第 1 章

概率论的基本概念

在自然界和人类的社会实践中存在两类现象:确定性现象和随机性现象。确定性现象是指在特定条件下,某种现象一定会发生或一定不会发生,如太阳从东方升起,在标准大气压下水加热到100℃会沸腾,等等。随机性现象是指在相同的条件下,某种现象可能发生也可能不发生。例如,抛掷一枚硬币,可能是正面朝上,也可能是反面朝上。

概率论是研究随机现象数量规律的数学分支,是一门研究事情发生的可能性的学问,其起源与赌博问题有关。概率与统计的一些基本概念和简单方法早期主要用于赌博和人口统计模型。随着人类社会实践的拓展,人们需要探究各种不确定现象中隐含的规律,并用数学的方法研究各种结果出现的可能性大小,从而产生了概率论,并使之逐步发展成一门严谨的学科。概率与统计的方法日益渗透到各个领域,并广泛应用于自然科学、经济学、医学、金融、保险甚至人文科学。

本章主要介绍一些概率论的基本概念,为后面的学习做准备。

1.1 样本空间与随机事件

1.1.1 随机试验

随机现象是指在一定的条件下,某一事件的发生是不确定的,即无法预知其确切结果的现象。不能预知的原因在于会出现多种结果,因此需要分析各种结果的出现以及相互关联的规律性。经过长期实践,人们发现在大量重复试验或观察下,随机现象的结果呈现一定的规律,这说明随机现象有偶然性的一面,也有必然性的一面。必然性表现为在大量重复试验或观察下所呈现的固有规律性,这种规律性称为随机现象的统计规律性。

概率论与数理统计正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科。我们把对随机现象的观察认为是一种试验,而将具有以下特点的试验称为随机试验。

(1) 可重复性,即可以在相同条件下重复进行。

(2) 可观测性,即试验的结果可能不止一个且是可观测的,即所有的结果是明确的。

(3) 随机性,即每次试验将要出现的结果是未知的,但总是上述可能结果中的一个。

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的,今后所称的试验都是指随机试验。下面举些随机试验的例子。

E_1:抛掷一枚硬币,观察其出现正面或反面的情况。

E_2:掷一枚骰子,观察其出现的点数。

E_3:观察移动公司人工咨询台某座席一天内收到的客户咨询次数。

E_4:在一批灯泡中任意抽取一只,测试它的寿命。

E_5:裂纹釉烧制后的纹理是否符合要求(图 1-1-1)。

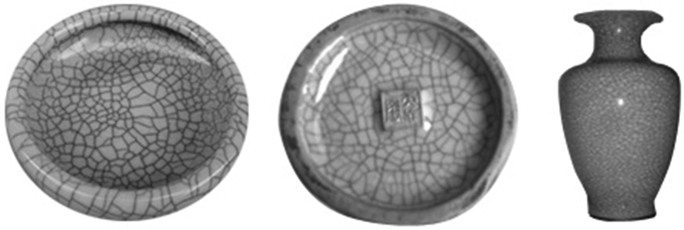

图 1-1-1　裂纹釉瓷器

E_6:陶瓷的弯曲切口强度和弯曲断裂强度是否符合要求。

E_7:陶瓷活塞顶在受到一定的力后是否断裂。

1.1.2　样本空间、随机事件

1. 样本空间

定义 1.1　随机试验的每一个可能结果称为样本点;一个随机试验的全体样本点构成的集合称为样本空间,记为 S。

根据上述举例,我们有:试验 E_1 的样本空间 $S_1=\{$正面,反面$\}$,试验 E_2 的样本空间 $S_2=\{$1 点,2 点,3 点,4 点,5 点,6 点$\}$,试验 E_3 的样本空间 $S_3=\{n$ 次$\mid n\in\mathbf{N}\}$,试验 E_4 的样本空间 $S_4=\{t$ 小时$\mid t\geqslant 0\}$,试验 E_5、E_6、E_7 的样本空间是{符合要求,不符合要求}。

如果用 1 表示出现正面,用 0 表示出现反面,试验 E_1 的样本空间 S_1 也可以表示为 $\{1,0\}$。

又设试验 E_8:观察贴花的两个瓷杯图案是否完全相同。如果用 1 表示相同,用 0 表示不同,则 $S_8=\{0,1\}$。试验 E_9:抛掷两枚硬币,观察其出现正面或反面的情况,则 $S_9=$ {(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)}。

以上试验表明样本空间中的元素是由试验的目的所确定的。

2. 随机事件

在随机试验中,除了关心各个样本点,通常我们还关心满足指定特征的样本点在试验中是否发生,如对于试验 E_2,考察出现偶数点的情况,或者考察出现的点数大于 3 的情况。

设试验 E 的样本空间是 S,S 的子集称为 E 的**随机事件**,简称**事件**。随机事件常用大写英文字母表示。在一次试验中,如果这个子集中的一个样本点出现,则称该**事件发生**。

仅含一个样本点的集合称为**基本事件**。如试验 E_2 有 6 个基本事件{1 点},{2 点}……{6 点};试验 E_8 有两个基本事件{相同}和{不同}。

样本空间 S 是所有样本点构成的集合,因而在任何一次试验中,不管发生什么样的结果,它都是 S 之中的某一种情况,即 S 必然发生,因此称 S 为**必然事件**。空集($\varnothing$)不包括任何元素(样本点),因此在任何一次试验中都不可能有样本点属于它,也就是说空集($\varnothing$)永远不可能发生,因此我们把空集($\varnothing$)称为**不可能事件**。

例如,从含 3 件次品中的一套 32 件餐具中任取 10 件出来检查,在此 10 件产品中,“次

品多于 3 件”这一事件一定不会发生，为不可能事件；“次品不多于 3 件”这一事件一定发生，为必然事件；而“次品有 3 件”“次品有 2 件”“次品有 1 件”等事件可能发生也可能不发生，为随机事件。

3. 事件的运算与关系

根据前面的介绍，我们知道随机事件是样本空间的子集，其本质还是集合，而集合与集合之间存在一定的关系，因此事件之间也存在一定的关系，类似于集合的运算，也可以规定事件间的运算，只不过其实际意义随研究的问题而变化。下面给出这些关系和运算在概率论中的表述及其意义。

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,C,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集。下面先介绍事件的运算，再介绍事件的关系，接着介绍这些运算所满足的规律，最后用一些例子来解释与说明它在现实问题中的含义。

1）交（积事件）

事件 $A\cap B$ 称为事件 A 与事件 B 的积事件，当且仅当 A、B 同时发生时，事件 $A\cap B$ 发生。有时为了方便，$A\cap B$ 也写作 AB。

推广到 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 时，它们的积事件记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$，也可记为 $A_1A_2\cdots A_n$。

两个事件的积可用图 1-1-2 表示。

两个事件的积可用集合的描述法表示为 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$。

2）并（和事件）

事件 $A\cup B$ 称为事件 A 与事件 B 的和事件，当且仅当 A、B 中至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生。$A\cup B$ 也写作 $A+B$。两个事件的和可用图 1-1-3 表示。

