

第3章

一元函数积分学

本章内容在考研数学中占有重要地位.

首先, 我们介绍原函数与不定积分的基本概念. 需要注意的是, 这仅仅是基本概念! 考研数学中对基本概念的考查, 往往比解答题更具挑战性. 与第2章相似, 我们先学习各种积分计算, 将基本概念的辨析放置在本章的最后进行讨论.

原函数. 设 $f(x)$, $F(x)$ 为定义于区间 I 上的两个函数, 若对任意的 $x \in I$ 有 $F'(x) = f(x)$, 则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数.

不定积分. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $f(x)$ 的所有原函数为 $F(x) + C$ (C 为任意常数), 称其为 $f(x)$ 的不定积分, 记为 $\int f(x)dx$, 即 $\int f(x)dx = F(x) + C$.

因此我们有如下运算关系:

【知识点 3.1】 (1) 对函数先积分后求导 (或后微分), 则函数还原成自身:

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = f(x) \quad \text{或} \quad d \left(\int f(x)dx \right) = f(x) dx.$$

(2) 对函数先求导 (或微分) 后积分, 则函数还原后多一常数:

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \quad \text{或} \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

定积分. 定积分也称为黎曼积分, 是通过对区间进行分割、近似求和以及取极限来定义的. 如果我们只能用知识点 3.1 中的方法来计算定积分, 那么它就无法成为理工科大学生的必修知识, 更不可能成为现代科学的基石. 微积分之所以能发扬光大, 离不开其中最重要的公式——牛顿-莱布尼茨公式:

【牛顿-莱布尼茨公式】 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

初学者可能会对定积分产生误解, 认为它只是在不定积分的基础上加上了上下限而已. 这种理解主要受到牛顿-莱布尼茨公式的影响. 实际上, 牛顿-莱布尼茨公式只是这两种积分的一个桥梁, 一种计算工具, 并非定积分的定义. 关于这方面的辨析, 我们将在本章的最后一节进行讨论, 现在先学习如何计算定积分.

反常积分. 反常积分的计算步骤是先计算定积分, 然后求定积分的极限. 若此极限存在, 则极限值为此反常积分的值, 否则该反常积分发散. 我们以 $[a, +\infty)$ 上的积分为例, 若在 $[a, +\infty)$ 上 $F'(x) = f(x)$, 则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x) \Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a),$$

其中 $F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$. 对其他反常积分也有类似记法.

事实上, 将定积分的计算法则与极限计算法则相结合, 并将无穷大 (或无界函数反常积分中的瑕点) “代入” 上下限理解为取极限, 即可得到反常积分的计算法则. 这些法则同样适用于反常积分中的换元公式、分部积分公式等.

由于积分运算是微分运算的逆运算, 所以由基本求导公式可以得到下面的基本不定积分.

【基本不定积分】 以下 10 个基本积分公式, 要牢记.

$$\begin{aligned} (1) \int x^a dx &= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C (a \neq -1); & (2) \int \frac{1}{x} dx &= \ln |x| + C; \\ (3) \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C (a > 0, a \neq 1); & (4) \int e^x dx &= e^x + C; \\ (5) \int \cos x dx &= \sin x + C; & (6) \int \sin x dx &= -\cos x + C; \\ (7) \int \frac{dx}{1+x^2} &= \arctan x + C; & (8) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C, x \in (-1, 1); \\ (9) \int \sec^2 x dx &= \tan x + C; & (10) \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C. \end{aligned}$$

这 10 个基本积分公式至关重要. 其他教材和辅导书列出了更多的积分公式, 但我们只列出这 10 个, 因为其他积分公式均可由它们推导得出. 接下来, 我们会用例题补充这些基本积分, 并提供记忆技巧, 以便读者更好地理解 and 记忆.

3.1 三种基本方法

在考研数学中, 有三种基本方法用于求解不定积分、定积分和反常积分, 分别是凑微分法、换元法和分部积分法. 接下来, 我们将分别对这三种方法进行详细介绍和讲解.

3.1.1 凑微分法

首先, 我们以一个简单的例子来解释什么是凑微分. 例如, 对于不定积分 $\int \cos^2 x \sin x dx$, 无法直接利用上面的基本不定积分进行计算. 但是我们发现 $\sin x dx = -d(\cos x)$, 因此

$$\int \cos^2 x \sin x dx = \int \cos^2 x [-d(\cos x)] = -\int \cos^2 x d(\cos x) = -\frac{1}{3} \cos^3 x + C.$$

在这个过程中, 将 $\sin x dx$ 看成 $-d(\cos x)$ 就是凑微分.

凑微分的思想是, 若直接求不定积分 $\int f(x) dx$ 不容易, 则可以考虑被积函数 $f(x)$ 能否改写成 $g[\varphi(x)] \varphi'(x)$ 的形式且 $g(x)$ 的原函数容易求.

下面我们给出凑微分法的一个总结.

【凑微分法】 若 $f(x)$ 可以写成 $g[\varphi(x)] \varphi'(x)$ 且 $g(x)$ 的原函数 (设为 G) 容易求, 则

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int g[\varphi(x)] \varphi'(x) dx = \int g[\varphi(x)] d\varphi(x) \\ &\stackrel{\text{令 } u=\varphi(x)}{=} \int g(u) du = G(u) + C = G[\varphi(x)] + C. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

接下来,我们将通过一些很基础的例题和变式训练来巩固不定积分表中的 10 个基本积分公式,并加深对凑微分法基本思想的理解.

