# 第5章 二次型

在平面解析几何中, 对于二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2=d,$$

总能找到适当的坐标旋转变换 $\begin{cases} x=x'\cos\theta-y'\sin\theta, \\ y=x'\sin\theta+y'\cos\theta, \end{cases}$ 将其化为标准形

$$a'x'^2+c'y'^2=d.$$

从标准形中判断曲线的类型比较容易, 便于研究曲线的性质, 例如下面这个经典的问题:

**【例 5.1】** 已知平面 $\mathbf{R}^2$ 上一条曲线的方程为 $3x^2+3y^2+4xy=1$, 分别求曲线上到原点的距离最长和最短的点.

**【解析 1】** 大部分同学第一时间想到的方法应该是多元微积分中的拉格朗日函数法. 构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(3x^2+3y^2+4xy-1)$, 则

$$\begin{cases} L'_x=2x+6\lambda x+4\lambda y=0, \\ L'_y=2y+6\lambda y+4\lambda x=0, \\ L'_\lambda=3x^2+3y^2+4xy-1=0. \end{cases}$$

由前两个方程消去参数 $\lambda$ 可得 $\dfrac{6x+4y}{6y+4x}=\dfrac{x}{y}$, 化简可得 $(x+y)(x-y)=0$, 即 $x=y$ 或 $x=-y$.

将 $x=-y$ 代入第三个方程得 $2x^2=1$, 即驻点为 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

将 $x=y$ 代入第三个方程得 $10x^2=1$, 即驻点为 $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 和 $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10},-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$.

综上所述, 一共有 4 个可能的极值点, 这些极值点到原点的距离分别为 1 和 $\dfrac{1}{5}$. 因此, 点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和点 $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 到原点的距离最远, 且距离为 1; 点 $\left(\dfrac{\sqrt{10}}{10},\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 和点 $\left(-\dfrac{\sqrt{10}}{10},-\dfrac{\sqrt{10}}{10}\right)$ 到原点的距离最近, 且距离为 $\dfrac{1}{5}$.

**【解析 2】** 使用坐标旋转变换 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y', \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'. \end{cases}$ 在此变换下, 原曲线方程可化为标准方程 $5x'^2+y'^2=1$. 显然, 这是一条椭圆曲线, 变换后的曲线上的点到原点的最长距离和最短距离分别为 1 和 $\dfrac{1}{5}$, 距离最长

的点为 $(0,\pm1)$, 距离最短的点为 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{5}},0\right)$. 将这些坐标代入旋转变换可得原坐标分别为

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\quad \left(\frac{\sqrt{10}}{10},\frac{\sqrt{10}}{10}\right),\quad \left(-\frac{\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10}\right).$$

我们注意到, 曲线旋转后到原点的最远距离和最近距离的长度不变, 只有对应的坐标改变了. 在线性代数中, 旋转变换属于正交变换, 所以它有保持几何形状不变的性质.

线性代数主要研究线性运算与线性变换. 而二次型并不在其中. 然而, 二次型可以用矩阵表示, 因此二次型的研究可以借助线性代数的工具来进行.

尽管二次型的概念源自对二次曲线和二次曲面的研究, 但是由此引出的正定矩阵概念已经独立于二次型的原始背景. 正定矩阵在数值分析、数值线性代数、最优控制以及当前备受关注的机器学习等多个领域都有广泛的应用.

## 5.1 二次型的基本概念

含有 $n$ 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \tag{5.1.1}$$

称为二次型. 特别地, 如果 $n$ 元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 只含有 $x_i$ 的平方项, 即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots+k_nx_n^2, \tag{5.1.2}$$

那么称式(5.1.2)为二次型的标准形. 如果系数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 只在 $1, -1, 0$ 这三个数中取值, 即

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-x_{p+2}^2-\cdots-x_r^2, \tag{5.1.3}$$

那么称式(5.1.3)为二次型的规范形. 利用矩阵, 二次型(5.1.1) 可以表示为

$$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{5.1.4}$$

不难看出, 任给一个二次型, 可以确定无数个矩阵, 使得该二次型可以写成形如式(5.1.4)的矩阵形式, 比如

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$$=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}.$$

这无疑给我们利用矩阵的方法研究二次型带来了困难. 在 4.4 节, 我们看到, 对称矩阵具有许多良好的性质. 例如, 它的所有特征值都是实数, 它一定可以对角化, 而且还可以进行正交对角化. 因此, 数学家们规定:

> **【知识点 5.1】** 二次型的矩阵是对称矩阵.