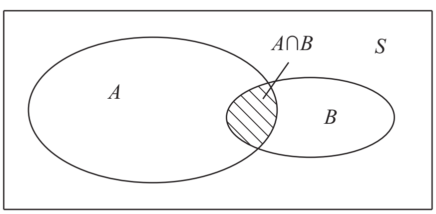

图 1-1-2　两个事件的积

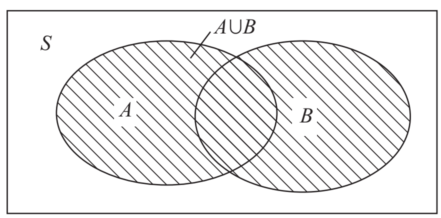

图 1-1-3　两个事件的和

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 或 $A_1+A_2+\cdots+A_n$。

两个事件的和可用集合的描述法表示为 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$。

3）差

事件 $A-B$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件，当且仅当 A 发生且 B 不发生时，事件 $A-B$ 发生。

两个事件的差可用集合的描述法表示为 $A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$，如图 1-1-4 所示。

4）包含

如果 $B\subset A$，则称事件 A 包含事件 B，这时事件 B 发生必然导致事件 A 发生，如图 1-1-5 所示。如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$。

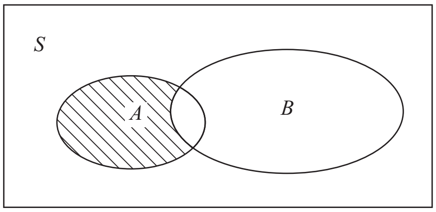

图 1-1-4　两个事件的差

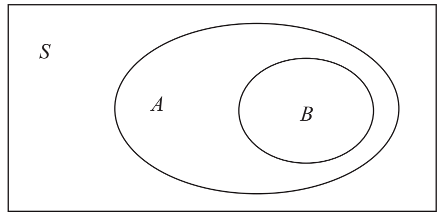

图 1-1-5　事件间的包含关系

5）互不相容或互斥

如果 $A\cap B=\varnothing$，称事件 A 与事件 B 是互不相容的或互斥的。互不相容的事件是不可能同时发生的，易知任意两个基本事件是互不相容的。两个事件的互不相容可用图 1-1-6 表示。

6）对立

如果 $A\cap B=\varnothing$ 且 $A\cup B=S$，称事件 A 与事件 B 为互为对立事件，或互为逆事件。对每次试验来说，事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生。A 的对立事件记为 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=S-A$。两个事件的对立可用图 1-1-7 表示（图中 $B=\overline{A}$，也有 $A=\overline{B}$）。

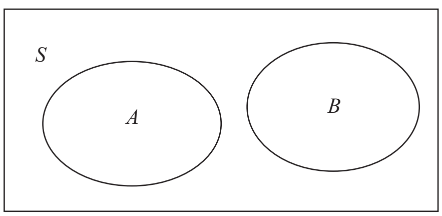

图 1-1-6　两个事件互不相容

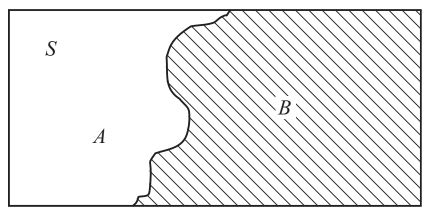

图 1-1-7　两个事件的对立

事件的运算律如下：

（1）交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律：$(A\cup B)\cap C=AC\cup BC$，$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcap\limits_{k=1}^{n}\overline{A_k}$，$\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overline{A_k}$。

例 1-1-1　甲、乙、丙三个窑厂参加某一工艺陶瓷的烧制比赛，瓷窑设计工艺上的差异会使烧制过程中的技术参数相差比较大，最终导致陶瓷制品有差别。如果每个厂只烧制一次，记事件 A、B、C 分别表示“甲厂烧制成功”“乙厂烧制成功”“丙厂烧制成功”。试用 A、B、C 三个事件表示下列各事件：

（1）丙厂没有烧制成功；

（2）三个厂中恰好有一个厂烧制成功；

（3）三个厂均未烧制成功；

（4）三个厂中至少有两个厂烧制成功；

（5）三个厂中至多有一个厂烧制成功。

解：(1) $\overline{C}$；

(2) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；

(3) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$；

(4) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$ 或 $AB\cup AC\cup BC$；

(5) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$。

例 1-1-2 博物馆向某陶瓷工艺美术大师定做一件瓷器，为确保完成任务，该大师做了三件。记 A_i 表示“第 i 件是合格产品”事件，$i=1,2,3$；记 B_j 表示“3 件中有 j 件是合格产品”，$j=0,1,2,3$。用文字表述各组事件，并指出各组事件的关系：(1)$\overline{A_1}$ 与 B_3；(2)$A_1\overline{A_2}A_3$ 与 B_2；(3)$\bigcup_{i=1}^{3}\overline{A_i}$ 与 $\overline{B_3}$；(4)$\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ 与 $\bigcup_{i=1}^{3}B_i$。

解：(1) $\overline{A_1}$ 表示第一件不是合格产品，B_3 表示三件都是合格产品，它们是互斥事件；

(2) $A_1\overline{A_2}A_3$ 表示第二件不是合格产品且其余两件都是合格产品，B_2 表示有两件是合格产品，$A_1\overline{A_2}A_3\subset B_2$；

(3) $\bigcup_{i=1}^{3}\overline{A_i}$ 表示至少有一件是不合格产品，$\overline{B_3}$ 表示三件不全是合格产品，$\bigcup_{i=1}^{3}\overline{A_i}=\overline{B_3}$；

(4) $\bigcup_{i=1}^{3}A_i$ 表示至少有一件是合格产品，$\bigcup_{i=1}^{3}B_i$ 表示事件“有一件合格产品”“有两件合格产品”与“有三件合格产品”至少有一个发生，$\bigcup_{i=1}^{3}A_i=\bigcup_{i=1}^{3}B_i$。

例 1-1-3 若 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3\}$，求：(1)$A\cup B$；(2)$A\cap B$；(3)$\overline{A}$；(4)$\overline{B}$；(5)$\overline{A\cup B}$；(6)$\overline{A\cap B}$；(7)$\overline{A}\cup\overline{B}$，(8)$\overline{A}\cap\overline{B}$。

解：(1) $A\cup B=\{1,2,3,5\}$；

(2) $A\cap B=\{1,3\}$；

(3) $\overline{A}=\{2,4,6\}$；

(4) $\overline{B}=\{4,5,6\}$；

(5) $\overline{A\cup B}=\{4,6\}$；

(6) $\overline{A\cap B}=\{2,4,5,6\}$；

(7) $\overline{A}\cup\overline{B}=\{2,4,5,6\}$；

(8) $\overline{A}\cap\overline{B}=\{4,6\}$。

习题 1.1

(1) 写出下列试验的样本空间。

① 连续掷一枚骰子两次，记录其点数和。

② 观察某地一周内的最高气温和最低气温(假设最低气温不低于 a，最高气温不高于 b)。

③ 连续抛掷一枚硬币 5 次，若出现正面(H)就停止，若出现反面(T)则继续抛掷，观察

正、反面出现的情况。

④ 某城市一天中出生的婴儿数。

(2) 袋中装有编号 1、2、3、4、5 的五个相同的球。若从中取三个球,观察球的编号,请写出这个随机试验的样本空间,计算基本结果总数。

(3) 甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹,以 A、B、C 分别表示甲、乙、丙命中目标,试用 A、B、C 的运算关系表示下列事件:①="至少有一人命中目标";②="恰有一人命中目标";③="恰有两人命中目标";④="最多只有一人命中目标";⑤="三人都命中目标";⑥="三人都没有命中目标"。