【例 3.1】 求下列不定积分:

$$\begin{aligned} (1) \int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}}; & \quad (2) \int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}; & \quad (3) \int e^{\sin x} \cos x \, dx; & \quad (4) \int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} \, dx; \\ (5) \int \frac{e^x \, dx}{2+e^x}; & \quad (6) \int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}}; & \quad (7) \int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}}; & \quad (8) \int \sec^2 x \tan x \, dx. \end{aligned}$$

【解析】 (1) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{d(1-x^2)}{2\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2} + C.$

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int \frac{d \ln x}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin(\ln x) + C.$

(3) $\int e^{\sin x} \cos x \, dx = \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$

(4) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} \, dx = \int \sqrt{\arctan x} \, d(\arctan x) = \frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}} + C.$

(5) $\int \frac{e^x \, dx}{2+e^x} = \int \frac{d(2+e^x)}{2+e^x} = \ln(2+e^x) + C.$

(6) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(7) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \sqrt[4]{\cot x}} = -\int (\cot x)^{-\frac{1}{4}} d(\cot x) = -\frac{4}{3} \sqrt[4]{\cot^3 x} + C.$

(8) $\int \sec^2 x \tan x \, dx = \int \tan x d(\tan x) = \frac{1}{2} \tan^2 x + C.$

【例 3.2】 (2004 数一 2) 已知 $f'(e^x) = xe^{-x}$, 且 $f(1) = 0$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 令 $e^x = t$, 则 $x = \ln t$, 于是 $f'(t) = \frac{\ln t}{t}$, 即 $f'(x) = \frac{\ln x}{x}$, 故

$$f(x) = \int \frac{\ln x}{x} \, dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C.$$

由 $f(1) = 0$, 得 $C = 0$, 即 $f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. 故填 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

【变式 3.2.1】 (1996 数三 2) $\int x f(x) \, dx = \arcsin x + C$, 则 $\int \frac{1}{f(x)} \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

本章开头指出我们只列出了 10 个最基础的不定积分公式, 其他教材或辅导书列出了更多的不定积分公式. 接下来, 我们将通过例题展示其余的不定积分公式.

【例 3.3】 求下列不定积分:

$$(1) \int \tan x \, dx; \quad (2) \int \cot x \, dx; \quad (3) \int \sec x \tan x \, dx; \quad (4) \int \csc x \cot x \, dx.$$

【解析】 (1) $\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C.$

(2) $\int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln |\sin x| + C.$

(3) $\int \sec x \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx = - \int \frac{1}{\cos^2 x} d(\cos x) = \frac{1}{\cos x} + C = \sec x + C.$

(4) $\int \csc x \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} d(\sin x) = -\frac{1}{\sin x} + C = -\csc x + C.$

【例 3.4】 设 $a > 0$, 求不定积分: (1) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx$; (2) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx$; (3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx.$

【解析】 (1) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$

(2) 因为 $\frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right]$, 所以

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx &= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] \, dx = \frac{1}{2a} (\ln |a+x| - \ln |a-x|) + C \\ &= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C. \end{aligned}$$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \int \frac{1}{a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} \, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} d\left(\frac{x}{a}\right) = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

【注】 利用凑微分法和例 3.4 中的第二个积分可以计算 $\sec x$ 和 $\csc x$ 的原函数:

$$\begin{aligned} \int \sec x \, dx &= \int \frac{1}{\cos x} \, dx = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{d(\sin x)}{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{(1 + \sin x)^2}{1 - \sin^2 x} + C = \ln \left| \frac{1 + \sin x}{\cos x} \right| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C. \end{aligned}$$

同理可得 $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C.$

下面是例 3.3 与例 3.4 中积分的总结:

【推广的不定积分 1】 以下 9 个基本积分公式, 不用死记硬背, 但要牢记推导.

(1) $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C;$

(2) $\int \csc x \, dx = \ln |\csc x - \cot x| + C;$

(3) $\int \tan x \, dx = -\ln |\cos x| + C;$

(4) $\int \cot x \, dx = \ln |\sin x| + C;$

(5) $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C;$

(6) $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C;$

(7) $\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$

(8) $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C;$

(9) $\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

基本不定积分和推广的不定积分, 共计 19 个积分, 它们构成了未来解决所有积分问题的基础. 换言之, 它们是在积分求解过程中的目标, 即将待计算的积分转化为这 19 个已知积分的类型.

接下来, 我们通过例题及其变式, 学习如何将待求解的积分转化为这 19 种类型之一.

【例 3.5】 求不定积分: (1) $\int \frac{x^3}{x^8-2} dx$; (2) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}} dx$; (3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} dx$.

【解析】 (1) 因为 $x^3 dx$ 可以凑微分变为 $\frac{1}{4}d(x^4)$, 且分母中的 x^8 可以视为 $(x^4)^2$, 所以可以将 $\frac{x^3}{x^8-2} dx$ 改写为 $\frac{1}{4} \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-2}$, 该积分本质上是 $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$. 于是

$$\int \frac{x^3}{x^8-2} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{8\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}} \right| + C.$$

(2) 因为 $\sqrt{x} dx$ 可以凑微分变为 $\frac{2}{3}d(x^{\frac{3}{2}})$, 且分母中的 x^3 可以视为 $(x^{\frac{3}{2}})^2$, 所以可以将 $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}} dx$ 改写为 $\frac{2}{3} \frac{d(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{4-(x^{\frac{3}{2}})^2}} dx$, 该积分本质上是 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$. 于是

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}} dx = \frac{2}{3} \int \frac{d(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{4-(x^{\frac{3}{2}})^2}} = \frac{2}{3} \int \frac{d(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{1-(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}})^2}} = \frac{2}{3} \arcsin \left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \right) + C.$$

(3) 因为 $\frac{1}{\sqrt{x}} dx$ 可以凑微分变为 $2d(\sqrt{x})$, 且分母中的 $1+x$ 可以视为 $1+(\sqrt{x})^2$, 所以可以将 $\frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$ 改写为 $2 \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} dx$, 该积分本质上是 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$. 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = 2 \int \frac{d(\sqrt{x})}{1+(\sqrt{x})^2} = 2 \arctan \sqrt{x} + C.$$

积分与微分互为逆运算. 只要我们足够细心, 就能够求得任何一个函数的微分. 然而, 积分并非如此简单. 必须明确, 我们所能求得的积分只是一部分. 初学者面对积分题, 如果在几分钟内没有思路, 应果断查看答案, 并找出原因, 积累经验. 从历年考研真题看, 有理函数的积分考查的频率高. (有理函数是指其分子和分母均为多项式的函数), 分母为二次函数的有理函数更为常见.

【例 3.6】 (1) (2018 数二 11) $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx$; (2) (2022 数二 13) $\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx$.

【解析】 (1) 因为 $\frac{1}{x^2-4x+3} = \frac{1}{(x-1)(x-3)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1} \right)$, 所以

$$\int \frac{1}{x^2-4x+3} dx = \frac{1}{2} \left[\int \frac{1}{x-3} dx - \int \frac{1}{x-1} dx \right] = \frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} + C,$$

故 $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x^2-4x+3} dx = \frac{1}{2} \ln \frac{x-3}{x-1} \Big|_5^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 2$.