这样一来, 给定一个二次型, 就唯一地确定了一个对称矩阵; 反之, 给定一个对称矩阵, 也可以唯一地确定一个二次型. 因此, 二次型与对称矩阵之间存在一一对应的关系. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 称为二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵, $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 称为对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的二次型. 对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩称为二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩. 同时, 标准形的矩阵是对角矩阵.

**【例 5.2】** (1995 • 数三 21 节选) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$. 写出二次型 $f$ 的矩阵表达式.

**【解析】** 因为二次型的矩阵是对称矩阵, 所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵表达式为

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

二次型的一个中心问题是寻找可逆的线性变换

$$\begin{cases}x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n,\\x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n,\\\qquad\qquad\vdots\\x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n,\end{cases}\tag{5.1.5}$$

将二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形.

记 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}$, 则可逆变换 (5.1.5)可以写成

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}.$$

将 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 代入二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 有

$$f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}=g(\boldsymbol{y}).$$

如果二次型 $g(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 是标准形, 那么矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角阵.

### 5.1.1 矩阵的合同关系

**【知识点 5.2】** 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是 $n$ 阶矩阵, 若有可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

显然, 矩阵间的合同关系是一种等价关系, 满足

(1) 反身性: 每一个方阵都与它自身合同. 这是因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}$.

(2) 对称性: 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, 则 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 也合同. 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 及矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可逆可得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{C}^{-1}$.

(3) 传递性: 如果 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 合同, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 也合同. 由 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 及 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ 可得 $\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})$.

显然, 若 $\boldsymbol{A}$ 对称, 则 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也对称, 且 $r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})$. 由此可知, 经可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 后, 二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵由 $\boldsymbol{A}$ 变为与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$, 且二次型的秩不变.

【例 5.3】 (2001 • 数三 21) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=n$, $A_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形是否相同? 说明理由.

【解析】 (1) 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的矩阵形式为

$$f(\boldsymbol{x})=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{A}^*}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}.$$

因为 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是实对称矩阵, 所以二次型的对称矩阵形式为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

(2) 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 合同, 故二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 有相同的规范形.

### 5.1.2 惯性指数

二次型的标准形中正系数的个数称为二次型的正惯性指数, 负系数的个数称为二次型的负惯性指数. 若二次型 $f$ 的正惯性指数为 $p$, 秩为 $r$, 则 $f$ 的规范形便可确定为

$$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-y_{p+2}^2-\cdots-y_r^2.$$

**【结论总结 5.1】** 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同当且仅当它们有相同的正、负惯性指数.

【注】 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的正、负特征值个数.

### 5.1.3 矩阵的等价、相似与合同

矩阵的等价、相似与合同是同型矩阵的三种不同的关系, 它们既有区别又有一定的联系.

- **矩阵等价** 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 是指存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$, 等价矩阵一定可以通过初等变换互相转化, 其本质特征是具有相同的秩 (充要条件).
- **矩阵相似** 对于两个方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似. 两个相似矩阵必有相同的特征值, 但有相同的特征值仅仅是两矩阵相似的必要条件. 对于两个实对称矩阵, 有相同的特征值是它们相似的充要条件. 对于更一般的情形, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似的充分必要条件是 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 等价.
- **矩阵合同** 对于两个对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$, 则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 两个矩阵合同的充要条件是它们对应的二次型有相同的规范形. 在实数域中, 两个同型对称矩阵合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数 (即有相同的正特征值个数与相同的负特征值个数).