(4) 请叙述下列事件的对立事件。

① "抛掷两枚硬币,皆为正面"。

② "射击三次,皆命中目标"。

③ "加工四个产品,至少有一个是正品"。

1.2 频率与概率

虽然随机事件的发生有其偶然性,即在一次试验中它可能发生,也可能不发生;但在大量的重复试验中,往往还是会有一定的规律。例如,在抛掷硬币的试验中,当试验次数很多时,出现正面结果的比率接近 1/2;在掷骰子的试验中,当抛掷次数足够多时,每个点数出现的比率都接近 1/6。对于这些随机事件,我们常常需要知道某个结果或某些结果在一次试验中发生的可能性有多大,即其内在规律,这些规律也是可以"度量"的。为了方便说明这些概率统计的基本概念,下面先引入频率,它常用来描述事件发生的频繁程度,进而介绍事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率。

1.2.1 频率

定义 1.2 在相同条件下,进行了 n 次试验,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**。比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**,记为 $f_n(A)$。

由定义可以看出,在相同条件下,进行了 n 次试验,事件 A 发生的频率满足以下基本性质:

(1) (非负性)对任意事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) (规范性)对于必然事件 S,有 $f_n(S)=1$;

(3) (可列可加性)设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件,那么

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots \tag{1-2-1}$$

事件 A 发生的频率的大小反映了事件 A 发生的频繁程度。频率越大说明事件 A 发生得越频繁,即意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大。反之,频率越小说明事件 A 发生得越不频繁,即意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越小。所以,人们常常用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小。

这种想法已经得到了大量的试验证明,特别是早期概率论的研究学者对其进行了深入

的试验。例如，将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，观察出现正面向上的情况，得到的数据如表 1-2-1 所示。n_A 表示事件 A“硬币出现正面”发生的频数，$f_n(A)$表示 A 发生的频率。

表 1-2-1　多次抛掷硬币试验的结果

序　号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$	n_A	$f_n(A)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

可以看出，试验次数较少时，出现硬币正面向上的频率波动很大，然而，随着试验次数的增加，该事件发生的频率越来越稳定，特别是当试验次数为 500 时，频率大致稳定在 0.5 附近。历史上多位学者做过类似的试验，试验结果如表 1-2-2 所示。这些试验虽然是由不同人做的，但由于试验次数非常多，硬币出现正面的频率都在 0.5 左右，其波动比表 1-2-1 中的还要小。这说明当重复试验的次数 n 不断增加时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$呈现稳定性，逐渐趋近于一个稳定的常数。这种频率稳定性就是人们通常所说的统计规律，也表明用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小是可行的。

表 1-2-2　历史上抛掷硬币试验的结果

试　验　者	n	n_A	$f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
	24000	12012	0.5005

1.2.2　概率

虽然在大量试验中随机事件发生的频率会呈现稳定性，但人们不可能对每一个随机事件做大量的试验，然后求得事件的频率，并用它来表示该随机事件发生的可能性的大小。每次试验的结果虽然相差不大，但也存在细微的差别，不便于进行理论研究。因此，概率论的早期研究人员受到频率的稳定性及其能刻画事件发生可能性的特征的启发，给出了一个描

述事件发生可能性大小的概念——概率。

定义 1.3(概率的定义) 设 E 是随机试验,S 是它的样本空间。对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$,称为事件 A 发生的**概率**,若它满足以下三个条件:

(1)(非负性)对于任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)<1$;

(2)(规范性)对于必然事件 S,有 $P(S)=1$;

(3)(可列可加性)设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,那么

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots \tag{1-2-2}$$

事实上,这三点对应于前面所提到的事件 A 发生的频率所满足的基本性质,频率是从实验统计意义而言的,而概率反映的是事件发生可能性的大小。

根据概率的定义还可以推出以下一些重要的性质。

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$。

证明:由 $P(S)=P(S\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)=P(S)+P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$,即得 $P(\varnothing)=0$。

性质 1.2 有限可加性:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,那么 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)$;特别地,如果 $A\cap B=\varnothing$,那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

证明:令 $A_i=\varnothing,i=n+1,n+2,\cdots$,由概率的可列可加性及 $P(\varnothing)=0$ 即证。

性质 1.3 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

证明:因为 $A\cup\overline{A}=S,A\cap\overline{A}=\varnothing$,由有限可加性及规范性,即得 $P(\overline{A})=1-P(A)$。

性质 1.4 设 $B\subset A$,则 $P(B)\leqslant P(A)$。

证明:因 $A=B\cup(A-B)$(图 1-1-5),且事件 B 与 $A-B$ 互不相容,故

$$P(A)=P(B)+P(A-B)$$

又因 $P(A-B)\geqslant 0$,于是 $P(B)\leqslant P(A)$。

性质 1.5 $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$;当 $B\subset A$ 时,$P(A-B)=P(A)-P(B)$。

证明:因 $A=(A-B)\cup(A\cap B)$,且$(A-B)\cap(A\cap B)=\varnothing$,所以 $P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$,即 $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$。

性质 1.6 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

证明:因 $A\cup B=(A-A\cap B)\cup(B-A\cap B)\cup(A\cap B)$,且 $A-A\cap B$、$B-A\cap B$、$A\cap B$ 是两两互不相容的事件,所以

$$P(A\cup B)=P(A-A\cap B)+P(B-A\cap B)+P(A\cap B)$$

根据性质 1.5 知 $P(A-A\cap B)=P(A)-P(A\cap B)$,$P(B-A\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$,于是

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

性质 1.6 可以推广到三个事件的情形:

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$$

例 1-2-1 已知 $P(\overline{A})=0.7$,$P(\overline{A}\cap B)=0.3$,$P(B)=0.4$,求 $P(A\cap B)$,$P(A-B)$。

解:因 $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)$,所以 $P(A\cap B)=P(B)-P(\overline{A}\cap B)=0.1$,于

是 $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=1-P(\overline{A})-P(A\cap B)=0.2$。

习题 1.2

(1) 举例说明频率与概率的联系和区别。

(2) 设事件 A,B,C 满足 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4}$,$P(AB)=P(BC)=0$,$P(AC)=\frac{1}{8}$,求 A,B,C 至少有一个发生的概率。

(3) 设事件 A 与事件 B 互不相容,且 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.4$,求 $P(\overline{A})$,$P(A\cup B)$,$P(A\cap\overline{B})$,$P(\overline{A}\cap\overline{B})$,$P(\overline{A}\cup\overline{B})$。

(4) 对于事件 A 与事件 B 有 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.6$ 和 $P(A\cup B)=0.7$,$P(A\cap B)=0.4$,求 $P(A\cap\overline{B})$,$P(\overline{A}\cap\overline{B})$,$P(\overline{A}\cup\overline{B})$。

1.3 古典概型与几何概率

1.3.1 排列与组合的相关内容

由于本节介绍的古典概率模型需要应用大量的排列组合知识,所以下面先将这些内容及相关公式罗列出来,以便于后面概率的计算。

1. 排列的定义

从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$个元素(这里的被取元素各不相同)按照一定的顺序排成一列,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列。n 个不同元素全部取出的排列,叫全排列。

