

“生成一切”背后的数学原理

雷娜¹ 顾险峰²

(¹大连理工大学; ²纽约州立大学石溪分校)

2023年上半年,科技领域的主旋律是AIGC,ChatGPT和Diffusion模型正在颠覆着学术领域与商业领域的范式。基于大模型的自然语言、图像、视频、音频等模态的生成技术日益成熟,下一步自然是3D生成。这里,我们力图分析图像和3D曲面生成模型背后的数学原理,以及潜在的工程挑战。

数学领域的氛围比较谦逊低调,很多数学家皓首穷经、呕心沥血所写的专著往往命名为《某领域入门》《某领域导引》;而计算机科学界与商业紧密联系,计算机科学家们所发的论文标题非常霸气,例如近期爆火的“Attention is All You Need”^[1]，“Segment Anything”^[2],俾睨天下,舍我其谁!这里,我们用基础数学理论来分析一下,为了“Generate Anything”,究竟哪些数学理论工具是“All You Need”。

1 传统图像处理方法

在计算机视觉和图像处理领域中,图像分割一直是经典的核心问题之一。图像分割的目的在于将图像中的物体和背景分割开来。早期基于滤波方法进行边缘检测,提取轮廓线^[3-4]。滤波方法只用到每个像素的邻域信息,缺乏全局观念。

1.1 变分方法

Mumford-Shah^[5]基于全局观点,提出能量优化方法进行图像分割。令 Ω 为一幅图像的定义域,图像的灰度值为函数 $g:\Omega\rightarrow[0,1]$,图像分割就是将 Ω 分解成不交并

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \dots \cup \Omega_n \cup K, K = \Omega \cap (\partial\Omega_1 \cup \dots \cup \partial\Omega_n)$$

使得 g 在每一个 Ω_i 内部光滑变化, g 在不同区域的边界 K 处间断。图像分割等价于寻求

一个分片光滑函数 $u: \Omega \rightarrow R$ ，使得下面的 Mumford-Shah 能量达到极小：

$$E(u, K) := \mu^2 \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 + \nu |K|$$

这种方法将图像分割归结为能量变分问题，传统的偏微分方程理论可以被借鉴过来，从而发展出了水平集（level-set）方法^[6-8]。

1.2 马尔可夫随机场

另外一种马尔可夫随机场^[9]观点来自统计物理。我们将图像视为二维格子，每个像素代表一个格点。每个像素赋予一个标识，0 代表背景，1 代表前景，这个标识可以被看成是二值的随机变量。所有像素的随机变量构成一个马尔可夫随机场 ω ，每个随机场被赋予一个能量。与物理中相变的 Ising 模型^[10]类似，整体能量分解成每个像素灰度与前景、背景灰度的距离，每两个相邻像素标号间的距离^[11]为

$$E(\omega) = \sum_i c_i \omega_i + \sum_{i,j} d_{ij} |\omega_i - \omega_j|$$

如果能量是 submodular（某种凸性的离散推广），那么 Markov 随机场的优化问题等价于传统图论中的最大流与最小割问题^[12]。这样我们将连续函数变分转化为离散随机场变分。这两种方法都是将一张图像视为一个整体，而非只囿于每个像素的邻域，从而求得整体最优解。

2 图像生成算法

2.1 图像空间

深度学习方法进一步扩展了研究视野，它将一张图像视为一个点，而将所有的（同类）图像视为一个整体进行研究，从而更加接近人脑的计算模式。首先，一张 $n \times n$ 的彩色图片可以看成是一个 $3n^2$ 维的向量，所有可能的图像集合构成所谓的图像空间，

$$I := \{x \in R^{3n^2} : 0 \leq x_i \leq 1\}$$

I 中的任意一个点都是一张图像，但是绝大多数是随机噪声图像，对于人类而言没有太大意义。人脑中的每个自然概念，比如人脸的概念，对应着图像空间中的一个稠密点云，这个点云集中在某个子流形 $S \subset I$ 附近。同时人脸图像数据在这个子流形上的分布并不均匀，这个子流形上的概率分布 μ 也具有根本的重要性。例如，自然界中几乎所有人的双瞳都是同样颜色的，具有异色双瞳的人脸的确存在，但是测度为零。深度学习的核心