从以上描述可以知道, 两矩阵的相似或合同关系是等价关系, 相似与合同一般没有从属关系. 我们既能找到合同但不相似的矩阵, 又能找到相似但不合同的矩阵. 例如,

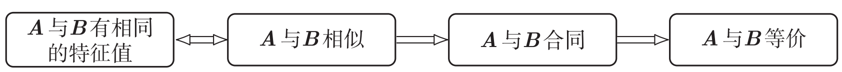
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \text{ 与 } \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0\\0&4\end{pmatrix}$$

是合同的, 因为它们的正惯性指数都是 2, 负惯性指数都是 0. 但 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 却不相似, 因为它们的特征值不相同. 再比如

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix} \text{ 与 } \quad \boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$$

是相似的, 因为 $\boldsymbol{C}$ 互异的两个特征值与 $\boldsymbol{D}$ 互异的两个特征值相同, 即它们都能对角化于同一矩阵. 但是 $\boldsymbol{D}$ 不是对称矩阵, 所以 $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 不合同.

如果两个矩阵都对称, 则有图 5-1 中的关系.




$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为同型的实对称矩阵

图 5-1

【例 5.4】 (2008 • 数二 8、数三 8) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}$, 则在实数域上与 $\boldsymbol{A}$ 合同的矩阵为 (　　).

A. $\begin{pmatrix}-2&1\\1&-2\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$　　C. $\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}1&-2\\-2&1\end{pmatrix}$

【解析】 因为 $|\boldsymbol{A}|=-3$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值异号, 故先判断矩阵的行列式是否小于零. 只有选项 D 满足题意. 故选 D.

一定要注意这种方法只适合于二阶矩阵.

【例 5.5】 (2022 • 数二 8、数三 5) 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是 (　　).

A. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$　　B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$

C. 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$　　D. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$

【解析】 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 因而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 具有相同的特征值, 从而可以得到 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$. 反之, 如果 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 $1,-1,0$, 则 $\boldsymbol{A}$ 必可相似对角化, 因此, $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{\Lambda}$ 相似, 从而存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$. 故选 B.

还可以判定其余三个选项不正确: 两个矩阵等价未必有相同的特征值, 故 A 不正确; 由于 $\boldsymbol{A}$ 不一定是实对称矩阵, 因此不一定可以正交相似对角化, 故 C 不正确; 两个矩阵合同, 不一定具有相同特征值, 即 D 不正确.

【例 5.6】 (2007 • 数一 8、数二 10、数三 8) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

A. 合同, 且相似　　B. 合同, 但不相似

C. 不合同, 但相似　　D. 既不合同, 也不相似

【解析】 显然 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是对称矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 3, 3, 0, $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 1, 1, 0, 所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值不同, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 不相似. $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 的正特征值和零特征值的个数分别相同, 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同. 故选 B.

【例 5.7】 (2001 • 数一 6) 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$(　　).

A. 合同且相似　　B. 合同但不相似　　C. 不合同但相似　　D. 不合同且不相似

【解析】 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都对称, 且显然 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1,1,1,1)$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 4, 0, 0, 0. 显然 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值. 故 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似且合同. 故选 A.

【例 5.8】 (1997 • 数三 9) 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵, 则 (　　).

A. $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$　　B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$

C. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{B}$　　D. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{Q}$, 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$

【解析】 显然选项 A 不一定正确. 两个同阶可逆矩阵不一定相似, 也不一定合同, 比如取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$, 则特征值不相同, 故不相似, 而且对应二次型的正、负惯性指数不同, 故也不合同, 因此选项 BC 也不正确; 对于选项 D, 因为 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为同阶可逆矩阵, 所以 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 而 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价, 这等价于存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ 使 $\boldsymbol{PAQ}=\boldsymbol{B}$. 故选 D.

## 5.2 三种方法化二次型为标准形

二次型的一个中心问题是如何寻找可逆的线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 化为标准形. 这等价于求矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 是对角矩阵.

一般来说, 这个问题有三种解法, 它们分别是正交变换、合同变换和配方法.

### 5.2.1 正交变换

用正交变换将二次型转化成标准形, 具有保持几何形状不变的优点. 对于任意对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总有正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{\Lambda}$. 把此结论应用于二次型, 即有如下结论:

**【知识点 5.3】** 任给二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 总有正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 使 $f$ 转化为标准形

$$f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

**【例 5.9】** (2024 • 数二 22) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&b\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 但 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 不同解.