根据排列的定义,两个排列相同,当且仅当两个排列的元素完全相同,且元素的排列顺序也相同。例如,123 与 124 的元素不完全相同,它们是不同的排列;又如 123 与 132,虽然元素完全相同,但元素的排列顺序不同,它们也是不同的排列。

2. 排列数的定义

从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$个元素的所有排列的个数称为从 n 个元素中取出 m 个元素的排列数,用符号 P_n^m 表示。

例如,在 1,2,3 三个数中,任取两个元素,可得到 12,13,21,23,31,32,共六种排列,即 $\mathrm{P}_3^2=6$。

3. 组合的定义

从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$个元素(这里的被取元素各不相同)并成一组,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合。

上面例子中,123 与 124 的元素不完全相同,它们是不同的组合;但对于 123 与 132,由于元素完全相同,尽管其元素的排列顺序不同,它们还是相同的组合,只能算一个。

4. 组合数的定义

从 n 个不同元素中,任取 $m(m\leqslant n)$个元素的所有组合的个数称为从 n 个元素中取出

m 个元素的组合数,用符号 C_n^m 表示。

例如,在 1,2,3 三个数中,任两个元素只能得到 12,13,23,共三种组合,即 $C_3^2=3$。

组合与排列的主要区别是组合是无序的,不考虑其中元素的先后次序,而排列是有序的,必须考虑元素的先后顺序。

5. 排列数公式

$$P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{P_n^n}{P_{n-m}^{n-m}}=\frac{n!}{(n-m)!}$$

其中,阶乘 $n!$ 为从自然数 1 到 n 的连乘积,在排列组合中也记为 P_n^n,规定 $\mathbf{0!=1}$。

6. 组合数公式

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{P_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!},\quad n,m\in N^*,m\leqslant n$$

且有 $C_n^m=C_n^{n-m}$;$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$,规定 $C_n^0=1$。

7. 几个常用公式

(1) $n\cdot n!=(n+1)!-n!$;

(2) $\dfrac{n}{(n+1)!}=\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$;

(3) $C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_n^m=C_{n+1}^{m+1}$;

(4) $P_m^m+P_{m+1}^m+\cdots+P_n^m=P_m^m(C_m^m+C_{m+1}^m+\cdots+C_n^m)=P_m^m\cdot C_{n+1}^{m+1}$。

8. 排列组合中常用的两个原理

(1) 分类计数原理:做一件事情,完成它可以有 n 类办法,在第一类办法中有 m_1 种不同的方法,在第二类办法中有 m_2 种不同的方法……在第 n 类办法中有 m_n 种不同的方法。那么完成这件事共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种不同的方法。

(2) 分步计数原理:做一件事情,完成它需要分成 n 个步骤,做第一步有 m_1 种不同的方法,做第二步有 m_2 种不同的方法……做第 n 步有 m_n 种不同的方法,那么完成这件事共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_n$ 种不同的方法。

9. 常用的解题策略

(1) 合理分类:①类与类之间必须互斥(互不相容);②分类涵盖所有情况。

(2) 准确分步:①步与步之间互相独立;②步与步之间保持连续性。

(3) 先组后排策略:当排列问题和组合问题相混合时,应该先通过组合问题将需要排列的元素选择出来,然后进行排列。

结合这些定义、原理和方法,下面举几个例子来说明它。

例 1-3-1 班上从 5 名男生和 4 名女生中选出 3 男 2 女去参加 5 项竞赛,每项竞赛参加一人。问有多少种选法?

解:此题既涉及排列问题(参加 5 项不同的竞赛),又涉及组合问题(从 9 名学生中选出 5 名),应该先组后排。

(1) 从 5 名男生和 4 名女生(两类)中选出 3 男 2 女参加比赛,这是组合问题,有 $C_5^3\times C_4^2$。

(2) 让这 5 名学生分别参加 5 个竞赛,即进行全排列,有 P_5^5 种选法。

因此，一共有 $C_5^3 \times C_4^2 \times P_5^5 = 7200$(种)选法。

例 1-3-2 某陶瓷爱好者有 8 件不同的陶瓷装饰品，其中花瓶类 3 种，花盘类 2 种，其他装饰瓷 3 种。若将这些陶瓷装饰品排成一列放在陶瓷装饰架上，试求花瓶排在一起，花盘也恰好排在一起的排法共有多少种？

解：(1) 把 3 种花瓶"捆绑"在一起看成一种大装饰瓷，2 种花盘也"捆绑"在一起看成一种大装饰瓷，与其他 3 种装饰瓷一起看作 5 个元素(合理分类)，共有 P_5^5 种排法。

(2) 3 种花瓶有 P_3^3 种排法，2 种花盘有 P_2^2 种排法(后排列)；根据分步计数原理排法共有 $P_5^5 \times P_3^3 \times P_2^2 = 1440$(种)。

结合上面的例子，仔细思考一下这些例子是不是按照上述策略解题的。

1.3.2 古典概率模型

定义 1.4 满足下面两个条件的随机试验称为等可能概型或古典概型：

(1) 试验的样本空间只含有有限个样本点；

(2) 每个样本点发生的可能性相同。

满足以上条件的试验是大量存在的，下面分析这种情况下事件发生概率的计算公式。

设试验 E 是古典概型，它的样本空间 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，根据条件(2)，可知 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$，又 $P(S)=1$，且基本事件是互不相容的，故 $P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$，$i=1, 2, \cdots, n$。如果事件 A 包含 k 个基本事件，那么

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 包含的元素个数}}{S\text{ 中的元素个数}} \tag{1-3-1}$$

因此，古典概型也可进行如下定义：

设试验 E 的样本空间为 $S=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$，且 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$，若 $A = \{e_{i_1}\} \cup \{e_{i_2}\} \cup \cdots \cup \{e_{i_k}\}$，则有 $P(A) = \frac{k}{n}$，$i_1, i_2, \cdots, i_k$ 为 $1, 2, \cdots, n$ 中的 k 个数。其中，$P(A) = \frac{k}{n}$ 是等可能概型中事件 A 的概率计算公式。

例 1-3-3 掷两枚均匀硬币，出现正面用字母 H 表示，出现反面用字母 T 表示，观察正、反面出现的情况。

解：由题意得样本空间为{HH，HT，TH，TT}。这里四个基本事件是等可能发生的，故属古典概型。$n=4$，即为四个基本事件，记 A_i 为第 i 个事件，则 $P(A_i) = \frac{1}{4}$，$i=1, 2, 3, 4$。

例 1-3-4 某套茶具中共有 6 只茶杯，其中 4 只画有荷花和莲子，2 只画有莲子。从盒中取茶杯两次，每次随机地取一只，考虑两种取茶杯方式：①放回取样，第一次取出一只茶杯，观察茶杯图案后放回盒中；②不放回取样，第一次取出一只茶杯后，不放回盒中，继续从剩余的茶杯中再取。根据这两种情形求：①取到的两只茶杯都画有荷花和莲子的概率；②取到的两只茶杯图案相同的概率；③取到的两只茶杯中至少有一只画有荷花和莲子的概率。

解：以 A、B、C、D 分别表示事件"取到的两只茶杯都画有荷花和莲子""取到的两只茶杯都画有莲子""取到的两只茶杯图案相同""取到的两只茶杯中至少有一只画有荷花和莲