(2) 因为 $(x^2-x+1)' = 2x-1$, 所以 $2x+3 = (x^2-x+1)' + 4$. 于是

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x+3}{x^2-x+1} dx &= \int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + 4 \int_0^1 \frac{1}{x^2-x+1} dx \\ &= \ln(x^2-x+1) \Big|_0^1 + 4 \int_0^1 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \end{aligned}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3\sqrt{3}}.$$

【题型总结】 $\int \frac{ax+b}{px^2+qx+r} dx.$

针对这类积分, 首先观察分母.

(1) 如果分母具有实根, 则进行因式分解, 并将其转换为分式的和;

(2) 如果分母没有实根, 则可以通过配凑的方式将它分解:

$$\int \frac{ax+b}{px^2+qx+r} = \int \frac{A(px^2+qx+r)'}{px^2+qx+r} dx + \int \frac{B}{px^2+qx+r} dx,$$

其中 A, B 为待定系数, 上式右端第一个积分可以利用凑微分解决, 第二个积分可以通过配方法将其转化为 $\int \frac{1}{a^2+u^2} du$ 的形式.

(3) 对于任意多项式 $P(x)$, 我们都能够求解形如 $\int \frac{P(x)}{px^2+qx+r} dx$ 的不定积分.

【变式 3.6.1】 (2025 数二 11、数三 12) 设 $\int_1^{+\infty} \frac{a}{x(2x+a)} dx = \ln 2$, 则 $a =$ _____.

【变式 3.6.2】 (2021 数一 11) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2} =$ _____.

【变式 3.6.3】 (2022 数三 12) $\int_0^2 \frac{2x-4}{x^2+2x+4} dx =$ _____.

【例 3.7】 求不定积分: (1) $\int \frac{x}{1+x^4} dx$; (2) $\int \frac{x^3}{1+x^4} dx.$

【解析】 (1) 因为 $x dx$ 可以凑微分变为 $\frac{1}{2}d(x^2)$, 且分母中的 x^4 可以视为 $(x^2)^2$, 所以可以将 $\frac{x}{1+x^4} dx$ 改写为 $\frac{1}{2} \cdot \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2}$, 该积分本质上是 $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$. 于是

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = \frac{1}{2} \arctan x^2 + C.$$

$$(2) \text{ 直接凑微分可得 } \int \frac{x^3}{1+x^4} dx = \frac{1}{4} \int \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = \frac{1}{4} \ln|1+x^4| + C.$$

如果我们将例 3.7 中被积函数的分子改为 x^2 或 1, 那么积分的难度将显著增加. 在此之前, 不妨先求解以下两个过渡性积分作为引子.

【例 3.8】 求不定积分: (1) $\int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$; (2) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx$.

【解析】 这两个积虽然可以利用有理函数积分方法来处理, 但是过程会异常复杂. 比较巧妙的处理方法是分子分母同时除以 x^2 .

$$(1) \int \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{(\sqrt{2})^2+\left(x-\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + C.$$

$$(2) \int \frac{x^2-1}{1+x^4} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C.$$

若将例 3.8 中的两个积分分别作差和求和, 则得到如下两个积分:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2+1}{1+x^4} dx - \int \frac{x^2-1}{1+x^4} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \frac{1}{2} \left(\int \frac{x^2+1}{1+x^4} dx + \int \frac{x^2-1}{1+x^4} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \left| \frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

【题型总结】 $\int \frac{x^n}{1+x^4} dx$.

(1) 若 $n=1$ 或 $n=3$, 则可利用凑微分法轻松求出.

(2) 若 $n=0$ 或 $n=2$, 则先构造 $\int \frac{x^2+1}{1+x^4} dx$ 和 $\int \frac{x^2-1}{1+x^4} dx$, 然后作差或求和.

(3) 对于 $n \geq 4$ 的情况, 可以利用多项式除法, 将其转化为 $n < 4$ 的情形来处理. 因此, 对于任意多项式 $P(x)$, 我们都能够求解形如 $\int \frac{P(x)}{1+x^4} dx$ 的不定积分.

【变式 3.8.1】 求不定积分: (1) $\int \frac{x dx}{x^4 + 2x^2 + 5}$; (2) $\int \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4} dx$.

当然, 不能仅仅因为被积函数的分母含有 x^4 就轻率地考虑分子和分母同时除以 x^2 . 若分母可因式分解, 应首先进行因式分解, 将被积函数拆解为若干项的和. 尽管这是我们将在 3.2 节中讨论的有理函数不定积分的关键内容, 但在这里, 我们将先用一个例子来解释这一思路.

【例 3.9】 (2024 数三 12) $\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 因为 $x^4 + 3x^2 - 4 = (x^2 + 4)(x^2 - 1)$, 所以 $\frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} = \frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 4}$. 于是

$$\int \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \int \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 4} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} + C.$$

因此, $\int_2^{+\infty} \frac{5}{x^4 + 3x^2 - 4} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{x}{2} \Big|_2^{+\infty} = \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{8}$. 故填 $\frac{1}{2} \ln 3 - \frac{\pi}{8}$.

通过以上例子及其变式题, 我们可以发现, 对于分母含有 x^4 的有理函数, 首先要观察是否能够对分母进行因式分解. 如果不能, 再考虑分子是否能够通过凑微分来求解. 如果仍然行不通, 可以尝试将分子和分母同时除以 x^2 , 再进行凑微分. 这种同时除以 (或乘以) 一个函数然后再凑微分的操作在考研题中难度较大. 但幸运的是, 常见的适用于这种操作的类型只有两种: 一种是刚才提到的分母含有 x^4 的类型, 另一种是分子和分母均为指数函数的分式函数.

【例 3.10】 求不定积分: (1) $\int \frac{1}{2+e^x} dx$; (2) $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$; (3) $\int \frac{dx}{1+e^{2x}}$.

