

第3章

曲线积分(仅限数学一)

曲线积分, 顾名思义, 与曲线密切相关. 对于平面曲线, 我们知道它有四种表达方式; 而空间曲线只有两种表达方式, 分别总结如下:

平面曲线	{	显性表示:	$y = f(x), a \leq x \leq b$ 或 $x = g(y), c \leq y \leq d$.
		参数方程表示:	$x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$.
		极坐标方程表示:	$r = r(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$.
		隐性表示:	$F(x, y) = 0$.
空间曲线	{	参数方程表示:	$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$.
		一般式表示:	$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$.

显然, 平面曲线与空间曲线的表达方式有一个共同之处, 就是它们都有参数方程表示. 这也是高等数学中与曲线积分有关的计算公式基本上都用参数方程推导的缘由.

3.1 曲线的弧长

设空间曲线的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b.$$

首先, 我们利用经典的积分思想“分割、近似求和与取极限”来推导出参数方程的弧长公式.

(1) 分割: 对区间 $[a, b]$ 划分, 记为 $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, 得到这条曲线上 (见图3-1) 依次排列的 $n+1$ 个点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$, 其中 $P_i = (x(t_i), y(t_i), z(t_i)), i = 1, 2, \cdots, n$.

(2) 近似求和: 利用线段 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 的长度去近似 $\widehat{P_{i-1}P_i}$ 的弧长, 求和可得

$$s_n = \sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2 + [z(t_i) - z(t_{i-1})]^2}.$$

若 $x(t), y(t)$ 和 $z(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 中可导, 则由拉格朗日中值定理, 存在 ξ_i, η_i 和 ζ_i , 属于 (t_{i-1}, t_i) , 满足

$$x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\xi_i) \Delta t_i,$$

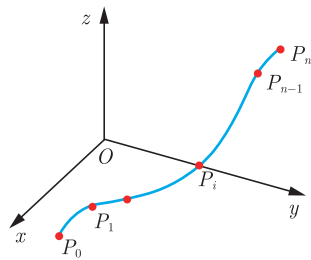


图 3-1

$$y(t_i) - y(t_{i-1}) = y'(\eta_i) \Delta t_i,$$

$$z(t_i) - z(t_{i-1}) = z'(\zeta_i) \Delta t_i.$$

于是

$$\sum_{i=1}^n \overline{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\xi_i)]^2 + [y'(\eta_i)]^2 + [z'(\zeta_i)]^2} \Delta t_i.$$

由于 ξ_i, η_i 和 ζ_i 一般不会相同, 上式还不是黎曼和

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(\alpha_i)]^2 + [y'(\alpha_i)]^2 + [z'(\alpha_i)]^2} \Delta t_i, \quad \alpha_i \in (t_{i-1}, t_i) \quad (3.1.1)$$

的形式, 但两者已相当接近了. 可以证明, 黎曼和 (3.1.1) 的极限值就是曲线的弧长.

对上述最后一个等式使用微分中值定理, 得

$$s_n = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(a_i)]^2 + [y'(a_i)]^2 + [z'(a_i)]^2} \Delta t_i,$$

其中 $a_i \in (t_{i-1}, t_i)$, Δt_i 是 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 的长度.

(3) 取极限:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$$

将上述讨论总结如下:

【知识点 3.1】 若曲线由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ 决定, 则其弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt. \quad (3.1.2)$$

下面我们给出平面曲线在不同表达方式下的弧长公式.

(1) 显性表示: 若曲线 L 在直角坐标系下的方程为 $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, 则可以将其转化为参数方程, 即 $x = t$, $y = f(t)$, $t \in [a, b]$, 所以

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

(2) 极坐标表示: 若曲线 L 在极坐标系下的方程为 $r = r(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, 则可以将其转化为参数方程, 即 $x = r(\theta) \cos \theta$, $y = r(\theta) \sin \theta$, $\theta \in [\alpha, \beta]$, 因此

$$\begin{cases} x'(\theta) = r'(\theta) \cos \theta - r(\theta) \sin \theta \\ y'(\theta) = r'(\theta) \sin \theta + r(\theta) \cos \theta \end{cases} \Rightarrow [x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2 = [r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2.$$

故

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[r(\theta)]^2 + [r'(\theta)]^2} d\theta.$$

(3) 参数方程表示: 若曲线 L 的参数方程为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$, 则

$$s = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

【例 3.1】 (2019 数二 12) 曲线 $y = \ln \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$) 的弧长为 _____.

【解析】 由弧长计算公式可得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+y'^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{1+\tan^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sec x dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\cos^2 x} d \sin x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{1-\sin^2 x} d \sin x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2} du = \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2(1+u)} + \frac{1}{2(1-u)} \right] du \\ &= \frac{1}{2} \ln(1+u) - \ln(1-u) \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[\ln \frac{3}{2} - \ln \frac{1}{2} \right] = \frac{\ln 3}{2}. \end{aligned}$$

【例 3.2】 (1996 数一 3) 求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ 的全长, 其中 $a > 0$ 是常数.

【解析】 由极坐标系下的弧微分公式, 得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{2(\cos \theta + 1)} d\theta \\ &= 2a \int_0^{2\pi} \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta = 2a \left(\int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta - \int_{\pi}^{2\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta \right) = 8a. \end{aligned}$$

【例 3.3】 (1995 数二 12) 求摆线 $\begin{cases} x = 1 - \cos t \\ y = t - \sin t \end{cases}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) 的弧长.

【解析】 由参数方程的弧微分公式, 得

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos t)} dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{t}{2}} dt \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 8. \end{aligned}$$

我们发现能求弧长的曲线很多, 但是这些曲线里面没有椭圆, 原因很简单, 没有椭圆周长的公式. 椭圆周长不能用初等函数表示, 只能用无穷级数或者积分来表示.

设椭圆的参数方程为 $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 由弧长公式可得椭圆的周长为

$$C = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt.$$

该公式中的被积函数的原函数是一个超越函数, 因而积分无法算出.

【变式 3.3.1】 (2011 数一 9) 曲线 $y = \int_0^x \tan t dt$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$) 的弧长 $s =$ _____.

