函　　数

第 5 章
CHAPTER 5

函数(function)一词最早由中国清朝数学家李善兰翻译而来,指一个量随着另一个量的变化而变化,或者说一个量中包含另一个量。函数的数学定义通常分为传统定义和近代定义。这两个定义本质上是相同的,只是叙述概念的出发点不同。传统定义是从运动变化的观点出发,而近代定义是从集合、映射的观点出发。函数的近代定义是给定一个集合 A,假设其中的元素为 x,对 A 中的元素 x 施加对应法则 f,记作 $f(x)$,得到另一集合 B,假设 B 中的元素为 y,则 y 与 x 之间的等量关系可以用 $y=f(x)$表示。函数概念含有 3 个要素:定义域 A、值域 B 和对应法则 f,其中核心是对应法则 f,它是函数关系的本质特征。在有的图书中(如《高等数学》)中通常将定义域 A 和值域 B 规定为数集,本章函数是定义在集合论的二元关系基础上的映射,函数的定义域 A 和值域 B 不一定是数集,理解这一点对于计算机科学尤其重要,因为在数学上函数通常用于建立数值量间的映射关系,而计算机科学用来模拟现实世界,因此在计算机科学中函数通常用于建立非数值量间的映射关系。

5.1　函数的定义与性质

5.1.1　函数的定义

定义 5.1　设 F 为二元关系,若 $\forall x\in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}F$ 使 $\langle x,y\rangle\in F$ 成立,则称 F 函数。对于函数 F,如果有 xFy,则记作 $y=F(x)$,并称 y 为 F 在 x 的值。

【例 5.1】　已知两个二元关系 $F=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_2,b_2\rangle,\langle a_3,b_2\rangle\}$和 $G=\{\langle a_1,b_1\rangle,\langle a_1,b_2\rangle\}$,则 F 是函数,G 不是函数。G 不是函数的原因是:对于 $a_1\in \mathrm{dom}F$,存在 $b_1\in \mathrm{ran}F$ 和 $b_2\in \mathrm{ran}F$ 使 a_1Fb_1 与 a_1Fb_2 都成立,导致相同值映射出的函数值不唯一,这破坏了函数的单值性。

定义 5.2　设 F、G 为函数,则 F 和 G 相等定义为 $F=G\Leftrightarrow F\subseteq G\land G\subseteq F$。

如果两个函数 F 和 G 相等,则一定满足下面两个条件:

(1) $\mathrm{dom}F=\mathrm{dom}G$,即 F 和 G 的定义域相等。

(2) $\forall x(x\in \mathrm{dom}F\land x\in \mathrm{dom}G)$都有 $F(x)=G(x)$,即对于定义域集合的任何元素 x,

F 和 G 在 x 的值也相等。

【例 5.2】 函数

$$F(x)=(x^2-1)/(x-1)$$
$$G(x)=x+1$$

二者不相等,因为对于函数 F 而言,$\mathrm{dom}F=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x\neq 1\}$,$\mathbf{R}$ 为实数集,对于函数 G 而言,$\mathrm{dom}G=\mathbf{R}$,$\mathrm{dom}F\neq\mathrm{dom}G$。

定义 5.3 设 A,B 为集合,如果 f 为函数,$\mathrm{dom}f=A$,$\mathrm{ran}f\subseteq B$,则称 f 为从 A 到 B 的函数,记作 $f: A\rightarrow B$。

【例 5.3】 $f: \mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$,$f(x)=2x$ 是从自然数集 $\mathbf{N}$ 到 $\mathbf{N}$ 的函数。$g: \mathbf{R}\rightarrow[0,1]$,$g(x)=\sin(x)$是从 $\mathbf{R}$ 到 $[0,1]$ 的函数,这里 $[0,1]=\{x \mid x\in\mathbf{R}\wedge x\geqslant 0\wedge x\leqslant 1\}$,也可写成 $g: \mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$,$g(x)=\sin(x)$。

定义 5.4 所有从 A 到 B 的函数组成的集合记作 B^A,即 $B^A=\{f \mid f: A\rightarrow B\}$。

设 A,B 为集合,$|A|=m$,$|B|=n$,并且 $m,n>0$,则 $|B^A|=n^m$,这是因为 A 中的每个元素都有 n 种不同的映射到 B 的可能,而每种不同的映射组合都构成不同的函数。

【例 5.4】 设 $A=\{a,b,c\}$,$B=\{0,1\}$,求所有从 A 到 B 的函数组成的集合 B^A。

解:$|A|=3$,$|B|=2$,所以 $|B^A|=2^3=8$,设 $B^A=\{f_0,f_1,\cdots,f_7\}$,其中

$$f_0=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}$$
$$f_1=\{\langle a,0\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$
$$f_2=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}$$
$$f_3=\{\langle a,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$
$$f_4=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,0\rangle\}$$
$$f_5=\{\langle a,1\rangle,\langle b,0\rangle,\langle c,1\rangle\}$$
$$f_6=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}$$
$$f_7=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,1\rangle\}$$

定义 5.5 设函数 $f: A\rightarrow B$,集合 $A_1\subseteq A$,$B_1\subseteq B$,定义

(1) 集合 A_1 在 f 下的像 $f(A_1)=\{f(x) \mid x\in A_1\}$,函数 f 的像为 $f(A)$。

(2) 集合 B_1 在 f 下的完全原像 $f^{-1}(B_1)=\{x \mid x\in A\wedge f(x)\in B_1\}$。

注意:函数值与像的区别:函数值 $f(x)\in B$,像 $f(A_1)\subseteq B$。一般 $f^{-1}(f(A_1))\neq A_1$,但是 $A_1\subseteq f^{-1}(f(A_1))$。

【例 5.5】 设 $f: \mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为奇数}\\ x/2, & x\text{ 为偶数}\end{cases}$$

$A=\{0,1,2,3,4\}$,$B=\{1\}$,求 $f(A)$,$f^{-1}(B)$。

解：$f(A)=f(\{0,1,2,3,4\})=\{f(0),f(1),f(2),f(3),f(4)\}=\{0,1,1,1,2\}=\{0,1,2\}$，

$$f^{-1}(B)=f^{-1}(\{1\})=\{x \mid x \text{ 为奇数} \vee x=2\}$$

定义 5.6　设$\langle A,\preccurlyeq\rangle$和$\langle B,\preccurlyeq\rangle$为偏序集，给定函数 $f: A\to B$，对任意的 $x_1,x_2\in A$，若 $x_1\prec x_2$，有 $f(x_1)\preccurlyeq f(x_2)$，则称 f 为单调递增的；对任意的 $x_1,x_2\in A$，若 $x_1\prec x_2$，有 $f(x_1)\prec f(x_2)$，则称 f 为严格单调递增的。类似地，可以定义单调递减函数和严格单调递减的函数。

注意：$\preccurlyeq$表示一种更为抽象的小于或等于关系，在实数集上$\leqslant$是$\preccurlyeq$的特例；同理，$\prec$表示一种更为抽象的小于关系，在实数集上$<$是$\prec$的特例。

【例 5.6】　(1) 设$\langle \mathbf{R},\leqslant\rangle$和$\langle\{0,1\},\leqslant\rangle$分别是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 和集合$\{0,1\}$上的偏序集，$\leqslant$为实数间的小于或等于关系，则函数 $f: \mathbf{R}\to\{0,1\}$，

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}$$

为单调递增的，因为对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，但 f 不是严格单调递增的。

(2) 设$\langle\rho(\{a,b\}),\subseteq\rangle$和$\langle\{0,1\},\leqslant\rangle$是两个偏序集，$\subseteq$为集合间的包含关系，$\leqslant$为整数间的小于或等于关系，则函数 $f: \rho(\{a,b\})\to\{0,1\}$，

$$f(\varnothing)=f(\{a\})=f(\{b\})=0,f(\{a,b\})=1$$

则函数 f 是单调递增的，因为对任意的 $x_1,x_2\in\rho(\{a,b\})$，若 $x_1\subset x_2$，有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，但 f 不是严格单调递增的。

(3) 设$\langle\mathbf{R},\leqslant\rangle$是定义在实数集 $\mathbf{R}$ 上的偏序集，$\leqslant$为实数间的小于或等于关系，函数 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=kx+b$，$k>0$，则函数 f 是严格单调递增的，因为对任意的 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，若 $x_1<x_2$，则 $f(x_1)<f(x_2)$。

下面介绍几个常用的函数。

(1) 常函数：如果存在常量元素 $c\in B$，使对所有的 $x\in A$ 都有 $f: A\to B$，$f(x)=c$，则 f 是常函数。

(2) 恒等函数：称 A 上的恒等关系 I_A 为 A 上的恒等函数，$I_A: A\to A$，$I_A(x)=x$。

(3) 特征函数：设 A 为集合，对于任意的 $A'\subseteq A$，A'的特征函数 $\chi_{A'}: A\to\{0,1\}$，

$$\chi_{A'}(a)=\begin{cases}1, & a\in A'\\ 0, & a\in A-A'\end{cases}$$

注：χ 发音为“凯”。

(4) 自然映射函数：设 R 是 A 上的等价关系，令 $g: A\to A/R$，$g(a)=[a]_R$，称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射函数。

【例 5.7】　(1) 设集合 $A=\{x,y\}$，写出 A 的全部子集的特征函数。

(2) 集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$上模 3 等价关系为 $R=\{\langle a,b\rangle \mid a,b\in A \wedge a\equiv b(\bmod 3)\}$,写出自然映射函数 $g: A\to A/R$。

解:(1) A 的全部子集分别为$\varnothing$、$\{x\}$、$\{y\}$、$\{x,y\}$,则 A 的每个子集的特征函数分别为

$$\chi_{\varnothing}=\{\langle x,0\rangle,\langle y,0\rangle\}$$
$$\chi_{\{x\}}=\{\langle x,1\rangle,\langle y,0\rangle\}$$
$$\chi_{\{y\}}=\{\langle x,0\rangle,\langle y,1\rangle\}$$
$$\chi_{\{x,y\}}=\{\langle x,1\rangle,\langle y,1\rangle\}$$

(2) 自然映射函数 $g: A\to A/R$,

$$g(x)=\begin{cases}\{1,4,7\}, & x=1,2,3\\ \{2,5,8\}, & x=2,5,8\\ \{3,6\}, & x=3,6\end{cases}$$