【解析】 (1) 回顾例 3.1 的 (5) 中积分: $\int \frac{e^x}{2+e^x} dx$, 因为分子是 e^x , 所以可以凑微分成 $d(e^x + 2)$. 但是本例中的分子是常数, 无法凑微分. 但是只要分子和分母同时除以 e^x 就可以凑成我们想要的类型. 即

$$\int \frac{1}{2+e^x} dx = \int \frac{e^{-x}}{2e^{-x}+1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{d(2e^{-x}+1)}{2e^{-x}+1} dx = -\frac{1}{2} \ln(2e^{-x}+1) + C.$$

(2) 受 (1) 的启发, 分子和分母同时除以 e^x , 所以

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{e^{-x} dx}{1 + e^{-2x}} = -\int \frac{d(e^{-x})}{1 + (e^{-x})^2} = -\arctan e^{-x} + C.$$

(3) 分子和分母同时乘以 e^{2x} 可得

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1+e^{2x}} &= \int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x}(1+e^{2x})} = \frac{1}{2} \int \left[\frac{1}{e^{2x}} - \frac{1}{1+e^{2x}} \right] d(e^{2x}) \\ &= \frac{1}{2} [\ln(e^{2x}) - \ln(1+e^{2x})] + C = \frac{1}{2} \ln \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} + C. \end{aligned}$$

【注】 对于例 3.10 的前两个积分, 我们也可以将分子和分母同时除以 e^{-x} . 在这里, 我们不提供具体的细节, 请同学们自行补充.

【变式 3.10.1】 (1) (2000 数三 2) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}}$; (2) $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} + e^{2x} + 1} dx$.

3.1.2 换元法

3.1.1 节介绍的凑微分法能够处理的积分很有限, 比如在推广的不定积分表 1 中, 本应该包含形如 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$ 的积分, 但未列出, 因为凑微分法无法有效处理这类积分.

在本节中, 我们将介绍换元法, 它可以处理很多包含根号的被积函数. 因此, 换元法常被用于“去根号”的操作. 接下来, 我们用一个简单例子来介绍什么是换元法.

【例 3.11】 设 $a > 0$, 求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

【分析】 由于被积函数含有根号且无法通过凑微分法消除, 因此考虑选择适当的变换以消除根号, 将无理式转化为有理式. 为了消除 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 中的根号, 可设 $x = a \sin t$.

【解析 1】 设 $x = a \sin t$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$. 于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int [1 + \cos(2t)] dt = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C.$$

因为 $x = a \sin t$, 所以 $\sin t = \frac{x}{a}$, 根据图 3-1 所示的辅助三角形, 可得 $\cos t = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$, 从而

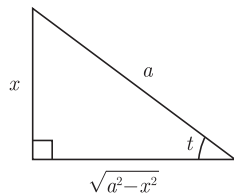


图 3-1

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

虽然解析 1 的结果是对的, 但在细节上存在疏漏.

(1) $\sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$ 不一定成立, 因为 $a \cos t$ 不一定为正.

(2) $t = \arcsin \frac{x}{a}$ 不一定成立, 因为变换 $x = a \sin t$ 不一定存在反函数.

解决上述问题的通用方法是限制变量 t 的取值范围, 这个限制不仅需要保证变换存在反函数, 同时也要确保 x 的取值范围不变 (这对定积分非常关键), 如果还能兼顾 $\sqrt{a^2 - x^2}$ 的正负性不变, 那就更好了, 可以避免分类讨论.

【解析 2】 作变换 $x = a \sin t$, 取 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 t} = a \cos t$, $dx = a \cos t dt$. 于是

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int a^2 \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int [1 + \cos(2t)] dt = \frac{a^2}{2} (t + \sin t \cos t) + C.$$

根据 $\sin t = \frac{x}{a}$ 可作出如图 3-1 所示的辅助三角形, 可得 $\cos t = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $t = \arcsin \frac{x}{a}$, 从而

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C.$$

【注】 通常如图 3-1 所示的辅助三角形适用于 t 是锐角的情况, 其他范围的角可能会导致结果符号差异. 建议如下: 首先假设 t 为锐角, 构建辅助三角形, 计算所需三角函数值. 然后, 验证所得三角函数值是否适用于其他区间. 如果不适用, 则它们之间存在符号差异.

比如, 解析 2 中, 因为 $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 所以 $\cos t$ 的符号为正, 这与 $\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 符号为正一致. 因此我们没必要分类讨论.

换元法的核心思想是, 直接求不定积分 $\int f(x)dx$ 较为困难时, 可考虑把积分变量 x 看成新变量 t 的适当函数 $\varphi(t)$, 即作换元 $x = \varphi(t)$. 若积分 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ 易求, 则换元法成功. 下面我们对换元法进行简单总结.

【换元法】 设 $x = \varphi(t)$ 单调可导, 并且 $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F(t) + C$ (易求), 则

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F(t) + C = F[\varphi^{-1}(x)] + C,$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)]\varphi'(t) dt = F(t) \Big|_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} = F[\varphi^{-1}(b)] - F[\varphi^{-1}(a)],$$

其中 $t = \varphi^{-1}(x)$ 是 $x = \varphi(t)$ 的反函数.

【注】 这里要求 $x = \varphi(t)$ 单调是需要保证它存在反函数. 此外, 在处理不定积分时, 不要忘记在计算结束后使用反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$ 进行回代, 而定积分则不用回代, 只需确定新变量对应的上下限即可.

换元法是一元积分学中常见且重要的一种方法, 类型多样. 在考研数学中, 通常涉及的换元法主要有三角代换、整体代换和倒数代换. 接下来, 我们将依次详细讲解这三种方法.

1. 三角代换 若被积函数含二次根式 $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, 可分别采用三角代换 $x = a \sin t$, $x = a \tan t$, $x = a \sec t$ 去掉根式, 化为三角有理式的积分, 得到关于变量 t 的原函数后, 可根据所作的三角代换作一直角三角形, 便可变回到原来的积分变量 x .

【例 3.12】 设 $a > 0$, 求不定积分: (1) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx$; (2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx$.