【变式 3.3.2】 (2010 数二 12) 当 $0 \leq \theta \leq \pi$ 时, 对数螺线 $r = e^\theta$ 的弧长为 _____.

3.2 第一型曲线积分

3.2.1 第一型曲线积分的定义

第一型曲线积分 $\int_L f(x, y, z) \, ds$ 的最简单的物理背景是曲线的质量. 设空间中一曲线 L 上分布着质量, 任意一点 (x, y, z) 处的面密度由分布函数 $f(x, y, z)$ 确定, 则式 $\int_L f(x, y, z) \, ds$ 表示曲线的质量 M . 至于如何计算, 思路与之前也是相同的: 分割、近似求和再取极限.

(1) 分割: 先把曲线 L 分成一些小线段, 记为 $\Delta L_1, \Delta L_2, \dots, \Delta L_n$, 并记 ΔL_i 的弧长为 Δs_i .

(2) 近似求和: 在每段 ΔL_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) , 当每个 ΔL_i 的长度 Δs_i 都很小时, 每一小段的质量就近似等于 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i$, 于是整个 L 的质量就近似等于

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i.$$

(3) 取极限: 当对 L 的分割越来越细时, 上述近似值的极限就是 L 的质量, 即

$$\int_L f(x, y, z) \, ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta s_i. \quad (3.2.1)$$

3.2.2 第一型曲线积分的计算

现在讨论如何计算第一型曲线积分. 假设曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [a, b].$$

因为 $ds = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt$, 所以

$$\int_L f(x, y, z) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} \, dt.$$

从定义可以看出, 第一型曲线积分与积分路径的方向无关 (也可以从第一型曲线积分的物理背景思考, 质量是没有方向的), 所以将它转化为定积分时的积分下限一定小于上限, 即 $a < b$. 之所以强调这个, 是因为后面的第二型曲线积分与积分的路径有关, 将它转化为定积分时, 其积分上限不一定大于下限. 仿照 3.1 节的推导, 我们可以给出不同情形下第一型曲线积分的公式.

(1) 显性表示: 若平面曲线 L 在直角坐标系下的方程为 $y = g(x)$, $x \in [a, b]$, 则

$$\int_L f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + [g'(x)]^2} \, dx.$$

(2) 极坐标表示: 若平面曲线 L 在极坐标系下的方程为 $r = r(\theta), \theta \in [\alpha, \beta]$, 则

$$\int_L f(x, y) \, ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta) \cos \theta, r(\theta) \sin \theta) \sqrt{[r'(\theta)]^2 + [r(\theta)]^2} d\theta.$$

(3) 参数方程表示: 若平面曲线 L 的参数方程为 $x = x(t), y = y(t), t \in [a, b]$, 则

$$\int_L f(x, y) \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt. \quad (3.2.2)$$

【例 3.4】 (1989 数一 3) 设平面曲线 L 为下半圆周 $y = -\sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) \, ds =$ _____.

【解析 1】 因为下半圆的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, \pi \leq t \leq 2\pi$, 所以

$$\int_L (x^2 + y^2) \, ds = \int_{\pi}^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2} dt = \pi.$$

【解析 2】 因为下半圆的方程为 $x^2 + y^2 = 1$, 由于被积函数定义在积分曲线上, 所以

$$\int_L (x^2 + y^2) \, ds = \int_L 1 \, ds = \pi.$$

解析 2 用到了曲线积分独有的性质: 可以利用曲线方程化简被积函数. 这条性质在定积分、二重积分和三重积分中都是没有的, 因为它们的积分区域由不等式给出, 而曲线积分的积分区域由等式给出.

【经验总结 3.1】 曲线积分中, 可以利用曲线的方程简化被积函数.

【例 3.5】 (2009 数一 11、数二 11) 已知曲线 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 则 $\int_L x \, ds =$ _____.

【解析】 因为 $L: y = x^2 (0 \leq x \leq \sqrt{2})$, 所以 $ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + 4x^2} dx$. 故

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} x \sqrt{1 + 4x^2} \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 4x^2} \, d(1 + 4x^2) = \frac{1}{12} \left(\sqrt{1 + 4x^2} \right)^3 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{13}{6}.$$

【变式 3.5.1】 计算 $I = \int_L (x^2 + y^2) \, ds$, 其中 L 为曲线 $x = a \cos t, y = a \sin t (0 \leq t \leq \pi)$.

【变式 3.5.2】 计算 $I = \int_L e^{\sqrt{x^2 + y^2}} \, ds$, 其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 直线 $y = x$ 及 x 轴在第一象限所围图形的边界 (见图3-2).

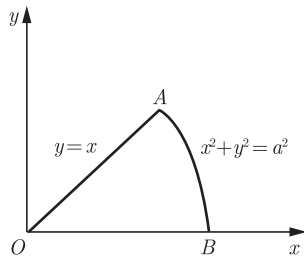


图 3-2

【例 3.6】 已知一条非均匀金属线 L 的方程为 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, 0 \leq t \leq 1$, 它在每点的线密度与该点到原点的距离的平方成反比, 而且在点 $(1, 0, 1)$ 处的线密度为 1, 求它的质量.

【解析】 由题意, 金属线 L 在点 (x, y, z) 处的线密度为

$$\rho(x, y, z) = \frac{k}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{k}{2e^{2t}},$$

其中 k 为常数. 由 $\rho(1, 0, 1) = 1$ 得 $k = 2$, 所以 $\rho(x, y, z) = e^{-2t}$. 因此

$$M = \int_L \rho(x, y, z) ds = \int_0^1 e^{-2t} \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} \int_0^1 e^{-t} dt = \sqrt{3} (1 - e^{-1}).$$

3.2.3 空间曲线的参数化

空间曲线除了可以用参数方程来表示, 也可以看成某两个曲面的交线, 即空间曲线的一般式 (更多细节见 1.6.4 节). 我们的目标是求曲线积分, 但是对于空间曲线的第一型曲线积分, 只有参数方程容易计算, 所以需要将空间曲线的一般方程化为参数方程.

1. 两个方程都含有三个变量. 消元获得一个二元方程表达式, 然后借助二元方程的参数方程, 写出两个变量的参数表达式, 并代入其中一个方程解出另一变量关于参数的表达式.