5.1.2 函数的性质

对于函数 $f: A\to B$,下面定义函数的单射性、满射性和双射性。

定义 5.7 设 $f: A\to B$,

(1) 若 $\operatorname{ran} f=B$,则称 $f: A\to B$ 是满射的。

(2) 若 $\forall y\in \operatorname{ran} f$ 都存在唯一的 $x\in A$ 使 $f(x)=y$,则称 $f: A\to B$ 是单射的。

(3) 若 f 既是满射又是单射的,则称 $f: A\to B$ 是双射的(或称一一映像)。

【例 5.8】 判断下列函数中哪些是满射的?哪些是单射的?哪些是双射的?其中 $\mathbf{N}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{Q}$ 分别为自然数集、实数集、整数集、有理数集。

(1) $f: \mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(x)=x^2+2$。

(2) $f: \mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(x)=x \bmod 3$,即求 x 除以 3 的余数。

(3) $f: \mathbf{N}\to\mathbf{N}$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为奇数}\\ 0, & x\text{ 为偶数}\end{cases}$$

(4) $f: \mathbf{N}\to\{0,1\}$,

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为奇数}\\ 0, & x\text{ 为偶数}\end{cases}$$

(5) $f: \mathbf{N}_+\to\mathbf{R}, f(x)=\ln x$。

(6) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=x^2-2x-15$。

(7) $f: \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}, f(\langle x,y,z\rangle)=x+y-z$。

(8) $f: \mathbf{Z}\times\mathbf{N}\to\mathbf{Q}, f(\langle x,y\rangle)=x/(y+1)$。

(9) $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=3x+2$。

(10) 恒等函数 $I_A: A\to A, I_A(x)=x$。

(11) 自然映射函数 $g: A \to A/R, g(a)=[a]$。

解：(1) 当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 2，所以 $f(x)$ 不是满射的；对 $\forall y \in \operatorname{ran} f$ 都存在唯一的 $x=\sqrt{y-2} \in \mathbf{N}, y \geqslant 2$，使 $f(x)=y$，所以 $f(x)$ 是单射的。

(2) $\operatorname{ran} f=\{0,1,2\}$，所以 $f(x)$ 不是满射的；$f(x)=f(x+3)$，所以 $f(x)$ 不是单射的。

(3) $\operatorname{ran} f=\{0,1\}$，所以 $f(x)$ 不是满射的；$f(x)=f(x+2)$，所以 $f(x)$ 不是单射的。

(4) $\operatorname{ran} f=\{0,1\}$，$f(x)$ 是满射的；$f(x)=f(x+2)$，$f(x)$ 不是单射的。

(5) $\operatorname{ran} f=\{\ln 1, \ln 2, \cdots\}$，所以 $f(x)$ 不是满射的；由于 $\ln x, x>0$，是严格单调递增的函数，对 $\forall y \in \operatorname{ran} f$ 都存在唯一的 $x=\mathrm{e}^{y} \in \mathbf{N}_{+}$ 使 $f(x)=y$，所以 $f(x)$ 是单射的。

(6) $f(x)=x^{2}-2x-15=(x-1)^{2}-16$，当 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得最小值 -16，所以 $f(x)$ 不是满射的；$f(3)=f(-1)=-12$，所以 $f(x)$ 不是单射的。

(7) 当 $y=z$ 时，$f(\langle x, y, z\rangle)=x$，$x$ 可以取遍自然数集 $\mathbf{N}$，所以 f 是满射的；$f(\langle 0,0,0\rangle)=f(\langle 1,0,1\rangle)=0$，所以 $f(x)$ 不是单射的。

(8) $y+1 \in\{1,2, \cdots\}$，x 可以取遍整数集 $\mathbf{Z}$，则 $x/(y+1)$ 可以取遍有理数集 $\mathbf{Q}$，所以 f 是满射的；$f(\langle 1,0\rangle)=f(\langle 2,1\rangle)=1/1=2/2=1$，所以 $f(x)$ 不是单射的。

(9) 对于给定 $\forall y \in \mathbf{R}$，取 $x=(y-2)/3$ 均可使 $f(x)=y$，$\operatorname{ran} f=\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 是满射的；$f(x)$ 是严格单调递增的，所以 $f(x)$ 是单射的，因此 $f(x)$ 是双射的。

(10) 恒等函数是双射的。

(11) 不同的等价关系确定不同的自然映射，恒等关系确定的自然映射函数是双射的，其他自然映射函数一般来讲只是满射，例如对于集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的等价关系

$$R=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\} \cup I_{A}$$

的自然映射函数 $g: A \to A/R$，

$$g(1)=g(2)=\{1,2\}, g(3)=\{3\}$$

显然 g 不是单射的，g 是满射的。

下面介绍证明函数 $f: A \to B$ 是否为单射和满射的方法。

(1) 证明 $f: A \to B$ 是满射的方法：任取 $y \in B$，证明存在 $x \in A$，使 $f(x)=y$。

(2) 证明 $f: A \to B$ 是单射的方法如下。

方法一：对 $\forall x_{1}, x_{2} \in A$，由 $f(x_{1})=f(x_{2})$ 推出 $x_{1}=x_{2}$。

方法二：对 $\forall x_{1}, x_{2} \in A$，由 $x_{1} \neq x_{2}$ 推出 $f(x_{1}) \neq f(x_{2})$。

(3) 证明 $f: A \to B$ 不是满射的方法：证明存在 $y \in B$，使 $y \notin \operatorname{ran} f$。

(4) 证明 $f: A \to B$ 不是单射的方法：证明存在 $x_{1}, x_{2} \in A$ 且 $x_{1} \neq x_{2}$，使 $f(x_{1})=f(x_{2})$。

【例 5.9】 设 $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}, f(\langle a, b\rangle)=\langle a+b, a-b\rangle$，证明 f 是双射的。

证明：首先证明 f 是满射的。任取 $\langle x, y\rangle \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$，令

$$\begin{cases} a+b=x \\ a-b=y \end{cases}$$

解得

$$a=(x+y)/2,\quad b=(x-y)/2$$

即对 $\forall\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,存在

$$\langle(x+y)/2,(x-y)/2\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$$

使

$$f(\langle(x+y)/2,(x-y)/2\rangle)=\langle x,y\rangle$$

所以 f 是满射的。

再来证明 f 是单射的。任取 $\langle x,y\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,$\langle u,v\rangle\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$,则

$$\begin{aligned}
&f(\langle x,y\rangle)=f(\langle u,v\rangle)\\
\Leftrightarrow&\langle x+y,x-y\rangle=\langle u+v,u-v\rangle\\
\Leftrightarrow&(x+y=u+v)\wedge(x-y=u-v)\\
\Leftrightarrow&(x=u)\wedge(y=v)\\
\Leftrightarrow&\langle x,y\rangle=\langle u,v\rangle
\end{aligned}$$

所以 f 是单射的。由于 f 既是满射的又是单射的,所以 f 是双射的。

【例 5.10】 对于给定的集合 A 和 B 构造双射函数 $f:A\to B$。

(1) $A=\rho(\{a,b\})$,$B=\{0,1\}^{\{1,2\}}$

(2) $A=[0,1]$,$B=[1/3,2/3]$

(3) $A=\mathbf{Z}$,$B=\mathbf{N}$

(4) $A=[0,\pi]$,$B=[-1,1]$

解:(1) $A=\rho(\{a,b\})=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,$B=\{f_0,f_1,f_2,f_3\}$,其中

$$f_0=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,0\rangle\}$$

$$f_1=\{\langle 1,0\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$

$$f_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle\}$$

$$f_3=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle\}$$

令 $f:A\to B$,其中 $f(\varnothing)=f_0$,$f(\{a\})=f_1$,$f(\{b\})=f_2$,$f(\{a,b\})=f_3$。

(2) 本题是将区间 $[0,1]$ 的值压缩映射成区间 $[1/3,2/3]$ 的值,可以在这两个区间之间建立线性函数,即求通过 $(0,1/3)$,$(1,2/3)$ 两点的直线方程,得 $f:[0,1]\to[1/3,2/3]$,

$$f(x)=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$$

(3) 将 $\mathbf{Z}$ 中元素以下列顺序排列并与 $\mathbf{N}$ 中元素对应:

$$f(0)=0$$

$$f(1)=1$$

$$f(-1)=2$$

$$f(2)=3$$

$$f(-2)=4$$

$$f(3)=5$$

$$f(-3)=6$$

$$\cdots$$

这样就建立了双射函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$,

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ -2x, & x\leqslant 0\end{cases}$$

(4) 令 $f:[0,\pi]\to[-1,1]$, $f(x)=-\cos x$。

【例 5.11】 已知函数 $f:A\to B$,集合 A 中有 m 个元素,集合 B 中有 n 个元素,则

(1) 当 $m\leqslant n$ 时,问从 A 到 B 共有多少种单射函数 f。

(2) 当 $m\geqslant n$ 时,问从 A 到 B 共有多少种满射函数 f。

(3) 当 $m=n$ 时,问从 A 到 B 共有多少种双射函数 f。

解:设 $S=\{A\to B$ 全体函数集合$\}$,则 $|S|=n^m$。

(1) 对于集合 A 中的第 1 个元素,有 n 种选择,可以映射到集合 B 中的任意一个元素;对于集合 A 中的第 2 个元素,有 $n-1$ 种选择,因为不能与第 1 个元素映射到同一个元素;对于集合 A 中的第 3 个元素,有 $n-2$ 种选择,因为不能与前两个元素映射到同一个元素;以此类推,对于集合 A 中的第 m 个元素,有 $n-m+1$ 种选择,因此,总的单射函数个数为

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=n!/(n-m)!$$

(2) 设 $A_i\subseteq S$ 且满足以下性质。

A_i:B 中第 i 个元素在 A 中无原像,$i=1,2,\cdots,n$,则 $|A_i|=(n-1)^m$;

$A_i\cap A_j$:B 中第 i,j 两个元素在 A 中无原像,$1\leqslant i<j\leqslant n$,$|A_i\cap A_j|=(n-2)^m$;