【解析】 (1) 作变换 $x = a \tan t$, 为保证该变换单调且 x 能取遍 $\mathbf{R}$, 我们取 $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 此时 $\sqrt{x^2+a^2} = a \sec t$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \int \frac{1}{a \sec t} a \sec^2 t dt = \int \sec t dt = \int \frac{dt}{\cos t} \\ &= \int \frac{\cos t dt}{\cos^2 t} = \int \frac{d \sin t}{1 - \sin^2 t} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + C. \end{aligned}$$

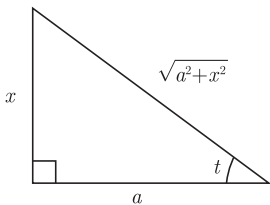


图 3-2

根据 $\tan t = \frac{x}{a}$ 可作出如图 3-2 所示的辅助三角形, 可得 $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}} dx &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+a^2} + x}{\sqrt{x^2+a^2} - x} \right| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C - \ln a \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2+a^2} \right| + C_1. \end{aligned}$$

(2) 作变换 $x = a \sec t$, 为保证该变换单调且 x 能取遍 $(-\infty, -a) \cup (a, +\infty)$, 我们取 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\pi, \frac{3\pi}{2})$, 此时 $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t$, 于是

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \sec t \tan t}{a \tan t} dt = \int \sec t dt = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin t}{1 - \sin t} \right| + C.$$

根据 $\sec t = \frac{x}{a}$ 可作出如图 3-3 所示的辅助三角形, 可得 $\sin t = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$, 因此

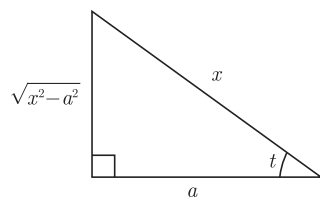


图 3-3

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{x - \sqrt{x^2 - a^2}} \right| + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C - \ln a \\ &= \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C_1. \end{aligned}$$

【注】 在 (2) 中, 或许读者会疑惑, 为什么不取 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$? 有二个原因.

(i) 当 $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\sqrt{x^2 - a^2} = a |\tan t| = -a \tan t$, 即去绝对值需要添加负号.

(ii) 在利用辅助三角形求 $\sin t$ 的过程中, 由变换 $x = a \sec t$ 可知 $x < 0$, 此时 $\frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$ 为负, 但是 $\sin t$ 为正, 因此我们需要添加一负号.

简而言之, 若我们取 $t \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$, 则需要分类讨论.

下面, 我们将例 3.11 和例 3.12 中的积分放在一起汇总如下:

【推广的不定积分表 2】 以下两个基本积分公式, 不用死记硬背, 但要牢记推导.

$$(1) \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C;$$

$$(2) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

【注】 解上述不定积分常用的三角变换见表 3-1.

表 3-1 常见的三种三角代换

根式的形式	所做变换	限制区间	三角示意图
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \sin t$	$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \sec t$	$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \tan t$	$t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	

【例 3.13】 (2005 数二 3) $\int_0^1 \frac{x dx}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

【解析】 令 $x = \sin t$, 则 $dx = \cos t dt$. 因为 $x: 0 \rightarrow 1$, 所以 $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 又因为 $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$, 所以

$$\text{原式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \cos t}{(2-\sin^2 t) \cos t} dt = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d \cos t}{1+\cos^2 t} = -\arctan(\cos t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

【变式 3.13.1】 计算: (1) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4} dx$; (2) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2} dx$; (3) (1992 数二 3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}} dx$;

【例 3.14】 计算不定积分: (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$; (2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

【解析】 (1) 原式 $= \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \ln \left[\left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2+x+1} \right] + C.$

$$(2) \text{原式} = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} dx$$

$$= \int \frac{d(x^2+x+1)}{2\sqrt{x^2+x+1}} - \frac{1}{2} \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \ln \left[\left(x+\frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2+x+1} \right] + C.$$

【题型总结】 $\int \frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+r}} dx.$

通过配凑的方式将它分解成

$$\int \frac{ax+b}{\sqrt{px^2+qx+r}} dx = \int \frac{A(px^2+qx+r)'}{\sqrt{px^2+qx+r}} dx + \int \frac{B}{\sqrt{px^2+qx+r}} dx,$$

其中 A, B 为待定系数, 上式右端第一个积分可以利用凑微分解决, 第二个积分可以通过配平方法将

其转化为 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 \pm u^2}} du$ 的形式.

【变式 3.14.1】 求不定积分 $\int \frac{x-2}{\sqrt{2x^2+4x+5}} dx$.

实际上, 只要被积函数中含有二次式 px^2+qx+r , 我们就可以尝试将其配平方, 改写为 a^2+u^2 , a^2-u^2 或 u^2-a^2 的形式. 如果能够进行凑微分解决问题, 那么优先考虑凑微分法; 若无法通过凑微分解决问题, 则考虑采用三角代换的方法.

【例 3.15】 计算不定积分: (1) (1997 数二 3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$; (2) $\int x\sqrt{2x-x^2} dx$.

【解析】 (1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{2^2-(x-2)^2}} = \arcsin \frac{x-2}{2} + C$.

(2) 因为 $\sqrt{2x-x^2} = \sqrt{1-(x-1)^2}$, 所以作变换 $x-1 = \sin t$, 限制 $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\sqrt{1-(x-1)^2} = \cos t$. 于是

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2x-x^2} dx &= \int (\sin t + 1) \cos^2 t dt = \int \sin t \cos^2 t dt + \int \cos^2 t dt \\ &= -\int \cos^2 t d(\cos t) + \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt \\ &= -\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C \\ &= -\frac{1}{3} (2x-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \arcsin(x-1) + \frac{1}{2} (x-1) \sqrt{2x-x^2} + C. \end{aligned}$$

2. 根式代换 当被积函数含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $\sqrt{ae^{kx}+c}$ 等根式时, 可直接令此根式等于 t . 若被积函数既含有 $\sqrt[m]{ax+b}$, 也含有 $\sqrt[n]{ax+b}$, 一般令 $t = \sqrt[r]{ax+b}$, 其中 r 为 m, n 的最小公倍数.

【例 3.16】 求不定积分: (1) $\int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}$; (2) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx$; (3) $\int \sqrt{1+e^x} dx$.