任务^[14]就是学习不同概念对应的数据流形结构 S ，以及其上面的数据测度分布 μ ，如图 1 所示。

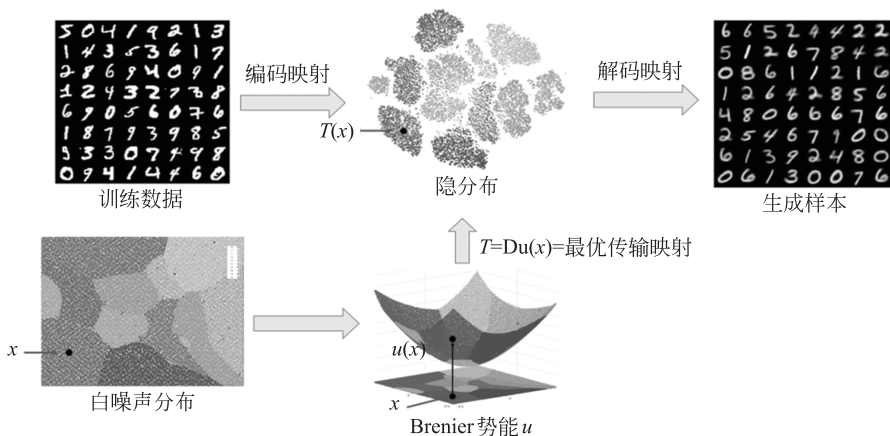


图 1 图像生成模型的框图^[13]

2.2 稠密采样

那么，实际上如何来获取这个子流形 S 的信息呢？自然是通过离散采样，即通过从 Internet 上收集人脸图像，我们得到了 S 上的大量的采样点 $P := \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ 。我们可以计算点集 P 在 R^{3n} 中的 Delaunay 三角剖分，得到一个分片线性的多面体流形 \underline{S} ^[15]。根据几何逼近理论，如果任意两个样本的距离大于 δ ，而流形 S 上任意一个半径为 ε 的测地球内，都至少有一个采样点，这样的采样被称为 (δ, ε) 采样。如果 P_n 是一系列 $(\delta_n, \varepsilon_n)$ 采样，那么在不同度量的意义下，多面体流形 \underline{S}_n 会收敛到初始流形 S 上。这里的收敛包括拓扑收敛、Hausdorff 距离收敛、黎曼度量收敛、曲率收敛、Laplace-Beltrami 算子收敛^[16] 等。当然，目前的深度学习算法还没有达到如此理论严谨的程度，相信随着学科的成熟，这些收敛性会被逐步验证。这里涉及一个具有争议的问题：图像空间 I 是自然的，它包括所有可能的 $n \times n$ 彩色图像。但是从中挑选出有意义的采样 P 需要艺术家艰苦的创作，如此得到的数据流形 S 的知识产权如何归属，目前全社会并没有达成共识。

2.3 数据流形

假设我们得到了数据流形的良好逼近，那么如何学习并表达流形的结构呢？经典流形理论中自然是建立局部坐标系，得到图册，即寻找一组开集覆盖整个流形， $S = \cup_{\alpha} U_{\alpha}$ ，然后将每个开集 U_{α} 映射到参数域 R^m 的一个开集 Ω_{α} 上， $\varphi_{\alpha}: U_{\alpha} \rightarrow \Omega_{\alpha}$ 是拓扑同胚。 $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$ 被称为一个局部坐标系。对于 $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$ 的区域，存在局部坐标变换 $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1}$ 。

在深度学习中， Ω_α 被称为隐空间，或者特征空间， φ_α 编码映射。编码映射将一幅图像 $x \in U_\alpha$ 编码到其特征向量，即隐变量 $\varphi_\alpha(x)$ 。从特征恢复原来图像的映射 $\varphi^{-1} : \Omega_\alpha \rightarrow U_\alpha$ 被称为解码映射。编码、解码映射由自动编码器（auto-encoder）、变分自动编码器^[17]等来计算，目前有很多算法计算类似映射，例如 t-SNE^[18]，UMap^[19]等。当然，目前研究局部坐标变换 $\varphi_{\alpha\beta}$ 的算法不多，核心原因在于目前的研究还没有涉及数据流形 S 本身的全局拓扑性质，只关注局部数据生成。