$\cdots$

$A_1\cap A_2\cap\cdots A_n$:$B$ 中所有元素在 A 中无原像,$|A_1\cap A_2\cap\cdots A_n|=0$。

$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}$:$B$ 中所有元素在 A 中有原像。$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}|$ 即为满射函数 f 的总数,根据包含排斥原理,有

$$\begin{aligned}|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\cdots\cap\overline{A_n}| &= n^m-C(n,1)(n-1)^m+C(n,2)(n-2)^m-\cdots+(-1)^nC(n,n)0^m\\ &= n^m-C(n,1)(n-1)^m+C(n,2)(n-2)^m-\cdots+(-1)^{n-1}C(n,n-1)1^m\end{aligned}$$

(3) 双射函数可以看成单射函数或满射函数当 $|A|=|B|=m=n$ 时的特例,因此总的双射函数个数为 $n!$ 或 $m!$。

5.2 函数的复合与反函数

5.2.1 函数的复合

函数是一种特殊的二元关系,函数的复合就是二元关系的复合。由于二元关系的复合分为左复合和右复合,因此函数的复合也分为左复合和右复合。本书将函数的复合定义为右复合,有的图书将函数的复合定义为左复合。

函数复合的基本定理如下。

定理 5.1 设 F、G 是函数,则 F 和 G 的右复合 $F\circ G$ 也是函数,并且满足

(1) $\mathrm{dom}(F\circ G)=\{x \mid x\in \mathrm{dom}F \wedge F(x)\in \mathrm{dom}G\}$

(2) $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$,有 $F\circ G(x)=G(F(x))$

证明: 首先证明 $F\circ G$ 是函数。因为 F、G 是函数,所以 F、G 是二元关系,根据二元关系右复合的定义,$F\circ G$ 也是二元关系。取 $\forall x\in \mathrm{dom}(F\circ G)$,若有 $\langle x,y_1\rangle\in F\circ G$ 和 $\langle x,y_2\rangle\in F\circ G$,则

$$
\begin{aligned}
&\langle x,y_1\rangle \in F\circ G \wedge \langle x,y_2\rangle \in F\circ G\\
\Rightarrow\ &\exists t_1(\langle x,t_1\rangle \in F \wedge \langle t_1,y_1\rangle \in G) \wedge \exists t_2(\langle x,t_2\rangle \in F \wedge \langle t_2,y_2\rangle \in G)\\
\Rightarrow\ &\exists t_1\exists t_2(\langle x,t_1\rangle \in F \wedge \langle t_1,y_1\rangle \in G \wedge \langle x,t_2\rangle \in F \wedge \langle t_2,y_2\rangle \in G)\\
\Rightarrow\ &\exists t_1\exists t_2((\langle x,t_1\rangle \in F \wedge \langle x,t_2\rangle \in F) \wedge (\langle t_1,y_1\rangle \in G \wedge \langle t_2,y_2\rangle \in G))\\
\Rightarrow\ &\exists t_1\exists t_2(t_1=t_2 \wedge \langle t_1,y_1\rangle \in G \wedge \langle t_2,y_2\rangle \in G)\quad (\text{因为 } F \text{ 是函数})\\
\Rightarrow\ &\exists t_1(\langle t_1,y_1\rangle \in G \wedge \langle t_1,y_2\rangle \in G)\\
\Rightarrow\ &y_1=y_2\quad (\text{因为 } G \text{ 是函数})
\end{aligned}
$$

所以 $F\circ G$ 为函数。

然后统一证明(1)和(2)成立。任取 x,

$$
\begin{aligned}
&\forall x \in \mathrm{dom}(F\circ G)\\
\Rightarrow\ &\exists t\exists y(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G)\\
\Rightarrow\ &\exists t(x \in \mathrm{dom}F \wedge t=F(x) \wedge t \in \mathrm{dom}G)\\
\Rightarrow\ &x \in \mathrm{dom}F \wedge \exists t(t=F(x) \wedge t \in \mathrm{dom}G)\\
\Rightarrow\ &x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\\
\Rightarrow\ &x \in \{x \mid x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\}
\end{aligned}
$$

任取 x,

$$
\begin{aligned}
&x \in \mathrm{dom}F \wedge F(x) \in \mathrm{dom}G\\
\Rightarrow\ &\langle x,F(x)\rangle \in F \wedge \langle F(x),G(F(x))\rangle \in G\\
\Rightarrow\ &\langle x,G(F(x))\rangle \in F\circ G\\
\Rightarrow\ &x \in \mathrm{dom}(F\circ G) \wedge F\circ G(x)=G(F(x))
\end{aligned}
$$

推论 5.1 (函数复合的结合律)设 F、G、H 为函数,则 $(F\circ G)\circ H$ 和 $F\circ(G\circ H)$ 都是函数,并且

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

证明: 由定理 5.1 可直接推出 $(F\circ G)\circ H$ 是函数,再由关系复合运算满足结合律可知

$$(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$$

推论 5.2 设 $f:A\rightarrow B$,$g:B\rightarrow C$,则 $f\circ g:A\rightarrow C$,并且 $\forall x\in A$ 都有

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

证明: 由定理 5.1 知 $f\circ g$ 是函数,并且

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{dom}(f \circ g)\\
&=\{x \mid x \in \operatorname{dom} f \wedge f(x) \in \operatorname{dom} g\}\\
&=\{x \mid x \in A \wedge f(x) \in B\}\\
&=A
\end{aligned}
$$

由于 $\operatorname{ran}(f\circ g)\subseteq \operatorname{ran} g\subseteq C$，因此 $f\circ g: A\to C$，并且 $\forall x\in A$ 都有 $f\circ g(x)=g(f(x))$。

【例 5.12】 求下列复合函数：

(1) 设 $X=\{x_1,x_2\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3\}$，$Z=\{z_1,z_2\}$，$f: X\to Y$，$f=\{\langle x_1,y_1\rangle,\langle x_2,y_2\rangle\}$，$g: Y\to Z$，$g=\{\langle y_1,z_1\rangle,\langle y_2,z_2\rangle,\langle y_3,z_2\rangle\}$，求 $f\circ g: X\to Z$。

(2) $f,g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-2$，$g(x)=x+4$，求 $f\circ g$ 和 $g\circ f$。

(3) $f,g: \mathbf{N}\to\mathbf{N}$，

$$
f(x)=\begin{cases} x+1, & x=0,1,2,3\\ 0, & x=4\\ x, & x\geqslant 5\end{cases}
$$

$$
g(x)=\begin{cases} x/2, & x \text{ 为偶数}\\ 3, & x \text{ 为奇数}\end{cases}
$$

求 $f\circ g$ 和 $g\circ f$。

解： (1) $f\circ g: X\to Z$，$f\circ g=\{\langle x_1,z_1\rangle,\langle x_2,z_2\rangle\}$。

(2)

$$
f\circ g(x)=g(f(x))=(x^2-2)+4=x^2+2
$$

$$
g\circ f(x)=f(g(x))=(x+4)^2-2=x^2+8x+14
$$

(3)

$$
f\circ g(x)=g(f(x))=\begin{cases} 0, & x=4\\ 1, & x=1\\ 2, & x=3\\ 3, & x\in\{0,2\}\cup\{\geqslant 5 \text{ 的奇数}\}\\ x/2, & x\in\{\geqslant 6 \text{ 的偶数}\}\end{cases}
$$

$$
g\circ f(x)=f(g(x))=\begin{cases} 0, & x=8\\ 1, & x=0\\ 2, & x=2\\ 3, & x=4\\ 4, & x\in\{6\}\cup\{\text{正奇数}\}\\ x/2, & x\in\{\geqslant 10 \text{ 的偶数}\}\end{cases}
$$

定理 5.2 设 $f: A\to B$，$g: B\to C$，

(1) 如果 $f: A\to B$，$g: B\to C$ 是满射的，则 $f\circ g: A\to C$ 是满射的。

(2) 如果 $f: A\to B$，$g: B\to C$ 是单射的，则 $f\circ g: A\to C$ 是单射的。

(3) 如果 $f: A \to B$, $g: B \to C$ 是双射的,则 $f \circ g: A \to C$ 是双射的。

证明:(1) 任取 $c \in C$,因为 $g: B \to C$ 是满射的,必有 $b \in B$ 使 $g(b)=c$。由于 $f: A \to B$ 是满射的,所以必有 $a \in A$ 使 $f(a)=b$。对于 $f \circ g: A \to C$,由推论 5.2 有

$$f \circ g(a)=g(f(a))=g(b)=c$$

所以 $f \circ g: A \to C$ 是满射的。

(2) 对于任意的 $a_1, a_2 \in A$,若

$$f \circ g(a_1)=f \circ g(a_2)$$

由推论 5.2 有

$$g(f(a_1))=g(f(a_2))$$

由于 $g: B \to C$ 是单射的,所以 $f(a_1)=f(a_2)$。又由于 $f: A \to B$ 是单射的,所以 $a_1=a_2$,所以 $f \circ g: A \to C$ 是单射的。

(3) 由(1)和(2)可证 $f \circ g: A \to C$ 也是双射的。

注意:定理 5.2 说明函数的复合运算能够保持函数的单射、满射和双射的性质,但是若 $f: A \to B$ 和 $f \circ g: A \to C$ 都是单射(满射、双射)的,则 $g: B \to C$ 不一定是单射(满射、双射)的,例如设 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$, $Y=\{y_1, y_2, y_3\}$, $Z=\{z_1, z_2\}$, $f: X \to Y$, $f=\{\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle, \langle x_3, y_2\rangle\}$, $g: Y \to Z$, $g=\{\langle y_1, z_1\rangle, \langle y_2, z_2\rangle, \langle y_3, z_2\rangle\}$,则有 $f \circ g=\{\langle x_1, z_1\rangle, \langle x_2, z_2\rangle, \langle x_3, z_2\rangle\}$,不难看出,$g: B \to C$ 和 $f \circ g: A \to C$ 都是满射的,但 $f: A \to B$ 不是满射的。

定理 5.3 设 $f: A \to B$,则有 $f=f \circ I_B=I_A \circ f$。

证明:由定理 5.1 和推论 5.2 可知 $f \circ I_B: A \to B$, $I_A \circ f: A \to C$。任取 $\langle x, y\rangle$,

$$\begin{aligned}
&\langle x, y\rangle \in f \\
\Rightarrow &\langle x, y\rangle \in f \wedge y \in B \\
\Rightarrow &\langle x, y\rangle \in f \wedge \langle y, y\rangle \in I_B \\
\Rightarrow &\langle x, y\rangle \in f \circ I_B \\
&\langle x, y\rangle \in f \circ I_B \\
\Rightarrow &\exists t(\langle x, t\rangle \in f \wedge \langle t, y\rangle \in I_B) \\
\Rightarrow &\langle x, a\rangle \in f \wedge a=y \\
\Rightarrow &\langle x, y\rangle \in f
\end{aligned}$$

