g(x)_{\max}=g(0)=1$。

所以 $g(x)=\dfrac{x^2+1}{e^x}\leqslant 1$，即当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$。

【310】（2016·北京·14·）

设函数 $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant a,\\ -2x, & x>a。\end{cases}$

(1) 若 $a=0$，则 $f(x)$ 的最大值为________；

(2) 若 $f(x)$ 无最大值，则实数 a 的取值范围是____________。

【答案】 (1)2；(2)$(-\infty,-1)$。

提示：(1) 当 $a=0$ 时，$f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x\leqslant 0,\\ -2x, & x>0。\end{cases}$

当 $x\leqslant 0$ 时，$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，则当 $x\in(-\infty,-1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在$(-\infty,-1)$上单调递增，在$(-1,0)$上单调递减。又当 $x>0$ 时，$f(x)$ 单调递减，且 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以