【例 3.7】 将曲线 L 的一般方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \end{cases}$ 化为参数方程.

【解析】 图 3-3 为交线的图像. 两方程作差可得 $z = \frac{R}{2}$, 故 $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}R^2$, 它的参数方程为 $x = \frac{\sqrt{3}}{2}R \cos t, y = \frac{\sqrt{3}}{2}R \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 因此该曲线的参数方程为

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}R \cos t, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}R \sin t, \quad z = \frac{R}{2}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

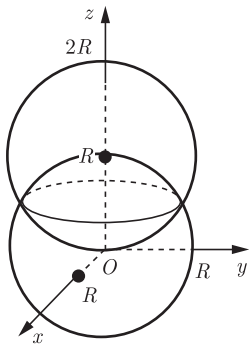


图 3-3

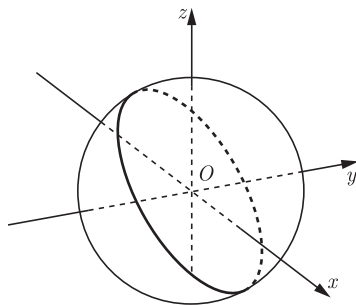


图 3-4

【例 3.8】 (2018 数一 12) 计算 $\int_L xy ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

【解析】 图 3-4 为交线的图像. 消元可得 $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = 1$, 化简可得 $(x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{1}{2}$, 所以

$$\text{可设} \begin{cases} x + \frac{y}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t \\ y = \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \text{ 代入 } x + y + z = 0 \text{ 可得}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t, \quad y = \frac{2}{\sqrt{6}} \sin t, \quad z = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos t - \frac{1}{\sqrt{6}} \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

经计算可得 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 1$, 于是

$$\int_L z^2 \, ds = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \sin t \cos t - \frac{1}{3} \sin^2 t \right) dt = -\frac{1}{3}.$$

【注】 若将例题中的平面方程改为 $x + y + z = 1$, 同学们可以尝试一下还能不能计算上述的曲线积分. 在 3.2 节我们将会看到利用轮换对称性, 计算量将大大降低.

【变式 3.8.1】 将曲线 L 的一般方程
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1 \end{cases}$$
 化为参数方程.

【变式 3.8.2】 将曲线 L 的一般方程
$$\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \end{cases}$$
 化为参数方程.

【变式 3.8.3】 计算 $\int_L z^2 \, ds$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 的交线.

2. 有一个方程只含有两个变量. 首先给出这两个变量的参数方程, 然后利用另外一个方程解出第三个变量的参数表达式.

【例 3.9】 将曲线 L 的一般方程
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$
 化为参数方程.

【解析】 图3-5为两曲面相交的图像, 图3-6为交线的图像. 将第二个方程改写为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$, 它的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos t, y = \frac{a}{2} \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 将该参数方程代入第一个方程可求得 $z =$

$a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t}$, 因此

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \quad y = \frac{a}{2}\sin t, \quad z = a\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

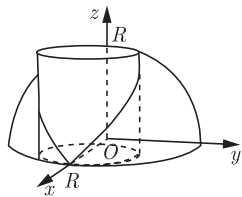


图 3-5

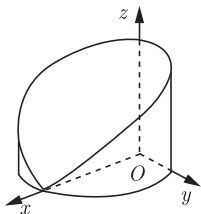


图 3-6

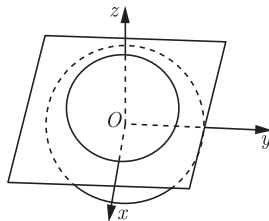


图 3-7

【例 3.10】 计算 $I = \int_L y^2 ds$, 其中 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + z = a$ 的交线.

【解析】 图 3-7 为交线的图像. 将第二个方程代入第一个方程消去变量 z 可得 $2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}$, 它的参数方程为 $x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$. 由 $z = a - x$ 可得 $z = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos t$, 于是

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos t, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}}\sin t, \quad z = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

经计算可得 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = \frac{1}{2}a^2$, 于是

$$I = \int_L y^2 ds = \frac{a^3}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \frac{a^3}{2\sqrt{2}}\pi.$$

【变式 3.10.1】 将曲线 L 的一般方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$ 化为参数方程.

【变式 3.10.2】 将曲线 L 的一般方程 $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2z \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ 化为参数方程.

3.3 第一型曲线积分的对称性

第一型曲线积分的奇偶性与轮换对称性和二重积分的奇偶性与轮换对称性 (知识点 2.6) 非常相似, 只要将二重积分换为曲线积分, 平面区域换成平面曲线或空间曲线即可.

【结论总结 3.1】 (1) 奇偶性: 若曲线 L 的方程中的 x 可以替换成 $-x$, 则

$$\int_L f(x, y, z) \, ds = \begin{cases} 2 \int_{L_1} f(x, y, z) \, ds, & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 是关于 } x \text{ 的偶函数} \\ 0, & \text{若 } f(x, y, z) \text{ 是关于 } x \text{ 的奇函数} \end{cases}, \quad (3.3.1)$$

其中 L_1 是 L 中 $x > 0$ 的部分, 且结论(3.3.1)对 y 和 z 也成立.

(2) 轮换对称性: 若曲线 L 的方程中的 x 与 y 可以互换, 则

$$\int_L f(x, y, z) \, ds = \int_L f(y, x, z) \, ds. \quad (3.3.2)$$

结论(3.3.2)对 x, z 互换与 y, z 互换也成立.

3.3.1 平面曲线上的第一型曲线积分的对称性

【例 3.11】 (1998 数一 3) 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长为 a , 则 $\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) \, ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 因为曲线方程中的 x 可以替换成 $-x$, $2xy$ 关于 x 为奇函数, 所以

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) \, ds = \oint_L 2xy \, ds + 12 \oint_L \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \right) \, ds = 0 + 12 \oint_L 1 \, ds = 12a.$$

【变式 3.11.1】 计算 $I = \int_L (x^3 \cos y + 3x^2 + 4y^2) \, ds$, 其中曲线 $L: x^2 + y^2 = 1$.

【变式 3.11.2】 设曲线 $L: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的周长和所围成的面积分别为 L 和 S , 证明 $\int_L (b^2 x^2 + 2xy + a^2 y^2) \, ds = \frac{LS}{\pi^2}$.