所以有 $f=f \circ I_B$。同理可证 $f=I_A \circ f$。

5.2.2 反函数

函数是一种特殊的二元关系,可以用二元关系的逆定义反函数。给定函数 F,它的逆 F^{-1} 一定是一个二元关系,但不一定是函数,例如 $F=\{\langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle\}$,它的逆

$$F^{-1}=\{\langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle\}$$

不是函数，因为对于 $c \in \mathrm{dom}F^{-1}$，有两个值 a,b 与之对应，这破坏了函数的单值性。那么，什么样的函数的逆是函数呢？任给单射函数 $f:A \to B$，则 $f^{-1}:\mathrm{ran}f \to A$ 是函数，但是 f^{-1} 不一定是 $B \to A$ 的函数，因为 $\mathrm{ran}f \subseteq B$，对于某些 $y \in B - \mathrm{ran}f$，f^{-1} 没有与之对应的函数值。如果数 $f:A \to B$ 是双射函数，则 $f^{-1}:B \to A$ 一定是函数。下面给出反函数的定义。

定义 5.8　设 $f:A \to B$ 是双射函数，定义 $f^{-1}:B \to A$ 是 f 的反函数。

为什么 $f:A \to B$ 是双射函数，$f^{-1}:B \to A$ 一定是函数呢？下面给出定理。

定理 5.4　设 $f:A \to B$ 是双射函数，则 $f^{-1}:B \to A$ 也是双射函数。

证明：(1) 首先证明 $f^{-1}:B \to A$ 是函数且是满射函数。由二元关系的逆的定义和定理可知

$$\mathrm{dom}f^{-1} = \mathrm{ran}f = B$$

$$\mathrm{ran}f^{-1} = \mathrm{dom}f = A$$

对于 $\forall x, x \in B = \mathrm{dom}f^{-1}$，假设有 $y_1, y_2 \in A$ 使

$$\begin{aligned} & \langle x,y_1\rangle \in f^{-1} \land \langle x,y_2\rangle \in f^{-1} \\ \Rightarrow & \langle y_1,x\rangle \in f \land \langle y_2,x\rangle \in f \\ \Rightarrow & y_1 = y_2 \quad (\text{由函数 } f \text{ 的单射性}) \end{aligned}$$

所以 $f^{-1}:B \to A$ 是函数且是满射函数。

(2) 再证明 $f^{-1}:B \to A$ 是单射的。假设有 $x_1, x_2 \in B$ 使 $f(x_1) = f(x_2) = y$，则

$$\begin{aligned} & \langle x_1,y\rangle \in f^{-1} \land \langle x_2,y\rangle \in f^{-1} \\ \Rightarrow & \langle y,x_1\rangle \in f \land \langle y,x_2\rangle \in f \\ \Rightarrow & x_1 = x_2 \quad (\text{因为 } f \text{ 是函数}) \end{aligned}$$

所以 $f^{-1}:B \to A$ 是单射的。

定理 5.5　设 $f:A \to B$ 是双射函数，则 $f \circ f^{-1} = I_A$，$f^{-1} \circ f = I_B$。

证明：由定理 5.1 和推论 5.2 可知 $f \circ f^{-1}:A \to A$，$f^{-1} \circ f:B \to B$。任取 $\langle x,y\rangle$，

$$\begin{aligned} & \langle x,y\rangle \in f \circ f^{-1} \\ \Rightarrow & \exists t(\langle x,t\rangle \in f \land \langle t,y\rangle \in f^{-1}) \\ \Rightarrow & \exists t(\langle x,t\rangle \in f \land \langle y,t\rangle \in f) \\ \Rightarrow & x = y \land x,y \in A \quad (\text{因为 } f \text{ 是函数}) \\ \Rightarrow & \langle x,y\rangle \in I_A \end{aligned}$$

任取 $\langle x,y\rangle$，

$$\begin{aligned} & \langle x,y\rangle \in I_A \\ \Rightarrow & x = y \land x,y \in A \\ \Rightarrow & \exists t(\langle x,t\rangle \in f \land \langle y,t\rangle \in f) \\ \Rightarrow & \exists t(\langle x,t\rangle \in f \land \langle t,y\rangle \in f^{-1}) \\ \Rightarrow & \langle x,y\rangle \in f \circ f^{-1} \end{aligned}$$

所以有 $f\circ f^{-1}=I_A$。同理可证 $f^{-1}\circ f=I_B$。

【例 5.13】 设 f,g,h：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-2$，$g(x)=x+4$，$h(x)=x^3-1$，问 f,g,h 哪些有反函数？如果有，则求出这些反函数。

解：f：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)$不是双射函数，所以 $f(x)$没有反函数。g：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g(x)$是双射函数，$g(x)$的反函数 g^{-1}：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$g^{-1}(x)=x-4$。h：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$h(x)$是双射函数，$h(x)$的反函数 h^{-1}：$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$h^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$。

5.3 双射函数与集合的基数

定义 5.9(集合间的等势关系) 设 A,B 是集合，如果存在着从 A 到 B 的双射函数，就称 A 和 B 是等势的，记作 $A\approx B$。如果 A 不与 B 等势，则记作 $A\not\approx B$。

集合的势是量度集合所含元素多少的量，集合的势越大，所含的元素就越多。

【例 5.14】 下面给出一些等势的无限集合的例子。

(1) $\mathbf{Z}\approx\mathbf{N}$。根据例 5.10(3)可知，存在双射函数 f：$\mathbf{Z}\to\mathbf{N}$，所以 $\mathbf{Z}\approx\mathbf{N}$。

(2) $\mathbf{N}\approx\mathbf{Q}$。

证明：为了建立双射函数 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{Q}$，先把所有的有理数(形式为 p/q，p,q 为整数且 $q>0$)排成一张表，如图 5.1 所示。显然所有的有理数都在这张表内。以 0/1 为第 1 个数，按照图中的箭头顺序可数遍所有有理数。规定在计数过程中必须跳过第 2 次及以后所遇到的同一个有理数，例如 1/1、2/2、3/3 等是同一个数，则 2/2、3/3 等在计数时被跳过。这样就可以定义双射函数 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{Q}$，

$$f(x)=\text{以 }[x]\text{ 为上角标的有理数}$$

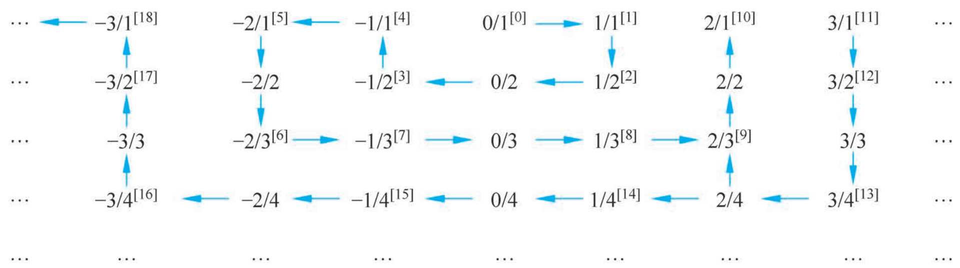

图 5.1 $\mathbf{N}\approx\mathbf{Q}$

(3) $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\approx\mathbf{N}$。

证明：为了建立双射函数 f：$\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，可以从$\langle 0,0\rangle$开始，依次计数得到下面的序列：

$$\langle 0,0\rangle\to 0$$
$$\langle 0,1\rangle\to 1$$
$$\langle 1,0\rangle\to 2$$
$$\langle 0,2\rangle\to 3$$

$$\langle 1,1\rangle \rightarrow 4$$
$$\langle 2,0\rangle \rightarrow 5$$
$$\langle 0,3\rangle \rightarrow 6$$
$$\langle 1,2\rangle \rightarrow 7$$
$$\langle 2,1\rangle \rightarrow 8$$
$$\langle 3,0\rangle \rightarrow 9$$
$$\cdots$$

按照这样的排列规律，将 $m+n$ 值相同的有序对 $\langle m,n\rangle$ 分成一组，

第 1 组，$m+n=0$，有序对为 $\langle 0,0\rangle$，序号为 0

第 2 组，$m+n=1$，有序对为 $\langle 0,1\rangle$，$\langle 1,0\rangle$，序号为 1、2

第 3 组，$m+n=2$，有序对为 $\langle 0,2\rangle$，$\langle 1,1\rangle$，$\langle 2,0\rangle$，序号为 3、4、5

第 4 组，$m+n=3$，有序对为 $\langle 0,3\rangle$，$\langle 1,2\rangle$，$\langle 2,1\rangle$，$\langle 3,0\rangle$，序号为 6、7、8、9

……

下面计算 $\langle m,n\rangle$ 的序号 k。设 $m+n=q$，则 $m+n=q$ 位于第 $q+1$ 组，位于第 $q+1$ 组前面的第 $1,2,\cdots,q$ 组中有序对的序号位于序号 k 的前面，共有

$$1+2+\cdots+(m+n)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}$$

个数，在第 q 组位于序号 k 前面的有序对共有 m 个，这样可以得到二者对应关系的通式

$$\langle m,n\rangle \rightarrow \frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$$

所以

$$f(\langle m,n\rangle)=\frac{(m+n+1)(m+n)}{2}+m$$

(4) $(0,1)\approx \mathbf{R}$，其中 $(0,1)=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge 0<x<1\}$。

证明：由于存在双射函数 $f:(0,1)\rightarrow \mathbf{R}$，$f(x)=\tan\left(\frac{2x-1}{2}\pi\right)$，所以 $(0,1)\approx \mathbf{R}$。

(5) $[0,1]\approx(0,1)$，其中 $[0,1]=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge 0\leqslant x\leqslant 1\}$。

证明：由于存在双射函数 $f:[0,1]\rightarrow(0,1)$，

$$f(x)=\begin{cases}1/2, & x=0\\ 1/2^2, & x=1\\ 1/2^{n+2}, & x=1/2^n\ (n\geqslant 1)\\ x, & x=\text{其他}\end{cases}$$