这种整体数据流形的观点为图像压缩带来了范式改变。传统的图像压缩统计一幅图像内部像素灰度值的分布，用 Huffman 编码，用较少的比特来编码密度大的灰度，从而达到压缩效果；或者用 Fourier 变换，将时域信号变换到频域信号，通过低通滤波去掉高频分量，而高频分量往往对应于图像噪声。应用数据流形观点，每幅图像是同类数据流形中的一个点 $x \in S$ ，我们只需要记录其特征向量 $\varphi_\alpha(x)$ 即可，恢复原来图像等价于用解码映射作用： $\varphi_\alpha^{-1}(\varphi_\alpha(x)) = x$ 。换言之，整个同类图像的先验知识都包含在编码 φ_α 、解码映射 φ_α^{-1} ，而这些映射被深度神经网络所万有逼近。因此，图像解压器包括解码映射对应的深度网络，从图像特征向量恢复原始图像，这样就跳出了传统的图像压缩的理论框架。

2.4 数据分布

更进一步，如果我们也学会了图像流形上的分布 μ ，那么，也可以随机生成同类图像。所谓“生成”，就是凭空想象，无中生有。在深度学习中，就是用计算机在单位球 D 内部产生一个伪随机采样点 y ，可以被视为在隐空间随机采样或者随机噪声，采样密度通常是均匀分布，或者高斯分布 ν ，然后将这个随机噪声变换成 Ω_α 中的一点 $g_\alpha(y)$ ，这里传输变换 $g_\alpha : (D, \nu) \rightarrow (\Omega_\alpha, \varphi_\alpha \# \mu)$ 将高斯分布变成了隐空间中的数据分布 $\varphi_\alpha \# \mu$ ，通过解码 $\varphi_\alpha^{-1}(g_\alpha(y))$ 就得到数据流形 S 上的一点，同时计算机生成的随机噪声分布被映射成数据流形上的初始分布 μ 。由此可见，数据分布 μ 被传输映射 g_α 和已知的高斯分布所隐含地表达，而 g_α 最终由某个深度神经网络来逼近（图 2）。

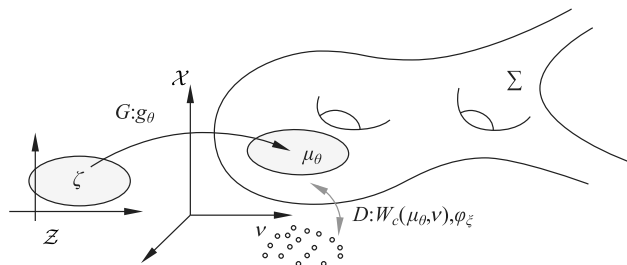


图2 WGAN 模型的解释，判别器 D 计算数据分布与生成分布之间的 Wasserstein 距离，生成器 G 计算从白噪声到生成分布之间的传输映射

2.5 最优传输

这里的关键是传输变换的计算，最优传输理论^[20-22]为此奠定了坚实的理论基础。假设给定两个带测度的欧氏区域 (Ω, μ) 和 (Ω^*, ν) ，密度函数分别为 $d\mu(x) = f(x)dx$ 和 $d\nu(y) = g(y)dy$ 。我们可以将测度看成是某种化学试剂的浓度。一个映射 $T: \Omega \rightarrow \Omega^*$ 是保持测度不变的，就是说映射 f 将液体的容器形状从 Ω 变成 Ω^* ， x 点映射到了 $y = T(x)$ 点，并且这种变换保持质量，将浓度从 $f(x)dx$ 变成了 $g(y)dy$ ，从而满足 Jacobian 方程：

$$f(x)dx = g(y)dy \Rightarrow \det DT(x) = \frac{f(x)}{g \cdot T(x)}$$

即映射的 Jacobi 行列式值等于对应点密度之比。保测度的映射记为 $T_{\#}\mu = \nu$ 。假设给定传输单位质量的代价函数 $c: \Omega \times \Omega^* \rightarrow R$ ，Monge 提出了最优传输问题，即在所有保测度的映射中，求总传输代价最小者：