【解析】 (1) 令 $t = \sqrt{x}$, 则 $x = t^2$ 且 $dx = 2t dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}} &= \int \frac{2t dt}{2+t} = 2 \int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt = 2t - 4 \ln(t+2) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 4 \ln(\sqrt{x}+2) + C. \end{aligned}$$

(2) 这里出现了 $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$ 和 $\sqrt[6]{x}$, 因为 2, 3, 6 的最小公倍数为 6, 所以令 $t = \sqrt[6]{x}$, 则 $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$, 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx &= \int \frac{t \cdot 6t^5}{t^3+t^2} dt = 6 \int \frac{t^4}{t+1} dt = 6 \int \left(t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right) dt \\ &= 6 \left[\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln(t+1) \right] + C \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{1}{3}} - 6x^{\frac{1}{6}} + 6\ln\left(1+x^{\frac{1}{6}}\right) + C.$$

(3) 令 $t = \sqrt{1+e^x}$, 则 $x = \ln(t^2 - 1)$, $dx = \frac{2t}{t^2 - 1}dt$. 于是

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+e^x} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2 - 1} dt = 2 \int \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1}\right) dt = 2t + \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C \\ &= 2\sqrt{1+e^x} + \ln \left| \frac{\sqrt{1+e^x} - 1}{\sqrt{1+e^x} + 1} \right| + C.\end{aligned}$$

【例 3.17】 (2020 数二 3) $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = (\quad).$

A. $\frac{\pi^2}{4}$

B. $\frac{\pi^2}{8}$

C. $\frac{\pi}{4}$

D. $\frac{\pi}{8}$

【解析】 令 $t = \arcsin \sqrt{x}$, 则 $x = \sin^2 t$, 于是 $dx = 2 \sin t \cos t dt$. 因为 $x: 0 \rightarrow 1$, 所以 $t: 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$, 此时 $\sqrt{x(1-x)} = \sin t \cos t$. 于是

$$\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{\sin t \cos t} 2 \sin t \cos t dt = t^2 \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

故选 A.

【变式 3.17.1】 求不定积分:

(1) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{1+x}{x}} dx;$

(2) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x-1} + 4)\sqrt{x-1}};$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$

3.1.3 分部积分法

一位德国的非线性分析领域的教授曾在公开场合开玩笑说, 近代的应用数学家们好像只需要掌握分部积分公式, 因为他们的论文似乎总是在反复运用这一公式. 这种言论似乎反映了纯数学对应用数学长期以来的一种傲慢和偏见. 类似地, 我国一位从事计算数学研究的教授也开过类似的玩笑, 声称计算数学就等于分部积分.

尽管这些观点带有明显的傲慢和调侃色彩, 但它们传达了一个共同的信息: 分部积分在高等数学中具有极其重要的地位.

分部积分公式来自于我们熟悉的函数乘积的求导法则:

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{或} \quad d(uv) = vdu + u dv.$$

上式等号两边分别求不定积分, 得到

$$uv = \int u'v dx + \int uv' dx \quad \text{或} \quad uv = \int vdu + \int u dv.$$

移项就可以得到著名的分部积分公式:

$$\begin{aligned} \text{【不定积分的分部积分公式】} \quad & \int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx \text{ 或 } \int u \, dv = uv - \int v \, du. \\ \text{【定积分的分部积分公式】} \quad & \int_a^b uv' \, dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b u'v \, dx \text{ 或 } \int_a^b u \, dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v \, du. \end{aligned}$$

分部积分适用于被积函数为两类不同函数乘积的积分. 我们常见的五类函数是指数函数、对数函数、多项式函数、三角函数和反三角函数. 设 $p_n(x)$ 为 n 次多项式, 常见的几种适合用分部积分法的积分有

$$\begin{aligned} & \int p_n(x)e^{\alpha x} \, dx, \quad \int p_n(x) \sin \alpha x \, dx, \quad \int p_n(x) \cos \alpha x \, dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x \, dx, \\ & \int e^{\alpha x} \cos \beta x \, dx, \quad \int p_n(x) \ln x \, dx, \quad \int p_n(x) \arctan x \, dx, \quad \int p_n(x) \arcsin x \, dx. \end{aligned}$$

用分部积分求两不同函数乘积的积分的关键是要正确选择函数 u, v . 选择 u, v 的经验顺序的口诀是“反对幂三指”, 这里“反”“对”“幂”“三”“指”依次指反三角函数、对数函数、幂函数、三角函数及指数函数. 根据这条经验, 如果被积函数是上述五类函数中某两类的乘积, 则次序在前的保持不动, 次序在后的放到微分符号中. 比如下面的例子:

(1) $\int p_n(x) \ln x \, dx, \int p_n(x) \arctan x \, dx, \int p_n(x) \arcsin x \, dx$ 这三种积分都应把多项式函数放进微分号, 即对数函数和反三角函数排在多项式函数之前.

(2) $\int p_n(x)e^{\alpha x} \, dx, \int p_n(x) \sin \alpha x \, dx, \int p_n(x) \cos \alpha x \, dx$ 这三种积分都应把多项式以外的函数放进微分符号, 即多项式函数排在指数函数和三角函数之前.

(3) $\int e^{ax} \sin \beta x \, dx$ 和 $\int e^{ax} \cos \beta x \, dx$ 这两种积分把指数函数或三角函数放进微分号都可以, 但把指数函数放进去更简单, 连续两次将指数函数放进去分部积分还原便可求解.

“反对幂三指”是一个很有用的经验, 为凸显其重要性, 我们总结如下:

【经验总结 3.1】 “反对幂三指”, 次序在后的放到微分号“d”后.

【例 3.18】 求下列不定积分:

$$(1) \int xe^{-2x} \, dx; \quad (2) \int x^2 \ln x \, dx; \quad (3) \int x \sin^2 x \, dx; \quad (4) \int x \arcsin x \, dx.$$

【解析】 (1) 因为被积函数是多项式函数 x 与指数函数 e^{-2x} 的乘积, 所以按照“反对幂三指”的原则, 应该将指数函数放进微分符号. 因此

$$\int xe^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2} \int x \, d(e^{-2x}) = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2} \int e^{-2x} \, dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C.$$

(2) 因为被积函数是多项式函数 x^2 与对数函数 $\ln x$ 的乘积, 所以按照“反对幂三指”的原则, 应该将多项式函数放进微分符号. 因此

$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{1}{3} \int \ln x \, d(x^3) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