所以 $[0,1]\approx(0,1)$。

(6) $[0,1]\approx[a,b]$，其中 $[a,b]=\{x \mid x\in \mathbf{R}\wedge a\leqslant x\leqslant b\wedge a<b\}$。

证明：由于存在双射函数 $f:[0,1]\rightarrow[a,b]$，$f(x)=(b-a)x+a$，所以 $[0,1]\approx[a,b]$。

(7) $\rho(A)\approx\{0,1\}^A$,其中 A 为任意的集合。

证明:由于存在 $\rho(A)$到$\{0,1\}^A$ 的双射函数

$$f:\rho(A)\to\{0,1\}^A, f(A')=\chi_{A'},\quad \forall A'\in\rho(A)$$

其中,$\chi_{A'}$是 A'的特征函数,所以 $\rho(A)\approx\{0,1\}^A$,例如,若 $A=\{a,b,c\}$,

$$f(\{a,b\})=\chi_{\{a,b\}}=\{\langle a,1\rangle,\langle b,1\rangle,\langle c,0\rangle\}$$

定理 5.6 设 A、B、C 是任意集合,则集合之间的等势关系是一种等价关系,具有以下性质。

(1) 自反性:$A\approx A$。

(2) 对称性:若 $A\approx B$,则 $B\approx A$。

(3) 传递性:若 $A\approx B$,$B\approx C$,则 $A\approx C$。

从例 5.14 中可知,$\mathbf{N}\approx\mathbf{Q}\approx\mathbf{N}\times\mathbf{N}$,同时也不难证明任何长度大于 0 的实数区间都与实数集合 $\mathbf{R}$ 等势。那么自然数集 $\mathbf{N}$ 与实数集 $\mathbf{R}$ 是否等势呢?下面证明 $\mathbf{N}\not\approx\mathbf{R}$。

定理 5.7(康托定理)

(1) $\mathbf{N}\not\approx\mathbf{R}$。

(2) 对任意集合 A 都有 $A\not\approx\rho(A)$。

证明:(1) 由于 $[0,1]\approx\mathbf{R}$,因此只需证明 $\mathbf{N}\not\approx[0,1]$。下面证明对于任何函数 $f:\mathbf{N}\to[0,1]$,$f(x)$都不是满射的。对于任何函数 $f:\mathbf{N}\to[0,1]$,均可写成如下无限小数形式:

$$f(0)=0.a_1^{(1)}a_2^{(1)}\cdots$$

$$f(1)=0.a_1^{(2)}a_2^{(2)}\cdots$$

$$\cdots$$

$$f(n-1)=0.a_1^{(n)}a_2^{(n)}\cdots$$

设 $y=0.b_1b_2\cdots$是$[0,1]$之间的一个数,并且满足

$$\forall i\in\mathbf{N}_+, b_i\neq a_i^{(i)}$$

显然 y 是可以构造出来的,并且 y 与上面列出的任何一个函数值都不相等,即 $y\notin \mathrm{ran}f$,即 $f(x)$不是满射的。

(2) 下面证明对于任何函数 $g:A\to\rho(A)$,$g(x)$都不是满射的。设 $g:A\to\rho(A)$是从 A 到$\rho(A)$的函数,构造集合 $B=\{x\mid x\in A\wedge x\notin g(x)\}$,则显然 $B\in\rho(A)$,但对于$\forall x\in A$ 都有

$$x\in B\Leftrightarrow x\notin g(x)$$

从而证明了对于任意 x 都有 $B\neq g(x)$,即 $B\notin \mathrm{ran}g$。

【例 5.15】 验证对任意集合 A 都有 $A\not\approx\rho(A)$。

解:设集合 $A_0=\varnothing$,$A_1=\{0\}$,$A_2=\{0,1\}$,$\cdots$,$A_n=\{0,1,2,\cdots,n-1\}$,则$|A_0|=0$,$|A_1|=1$,$|A_2|=2$,$\cdots$,$|A_n|=n$,$|\rho(A_0)|=2^0$,$|\rho(A_1)|=2^1$,$|\rho(A_2)|=2^2$,$\cdots$,$|\rho(A_n)|=2^n$,由于对于任意的 $A_i(i=0,1,2,\cdots,n)$都有

$$|A_i|=i<|\rho(A_i)|=2^i$$

所以对任意集合 A，不存在双射函数 $f: A\to\rho(A)$，因此 $A\not\approx\rho(A)$。

定义 5.10 （集合间的优势关系）

(1) 设 A,B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射函数，就称 B 优势于 A，记作 $A\preccurlyeq\cdot B$。如果 B 不优势于 A，则记作 $A\not\preccurlyeq\cdot B$。

(2) 设 A,B 是集合，若 $A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $A\not\approx B$，则称 B 真优势于 A，记作 $A\prec\cdot B$。如果 B 不真优势于 A，则记作 $A\not\prec\cdot B$。

【例 5.16】 设 A 是任意集合，则 $A\preccurlyeq\cdot\rho(A)$，$A\prec\cdot\rho(A)$。集合 $\mathbf{N}$、$\mathbf{R}$ 之间的优势关系为 $\mathbf{N}\preccurlyeq\cdot\mathbf{R}$，$\mathbf{N}\preccurlyeq\cdot\mathbf{N}$，$\mathbf{R}\preccurlyeq\cdot\mathbf{R}$，$\mathbf{N}\prec\cdot\mathbf{R}$，$\mathbf{N}\not\prec\cdot\mathbf{N}$，$\mathbf{R}\not\prec\cdot\mathbf{R}$。

两个集合之间的优势关系具有以下性质。

定理 5.8 设 A、B、C 是任意的集合，则

(1) $A\preccurlyeq\cdot A$。

(2) 若 $A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $B\preccurlyeq\cdot A$，则 $A\approx B$。

(3) 若 $A\preccurlyeq\cdot B$ 且 $B\preccurlyeq\cdot C$，则 $A\preccurlyeq\cdot C$。

由定理 5.8 可知，两个集合之间的优势关系是一种偏序关系。

定理 5.9 $\mathbf{R}\approx[a,b]\approx(c,d)\approx\{0,1\}^{\mathbf{N}}\approx\rho(\mathbf{N})$，其中 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，并且 $a<b$，$c<d$。

在“集合代数”一章，经常提到有穷集和无穷集的概念，将有穷集定义为有限个元素的集合，将无穷集定义为无限个元素的集合，下面通过定义自然数和自然数集合给出有穷集和无穷集的更为精确的定义。

定义 5.11 用空集和 n^+（称为 n 的后继，是紧跟在 n 后面的自然数）可以把所有的自然数定义为集合，即

$$0=\varnothing$$

$$n^+=n\cup\{n\},\quad \forall n\in\mathbf{N}$$

【例 5.17】 根据自然数的定义，写出自然数 1、2、3 的集合定义如下：

$1=0^+=0\cup\{0\}=\varnothing\cup\{\varnothing\}=\{\varnothing\}=\{0\}$

$2=1^+=1\cup\{1\}=\{\varnothing\}\cup\{\{\varnothing\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}=\{0,1\}$

$3=2^+=2\cup\{2\}=\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\cup\{\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\{0,1,2\}$

根据自然数的集合定义和集合代数的知识可以推导出自然数的一些性质如下：

(1) 对任何自然数 n，有 $n\approx n$。

(2) 对任何自然数 n,m，若 $m\subset n$，则 $m\not\approx n$。

(3) 对任何自然数 n,m，若 $m\in n$，则 $m\subset n$。

(4) 对任何自然数 n,m，则下面 3 个式子：

$$m\in n,m\approx n,n\in m$$

必成立其一且仅成立其一，这个性质称为自然数的三歧性。

(5) 对任何自然数 n,m，有

$$m=n\Leftrightarrow m\approx n$$

$$m<n\Leftrightarrow m\in n$$

下面用集合的势定义有穷集和无穷集。

定义 5.12 一个集合是有穷集当且仅当它与某个自然数等势。如果一个集合不是有穷集,则称作无穷集。

【例 5.18】 由于

$$\{a,b,c\}\approx\{0,1,2\}=3$$

所以$\{a,b,c\}$是有穷集,而 **N** 和 **R** 都是无穷集,因为没有自然数与 **N** 和 **R** 等势。

下面给出集合基数的定义。

定义 5.13

(1) 对于有穷集合 A,称 A 的元素个数为 A 的基数,记作 $\text{card}A$(也可以记作$|A|$)。

(2) 自然数集合 **N** 的基数记作$\aleph_0$,即 $\text{card}\mathbf{N}=|\mathbf{N}|=\aleph_0$。$\aleph_0$读作“阿列夫零”。

(3) 实数集 R 的基数记作$\aleph$,即 $\text{card}\mathbf{R}=|\mathbf{R}|=\aleph$。$\aleph$读作“阿列夫”。

下面定义基数的相等和大小。

定义 5.14 设 A,B 为集合,则

(1) $\text{card}A=\text{card}B\Leftrightarrow A\approx B$。

(2) $\text{card}A\leqslant\text{card}B\Leftrightarrow A\leqslant\cdot B$。

(3) $\text{card}A<\text{card}B\Leftrightarrow\text{card}A\leqslant\text{card}B\land\text{card}A\neq\text{card}B\Leftrightarrow A<\cdot B$。

【例 5.19】 以下集合的基数关系是成立的:

(1) $\text{card}\mathbf{Z}=\text{card}\mathbf{Q}=\text{card}\mathbf{N}\times\mathbf{N}=\text{card}\mathbf{N}=\aleph_0$。

(2) $\text{card}\rho(\mathbf{N})=\text{card}2^{\mathbf{N}}=\text{card}(a,b)=\text{card}[c,d]=\text{card}\mathbf{R}=\aleph$。

(3) $\aleph_0<\aleph$。

(4) 对于任意集合 A,满足 $\text{card}A<\text{card}\rho(A)$,这说明不存在最大的基数。

将已知的基数按从小到大的顺序排列就得到:

$$0,1,2,\cdots,n,\cdots,\aleph_0,\cdots\aleph,\cdots$$

其中,$0,1,2,\cdots,n,\cdots$恰好是全体自然数,n 是有穷集合的基数,也称有穷基数,而$\aleph_0,\cdots\aleph,\cdots$是无穷集合的基数,也称作无穷基数。$\aleph_0$是最小的无穷基数,而$\aleph$后面还有更大的无穷基数,如 $\text{card}\rho(\mathbf{R})$。$\aleph_0$和$\aleph$告诉我们,即使都是无穷基数,在集合等势的定义下,也可以比较大小。