3.3.2 空间曲线上的第一型曲线积分的对称性

接下来, 我们处理一类空间曲线积分, 其积分曲线都是平面与球面的交线. 为此, 我们先回顾一下高中所学的关于球的知识.

若平面与球面相交, 则该交线一定是圆. 如果球心还落在平面上, 则该圆一定是大圆. 大圆是指圆的半径与球的半径相等, 图3-8 为一过球心的平面与球的交线的示意图. 如果平面不过球心 (见图3-9), 那么我们可以利用关系式 $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ 确定圆的半径, 其中 d 是球心到平面的距离.

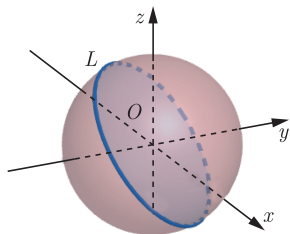


图 3-8

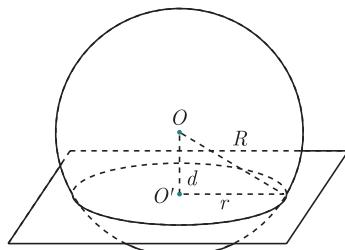


图 3-9

【例 3.12】 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 计算曲线积分:

$$(1) I_1 = \int_L (x^2 + y^2 + 2z) ds; \quad (2) I_2 = \int_L (xy + yz + zx) ds.$$

【解析】 因为球面的方程 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 中的 x, y, z 可以两两互换, 平面 $x + y + z = 0$ 中的 x, y, z 也可以两两互换, 所以它们两者的交线 L 也一定满足 x, y, z 能两两互换. 故

$$\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds = \frac{1}{3} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = \frac{a^2}{3} \int_L ds,$$

$$\int_L x ds = \int_L y ds = \int_L z ds = \frac{1}{3} \int_L (x + y + z) ds = \frac{1}{3} \int_L 0 ds = 0.$$

这里利用了曲线 L 的方程. 注意到 L 过球心, 所以 L 的半径为 a , 故 L 的周长为 $2\pi a$, 因此

$$I_1 = \int_L (x^2 + y^2 + 2z) ds = \int_L x^2 ds + \int_L y^2 ds + 2 \int_L z ds = \frac{4}{3} \pi a^3,$$

$$I_2 = \int_L (xy + yz + zx) ds = \frac{1}{2} \int_L (x + y + z)^2 ds - \frac{1}{2} \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = -\pi a^3.$$

【例 3.13】 (2018 数一 12) 曲线 L 由 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x + y + z = 0$ 相交而成, 则 $\oint_L xy ds =$ _____.

【解析】 因为球面的方程 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 中的 x, y, z 可以两两互换, 平面 $x + y + z = 0$ 中的 x, y, z 也可以两两互换, 所以它们两者交线 L (见图3-8) 的方程中的 x, y, z 也一定能两两互换. 故

$$\oint_L xy ds = \oint_L xz ds = \oint_L yz ds = \frac{1}{3} \oint_L (xy + xz + yz) ds.$$

这里利用了曲线 L 的方程. 注意到 L 过球心, 所以 L 的半径为 1, 故 L 的周长为 2π , 因此

$$\oint_L xy ds = \frac{1}{3} \oint_L (xy + yz + zx) ds = \frac{1}{6} \int_L [(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)] ds = -\frac{1}{3} \pi.$$

【变式 3.13.1】 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 和平面 $x + y + z = 1$ 的交线, 计算曲线积分: (1) $I_1 = \int_L [(x+1)^2 + (y-2)^2] ds$; (2) $I_2 = \int_L yz ds$; (3) $I_3 = \int_L (x+y^2) ds$.

【例 3.14】 设 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $x = y$ 的交线, 计算曲线积分: (1) $I_1 = \int_L y^2 ds$; (2) $I_2 = \int_L 2y^2 + z^2 ds$.

【分析】 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 满足轮换对称性, 但是平面 $x = y$ 只满足 x 与 y 的轮换, 不满足它们与 z 的轮换, 也就是说 $\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds$ 是对的, 而 $\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds = \int_L z^2 ds$ 是错的. 因此对于第一个积分我们只能利用 3.1 节的参数方程的方法. 对于第二个积分, 因为 $\int_L x^2 ds = \int_L y^2 ds$, 所以 $I = \int_L 2y^2 + z^2 ds = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds = a^2 \int_L ds$.

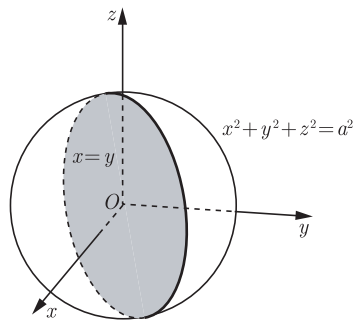


图 3-10

【解析】 (1) 将 $x = y$ 代入球面方程可得 $2x^2 + z^2 = a^2$, 它的参数方程为 $x = \frac{1}{\sqrt{2}}a \cos t$, $z = a \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. 注意到 $x = y$, 因此曲线 L (见图3-10) 的参数方程为

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}a \cos t, \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}a \cos t, \quad z = a \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

经计算可得 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2 = 2a^2$, 于是

$$I_1 = \int_L y^2 ds = \frac{\sqrt{2}}{2}a^3 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi a^3.$$

(2) 由轮换对称性可知 $I_2 = a^2 \int_L ds = 2\pi a^3$.

3.4 第二型曲线积分

3.4.1 第二型曲线积分的定义

第二型曲线积分在物理学中有大量应用, 比如电磁学中的环量、力学中的做功以及流体力学中的流量等. 相信大家最熟悉的应该是物理学中的做功.

在初中, 我们学过力对物体所做的功等于力与物体在力的方向上移动的距离的乘积, 功的表达式为 $W = Fs$, 其中 F 表示力, s 表示沿力的方向移动的距离, W 表示功.

在高中, 力对物体所做的功要稍微复杂一点, 此时力的方向不一定是物体移动的方向. 假设力的大小保持不变, 力的方向与物体移动的方向始终保持夹角 θ , 则此时 $W = Fs \cos \theta$.