(3) 因为被积函数是多项式函数 x 与三角函数 $\sin x$ 的平方的乘积, 所以按照“反对幂三指”的原则, 应该将三角函数放进微分号. 不过, 不能直接将 $\sin^2 x$ 放到微分符号后面, 先利用降幂公式 $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$. 因此

$$\begin{aligned}\int x \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int x(1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} \int x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} \int x \, d(\sin 2x) = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{4} \int \sin 2x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin 2x - \frac{1}{8} \cos 2x + C.\end{aligned}$$

(4) 因为被积函数是多项式函数 x 与反三角函数 $\arcsin x$ 的乘积, 所以按照“反对幂三指”的原则, 应该将多项式函数放进微分符号. 因此

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{1}{2} \int \arcsin x \, d(x^2) = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx. \quad (3.1.2)$$

因为右边的积分含有 $\sqrt{1-x^2}$, 所以考虑三角换元 $x = \sin t$, 于是

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \, dx &= \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cdot \cos t \, dt = \int \sin^2 t \, dt = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2t) \, dt \\ &= \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin t \cos t + C \\ &= \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned} \quad (3.1.3)$$

将式(3.1.3)代入式(3.1.2)可得

$$\int x \arcsin x \, dx = \frac{x^2}{2} \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{1}{4} x \sqrt{1-x^2} + C.$$

【变式 3.18.1】 (2014 数三 11) 设 $\int_0^a x e^{2x} \, dx = \frac{1}{4}$, 则 $a = \underline{\hspace{2cm}}$.

【例 3.19】 (2018 数三 10) $\int e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} \, dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 因为被积函数是指数函数 e^x 与反三角函数 $\arcsin \sqrt{1-e^{2x}}$ 的乘积, 所以按照“反对幂三指”的原则, 应该将指数函数放进微分符号. 因此

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} \, d(e^x) = e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} + \int e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}} \cdot \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx \\ &= e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} + \int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} \, dx = e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1-e^{2x})}{\sqrt{1-e^{2x}}} \\ &= e^x \arcsin \sqrt{1-e^{2x}} - \sqrt{1-e^{2x}} + C.\end{aligned}$$

【变式 3.19.1】 (2018 数一 15、数二 15) 求不定积分 $I = \int e^{2x} \arctan \sqrt{e^x - 1} dx$.

【例 3.20】 (2022 数一 12) 定积分 $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 因为被积函数是对数函数 $\ln x$ 与无理函数 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的乘积, 且 $\frac{dx}{\sqrt{x}}$ 很容易凑微分成 $2d(\sqrt{x})$. 因此将 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 放进“d”后, 得

$$\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_1^{e^2} \ln x d\sqrt{x} = 2\sqrt{x} \ln x \Big|_1^{e^2} - 2 \int_1^{e^2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4e - 4\sqrt{x} \Big|_1^{e^2} = 4.$$

【例 3.21】 (2013 数一 12、数三 11) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解析】 因为被积函数是对数函数 $\ln x$ 与无理函数 $\frac{1}{(1+x)^2}$ 的乘积, 且 $\frac{dx}{(1+x)^2}$ 很容易凑微分成 $-d\left(\frac{1}{1+x}\right)$. 因此将 $\frac{1}{(1+x)^2}$ 放进“d”后, 得

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^2} dx &= - \int_1^{+\infty} \ln x d\left(\frac{1}{1+x}\right) = -\frac{\ln x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)} dx \\ &= \ln \frac{x}{1+x} \Big|_1^{+\infty} = -\ln \frac{1}{2} = \ln 2. \end{aligned}$$

【变式 3.21.1】 (2017 数二 11) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

【变式 3.21.2】 (1990 数一 3) 求 $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$.

上述例题和变式均只需用一次分部积分公式. 但很多时候, 我们需要反复使用分部积分公式. 比如,

$\int p_n(x)e^{\alpha x} dx$, $\int p_n(x) \sin \alpha x dx$, $\int p_n(x) \cos \alpha x dx$ 这三种积分都应把多项式以外的函数放进微分符号, 而且这种操作需要执行 n 次, 这里 $p_n(x)$ 为 n 次多项式. 再比如, $\int e^{ax} \sin \beta x dx$, $\int e^{ax} \cos \beta x dx$ 这两种积分需要连续两次将指数函数放进微分符号里面.

【例 3.22】 求不定积分: (1) $\int (x^2 + 1) e^{2x} dx$; (2) $\int (x^3 + 2x + 5) \cos 2x dx$.

【解析】 (1) 按照“反对幂三指”的原则, 应该将指数函数放进微分符号. 因此

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} \int (x^2 + 1) d(e^{2x}) = \frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} \int 2xe^{2x} dx \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{2x} - \int xe^{2x} dx = \frac{1}{2} (x^2 + 1) e^{2x} - \frac{1}{2} xe^{2x} + \frac{1}{4} e^{2x} + C. \end{aligned}$$

(2) 按照“反对幂三指”的原则, 应该将三角函数放进微分符号. 因此

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x + 5) \sin 2x - \frac{1}{2} \int (3x^2 + 2) \sin 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x + 5) \sin 2x + \frac{1}{4} (3x^2 + 2) \cos 2x - \frac{3}{2} \int x \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{2} (x^3 + 2x + 5) \sin 2x + \frac{1}{4} (3x^2 + 2) \cos 2x - \frac{3}{4} x \sin 2x - \frac{3}{8} \cos 2x + C. \end{aligned}$$

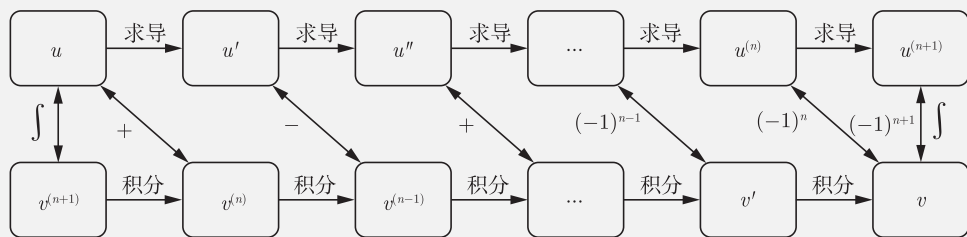
由以上可看出, 这种类型的积分需要反复使用分部积分公式, 但复杂且易错, 下面介绍一个分部积分法的推广公式.