定义 5.15 设 A 为集合,若 $\text{card}A\leqslant\aleph_0$,则称 A 为可数集或可列集。

对于任何的可数集,它的元素都可以排列成一个有序图形。换句话说都可以找到一个“数遍”集合中全体元素的顺序。

【例 5.20】 $\{a,b,c\}$,5,自然数集 **N**,整数集 **Z**,有理数集 **Q**,$\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ 等都是可数集。实数集 **R** 不是可数集。自然数集 **N** 的幂集 $\rho(\mathbf{N})$不是可数集。与 **R** 等势的集合也不是可数集。

可数集具有以下性质:

(1) 可数集的任何子集都是可数集。

(2) 两个可数集的并是可数集。

(3) 两个可数集的笛卡儿积是可数集。

(4) 可数个可数集的笛卡儿积仍是可数集。

(5) 无穷集 A 的幂集 $\rho(A)$ 不是可数集。

【例 5.21】

(1) 计算下列集合 A、B、C、D、E 的基数：$A=\{a,b,c\}$，$B=\{x\mid x=n^2 \wedge n\in\mathbf{N}\}$，$C=\{x\mid x=n^7 \wedge n\in\mathbf{N}\}$，$D=B\cap C$，$E=B\cup C$。

(2) 求平面上所有圆心在 x 轴上的单位圆的集合 F 的基数。

(3) 设 G、H 为集合，并且 $\mathrm{card}G=\aleph_0$，$\mathrm{card}H=n$，n 是自然数且 $n\neq 0$。求 $\mathrm{card}G\times H$。

解： (1) $\mathrm{card}A=3$。

构造双射函数 $f:\mathbf{N}\to B$，$f(n)=n^2$，因此 $\mathrm{card}B=\aleph_0$。

构造双射函数 $f:\mathbf{N}\to C$，$f(n)=n^7$，因此 $\mathrm{card}C=\aleph_0$。

$\mathrm{card}(D)=\mathrm{card}(B\cap C)=\{x\mid x=n^{2\times 7} \wedge n\in\mathbf{N}\}=\aleph_0$。

两个可数集的并是可数集，因此 $\mathrm{card}E=\mathrm{card}B\cup C=\aleph_0$。

(2) $F=\{\langle(x,0),1\rangle\mid x\in\mathbf{R}\}$，其中 $(x,0)$ 表示圆心，1 表示半径，则可构造双射函数 $f:\mathbf{R}\to F$，$f(x)=\langle(x,0),1\rangle$，因此 $\mathrm{card}B=\aleph$。

(3) 解法一：构造双射函数 $f:G\times H\to\mathbf{N}$。

由 $\mathrm{card}G=\aleph_0$，$\mathrm{card}H=n$，可知 G、H 都是可数集。令

$$G=\{g_0,g_1,g_2,\cdots\}$$

$$H=\{h_0,h_1,h_2,\cdots,h_{n-1}\}$$

对任意的 $\langle g_i,h_j\rangle$，$\langle g_k,h_l\rangle\in G\times H$，$i,k=0,1,2,\cdots$，$j,l\in\mathbf{N}$，有

$$\langle g_i,h_j\rangle=\langle g_k,h_l\rangle\Leftrightarrow i=k \ \wedge\ j=l$$

定义函数 $f:G\times H\to\mathbf{N}$，

$$f(\langle g_i,h_j\rangle)=i\times n+j,\quad i=0,1,\cdots,j=0,1,\cdots,n-1$$

易见 f 是 $G\times H$ 到 $\mathbf{N}$ 的双射函数，所以

$$\mathrm{card}G\times H=\mathrm{card}\mathbf{N}=\aleph_0$$

解法二：使用可数集的性质求解。

因为 $\mathrm{card}G=\aleph_0$，$\mathrm{card}H=n$，所以 G、H 都是可数集。由于两个可数集的笛卡儿积是可数集，所以 $G\times H$ 也是可数集，所以

$$\mathrm{card}G\times H\leqslant\aleph_0$$

由于 $\mathrm{card}H=n$，n 是自然数且 $n\neq 0$，则 $H\neq\varnothing$，因此

$$\mathrm{card}G\leqslant\mathrm{card}G\times H$$

这就推出

$$\aleph_0\leqslant\mathrm{card}G\times H$$

综合上述得到

$$\mathrm{card}G\times H=\aleph_0$$

5.4 函数实验

5.4.1 函数及其性质判断实验

18min

【实验 5.1】 函数及其性质判定。

本实验判定输入的二元关系是否为函数,如果是函数,则进一步判断函数的单射性、满射性和双射性。首先定义关系及函数的头文件,代码如下:

```
//第 5 章/ functionRelation.h: 关系及函数的头文件
#include <stdio.h>
#define MaxSize 100                          //集合最大尺寸
void createSet(int A[],int n)
{ //创建集合
  for(int k = 0;k < n;k++)
    A[k] = k + 1;
}
void printSet(int A[],int n)
{ //输出集合元素
  for(int i = 0;i < n;i++)
    printf(" %3d",A[i]);
  printf("  }\n");
}
void createRelationMatrix(int M[][MaxSize],int m)
{ //创建函数的关系矩阵,m 表示关系元素个数
  int i,j;
  printf("输入 %d 个关系有序对<i,j>,格式为 i,j\n",m);
  for(int k = 0;k < m;k++)
  {
    scanf(" %d, %d",&i,&j);
    M[i - 1][j - 1] = 1;
  }
}
void printRelationMatrix(int M[][MaxSize],int nA,int nB)
{ //输出 nA×nB 关系矩阵
  printf("关系矩阵为\n");
  for(int i = 0;i < nA;i++)
  {
    for(int j = 0;j < nB;j++)
      printf(" %3d",M[i][j]);
    printf("\n");
  }
}
int isFunction(int M[][MaxSize],int nA,int nB)
{ //判断关系矩阵 M 是否为函数,如果是函数,则返回 1,否则返回 0
  int s;
  for(int i = 0;i < nA;i++)
```

```
  {
    s = 0;
    for(int j = 0;j < nB;j++)
      s += M[i][j];
    if(s == 0 || s > 1)                    //s == 0 表示 domF≠A,s > 1 表示函数值不唯一
      return 0;
  }
  return 1;
}
int isSurjection(int M[][MaxSize],int nA,int nB)
{ //判断函数是否为满射,如果是满射,则返回 1,否则返回 0
  int s;
  for(int j = 0;j < nB;j++)
  {
    s = 0;
    for(int i = 0;i < nA;i++)
      s += M[i][j];
    if(s == 0)
      return 0;
  }
  return 1;
}
int isInjection(int M[][MaxSize],int nA,int nB)
{ //判断函数是否为单射,如果是单射,则返回 1,否则返回 0
  int s;
  for(int j = 0;j < nB;j++)
  {
    s = 0;
    for(int i = 0;i < nA;i++)
      s += M[i][j];
    if(s > 1)
      return 0;
  }
  return 1;
}
int isBijection(int M[][MaxSize],int nA,int nB)
{ //判断函数是否为双射,如果是双射,则返回 1,否则返回 0
  return isSurjection(M,nA,nB)&&isInjection(M,nA,nB);
}
```

然后编写主函数测试头文件中的代码,代码如下:

```
//第 5 章/ functionRelation.cpp
#include < stdio.h >
#include "functionRelation.h"
#define MAXSIZE 100                          //关系定义域和值域的最大长度
void main()
{
```

```
    int M[MaxSize][MaxSize] = {0};          //关系 R 的关系矩阵 M,R 为从 A 到 B 的关系
    int A[MaxSize] = {0};                   //定义关系定义域集合 A(元素为 1,2,...)
    int nA;                                 //定义关系定义域集合 A 的元素个数
    int B[MaxSize] = {0};                   //定义关系值域集合 B(元素为 1,2,...)
    int nB;                                 //定义关系值域集合 B 的元素个数
    int m;                                  //关系集合 R 的元素个数
    printf("输入关系定义域集合的元素个数 nA = ");
    scanf("%d",&nA);
    createSet(A,nA);
    printf("输入关系定义域集合的元素个数 nB = ");
    scanf("%d",&nB);
    createSet(B,nB);
    printf("定义域集合 A = {");
    printSet(A,nA);
    printf("值域集合 B = {");
    printSet(B,nB);
    printf("输入关系集合的元素个数 m = ");
    scanf("%d",&m);
    createRelationMatrix(M,m);
    printRelationMatrix(M,nA,nB);
    if (isFunction(M,nA,nB) == 0)
      printf("不是 A→B 函数。\n");
    else
    {
      printf("是 A→B 函数。\n");
      if (isSurjection(M,nA,nB) == 0)
        printf("不是 A→B 满射函数。\n");
      else
        printf("是 A→B 满射函数。\n");
      if (isInjection(M,nA,nB) == 0)
        printf("不是 A→B 单射函数。\n");
      else
        printf("是 A→B 单射函数。\n");
      if (isBijection(M,nA,nB) == 0)
        printf("不是 A→B 双射函数。\n");
      else
        printf("是 A→B 双射函数。\n");
    }
}
```

下面运行主函数 main 举例测试函数及其性质的判定程序。给点集合 A,B 和二元关系 f,判断是否构成函数 $f:A\to B$,并判断该函数是否为单射的、满射的、双射的。

(1) $A=B=\{1,2,3,4,5\}$,$f=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 1,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 5,4\rangle\}$,程序测试结果如下:

```
输入关系定义域集合的元素个数 nA = 5
输入关系定义域集合的元素个数 nB = 5
```

```
定义域集合 A = {  1  2  3  4  5  }
值域集合 B = {  1  2  3  4  5  }
输入关系集合的元素个数 m = 5
输入 5 个关系有序对< i,j >,格式为 i,j
1,3
3,2
1,5
2,1
5,4
关系矩阵为
  0  0  1  0  1
  1  0  0  0  0
  0  1  0  0  0
  0  0  0  0  0
  0  0  0  1  0
不是 A→B 函数。
```