(1) 求 $a,b$ 的值;

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 使 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形.

**【解析】** (1) 由题意可知方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 故

$$r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=r(\boldsymbol{A}).$$

因为 $r(\boldsymbol{A})=2$, 所以 $r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2$, 对 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$ 进行初等行变换可得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&a\\1&0&1\\1&1&2\\1&1&b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&a-1\\0&0&b-2\end{pmatrix},$$

故 $a=1,b=2$.

(2) 由 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$ 可知二次型的矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&2\\2&2&4\end{pmatrix}$.

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-2\\-1&\lambda-1&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-6),$$

得 $\boldsymbol{C}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=6$.

对 $\lambda_1=\lambda_2=0$, 令方程组 $(0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 解得两个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(-2,0,1)^{\mathrm{T}}$. 显然 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 不正交, 由施密特正交化可得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2)}{(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

单位化可得

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{\|\boldsymbol{\beta}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^{\mathrm{T}},\qquad \boldsymbol{q}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{\|\boldsymbol{\beta}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)^{\mathrm{T}}.$$

$\lambda_3=6$, 令方程组 $(6\boldsymbol{E}-\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 解得单位化的特征向量为 $\boldsymbol{q}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^{\mathrm{T}}$. 令

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Q}$ 为正交矩阵, 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 可化为标准形 $6y_3^2$.

**【方法总结 5.1】** 用正交变换法化二次型 $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 为标准形的方法与步骤如下.

(1) 求出 $\boldsymbol{A}$ 的全部实特征值.

(2) 对每一个 $n_i$ 重特征值 $\lambda_i$, 解方程组 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 求出 $n_i$ 个线性无关的特征向量.

(3) 检验多重特征值的特征向量是否有正交性. 如果没有正交性, 那么用施密特正交化的方法把对应 $\lambda_i$ 的 $n_i$ 个线性无关的特征向量正交化.

(4) 将所有正交的特征向量单位化得 $\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{q}_n$, 以它们为列向量构造正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\cdots,\boldsymbol{q}_n).$$

(5) 作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 得

$$f(\boldsymbol{Qy})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2.$$

现在 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{AQ}$ 为对角矩阵, 其主对角线上的元素 $\lambda_i$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值, 其排列顺序与 $\boldsymbol{Q}$ 中正交单位向量 $\boldsymbol{q}_i$ 的排列顺序相对应.

【变式 5.9.1】 (2012 • 数一 21、数二 23、数三 21) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$, 二次型 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ 的秩为 2.

(1) 求 $a$;

(2) 求二次型对应的二次型矩阵, 并将二次型化为标准型, 写出正交变换过程.

【变式 5.9.2】 (2022 • 数二 22、数三 21 节选) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_3$. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

【变式 5.9.3】 (2003 • 数三 20) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$, 其中二次型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1, 特征值之积为 $-12$.

(1) 求 $a$, $b$ 的值;

(2) 利用正交变换将二次型 $f$ 化为标准形, 并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

【例 5.10】 (2017 • 数一 21、数二 23、数三 21) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$, 在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 求 $a$ 的值及一个正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

【解析】 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$. 因为 $f$ 的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 所以 $\boldsymbol{A}$ 必有一个特征值为 0, 即 $|\boldsymbol{A}|=6-3a=0$, 解得 $a=2$.

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)$, 所以它的特征值为 $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=0$, 可求得它们所对应的单位特征向量分别为

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}.$$

故所求正交矩阵

$$\boldsymbol{Q}=(\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

**【变式 5.10.1】** (2002 • 数一 4) 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 可化为标准型 $f=6y_1^2$, 则 $a=$______.

**【变式 5.10.2】** (2009 • 数一 21、数二 23、数三 21) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1) 求二次型 $f$ 的矩阵的所有特征值;

(2) 若二次型 $f$ 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$, 求 $a$ 的值.

**【例 5.11】** (2022 • 数一 21) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}ijx_ix_j$.

(1) 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵.

(2) 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形.

(3) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

**【解析】** (1) 该二次型的二次型矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$.