$$\min_{T_{\#}\mu = \nu} \int_{\Omega} c(x, T(x)) d\mu(x)$$

最优传输映射的总传输代价被定义为测度 μ 和 ν 之间的 Wasserstein 距离。Wasserstein 距离在深度学习中用于测量两个测度之间的差异程度，应用于 WGAN 等生成模型^[23]之中。如果传输代价为欧氏距离的二次方 $c(x, y) = 1/2 |x - y|^2$ ，Brenier 定理断言存在一个定义在 Ω 上的凸函数 $u: \Omega \rightarrow R$ ，称为 Brenier 势能函数，其梯度映射为最优传输映射 $T = \nabla u$ (图 3)，这时由 Jacobian 方程，得到 Monge-Ampere 方程：

$$\det D^2 u(x) = \frac{f(x)}{g \cdot \nabla u(x)}$$

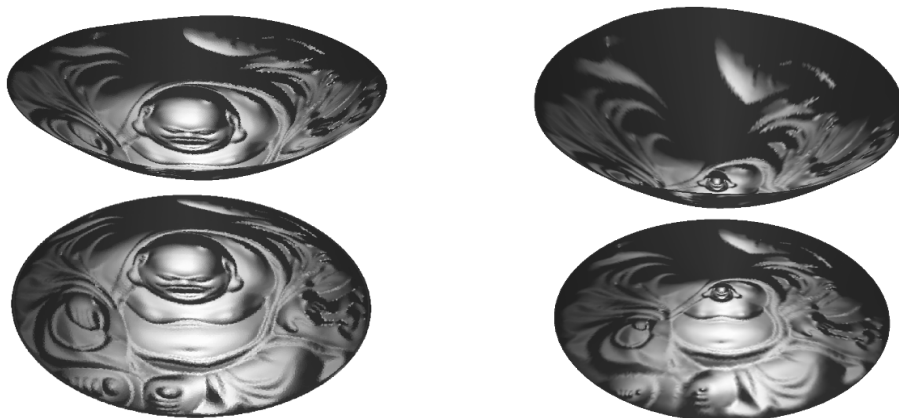


图 3 Brenier 定理：最优传输映射等于 Brenier 势能的梯度映射

满足自然边界条件 $\nabla u(\Omega) = \Omega^*$ 。强烈非线性的 Monge-Ampere 方程经常出现在凸微分几何中, 例如通过高斯曲率来重建凸曲面。我们可以应用几何变分方法来求解 Monge-Ampere 方程^[15,24]。最优传输问题本身计算复杂度较高, 如果 $\Omega = \Omega^*$, 传输问题可以转化成流场问题。假设给定 Ω 上的时变流场 $v(p,t)$, 每个粒子的轨迹由常微分方程给出 $\partial_t \gamma(p,t) = v(p,t)$, 起点为 $\gamma(p,0) = p$ 。由此得到单参数族同胚 $\varphi_t(p) = \gamma(p,t)$ 。我们希望设计流场, 将 μ 变换成 ν , 同时流场的总动能

$$\int_0^1 \int_{\Omega} |v(p,t)|^2 dp dt$$

达到极小, 这时所得的 φ_1 就是 L^2 距离下的最优传输映射。这种通过设计流场而计算传输映射的生成模型就是深度学习中的流模型^[25]。

2.6 熵流-热扩散

如果设计一个流场, 使得密度函数的熵尽快增大, 这时所得的流被称为熵流, 系统的演化过程被称为热力学扩散过程, 密度函数满足常微分方程:

$$\partial_t f(p,t) = \Delta_p f(p,t)$$

如果限定密度函数的期望值和方差, 则当时间趋向无穷的时候, 目标测度 ν 是正态分布(高斯分布)。这时, 每个粒子的轨迹 $\gamma(p,t)$ 是布朗运动(随机行走)。因此, 如果能够模拟布朗运动, 就可以计算热扩散, 而不需要显式地表达密度函数。根据郎之万动力学, 一个粒子在当前的点 p 处, p 是一幅图像, 粒子在作布朗运动, 下一步 δt 后, 粒子的位置为 $p + \delta p$, 这里 δp 是一幅高斯噪声图像, 满足正态分布, 期望值为 0 , 方差为 δt 。因此, 我们通过不停地添加噪声, 就可以从任意一点 $p \in S$ (一幅人脸图像) 出发, 通过模拟布朗运动, 求得扩散后的像 $\varphi_{\infty}(p)$ (噪声图像)。在整个扩散过程中, 熵值单调递增。这时, 生成图像过程等价于任意采样图像空间 I , 得到一幅噪声图像 $q \in I$, 采样概率为正态分布, $\varphi_{\infty}^{-1}(q) \in S$ 即为生成的人脸图像。Diffusion 模型^[26-27]的优点在于省略了编码、解码步骤, 减小了生成图像的失真, 缺点在于这同时也增加了计算复杂度, 同时热扩散的逆映射 φ_{∞}^{-1} 计算困难。如果目标测度并非正态分布, 则热扩散方法并不适用。

3 3D 曲面生成算法

当我们将图像的生成模型推广到 3D 曲面的生成模型时, 所有的概念和算法都可以直接推广, 图像空间推广为形状空间, 数据流形, 数据分布, 隐空间, 编码、解码映射,

隐空间分布，白噪声，传输映射。这里具有本质困难的是形状空间。

一种简单粗暴的形状空间构造方式就是考虑所有单位立方体内的实体，实体表达成 Lego 积木，即表示成 n^3 个体素^[28]，每个体素的标号为 1 或者 0，所有标号为 1 的体素并集代表实体。这种表达方式与人类认知模型相差甚远。人类只能通过视觉获取物体表面信息，而对于实体内部无法直接感知。并且这种方式表达的形状，很多时候过于零碎，同样的表面内部体结构可以非常不同，从而表达方式并不唯一。

另外一种更接近现代拓扑几何的方式，更加简洁严密。首先，考虑所有物理世界中的曲面 S ， S 嵌入三维欧氏空间中，具有诱导的欧氏度量 g 。然后，将所有的这种曲面依据拓扑进行分类，每张曲面的拓扑不变量最终归结为可定向性、亏格（环柄数目）和边界数目，记为 (o, g, b) 。接下来，将拓扑相同的曲面根据共形结构分类^[29]：一张拓扑曲面 S 上的两个黎曼度量 g_1 与 g_2 共形等价，当且仅当存在一个函数 $\lambda: S \rightarrow R$ ，使得 $g_2 = e^{2\lambda} g_1$ 。依据单值化定理，在每个共形等价类中，存在一个黎曼度量 \hat{g} ，诱导常值高斯曲率 K （图 4）。如果亏格为 $g=0$ ， $g=1$ 或者 $g>1$ ，则相应的曲率 K 等于 $+1$ ， 0 或者 -1 。这时曲面 S 为单位球面 S^2 、欧氏平面 E^2 和双曲平面 H^2 的商空间。假设封闭曲面 (S, g) 的亏格 $g>1$ ，其基本群为

$$\pi_1(S, g) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \prod_i [a_i, b_i] \rangle$$