(2) $A=B=\{1,2,3,4,5\}$，$f=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 5,4\rangle\}$，程序测试结果如下：

```
输入关系定义域集合的元素个数 nA = 5
输入关系定义域集合的元素个数 nB = 5
定义域集合 A = {  1  2  3  4  5  }
值域集合 B = {  1  2  3  4  5  }
输入关系集合的元素个数 m = 5
输入 5 个关系有序对< i,j >,格式为 i,j
1,3
3,4
4,5
2,1
5,4
关系矩阵为
  0  0  1  0  0
  1  0  0  0  0
  0  0  0  1  0
  0  0  0  0  1
  0  0  0  1  0
是 A→B 函数。
不是 A→B 满射函数。
不是 A→B 单射函数。
不是 A→B 双射函数。
```

(3) $A=B=\{1,2,3,4,5\}$，$f=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,5\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 5,4\rangle\}$，程序测试结果如下：

```
输入关系定义域集合的元素个数 nA = 5
输入关系定义域集合的元素个数 nB = 5
```

```
定义域集合 A = {  1  2  3  4  5  }
值域集合 B = {  1  2  3  4  5  }
输入关系集合的元素个数 m = 5
输入 5 个关系有序对< i,j >,格式为 i,j
1,3
3,2
4,5
2,1
5,4
关系矩阵为
  0  0  1  0  0
  1  0  0  0  0
  0  1  0  0  0
  0  0  0  0  1
  0  0  0  1  0
是 A→B 函数。
是 A→B 满射函数。
是 A→B 单射函数。
是 A→B 双射函数。
```

(4) $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{1,2,3\}$,$f=\{\langle 1,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 5,2\rangle\}$,程序测试结果如下：

```
输入关系定义域集合的元素个数 nA = 5
输入关系定义域集合的元素个数 nB = 3
定义域集合 A = {  1  2  3  4  5  }
值域集合 B = {  1  2  3  }
输入关系集合的元素个数 m = 5
输入 5 个关系有序对< i,j >,格式为 i,j
1,3
3,2
4,3
2,1
5,2
关系矩阵为
  0  0  1
  1  0  0
  0  1  0
  0  0  1
  0  1  0
是 A→B 函数。
是 A→B 满射函数。
不是 A→B 单射函数。
不是 A→B 双射函数。
```

(5) $A=\{1,2\}$,$B=\{1,2,3\}$,$f=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,3\rangle\}$,程序测试结果如下：

```
输入关系定义域集合的元素个数 nA = 2
输入关系定义域集合的元素个数 nB = 3
```

```
定义域集合 A = {   1   2   }
值域集合 B = {   1   2   3   }
输入关系集合的元素个数 m = 2
输入两个关系有序对< i,j >,格式为 i,j
1,2
2,3
关系矩阵为
  0   1   0
  0   0   1
是 A→B 函数。
不是 A→B 满射函数。
是 A→B 单射函数。
不是 A→B 双射函数。
```

5.4.2　主关键字查找函数实验

9min

【实验 5.2】　主关键字查找函数实验。

查找在计算机科学中可以这样定义：在一些(有序的/无序的)数据元素中，通过一定的方法找出与给定关键字相同的数据元素的过程叫作查找。也就是根据给定的某个值，在查找表中确定一个关键字等于给定值的记录或数据元素。查找通常包括以下几个基本概念：

(1) 查找表(Search Table)是由同一类型的数据元素(或记录)构成的集合。

(2) 关键字(Key)是数据元素中某个数据项的值，又称键值，用它既可以标识一个数据元素，也可以标识一个记录的某个数据项(字段)，称为关键码。

(3) 主关键字(Primary Key)是可以唯一标识一个记录的关键字。

(4) 次关键字(Secondary key)是可以识别多个数据元素(或记录)的关键字。也可以理解为不以唯一标识一个数据元素(或记录)的关键字，对应的数据项就是次关键码。

例如某名学生考研成绩的查找表见表 5.1。表中有 4 条记录，每条记录包括考号、姓名、政治、英语、数学和专业课 6 个数据项，其中考号数据项是主关键字，每名考生的考号都是不同的，它可以唯一标识一条记录。

表 5.1　考研成绩表

考号	姓名	政治	英语	数学	专业课
10144001	李明	65	62	90	100
10144002	王刚	70	65	100	105
10144003	刘鹏	50	50	80	90
10144004	张莉	75	75	115	130

可以按照如下设计建立考研成绩表的函数关系，$f: A \to B$，

$$A = \{\text{考号}\}$$

$$B = \{(\text{考号},\text{姓名},\text{政治},\text{英语},\text{数学},\text{专业课})\}$$

$$f = \{\langle x, y\rangle \mid x \in A \wedge y \in B \wedge x = y.\text{考号}\}$$

例如,若 $x=10144002$,则 $y=f(x)=(10144002$,王刚,$70,65,100,105)$。

本实验建立考研成绩表集合,输入任意一个考号,查询出对应考生的考研成绩,代码如下:

```
//第 5 章/ primaryKeySearch.cpp
#include <stdio.h>
#include <string.h>
struct examinee
{
  char cNumber[20];                  //考号
  char name[10];                     //姓名
  int politics;                      //政治
  int english;                       //英语
  int math;                          //数学
  int sCourse;                       //专业课
};
void main()
{
  struct examinee e[4];              //定义一个结构体数组
  int i;
  char cno[20];                      //要查找成绩的考生考号
  printf("请按格式: 考号 姓名 政治 英语 数学 专业课输入考试信息\n");
  for (i = 0; i< 4; i++)             //接收用户输入的信息
  {
    printf("请输入第%d个学生的信息:\n", i + 1);
    scanf("%s%s%d%d%d%d",&e[i].cNumber,&e[i].name,&e[i].politics,
            &e[i].english,&e[i].math,&e[i].sCourse);
  }
  for (i = 0; i< 4; i++)             //输出考研信息
  {
    printf("第%d个学生的信息:", i + 1);
    printf("考号:%s,姓名:%s,政治:%d,英语:%d,数学:%d,专业课:%d\n",e[i].cNumber,
            e[i].name,e[i].politics, e[i].english, e[i].math,e[i].sCourse);
  }
  printf("请输入要查找成绩的考生考号:");
  scanf("%s",&cno);
  for (i = 0; i< 4; i++)
  if (strcmp(e[i].cNumber, cno) == 0)
  {
    printf("考号:%s,姓名:%s,政治:%d,英语:%d,数学:%d,专业课:%d\n",e[i].cNumber,
            e[i].name,e[i].politics,e[i].english,e[i].math,e[i].sCourse);
    break;
  }
  if (i==4)
  printf("考号不存在!\n");
}
```

程序运行结果示例如下:

```
请按格式：考号 姓名 政治 英语 数学 专业课输入考试信息
请输入第 1 个学生的信息：
10144001 李明 65 62 90 100
请输入第 2 个学生的信息：
10144002 王刚 70 65 100 105
请输入第 3 个学生的信息：
10144003 刘鹏 50 50 80 90
请输入第 4 个学生的信息：
10144004 张莉 75 75 115 130
第 1 个学生的信息：考号:10144001,姓名:李明,政治:65,英语:62,数学:90,专业课:100
第 2 个学生的信息：考号:10144002,姓名:王刚,政治:70,英语:65,数学:100,专业课:105
第 3 个学生的信息：考号:10144003,姓名:刘鹏,政治:50,英语:50,数学:80,专业课:90
第 4 个学生的信息：考号:10144004,姓名:张莉,政治:75,英语:75,数学:115,专业课:130
请输入要查找成绩的考生考号:10144002
考号:10144002,姓名:王刚,政治:70,英语:65,数学:100,专业课:105
```

5.4.3　定义在自然数集合上的函数实验

8min

【实验 5.3】　定义在自然数集合上的函数实验。

当用计算机编程求解问题时，需要进行算法设计。算法性能的好坏取决于运行时间和占用存储空间的多少，一般来讲，对于解决相同的问题，运行时间、占用空间少的算法是比较好的算法。估计算法运行时间的方法是：选择一个基本运算，对于给定问题规模 n 的输入，计算算法所做的基本运算的次数，将这个次数表示为输入规模 n 的函数 $f(n)$，例如，输入一个正整数 n，下面设计两个判断该数是否为素数的算法。素数是指在大于 1 的自然数中，除了 1 和它本身以外不再有其他因数的自然数。

算法 1：依次判断 $2,3,\cdots,n-1$ 是否能整除 n，若均不能整除，则 n 是素数，否则 n 不是素数。

算法 2：依次判断 $2,3,\cdots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ 是否能整除 n，若均不能整除，则 n 是素数，否则 n 不是素数。

算法 1 的道理不言自明，算法 2 省去从 $\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1,\cdots,n-1$ 的判断，因为假设某个数 x 能整除 n，$\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1\leqslant x\leqslant n-1$，则必然存在整数 y，$x\cdot y=n$，并且 $2\leqslant y\leqslant n-1$，则 y 也能整除 n。

算法 1 和算法 2 的基本运算为判定某个数是否能整除 n，可以用在最坏情况下判定总次数的多少来衡量两个算法的性能优劣，显然，n 越大，算法的运行时间越长，算法 1 在最坏情况下的总判定次数为问题规模 n 的函数

$$f_1(n)=n-2$$

算法 2 在最坏情况下总判定次数为问题规模 n 的函数

$$f_2(n)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1$$

这里的函数 f_1 和 f_2 都是定义在自然数集合上的函数，可以通过比较函数 f_1 和 f_2 的阶来比较算法 1 和算法 2 的优劣，函数的阶越高，表示随着 n 的增大，函数值增长得越快，算法的复杂度就越高，常用的函数的阶由低到高包括

$$\log n, n, n\log n, n^2, 2^n$$

其中，$\log n$ 是 $\log_2 n$ 的简写。2^n 是一种指数阶函数，当 n 比较大时，对于一个指数阶的算法即使最先进的计算机也不能在允许的时间内求解，这就是所谓的“指数爆炸”问题。

在算法分析中，为了表示函数的阶，经常使用下述符号：

若存在正数 c 和 n_0，使对于一切 $n \geqslant n_0$，有 $0 \leqslant f(n) \leqslant cg(n)$，记作 $f(n)=O(g(n))$。

若存在正数 c 和 n_0，使对于一切 $n \geqslant n_0$，有 $0 \leqslant cg(n) \leqslant f(n)$，记作 $f(n)=\Omega(g(n))$。