若利用我们在高中数学所学的向量来表示力与做功, 则可用向量 $\mathbf{F}$ 表示力, 且物体在该力的作用下从 A 移动到 B , 则 $W = \mathbf{F} \cdot \overrightarrow{AB}$.

在大学, 我们学到的力对物体所做的功要比高中更复杂一点, 此时力的方向不变但大小是变化的, 记为 $F(x)$. 若物体在该力的作用下沿直线从 $x = a$ 移动到 $x = b$, 则此时做功的表达式为 $W = \int_a^b F(x) dx$.

现在, 我们考虑更一般的情形, 即力的大小在变, 方向也在变, 且物体不是直线运动, 而是沿着某一曲线运动. 对这个过程用数学语言描述: 设 L 为空间中一条光滑曲线, 起点为 C_0 , 终点为 C_n (见图 3-11), 如何计算一个质点在力 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 的作用下沿曲线 L 从点 C_0 移动到点 C_n 所做的功?

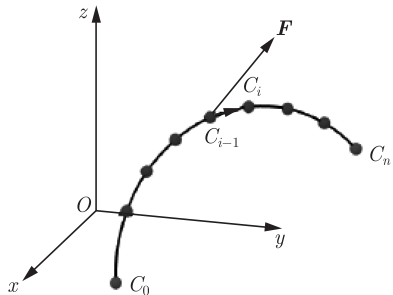


图 3-11

思路与之前也是相同的: 分割、近似求和再取极限.

(1) 分割: 先把曲线 L 分成一些小曲线段, 分段点记为 $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$.

(2) 近似求和: 质点沿弧 $\widehat{C_{i-1}C_i}$ 从 C_{i-1} 到 C_i 的运动可以近似地看成质点沿直线 $\overline{C_{i-1}C_i}$ 的运动. 设 C_i 的坐标为 (x_i, y_i, z_i) , 且 (ξ_i, η_i, ζ_i) 为 $\overline{C_{i-1}C_i}$ 上任意一点, 则 $\mathbf{F}$ 在这一小段所做的功近似等于 $\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{C_{i-1}C_i}$, 而

$$\overrightarrow{C_{i-1}C_i} = (x_i - x_{i-1}, y_i - y_{i-1}, z_i - z_{i-1}) = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i),$$

于是 $\mathbf{F}$ 在这一小段所做的功近似等于

$$\mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \overrightarrow{C_{i-1}C_i} = P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i.$$

整条曲线上做的功近似等于

$$W_n = \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i].$$

(3) 极限: 当对 L 的分割越来越细时, W_n 的极限就是 $\mathbf{F}$ 做的功 W , 即

$$\begin{aligned} W &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta y_i + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta z_i] \\ &= \int_L P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

【结论总结 3.2】 若 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 表示空间中的力, 则 $\int_L P dx + Q dy + R dz$ 表示该力沿曲线 L 所做的功.

3.4.2 第二型曲线积分的计算

现在讨论如何计算第二型曲线积分, 以 $\int_L P(x, y, z) dx$ 为例. 假设曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t: a \rightarrow b,$$

其中 $t: a \rightarrow b$ 表示参数 t 从 a 变化到 b , 这就确定了 L 的方向.

在式(3.4.1)中取 $Q = R = 0$, 又注意到式(3.4.1)的极限与 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关, 因此我们可以取 $\xi_i = x(t_i), \eta_i = y(t_i), \zeta_i = z(t_i)$, 故

$$\begin{aligned}\int_L P(x, y, z) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n P(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) x'(t_i) \Delta t \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt.\end{aligned}$$

同理可得

$$\int_L Q(x, y, z) dy = \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt,$$

$$\int_L R(x, y, z) dz = \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt.$$

【知识点 3.2】 设曲线 L 的参数方程为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t: a \rightarrow b,$$

则

$$\begin{aligned}\int_L P dx + Q dy + R dz \\ = \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t)] dt.\end{aligned}$$

仿照3.1节的推导, 下面我们给出不同情形下的第二型曲线积分的公式.

(1) 显性表示: 若平面曲线 L 在直角坐标系下的方程为 $y = g(x), x: a \rightarrow b$, 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x, g(x)) + Q(x, g(x)) g'(x)] dx.$$

(2) 平面曲线的参数方程: 若平面曲线 L 的参数方程为 $x = x(t), y = y(t), t: a \rightarrow b$, 则

$$\int_L P dx + Q dy = \int_a^b [P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t)] dt.$$

【例 3.15】 (1991 数一 17) 求曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中过点 $O(0, 0)$ 和 $A(\pi, 0)$ 的曲线 L , 沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

【解析】 图3-12为积分曲线, 由曲线积分的直接参数方法计算, 得

$$I(a) = \int_0^\pi [1 + a^3 \sin^3 x + (2x + a \sin x) a \cos x] dx$$

$$= \pi + a^3 \int_0^\pi (\cos^2 x - 1) d \cos x + 2a \int_0^\pi x d \sin x + \frac{a^2}{4} \int_0^\pi \sin 2x d 2x$$

$$= \pi + \frac{4}{3} a^3 - 4a.$$

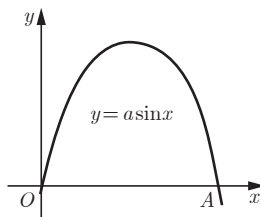


图 3-12

令 $I'(a) = 4(a^2 - 1) = 0$, 得 $a = 1$ ($a = -1$ 舍去) 且 $I''(1) = 8 > 0$. 由于 $a = 1$ 是 $I(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 内的唯一驻点, 所以 $I(a)$ 在 $a = 1$ 处取到最小值, 即所求曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$.

【例 3.16】 计算 $I = \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2}$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向.

【解析】 首先, 注意到被积函数的分母与曲线的方程一致, 所以

$$I = \int_L \frac{(x+y)dx - (x-y)dy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{a^2} \int_L (x+y)dx - (x-y)dy.$$

因为曲线 L (见图3-13) 的参数方程为 $x = a \cos t, y = a \sin t, t: 0 \rightarrow 2\pi$, 所以

$$I = \int_0^{2\pi} [(\cos t + \sin t) \cdot (-\sin t) - (\cos t - \sin t) \cdot \cos t] dt = -2\pi.$$

【注】 若将例题中的曲线方程改为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 同学们可以尝试计算上述的曲线积分. 在 3.5 节, 我们将会看到格林公式是解决这类问题的有力武器.