子”，则 $C=A\cup B$，$\overline{D}=B$。

(1) 两次取茶杯共有 6×6 种取法，即样本空间中的元素个数是 36，事件 A 包含的取法有 $4\times4=16$ 种，事件 B 包含的取法有 $2\times2=4$(种)，故 $P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$，$P(B)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$。因 $A\cap B=\varnothing$，于是 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{5}{9}$，$P(D)=1-P(B)=\frac{8}{9}$。

(2) 两次取茶杯共有 6×5 种取法，即样本空间中的元素个数是 30，事件 A 包含的取法有 $4\times3=12$(种)，事件 B 包含的取法有 $2\times1=2$(种)，故 $P(A)=\frac{12}{30}=\frac{2}{5}$，$P(B)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$。因 $A\cap B=\varnothing$，于是 $P(C)=P(A)+P(B)=\frac{7}{15}$，$P(D)=1-P(B)=\frac{14}{15}$。

例 1-3-5 一个口袋中装有 a 只白球、b 只红球，$n(n\leqslant a+b)$ 个人依次从袋中取一只球，那么：①进行放回取样；②进行不放回取样。求第 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 个人取到红球的概率。

解：设 A_i 表示“第 i 个人取到红球”事件。

(1) 显然 $P(A_i)=\frac{b}{a+b}$。

(2) 考察 n 个人取球的方法，共有 P_{a+b}^{n} 种，即样本空间中的元素个数为 P_{a+b}^{n}。事件 A_i 发生必然是第 i 个人取到 b 只红球中的一只且其余 $n-1$ 个人在余下的 $a+b-1$ 个球中任取一只，即 A_i 包含的取法有 $b\times\mathrm{P}_{a+b-1}^{n-1}$，故 $P(A_i)=\frac{b\times\mathrm{P}_{a+b-1}^{n-1}}{\mathrm{P}_{a+b}^{n}}=\frac{b}{a+b}$。

上面的结果表明，每个人取到红球的概率都一样，与取球的次序无关，大家机会均等，这个结论称为“抽签原理”。值得注意的是，本例中在放回取样与不放回取样的情形下，每个人取到红球的概率是一样的。

例 1-3-6 设有 n 个人到某地开会入住一家有 N 个房间的旅店，如果每个人都等可能地被分配到任意一间去住($n\leqslant N$)，房间容量不限。求下列事件的概率：(1)指定的 n 个房间各有一个人住；(2)恰好有 n 个房间各住一个人；(3)某个指定的房间至少有一个人住；(4)某个指定的房间恰好有 $k(k\leqslant n)$个人住。

解：每个人都有 N 个房间可供选择，所以 n 个人住的方式共有 N^n 种，它们是等可能的。以 A、B、C、D 分别表示“指定的 n 个房间各有一个人住”“恰好有 n 个房间各住一个人”“某个指定的房间至少有一个人住”“某个指定的房间恰好有 k 个人住”事件。

(1) 事件 A 包含的住房方式有 $n!$ 种，故 $P(A)=\frac{n!}{N^n}$。

(2) n 个房间可以在 N 个房间中任意选取，对选定的 n 个房间，再分配 1 个人去住，事件 B 包含的住房方式有 $\mathrm{C}_N^n n!$ 种，故 $P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n n!}{N^n}$。

(3) $\overline{C}$ 表示某个指定的房间没有人住，即 n 个人都住在其余 $N-1$ 个房间中，可知 $\overline{C}$ 包含的住房方式有 $(N-1)^n$ 种，故 $P(C)=1-P(\overline{C})=1-\frac{(N-1)^n}{N^n}$。

(4) 先从 n 个人选出 k 个人住指定的房间，其余的 $n-k$ 个人去住其余 $N-1$ 个房间，可知事件 D 包含的住房方式有 $C_n^k(N-1)^{n-k}$ 种，故 $P(D)=\dfrac{C_n^k(N-1)^{n-k}}{N^n}$。

例 1-3-7 假设每个人的生日在一年 365 天中的任意一天是等可能的，某班级有 $n(n\leqslant 365)$ 个人，问至少有两个人生日在同一天的概率是多少？

解：这是历史上有名的"生日问题"，把 365 天当作 365 个"房间"，令 A 表示"n 个人中至少有两个人生日在同一天"事件，那么 $\overline{A}$ 表示 n 个人的生日全不相同，即恰好有 n 个房间各住一个人，所以 $P(A)=1-\dfrac{C_{365}^n n!}{365^n}$，表 1-3-1 列出了 n 为 10，20，…，80 时的概率，具体的趋势如图 1-3-1 所示。

表 1-3-1 同一天生日的概率

n	10	20	30	40	50	60	70	80
$P(A)$	0.117	0.411	0.706	0.891	0.970	0.990	0.999	0.9999

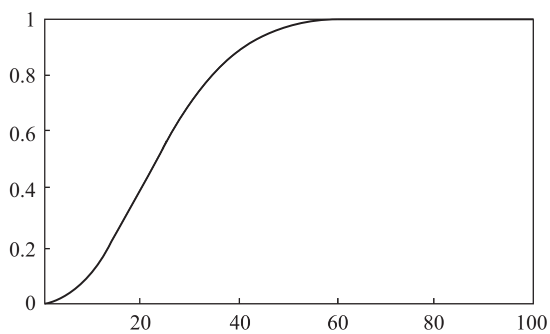

图 1-3-1 同一天生日的概率趋势

上述结果告诉我们，"直觉"并不可靠，这说明研究随机现象统计规律性的重要性。

需要注意的是，古典概型的定义只适用于试验的可能结果是有限个的情形。判断某一随机试验是否属于古典概型，关键在于等可能性的判定，而等可能性的判定往往根据我们实际的经验来判定。关于这一点，读者在分析概率问题时务必注意。

1.3.3 几何概型

概率的古典定义是在一种特殊情况下对事件发生可能性的定义，即假定试验的所有可能结果只有有限多个，且每种结果的可能性是相等的，而当试验结果有无穷多个时，这种定义显然不适用。借助古典概型的定义，设想仍用"事件的概率"等于"部分"比"全体"的方法，来规定事件的概率，从而对古典概型进行理论上的拓展，使拓展后的定义适用于无穷多种可能结果的情形，这就是几何概型。下面先看两个例子，然后归纳这个定义。

例 1-3-8 某人在等公交车，已知公交车是每隔 15min 发一班，但他不知道具体的发车时刻表，求他等待时间短于 5min 的概率。

解：每两车次到达的间隔相差 15min，而此人到达公交车站的时刻应该介于两次公交车出发之间的任何时间，等待不超过 5min 占据了两次公交车出发之间 15min 的 1/3，因此等待时间短于 5min 的概率应该等于 5min 的长度与两次出发时间间距的长度，即 $p=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$。

例 1-3-9 高岭土是一种以高岭石族黏土矿物为主的黏土和黏土岩，它因江西省景德镇高岭村而得名，是陶瓷的重要原料，如图 1-3-2 所示。由于景德镇的瓷器制造已历经千年，高岭土已经消耗殆尽，急需寻找新的矿源。有信息表明，面积为 140km^2 鲇鱼山镇在表面积达 2km^2 的区域中有高岭土富矿，假设在这片区域中随机选定一点钻探，问找到高岭土富矿的概率是多少？