若 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n)=\Omega(g(n))$，则有 $f(n)=\Theta(g(n))$。

在前面的算法 1 中，$f_1(n)=n-2$，则 $f_1(n)=\Theta(n)$，在算法 2 中，$f_2(n)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1$，则 $f_2(n)=\Theta(\sqrt{n})$，而 $f(n)=\Theta(1)$ 常数阶函数。

下面采用 C 语言编程实现算法 1 和算法 2，输出 2～100 的所有素数，并在程序中设置计数变量统计判定语句的执行次数，最后分别输出两个算法的总判定次数，代码如下：

```
//第 5 章/ DecisionPrime.cpp
#include <stdio.h>
#include <math.h>
void main()
{
  int count1 = 0,count2 = 0;
  int i,j,m;
  printf("算法 1 判定的素数有");
  for(i = 2;i <= 100;i++)                    //算法 1
  {
    for(j = 2;j <= i - 1;j++)
    {
      count1++;
      if(i % j == 0)
        break;                               //不是素数
    }
    if (j == i)
      printf(" %3d",i);
  }
  printf("\n 算法 1 的判定总次数 = %d",count1);
  printf("\n 算法 2 判定的素数有");
  for(i = 2;i <= 100;i++)                    //算法 2
  {
    m = int(sqrt(i));
    for(j = 2;j <= m;j++)
    {
      count2++;
```

```
        if(i % j == 0)
          break;                        //不是素数
      }
      if (j == m + 1)
        printf(" % 3d",i);
    }
    printf("\n 算法 2 的判定总次数 = % d\n",count2);
}
```

程序运行结果如下：

```
算法 1 判定的素数有 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
算法 1 的判定总次数 = 1133
算法 2 判定的素数有 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97
算法 2 的判定总次数 = 248
```

习题 5

一、判断题（正确打√，错误打×）

1. 设 $X=\{1,2,3,4\}$，f 是 X 上的关系，并且 $f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,2\rangle\}$，则 f 不是从 X 到 X 的函数。（　　）
2. 设 $X=\{1,2,3,4\}$，f 是 X 上的关系，并且 $f=\{\langle 1,4\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$，则 f 是从 X 到 X 的函数。（　　）
3. 设 $\mathbf{N}$ 是自然数集合，f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(j)=j^2+2$，则 f 是单射函数。（　　）
4. 设 $\mathbf{N}$ 是自然数集合，f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，$f(j)=j \bmod 3$，则 f 是满射函数。（　　）
5. 当 X 和 Y 都是有限集合时，若 f：$X\to Y$ 是双射函数，则 $|X|=|Y|$。（　　）
6. 当 X 和 Y 都是有限集合时，若 f：$X\to Y$ 是单射函数，则 $|X|\leqslant|Y|$。（　　）
7. 当 X 和 Y 都是有限集合时，若 f：$X\to Y$ 是满射函数，则 $|X|\geqslant|Y|$。（　　）
8. 设 $X=\{1,2,3\}$，$Y=\{a,b\}$，则从 X 到 Y 的函数共有 2^3 个。（　　）
9. 若 f 和 g 均为从 X 到 Y 的函数，则 $f\cap g$ 也是从 X 到 Y 的函数。（　　）
10. 设 $\mathbf{Z}$ 是整数集，$\mathbf{N}$ 是自然数集，则 $\mathbf{Z}\approx\mathbf{N}$。（　　）

二、选择题（单项选择）

1. 设 $\mathbf{N}_+$ 是正自然数集合，$\mathbf{R}$ 是实数集合，f：$\mathbf{N}_+\to\mathbf{R}$，$f(n)=\log_{10}n$，则（　　）。

   A. f 是单射　　B. f 是满射

   C. f 是双射　　D. 以上都不是

2. 设函数 f：$X\to Y$，当 f 是（　　）时，f 有反函数 f^{-1}：$Y\to X$。

   A. 单射　　B. 满射　　C. 双射　　D. 函数

3. 集合 $X=\{a,b,c\}$ 到集合 $Y=\{1,2\}$ 共有几种满射函数？（　　）

   A. 3　　B. 6　　C. 8　　D. 9

4．若 f 和 g 是满射函数，则 $f\circ g$ 必是(　　)函数。

A．单射　　B．满射

C．双射　　D．以上都不对

5．设函数 $f: X\to Y$，当且仅当 f 是(　　)时，f 有反函数 $f^{-1}: \mathrm{ran}f\to X$。

A．单射　　B．满射　　C．双射　　D．函数

三、填空题

1．设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$Y=\{a,b\}$，则可定义________种不同的从 X 到 Y 的函数。

2．设 $A=\{1,2,3\}$，$f,g,h: A\to A$，其中 $f=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，$g=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,2\rangle\}$，$h=\{\langle 1,3\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle\}$，则函数________是单射的，________是满射的，________是双射的。$f^{-1}=$________，$g^{-1}=$________，$h^{-1}=$________，$f\circ g=$________，$g\circ h=$________。f^{-1}、g^{-1}、h^{-1}、$f\circ g$、$g\circ h$ 中，________是函数。$\mathrm{dom}f=$________，$\mathrm{ran}h=$________，$g(\{1,3\})=$________，$f^{-1}(\{1\})=$________。

3．设 $\mathbf{R}$ 是实数集合，$f,g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2$，$g(x)=2^x$，则 $f\circ g=$________，$g\circ f=$________。

4．设 $\mathbf{R}$ 是实数集合，$f,g: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-x+2$，$g(x)=x-3$，则 $f\circ g(x)=$________。

5．$f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=x^2-3x+2$，则 $f(\{1,3\})-f^{-1}(\{-6\})=$________。

6．设 A，B 是集合，如果存在着从 A 到 B 的________函数，就称 A 和 B 是等势的，记作 $A\approx B$。

四、解答题

1．设 $\mathbf{C}$、$\mathbf{R}$、$\mathbf{Z}$、$\mathbf{N}$ 均分别代表复数级、实数集、整数集及自然数集。针对下列给定的集合 A、B 与二元关系 $f(f\subseteq A\times B)$，判断 f 是否为 A 到 B 的函数。如果不是，则说明理由。

(1) $A=B=\mathbf{R}$，$xfy\Leftrightarrow x^2=y^2$。

(2) $A=B=\mathbf{R}^+$，$xfy\Leftrightarrow x^2=y^2$。

(3) $A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{Z}$，$xfy\Leftrightarrow x^2=y^3$。

(4) $A=\mathbf{N}$，$B=\mathbf{Z}$，$xfy\Leftrightarrow x^3=y^2$。

(5) $A=\mathbf{C}$，$B=\mathbf{C}$，$x=a+bi$，$y=c+di$，$xfy\Leftrightarrow a=c$。

2．设 f、g 均为 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 上的函数，$f(x)=x+3$，$g(x)=2x+1$。

(1) 求函数 $f\circ g$ 和 $g\circ f$。

(2) 讨论 f、g 是单射的、满射的还是双射的？

3．设 f、g 均为 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 上的函数，$f(n)=n+1$，

$$g(n)=\begin{cases}0, & n\text{ 为偶数}\\ 1, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

求函数 $f\circ f$、$f\circ g$、$g\circ f$ 和、$g\circ g$。

4．设 f 与 g 都是函数，$f\cup g$ 还一定是函数吗？为什么？

5．设 f 与 g 都是函数，证明 $f\cap g$ 也是函数。

6. 设 $f, g: \mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(\langle x,y\rangle)=x+y$，$g(\langle x,y\rangle)=x\cdot y$，证明：$f, g$ 都是满射的，但都不是单射的。

7. 设 $\mathbf{R}$ 为实数集，判断下列 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是否为单射的和满射的，如果不是，则说明理由。

(1) $f(x)=2^x$。

(2) $f(x)=\lfloor x\rfloor$，符号 $\lfloor\cdot\rfloor$ 表示下取整。

(3) $f(x)=\begin{cases}(2x-1)/(x-1), & x\neq 1\\ 0, & x=1\end{cases}$。

(4) $f(x)=2^x+x$。

(5) $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$。

(6) $f(x)=x^3-x^2$。

(7) $f(x)=\begin{cases}x\ln|x|, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$。

(8) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x+1}, & x\in\mathbf{R}^+\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{R}^+\end{cases}$。

(9) $f(x)=\sin x$。

8. 设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$f(x)=\sin x+1$，计算

(1) $f\left(\left\{0,\dfrac{3\pi}{2}\right\}\right)$。

(2) $f^{-1}\left(\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)\right)$。

(3) $f^{-1}(\{0\})$。

9. 针对给定的集合 A 和 B，构造双射函数 $f: A\to B$。

(1) $A=\rho(\{a,b,c,d\})$，$B=\{0,1\}^{\{a,b,c,d\}}$。

(2) $A=[-1,1)$，$B=(2,4]$。

(3) $A=\{2^n\mid n\in\mathbf{N}\}$，$B=\mathbf{N}-\{0,1,2\}$。

10. 证明以下结论：

(1) 设 $f: A\to B$，$g: B\to A$，并且 $f\circ g=I_A$，证明 f 是单射的，g 是满射的。

(2) 设 $f: A\to B$，$g: B\to A$，$h: B\to A$，并且满足 $f\circ g=f\circ h=I_A$，$g\circ f=h\circ f=I_B$，证明 $g=h$。

11. 设 $A=\{2x\mid x\in\mathbf{N}\}$，证明 $A\approx\mathbf{N}$。

12. 设 A、B、C、D 是任意集合，$A\approx C$，$B\approx D$，证明 $A\times B\approx C\times D$。

13. 设 A，B 为可数集，证明下面结论：

(1) $A\cup B$ 是可数集。

(2) $A\times B$ 是可数集。

14. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{a,b,c\}$,令 $C=\{f \mid f: A\to B \wedge f$ 是满射的$\}$,求 card$C$。

15. 设 A、B 为任意两个集合,证明:如果 $A\approx B$,则 $\rho(A)\approx\rho(B)$,$\rho(A)$和 $\rho(B)$分别是 A 和 B 的幂集。

16. 编程实验:任意给定用二元关系表示的函数 f,编写一个 C 语言程序求 f 的定义域、值域、反函数,以及 $f\circ f$,并判断 f 是否是单射的、满射的或双射的。