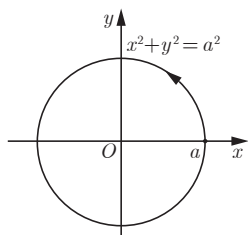


图 3-13

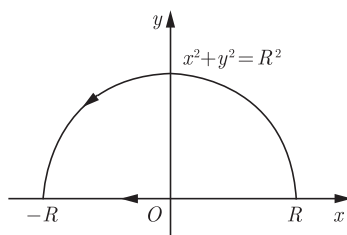


图 3-14

【例 3.17】 计算 $I = \int_L y^2 dx + x^2 dy$, 其中 L 分别为

- (I) 从点 $M(R, 0)$ 沿圆周 $x^2 + y^2 = R^2$ 的上半部分按逆时针方向到点 $N(-R, 0)$ 的圆弧 (见图 3-14);
 (II) 从点 $M(R, 0)$ 到点 $N(-R, 0)$ 的直线段 (见图3-14).

【解析】 (I) 这时 L 的参数方程为 $x = R \cos t, y = R \sin t, t: 0 \rightarrow \pi$, 因此

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi [R^2 \sin^2 t (-R \sin t) + R^2 \cos^2 t (R \cos t)] dt \\ &= R^3 \int_0^\pi [(1 - \cos^2 t) (-\sin t) + (1 - \sin^2 t) \cos t] dt \\ &= -\frac{4}{3} R^3. \end{aligned}$$

(II) 这时 L 的参数方程为 $y = 0, x: R \rightarrow -R$, 故

$$I = \int_L y^2 dx + x^2 dy = \int_R^{-R} 0 \cdot dx = 0.$$

从例3.17可以看出, 虽然两个曲线积分的被积函数相同, 起点和终点也相同, 但沿不同路径得出的积分值并不相等.

【变式 3.17.1】 (2010 数一 11) 已知曲线 L 的方程为 $y = 1 - |x| (x \in [-1, 1])$, 起点是 $(-1, 0)$, 终点是 $(1, 0)$, 如图 3-15 所示, 则曲线积分 $\int_L xy \, dx + x^2 \, dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

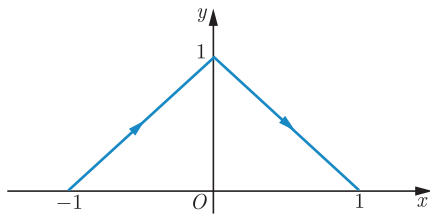


图 3-15

【变式 3.17.2】 (2004 数一 3) 设 L 为正向圆周 $x^2 + y^2 = 2$ 在第一象限中的部分 (如图 3-16 所示), 则曲线积分 $\int_L x \, dy - 2y \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

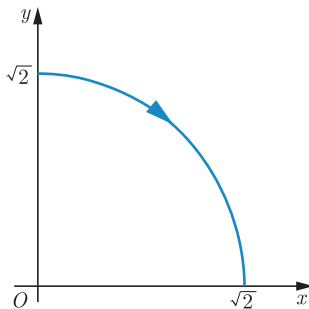


图 3-16

【例 3.18】 计算 $I = \int_L y \, dx - x \, dy + (x^2 + y^2) \, dz$, 其中 L 是曲线 $x = e^t, y = e^{-t}, z = e^{2t}, 0 \leq t \leq 1$, 方向为由点 (e, e^{-1}, e^2) 到点 $(1, 1, 1)$.

【解析】 由曲线方向可知自变量 t 从 1 变化至 0, 即 $t: 1 \rightarrow 0$. 于是

$$I = \int_L y \, dx - x \, dy + (x^2 + y^2) \, dz = \int_1^0 [2 + 2(e^{2t} + e^{-2t})e^{2t}] \, dt = -\frac{1}{2}(7 + e^4).$$

以上诸例的曲线都是平面曲线, 它们很容易写出参数方程. 但是, 对于空间曲线, 要稍微麻烦一点, 具体的方法我们已经在 3.2.3 节详细阐述过.

【例 3.19】 (2014 数学一 12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 和平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正方向看是逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L z \, dx + y \, dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 曲线 L (见图 3-17) 的参数方程为

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = -\sin t, \quad t: 0 \rightarrow 2\pi,$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_L z \, dx + y \, dz &= \int_0^{2\pi} [-\sin(-\sin t) + \sin(-\cos t)] \, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2t) \, dt - \int_0^{2\pi} \sin t \, d \sin t = \pi. \end{aligned}$$

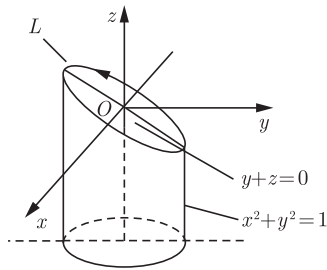


图 3-17

【变式 3.19.1】 (2011 数一 12) 设 L 是柱面方程 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = x + y$ 的交线, 从 z 轴正方向看为逆时针方向, 则曲线积分 $\oint_L xz \, dx + x \, dy + \frac{y^2}{2} \, dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 3.19.2】 计算 $I = \int_L x \, dx + y \, dy + (x + y - 1) \, dz$, 其中 L 是从点 $(1, 1, 1)$ 到点 $(2, 3, 4)$ 的直线段.

【例 3.20】 计算 $I = \int_L (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz$, 其中 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限部分的边界, 当从球面外面看时为顺时针方向.

【解析】 曲线由圆弧段 $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ 组成, 如图3-18所示. 显然这里的曲线是分段光滑的, 因此我们需要分段处理.