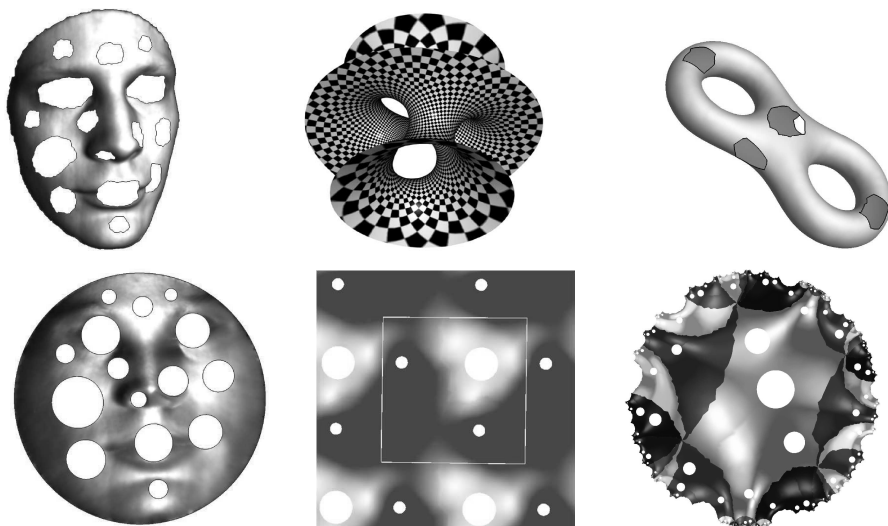


图 4 曲面单值化

其单值化度量为双曲度量 $\hat{g} = e^{2\lambda} g$ ，其万有覆盖空间的覆盖变换群（Fuchs 群）为

$$\text{Fuchs}(S) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g \mid \Pi_i[\alpha_i, \beta_i] \rangle$$

这里 α_i, β_i 是莫比乌斯变换，可以表示成矩阵 $SL(2, R)$ ，因此为了表示 $\text{Fuchs}(S)$ ，我们需要 $6g - 6$ 个实参数。曲面的共形结构可以描绘成双曲基本多边形 $\Omega := H^2 / \text{Fuchs}(S)$ 。更进一步，曲面 (S, g) 的黎曼度量可以由共形因子 $\lambda: \Omega \rightarrow R$ 来表示， $g = e^{-2\lambda} \hat{g}$ 。如果再规定曲面的平均曲率 $H: \Omega \rightarrow R$ ，那么曲面的形状可以被确定下来（彼此相差一个欧氏刚体变换）。平均曲率和共形因子满足所谓的 Gauss-Codezzi 方程。这意味着曲面的所有信息可以表示为

$$S := \{ \lambda, \text{Hsatisfy Gauss - Codazzi} \}$$

(o, g, b) 规定了曲面的拓扑、Fuchs 曲面的共形结构、 λ 曲面的黎曼度量、 H 曲面在欧氏空间中的嵌入。 S 是所有曲面构成的形状空间。

物理世界的曲面可以通过 3D 扫描技术获取，工业中的几何构型可以由 CAD 软件手工设计。将 (S, g) 转换成形状空间的表示已经有理论严密的计算方法。首先通过持续同调的算法^[30]，求取亏格 g 与边界数目 b ，以及基本群的典范表示

$$\pi_1(S, q) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \Pi_i[a_i, b_i] \rangle$$

然后应用曲面 Ricci 流算法^[31]，计算单值化度量

$$\partial_t g(p, t) = \frac{2\pi\chi(S)}{A(0)} - K(p, t)$$

这里 $A(0)$ 是曲面初始时刻的总面积， $\chi(S)$ 是曲面的欧拉示性数，由此得到共形因子 λ 。根据单值化度量和曲面基本群，我们将基本群基底提升到万有覆盖空间，同伦变换成双曲测地线，得到 Fuchs 群和基本多边形。曲面的平均曲率可以由微分几何方法求得。得到形状空间之后，可以仿照图像生成模型来生成所有可能的曲面。

4 未来展望

虽然 3D 生成模型理论上比较清晰，但是真正实现依然有很多挑战。首先，我们需要庞大的 3D 曲面训练集。一般头部的游戏公司、CAD 公司、生物测量可能有多年的储备，可以提供高质量的 3D 数据训练集。其次，3D 数据需要进行前期处理，去除非流形的组合结构和各种拓扑、几何噪声。曲面 Ricci 流强烈非线性，同时双曲 Ricci 流形需要较高的数值精度，目前 GPU 只能支撑浮点数运算，数值精度尚达不到要求。

目前来看，Metaverse 市场对虚拟人需求比较高涨，3D 人脸曲面和人体曲面的生成模型应该没有实质性的技术困难。随着 3D 扫描、生物测量和社会安全技术的普及，大规模 3D 人脸数据集比较容易收集（图 5）。人脸拓扑相对简单，Ricci 流不需要用到双曲几何，因此生成模型将会很快普及。而通用 3D 形状大模型则需要更长时间的发展，有可能在游戏动漫领域首先取得突破。