图 1-3-2 从高岭土到瓷坯

解：由于随机选取一点钻探，因此每一点被选到的可能性是相等的，而储藏着高岭土的区域占整个区域面积的 2/140。

因此，钻到高岭土的概率应该为储藏高岭土的面积比整个区域的面积，即

$$p=\frac{2}{140}=\frac{1}{70}$$

例 1-3-10 1777 年，法国科学家蒲丰(Buffon)提出了投针试验问题。平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行直线，现向此平面任意投掷一根长为 $b(b<a)$ 的针，如图 1-3-3 所示，试求针与任一平行直线相交的概率。

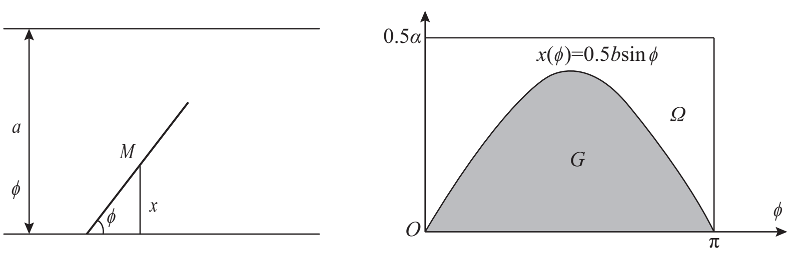

图 1-3-3 投针示意图

解：如果以 x 表示针投到平面上时针的中点 M 到最近的一条平行直线的距离，ϕ 表示针与该平行直线的夹角，则针落在平面上的位置可由 x 与 ϕ 唯一确定。如图 1-3-3 所示，投针试验的所有可能结果与矩形区域 $\Omega=\{(x,\phi)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\phi\leqslant\pi\}$ 中的所有点一一对应。由投掷的任意性可知，这是一个几何概型问题。我们所关心的事件是 $A=\{$针与任一

平行直线相交$\}$，它发生的充分必要条件为$(x,\phi)\in G$，其中$G=\left\{(x,\phi)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant \frac{b}{2}\sin\phi,\right.$
$\left.0\leqslant\phi\leqslant\pi\right\}$，此时，有

$$P(A)=\frac{G\text{ 的面积}}{\Omega\text{ 的面积}}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{b}{2}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{b}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{2b}{a\pi}$$

根据频率的稳定性，当投针试验 n 次数很大时，算出针与平行直线相交的次数 m，则频率值$\frac{m}{n}$即可作为$P(A)$的近似值，代入上式有

$$\frac{m}{n}\approx\frac{2b}{a\pi}\Rightarrow\pi\approx\frac{2bn}{am}$$

利用上式可计算圆周率 π 的近似值，历史上一些学者的计算结果如表 1-3-2 所示。

表 1-3-2　历史上多次投针试验近似 π 的结果

试验人	试验时间	针长	投掷次数	相交次数	π 的近似值
Wolf	1850 年	0.8	5000	2532	3.1596
Smith	1855 年	0.6	3204	1218	3.1554
De Morgan	1860 年	1.0	600	382	3.137
Fox	1884 年	0.75	1030	489	3.1595
Lazzerini	1901 年	0.83	3408	1808	3.1415929
Reina	1925 年	0.54	2520	859	3.1795

通过上述几个例子可以看出，它们所要求的概率等于部分度量与整体度量的比值，由此我们给出其一般定义：

若对于一个随机试验，每个样本点出现是等可能的，如果以 A 表示“在区域 Ω 中随机取一点，而该点落在区域 G 中”这一事件，则其概率定义为

$$P(A)=\frac{m(G)}{m(\Omega)}\tag{1-3-2}$$

其中，$m(\Omega)$是样本空间 Ω 的度量；$m(G)$是构成事件 A 的子区域的度量。

这种情况下，每个基本事件理解为从某个特定的几何区域内随机地取一点，该区域中每一个点被取到的机会都一样；而一个随机事件的发生则理解为恰好取到上述区域内的某个指定区域中的点。这里的区域可以是线段、平面图形、立体图形等，其度量依次为长度、面积、体积，则这样的概率模型称为几何概型。

几何概型是另一类等可能概型，它与古典概型的区别在于试验的结果是无限个。

故几何概型的特点有以下两个。

（1）试验中所有可能出现的基本事件有无限多个。

（2）每个基本事件出现的可能性相等。

习题 1.3

(1) 掷两枚骰子,求下列事件的概率。

① 事件 A="点数之和为 7"。

② 事件 B="点数之和不超过 5"。

③ 事件 C="点数之和为偶数"。

(2) 从 52 张扑克牌中任取 4 张,求下列事件的概率:

①全是红色;②两张红色,两张黑色;③两张黑桃;④同花;⑤没有两张是同一花色;⑥同花顺;⑦两对(如两张 A 和两张 K 等);⑧四条(四张牌形相同,如 4 张 A 等);⑨一对;⑩四张同色。

(3) 设 5 个产品中有 3 个正品、2 个次品。从中随机抽取 2 个,求抽出的 2 个产品中全是次品、仅有一个次品和没有次品的概率各为多少?

(4) 一个袋中装有四只形状与大小完全相同的茶杯,编号分别为 1,2,3,4,试考虑以下问题:

① 从茶具盒中随机取两只茶杯,求取出的茶杯的编号之和不大于 4 的概率;

② 先从茶具盒中随机取一只茶杯,该茶杯的编号为 m,将茶杯放回茶具盒中,然后从茶具盒中随机取一只茶杯,该茶杯的编号为 n,求 $n<m+2$ 的概率。

(5) 将 r 个不同的球任意地放入 n 个格子里($n\geqslant r$),试求:

① 指定的 r 个格子里各有一球的概率;

② 任意 r 个格子里各有一球的概率;

③ 指定的一个格子里恰有 k 个球的概率。

(6) 一位意大利贵族发现,掷 3 枚骰子,点数之和等于 10 的情况要比等于 9 的情况多,而点数之和为 9 的情况与点数之和为 10 的情况同有六种,它们出现的可能性应该相等,为此他感到疑惑不解。请你应用所学概率论的知识解释此现象。

(7) 设掷两枚质地均匀的骰子,考察朝上一面的点数之和。数学家莱布尼茨曾认为:掷出 11 点与 12 点的概率相同。请你计算掷出 11 点与 12 点的概率,判断他的认为是否正确。

(8) 在 1~2000 的所有整数中随机抽取一个数,求取到的整数既不能被 6 整除,又不能被 8 整除的概率。

(9) 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只,问:这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

(10) 将 15 件装饰瓷随机地摆放到 3 个装饰架上,这些装饰瓷中有 3 件是花瓶,如果是平均分到这 3 个装饰架上。试求:

① 每个装饰架上能摆放一只花瓶的概率是多少?

② 3 只花瓶都摆放在同一装饰架上的概率是多少?

(11) 在区间(0,1)中随机地取两个数,求两数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率。

(12) 甲、乙两人相约在 $0\sim T$ 这段时间内,在预定地点会面。先到的人等候另一个人,经过时间 $t(t<T)$后离去。设每人在 $0\sim T$ 这段时间内各时刻到达该地是等可能的,且两人到达的时刻互不牵连。求甲、乙两人能会面的概率。

(13) 甲、乙两人约定在下午 1:00 到 2:00 到某站乘公共汽车,又这段时间内有 4 班公共汽车,它们的开车时刻分别为 1:15、1:30、1:45、2:00。如果约定:①见车就乘;②最多等一辆车。试分别求这两种情形下甲、乙同乘一车的概率。(假设甲、乙两人到达车站的时刻是互相不牵连的,且每人在 1:00 到 2:00 的任何时刻到达车站是等可能的。)

1.4 条件概率

前面我们所讨论事件的概率都是在样本空间中考虑的,而在一些实际问题中,我们常常需要在一些附加条件下研究某一随机事件发生的可能性,这样的概率称为条件概率。本节先用例子引出条件概率的定义,然后介绍计算条件概率的几个重要公式。

1.4.1 条件概率的定义

例 1-4-1 一套餐具中装有大小相同的 10 只盘子,其中 4 只浅盘、6 只深盘。甲、乙两人依次各取一只盘子。问:在甲取出一只盘子是浅盘的情况下,乙再取一只浅盘的概率是多少?