设 $u = u(x)$, $v = v(x)$ 有 $n+1$ 阶连续导数, 则

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)}v dx. \quad (3.1.4)$$

该公式的证明很简单, 就是反复使用分部积分. 它的目的是将不易计算的 $\int uv^{(n+1)} dx$ 转化为易于计算的 $\int u^{(n+1)}v dx$. 比如, 若被积函数是 n 次多项式与指数函数或者三角函数的乘积, 则这个公式非常好用, 因为此时 $u^{(n+1)} = 0$. 但公式(3.1.4)不好记忆, 也不能每次做题都先推导一遍, 因此, 我们利用如下的表格来记忆它.

【多次分部积分公式(3.1.4)的表格记忆方法】

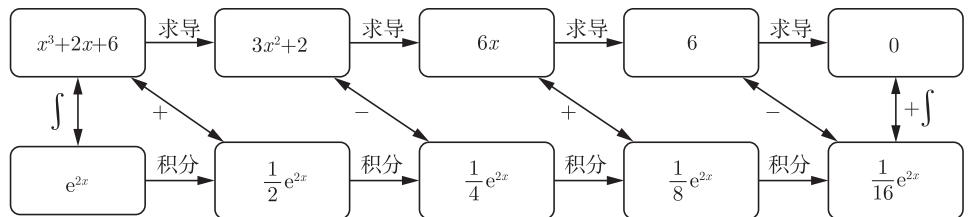


(1) 该表的最左侧是积分 $\int uv^{(n+1)} dx$, 最右侧是积分 $\int u^{(n+1)}v dx$, 其余各项为从左上到右下错位相乘, 无须积分, 符号正负相间, 第一个符号为正.

(2) “反对幂三指”这个顺序依然是我们选择 u 和 $v^{(n+1)}$ 的重要依据, 次序在后的是 $v^{(n+1)}$. u 从左到右依次求导, $v^{(n+1)}$ 从左到右依次积分.

【例 3.23】 求不定积分: (1) $\int (x^3 + 2x + 6) e^{2x} dx$; (2) $\int e^{-x} \cos 2x dx$.

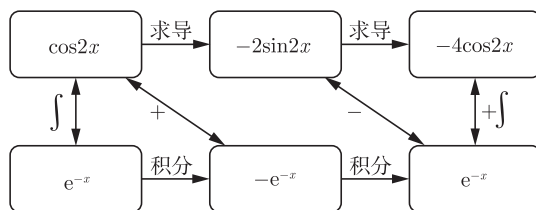
【解析】 (1) 按照“反对幂三指”的原则, 指数函数 e^{2x} 为 $v^{(n+1)}$, 故



因此

$$\begin{aligned} \text{原式} &= (x^3 + 2x + 6) \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) - (3x^2 + 2) \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right) + 6x \left(\frac{1}{8} e^{2x} \right) - 6 \left(\frac{1}{16} e^{2x} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} x^3 - \frac{3}{4} x^2 + \frac{7}{4} x + \frac{17}{8} \right) e^{2x} + C. \end{aligned}$$

(2) 按照“反对幂三指”的原则, 指数函数 e^{-x} 为 $v^{(n+1)}$. 因此



因此

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = \cos 2x \cdot (-e^{-x}) - (-2 \sin 2x) \cdot e^{-x} + \int (-4 \cos 2x) \cdot e^{-x} dx.$$

将上式右端的 $\int (-4 \cos 2x) \cdot e^{-x} dx$ 移到等号的左端, 得

$$\int e^{-x} \cos 2x dx = \frac{e^{-x}(2 \sin 2x - \cos 2x)}{5}.$$

【变式 3.23.1】 (2009 数二 11) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 e^{-x} \sin nx dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

两次分部积分后, 又回到原来的积分, 且两式系数不同, 可移项得到积分结果. 这是在分部积分中一种常用的技巧. 除了三角函数和指数函数乘积的不定积分可以采取此方法, 下面的例 3.24 也可以.

【例 3.24】 求不定积分: (1) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$; (2) $\int \cos(\ln x) dx$.

【分析】 在之前的例题中, 被积函数通常是两个不同类函数的乘积, 根据“反对幂三指”的经验, 我们可以选择将哪个函数放在微分符号“d”后. 然而, 在这里的几个例子中, 被积函数并不是两类不同函数的乘积. 我们处理这些情况的方法是将被积函数视作自身与 1 的乘积, 因为 1 可以凑微分成 $d(x)$. 具体的处理过程见下面的解析.

$$\begin{aligned}\text{【解析】} \quad (1) \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \int \sqrt{x^2 + a^2} \cdot 1 dx = \int \sqrt{x^2 + a^2} d(x) \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx.\end{aligned}$$

移项, 得

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + \int \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| \right) + C.\end{aligned}$$

最后一项利用了例 3.12 的结果.

$$\begin{aligned}(2) \int \cos(\ln x) dx &= x \cos(\ln x) - \int x \cdot \left[-\sin(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \right] dx = x \cos(\ln x) + \int \sin(\ln x) dx \\ &= x \cos(\ln x) + x \sin(\ln x) - \int x \cos(\ln x) \cdot \frac{1}{x} dx.\end{aligned}$$

于是

$$\int \cos(\ln x) dx = \frac{x}{2} [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] + C.$$

同样地, 我们可以求解 $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$, 具体细节请读者自行补充. 接下来, 我们将其与例 3.24 中的一个积分结合起来:

【推广的不定积分表 3】 以下基本积分公式, 不用死记硬背, 但要牢记推导.

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| \right) + C.$$

在考研数学中, 经常会遇到某些形如 $\int f^n(x) dx$ 的不定积分, 通常的处理方法是利用分部积分降低幂指数, 导出递推公式.

【例 3.25】 求不定积分: (1) $\int \sin^n x dx$; (2) $\int \sec^n x dx$.

【解析】 (1) 记 $I_n = \int \sin^n x dx$, 则 $I_1 = -\cos x + C$, $I_2 = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x + C$. 当 $n \geq 3$ 时,

$$\begin{aligned}I_n &= \int \sin^n x dx = \int \sin^{n-1} x d(-\cos x) \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + \int (n-1) \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= -\cos x \sin^{n-1} x + (n-1) \int (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x dx\end{aligned}$$