图 5 3D 人脸曲面生成，人脸曲面由平面上的共形因子和平均曲率函数所决定

参考文献

- [1] Vaswani A, Shazeer N, Parmar N, et al. Attention is all you need[C]//Proceedings of the 31st International Conference on Neural Information Processing Systems. 2017.
- [2] Kirillov A, Mintun E, Ravi N, et al. Segment anything[Z/OL]. ArXiv, 2304.02643.
- [3] Canny J. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986 (6): 679-698.
- [4] Lim J S. Two-dimensional signal and image processing[J]. Englewood Cliffs, 1990.
- [5] Mumford D B, Shah J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989.
- [6] Chan T F, Vese L A. Active contours without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277.
- [7] Caselles V, Kimmel R, Sapiro G. Geodesic active contours[J]. International Journal of Computer Vision, 1997, 22(1): 61.
- [8] Zhao H K. Level set methods and fast marching methods: Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science[M]. Cambridge University Press, 2019.
- [9] Li S Z. Markov random field modeling in image analysis[M]. Springer, 2009.
- [10] Brush S G. History of the Lenz-Ising model[J]. Reviews of Modern Physics, 1967, 39(4): 883.

- [11] Barker S A, Rayner P J W. Unsupervised image segmentation using Markov random field models[J]. *Pattern Recognition*, 2000, 33(4): 587-602.
- [12] Rother C, Kolmogorov V, Blake A. “GrabCut” interactive foreground extraction using iterated graph cuts[J]. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 2004, 23(3): 309-314.
- [13] An D, Guo Y, Lei N, et al. AE-OT: A new generative model based on extended semi-discrete optimal transport. ICLR.
- [14] Lei N, An D, Guo Y, et al. A geometric understanding of deep learning[J]. *Engineering*, 6(3), 361-374.
- [15] Lei N, Su K, Cui L, et al. A geometric view of optimal transportation and generative model[J]. *Computer Aided Geometric Design*, 68, 1-21.
- [16] Li H B, Zeng W, Jean-marie Morvan, et al. Surface meshing with curvature convergence[J]. *IEEE Transaction on Visualization and Computer Graphics (TVCG)*, 20(6):919-934, 2014.
- [17] Kingma D P, Welling M. Auto-encoding variational bayes[Z/OL]. arXiv preprint arXiv:1312.6114.
- [18] Van der Maaten L, Hinton G. Visualizing data using t-SNE[J]. *Journal of Machine Learning Research*, 2008, 9(11).
- [19] McInnes L, Healy J, Melville J. Umap: Uniform manifold approximation and projection for dimension reduction[Z/OL]. arXiv preprint arXiv:1802.03426.
- [20] Cédric Villani. Graduate studies in mathematics[M]. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [21] Cédric Villani. Optimal transport: Old and new[M]. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [22] 雷娜, 顾险峰. 最优传输理论与计算[M]. 北京: 高等教育出版社, 2020.
- [23] Arjovsky M, Chintala S, Bottou L. Wasserstein generative adversarial networks[J]. *ICML*, 2017.
- [24] Gu X, Luo F, Sun J, et al. Variational principles for Minkowski type problems, discrete optimal transport, and discrete Monge–Ampère equations[J]. *Asian Journal of Mathematics*, 2016, 20(2), 383-398.
- [25] Rezende D, Mohamed S. Variational inference with normalizing flows[J]. *ICML*, 2015.
- [26] Ho J, Jain A, Abbeel P. Denoising diffusion probabilistic models[J]. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 2020, 33, 6840-6851.
- [27] Song Y, Sohl-Dickstein J, Kingma D P, et al. Score-based generative modeling through stochastic differential equations[Z/OL]. arXiv preprint arXiv:2011.13456.
- [28] Wu Z, Song S, Khosla A, et al. 3d shapenets: A deep representation for volumetric shapes[C]// *Proceedings of the IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2015: 1912-1920.
- [29] 顾险峰, 丘成桐. 计算共形几何(理论篇)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2018.
- [30] Edelsbrunner H, Harer J. Persistent homology-a survey[J]. *Contemporary Mathematics*, 2008, 453(26), 257-282.
- [31] Jin M, Kim J, Luo F, et al. Discrete surface Ricci flow[J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2018, 14(5), 1030-1043.