解:设 A 表示"甲取到浅盘"事件,B 表示"乙取到浅盘"事件,根据抽签原理知 $P(A)=P(B)=\frac{4}{10}$。如果甲取出一只盘子,发现是浅盘,并告诉乙,这时乙再取一只盘子,取到浅盘的概率就变成$\frac{3}{9}$。

前面已知事件 B 发生的概率是$\frac{4}{10}$,那么如何理解$\frac{3}{9}$?

用符号 $P(B|A)$表示在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率,则在此例中,甲取出一只盘子是浅盘的情况下,乙再取一只浅盘的概率 $P(B|A)=\frac{3}{9}$。

注意:$P(A)=\frac{4}{10}$,$P(AB)=\frac{12}{10\times 9}$,且 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{9}$。

定义 1.5 设 A、B 是两个事件,且 $P(A)>0$,称 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$为已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的**条件概率**。

以上这种关系就是条件概率的定义。

可以验证,条件概率 $P(\cdot|A)$也满足概率定义的 3 个条件,即

(1) (非负性)对任何事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$;

(2) (规范性)对必然事件 S,有 $P(S|A)=1$;

(3) (可列可加性)设 $A_1,A_2,\cdots$是两两互不相容的事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots|A)=P(A_1|A)+P(A_2|A)+\cdots \tag{1-4-1}$$

因为条件概率满足概率定义的 3 个条件,所以前面所有概率的性质都适用于条件概率。下面举 4 个常用的性质,注意它们的表示与第 1.2 节中相应公式的异同。

性质 1.7 $P(\varnothing|A)=0$。

性质 1.8 设事件 B_1 与 B_2 互不相容，则 $P(B_1 \cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)$。

性质 1.9 $P(\overline{B}|A)=1-P(B|A)$。

性质 1.10 $P(B_1 \cup B_2|A)=P(B_1|A)+P(B_2|A)-P(B_1B_2|A)$。

应用上面的定义与性质，求解例 1-4-2。

例 1-4-2 设同时掷三枚骰子，且已知所得 3 个数都不一样，问在此情况下，3 枚骰子中有一枚骰子是 1 点的概率是多少？

解：设事件 A 表示"掷出含有 1 的点数"，事件 B 表示"掷出的 3 个点数都不一样"，则显然所要求的概率为 $P(A|B)$。

由古典概型可知，$P(AB)=\dfrac{C_3^1P_5^2}{6^3}=\dfrac{5}{18}$，$P(B)=\dfrac{P_6^3}{6^3}=\dfrac{5}{9}$。

根据条件概率公式可得，$P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{\frac{5}{18}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{1}{2}$。

1.4.2 乘法公式

由条件概率的定义，很容易得出下列结论：

设 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$。如果 $P(B)>0$，则 $P(AB)=P(A|B)P(B)$。

上述公式称为乘法公式。乘法公式还可以推广到多个事件的情形，如

$$P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A),\quad P(AB)>0$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}),$$
$$P(A_1A_2\cdots A_n)>0$$

例 1-4-3 设某陶瓷厂在测试其陶瓷产品的硬度时，将该类产品放在 1m 高的桌上落下，看其下落到地面时是否破碎。已知第一次落下时打破的概率为$\dfrac{1}{2}$，若第一次落下时未打破，第二次落下时打破的概率为$\dfrac{7}{10}$，若前两次落下均未打破，第三次落下时打破的概率为$\dfrac{9}{10}$。试求该陶瓷产品落下 3 次未打破的概率。

解：设 A_i 表示"陶瓷产品第 i 次落下时打破"事件，$i=1,2,3$，由题意可知

$$P(A_1)=\frac{1}{2},\quad P(A_2|\overline{A_1})=\frac{7}{10},\quad P(A_3|\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{9}{10}$$

再设 B 表示"陶瓷产品落下 3 次未打破"事件，则 $B=\overline{A_1}\cdot\overline{A_2}\cdot\overline{A_3}$，故

$$P(B)=P(\overline{A_3}|\overline{A_2}\,\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})P(\overline{A_1})=\left(1-\frac{9}{10}\right)\times\left(1-\frac{7}{10}\right)\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{200}$$

注意：条件概率 $P(B|A)$ 与积事件概率 $P(AB)$ 是有区别的，要对照其定义仔细辨别。

从样本空间的角度看，这两种事件所对应的样本空间发生了改变。求 $P(AB)$ 时，仍在原来的样本空间中进行讨论。而求 $P(B|A)$ 时，所考虑的样本空间就不是了。这是因为前

提条件中已经知道事件 A 发生了,新的样本空间缩小为 A。

1.4.3 全概率公式与贝叶斯(Bayes)公式

给定事件 A,事件 B 可以分解为 $B=AB\cup\overline{A}B$。如果 $0<P(A)<1$,则有

$$P(B)=P(AB)+P(\overline{A}B)=P(B|A)P(A)+P(B|\overline{A})P(\overline{A}) \tag{1-4-2}$$

进一步,如果 $P(A_i)>0(i=1,2,3)$,A_1,A_2,A_3 两两互拆,且 $S=A_1\cup A_2\cup A_3$,那么

$$\begin{aligned}&B=BA_1\cup BA_2\cup BA_3\\&P(B)=P(BA_1)+P(BA_2)+P(BA_3)\\&\quad=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)\end{aligned}$$

定义 1.6 设 S 是试验 E 的样本空间,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是一组事件,如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=S$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 S 的一个**划分**。

定理 1.1 设 S 是试验 E 的样本空间,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$,则对任意事件 B 有

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n) \tag{1-4-3}$$

则称式(1-4-3)为全概率公式。

定理 1.2 设 S 是试验 E 的样本空间,B 是 E 的事件,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 S 的一个划分,且 $P(B)>0,P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P(A_i|B)=\frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+\cdots+P(B|A_n)P(A_n)},\quad i=1,\cdots,n \tag{1-4-4}$$

则称式(1-4-4)为贝叶斯公式。

贝叶斯公式在概率论和数理统计中有多方面的应用,它是由英国数学家贝叶斯(Thomas Bayes,1702—1763)得到的,用来描述两个条件概率之间的关系。利用全概率公式求事件 B 的概率,关键是寻求适当的一个划分 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,使 $P(A_i)$和 $P(B|A_i)$容易求得,寻求样本空间的划分通常是找导致事件 B 发生的所有互不相容的事件。

事件 A_i 的概率 $P(A_i)$通常是人们在此之前对 A_i 的认知,习惯上称为先验概率;概率 $P(A_i|B)$反映了在事件 B 发生的情况下事件 A_i 发生的概率,称为后验概率。