(1) 圆弧段 $\widehat{AB}$ 的参数方程为 $x = 0, y = \cos t, z = \sin t$, $t: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, 于是

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{AB}} (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [\sin^2 t (-\sin t) - \cos^2 t (\cos t)] \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) \, dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

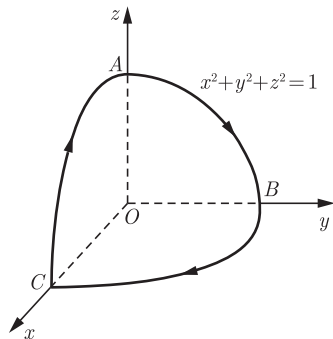


图 3-18

(2) 圆弧段 $\widehat{BC}$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = \sin t, z = 0, t: \frac{\pi}{2} \rightarrow 0$, 于是

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{BC}} (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 [\sin^2 t (-\sin t) - \cos^2 t (\cos t)] \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) \, dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(3) 圆弧段 $\widehat{CA}$ 的参数方程为 $x = \cos t, y = 0, z = \sin t, t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 于是

$$\begin{aligned} & \int_{\widehat{CA}} (y^2 - z^2) \, dx + (z^2 - x^2) \, dy + (x^2 - y^2) \, dz \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [-\sin^2 t (-\sin t) + \cos^2 t (\cos t)] \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t + \cos^3 t) \, dt = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

综上可得 $I = 4$.

【注】 本题的计算量偏大, 在第 4 章我们将会看到斯托克斯公式在处理此类第二型曲线积分问题上的优势.

3.5 格林公式

【格林公式】 设 D 为平面上一连通的闭区域, ∂D 为 D 的边界且它的方向为正方向, 若 P 和 Q 在 D 中任意一开区域内有连续的偏导数, 则

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.5.1)$$

【注】 一定要注意格林公式的三个条件: ① 曲线是所围区域的整个边界 (也就是要封闭); ② 方向为正方向; ③ 被积函数在所围区域的内部有连续的偏导数.

格林公式可以说是微积分里面最重要的公式, 因此它也是考研数学中最重要的内容之一. 在 3.6 节我们会看到格林公式被认为是多元函数的微积分基本定理. 在学习格林公式之前, 我们需要弄清楚公式中的几个重要条件.

● **什么是连通区域?** 对于 D 内任意的两点, 如果存在一条包含于 D 内的曲线能连接它们, 我们就称 D 是连通的. 形象一点就是连通区域由一块区域组成 (见图 3-19 和图 3-20), 不能是几块不相交的区域凑在一起, 如图 3-21 所示.

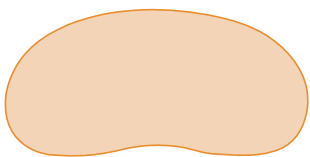


图 3-19

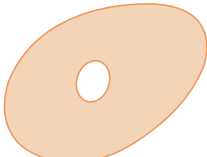


图 3-20

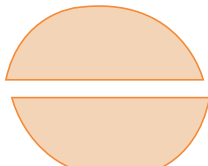


图 3-21

● **什么是正方向?** 如果一个人沿区域 D 的边界 ∂D 行走时, D 总在他左边, 则称 ∂D 为正方向. 例如, 图 3-22 中的区域 D 的边界 ∂D 只有外边界曲线 L , ∂D 正方向等价于 L 为逆时针方向; 再比如, 图 3-23 中的区域 D 的边界 ∂D 由外边界曲线 L 和内边界曲线 ℓ 组成, ∂D 正方向等价于 L 为逆时针方向, 而 ℓ 为顺时针方向.

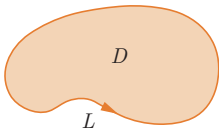


图 3-22

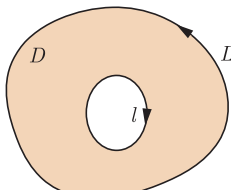


图 3-23

● **有连续的偏导数.** 格林公式要求被积函数在区域的内部有连续的偏导数, 但是边界上可以没有, 被积函数只要在边界上连续即可.

● **格林公式的作者.** 格林于 1793 年出生于英格兰诺丁汉市一个磨坊主家庭, 他长期在父亲的磨坊里做工, 通过借阅图书馆书籍, 自学掌握了高等数学. 主要受法国学派的影响. 在 1828 年, 他以不公开的方式发

表了他的研究成果, 仅仅复印了 100 份, 大部分都给了他朋友. 但是他的朋友们都读不懂他的论文, 以至于没有人意识到他的工作的重要性. 在 40 岁的时候, 他终于成为剑桥大学的本科生, 4 年后从剑桥毕业. 不过可惜的是, 从剑桥毕业四年后, 他就去世了. 在他去世后 4 年, 剑桥的另外一个本科生, 威廉·汤姆森 (未来的开尔文男爵) 无意间发现了格林的研究成果, 立即就意识到格林研究成果的伟大之处, 并将格林的论文重印. 后来威廉·汤姆森经过一番努力, 成为第一个发现斯托克斯公式的人, 你是不是好奇为什么他发现的公式, 却以其他人的名字命名? 细节见后面的斯托克斯公式.

3.5.1 格林公式的直接应用

格林公式常可以用来计算一些复杂的曲线积分, 我们先从几个简单的例子开始.

【例 3.21】 (1987 数一 4) 设 L 为取正向的圆周 $x^2 + y^2 = 9$, 则曲线积分 $I = \oint_L (2xy - 2y) dx + (x^2 - 4x) dy =$ _____.

【解析】 显然圆周围成的区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 9\}$, 则由格林公式得

$$I = \iint_D [2x - 4 - (2x - 2)] dx dy = -2 \iint_D dx dy = -2 \times 9\pi = -18\pi.$$

【变式 3.21.1】 计算 $I = \int_L (x + y)^2 dx - (x^2 + y^2) dy$, 其中 L 是以 $A(1, 1), B(3, 2), C(2, 5)$ 为顶点的三角形的边界, 逆时针方向.

【变式 3.21.2】 计算 $I = \int_L xy^2 dx - x^2y dy$, 其中 L 是圆周 $x^2 + y^2 = a^2$, 逆时针方向.

3.5.2 曲线不封闭的情形

格林公式一般用于封闭曲线上的积分计算. 如果遇到不封闭的曲线积分问题, 有时会添加辅助线将开口曲线封口, 使其变成封闭曲线再应用格林公式.

【例 3.22】 (2012 数一 19) 已知 L 是第一象限中从点 $(0, 0)$ 处沿圆周 $x^2 + y^2 = 2x$ 到点 $(2, 0)$ 处, 再沿圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 到点 $(0, 2)$ 处的曲线段, 计算曲线积分 $I = \int_L 3x^2y dx + (x^3 + x - 2y) dy$.

【解析】 现在曲线不是封闭的, 不能直接用格林公式, 但添加一条直线段 $\overline{BO}$ (方向从 B 到 O) 后, L 与 $\overline{BO}$ 合起来就是封闭曲线 (见图3-24). 设这样得到的封闭曲线所围的区域为 D . 这时

$$P = 3x^2y, \quad Q = x^3 + x - 2y, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 3^2 + 1.$$

利用格林公式得

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+\overline{BO}} P dx + Q dy - \int_{\overline{BO}} P dx + Q dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy - \int_{\overline{BO}} P dx + Q dy \\ &= \iint_D dx dy - \int_{\overline{BO}} (x^3 + x - 2y) dy = \iint_D dx dy - \int_2^0 (-2y) dy = \frac{1}{4}\pi \cdot 2^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot 1^2 - 4 \\ &= \frac{\pi}{2} - 4. \end{aligned}$$

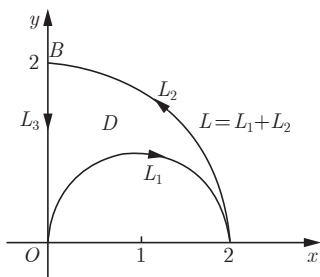


图 3-24

【变式 3.22.1】 (2008 数一 16) 计算曲线积分 $\int_L \sin 2x dx + 2(x^2 - 1)y dy$, 其中 L 是曲线 $y = \sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi, 0)$ 的一段弧.

【变式 3.22.2】 (1999 数一 4) 求 $I = \int_L (e^x \sin y - b(x+y)) dx + (e^x \cos y - ax) dy$, 其中 a, b 为正的常数, L 为从点 $A(2a, 0)$ 沿曲线 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 到点 $O(0, 0)$ 的弧.

3.5.3 偏导数不连续的情形

【例 3.23】 (2020 数一 16) 计算 $I = \oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = 2$, 方向为逆时针方向.

【分析】 令 $P = \frac{4x-y}{4x^2+y^2}$, $Q = \frac{x+y}{4x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$, 直接利用格林公式可得

$$I = \oint_L \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

这个结果是错的. 究其原因, 我们错误地利用了格林公式: 记 L 围成的区域为 D , 被积函数的偏导数在 D 内的某些区域 (比如单位圆盘) 内没有连续的偏导数. 更具体一点, $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-16x^2 + 4y^2 + 8xy}{(4x^2 + y^2)^2}$ 在原点处不连续. 实际上, 不用去判断偏导数的连续性, 直接判断被积函数的连续性就可以, 因为函数 P 在原点处不连续, 肯定就不可微了, 所以其偏导数也不连续.

正确的做法是添加一围绕原点的闭曲线 (见图3-25), 记为 L_1 , 则

$$I = \oint_{L+L_1} P dx + Q dy - \oint_{L_1} P dx + Q dy = I_1 + I_2.$$

记 L_1 围成的区域为 D_1 , 但是一定要注意 L_1 的方向. 对于区域 $D \setminus D_1$, 其边界有两部分, L 和 L_1 , 这里 $\partial(D \setminus D_1)$ 为正方向等价于 L 逆时针, L_1 顺时针, 所以我们需要让 L_1 取顺时针方向.

对上式的第一项 I_1 我们可以利用格林公式, 因为区域 $D \setminus D_1$ 不含原点, 所以被积函数在 $D \setminus D_1$ 内的任意开领域均有连续的偏导数. 故

$$I_1 = \oint_{L+L_1} P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

但是我们还需要计算 I_2 , 为了计算的可行性, 我们需要对 L_1 作特殊要求, 注意到被积函数的分母, 所以我们应该取 $L_1: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 其中 ε 很小, 使得 L_1 落在圆内就行. 此时计算 I_2 就很容易了, 具体见如下所示的解析.

【解析】 取 $L_1: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ (ε^2 足够小), 方向为顺时针方向, 则

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L+L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy - \oint_{L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy \\ &= - \oint_{L_1} \frac{4x-y}{4x^2+y^2} dx + \frac{x+y}{4x^2+y^2} dy. \end{aligned}$$

因为在 L_1 上, $4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 所以

$$I = - \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_{L_1} (4x-y) dx + (x+y) dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_1} \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial(4x-y)}{\partial y} \right) dx dy.$$

这里我们又一次利用了格林公式, 其中区域 $D_1 = \{(x, y) | 4x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2\}$, 但要注意 L_1 是顺时针, 对于区域 D_1 来说, 它是负方向, 所以应用格林公式时需要在前面添加负号. 因此

$$I = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{D_1} 2 dx dy = \frac{1}{\varepsilon^2} \times 2 \times \pi \times \varepsilon \times \frac{\varepsilon}{2} = \pi.$$

【经验总结 3.2】 若积分区域的内部有使得 $\frac{\partial Q}{\partial x}$ 或 $\frac{\partial P}{\partial y}$ 不连续的点, 则不能直接用格林公式, 必须挖去某个包含该点的一块区域, 挖去的区域的形状由被积函数的分母决定. 具体一点就是, 如果分母与圆的方程一致, 就构造一个半径很小的圆周; 若分母与椭圆的方程一致, 就构造一个很小的椭圆, 只要椭圆包含在整个曲线内部并且是封闭的就可以了. 但是一定要注意它的方向.

像例3.23这样, 需要挖去一个邻域的题在考研中屡见不鲜. 2020年刚考过的题, 2021年又考了, 只是形式更复杂了. 这更进一步说明了研究真题的重要性!

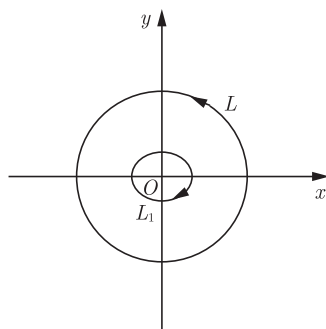


图 3-25