下面先举几个简单的例子说明贝叶斯公式的应用,然后举例说明条件概率的计算也是可用多种方法的,以便对本节内容的理解。

例 1-4-4 某公司需要大量的陶瓷配件,现有三家陶瓷工厂为其供货,它们的供货份额分别是 15%、80%和 5%,根据历史经验它们的次品率分别为 2%、1%和 3%。三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区分标志。

(1) 在仓库中随机取一配件,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机取一配件,若已知取到的是次品,判别它最有可能是哪一家工厂公司生产的。

解:设 A_i 表示"取到的配件是第 i 家陶瓷工厂生产的",$i=1,2,3$,B 表示"取到的配件是次品",根据题意知,A_1,A_2,A_3 是样本空间 S 的一个划分,且

$$P(A_1)=0.15,\quad P(A_2)=0.8,\quad P(A_3)=0.05$$

$$P(B|A_1)=0.02,\quad P(B|A_2)=0.01,\quad P(B|A_3)=0.03$$

(1) 由全概率公式,可得

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)+P(B|A_3)P(A_3)$$
$$=0.003+0.008+0.0015=0.0125$$

(2) 由贝叶斯公式计算可得 $P(A_1|B)=0.24$,$P(A_2|B)=0.64$,$P(A_3|B)=0.12$,所以该次品最有可能是第二家陶瓷工厂生产的。

本例中,$P(A_1)=0.15$ 是事件 A_1 的先验概率,即在仓库中随机取一配件是第一家陶瓷工厂生产的概率;$P(A_1|B)=0.24$是后验概率,表示在仓库中随机取一配件发现是次品,这时该配件是第一家陶瓷公司工厂的概率。

例 1-4-5 据某项调查,中国东部某城市总体来说患肺癌的概率约为 3%,已知该城市大约有 10%是吸烟者,根据卫生部门提示吸烟人群患肺癌的概率约为 20%,求此城市不吸烟者患肺癌的概率是多少?

解:此问题中的试验内容是随机选取一人,考察他是否患肺癌,以及他是否吸烟。

设事件 A 表示“某人患肺癌”,事件 B 表示“某人吸烟”,由题意知 $P(A)=3\%$,$P(B)=10\%$,$P(A|B)=20\%$,所求概率是 $P(A|\overline{B})$。

因 $P(AB)=P(A|B)P(B)=2\%$,所以 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=1\%$,于是 $P(A|\overline{B})=\dfrac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0.01}{0.90}\approx 1.11\%$。

例 1-4-6 如有两套未包装完成的餐具,第一套中有 3 只浅盘、2 只深盘;第二套中有 4 只浅盘、4 只深盘。现从第一套的盒子中任取 2 只盘子放入第二套的盒子,然后从第二套的盒子中任取一只瓷盘,求瓷盘为浅盘的概率。

解:设事件 A_i 表示“从第一套中取的 2 个瓷盘中有 i 个浅盘”,其中 $i=0,1,2$,则 A_0、A_1、A_2 是样本空间的一个划分。根据题意,可得

$$P(A_0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{1}{10},\quad P(A_1)=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{6}{10},\quad P(A_2)=\frac{C_3^2}{C_5^2}=\frac{3}{10}$$

设事件 B 表示“从第二套中取到的是浅盘”,根据题意,仍得

$$P(B|A_0)=\frac{4}{10},\quad P(B|A_1)=\frac{5}{10},\quad P(B|A_2)=\frac{6}{10}$$

由全概率公式得

$$P(B)=P(B|A_0)P(A_0)+P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)$$
$$=\frac{1}{10}\times\frac{2}{5}+\frac{6}{10}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{10}\times\frac{3}{5}=\frac{13}{25}$$

条件概率是概率的一个难点,首先,“在某事件 A 发生的前提下事件 B 发生的概率”经常容易和“事件 A、B 同时发生的概率”混淆;其次,在解决条件概率问题时采取方法的不同会直接导致解决问题的难易程度不同。这就要求同学们熟练掌握解决条件概率问题的各种方法,因题而异,选择适当的方法求解。

习题 1.4

(1) 有两个外形完全一样的游戏盒子,甲盒子中有 5 只白球、7 只红球;乙盒子中有 4 只

白球、2 只红球。从两个游戏盒子中任取一盒子，然后从所取到的盒子中任取一球，取到的球是白球的概率是多少？

（2）轰炸机轰炸某目标，由于精确命中要求它飞得越近越好，然而由于诸多不可控因素，它能飞到距目标 300m、150m、100m 以内的概率分别是 0.5、0.3、0.2，又设它在距目标 300m、150m、100m 时的命中率分别是 0.01、0.02、0.1。问目标被命中的概率为多少？

（3）一套餐具中装有大小相同的 10 只盘子，完美的有 8 只，2 只有瑕疵。甲、乙两人依次各取一只盘子。问在甲取出一只盘子带瑕疵的情况下，乙再取一只带瑕疵盘子的概率是多少？

（4）某种树木成活之后，能长到 20m 高的概率为 0.7，长到 25m 高的概率为 0.56，现有一棵这样的树木已经长到了 20m 高，求它能长到 25m 高的概率。

（5）设某课程考试中，教师规定从 200 道题中随机抽取 60 道题，若学生至少能答对其中的 40 道，则判定该学生此课程成绩合格；若学生至少能答对其中 50 道就获得优秀。已知某学生能答对其中 100 道题，并且知道他在这次考试中已经通过，他获得优秀成绩的概率是多少？

（6）某高校 2014 级有学生 4000 人，其中共青团员 1500 人。全校有 4 个学院，其中 F 学院有学生 1000 人、共青团员 400 人。从该学校 2014 级学生中任意选 100 个作为学生代表。

① 求选到的全是 F 学院的学生的概率；

② 已知选到的是共青团员，求他是二级学院学生的概率。

（7）掷两枚骰子，已知两枚骰子点数之和是 7，求其中一枚为 1 点的概率。

（8）某产品的商标为“MAXAM”，其中两个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM”的概率。

（9）某棵树的主人外出，委托邻居浇水。已知如果不浇水，树死去的概率是 0.8；若浇水，则树死去的概率是 0.15，有 0.9 的把握确定邻居会记得浇水。

① 求主人回来树还活着的概率；

② 若主人回来树已死去，求邻居忘记浇水的概率。

（10）袋中有一个白球和一个黑球，一次次地从袋中摸球，如果取出白球，则把白球放回后再加进一个白球，直至取出黑球，求取了 100 次都没有取到黑球的概率。

1.5 独立性

给定试验 E 的两个事件 A 与 B，如果 $P(A)>0$，那么 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$。一般地，$P(B|A)\neq P(B)$，即事件 A 的发生对事件 B 的发生有影响。如果事件 A 的发生对事件 B 的发生没有影响，则 $P(B|A)=P(B)$，从而 $P(AB)=P(A)P(B)$。

定义 1.7 设 A、B 是两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B **相互独立**。

容易得出以下结论：

结论 1.1 设 $P(A)>0$，则事件 A 与 B 相互独立当且仅当 $P(B|A)=P(B)$。

结论 1.2 设事件 A 与 B 相互独立，则事件 A 与 $\overline{B}$、$\overline{A}$ 与 B、$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

如果 $P(A)=0$，显然有 $P(AB)=P(A)P(B)$。

结论 1.3 零概率事件(其中包含不可能事件$\varnothing$)与任何一个事件相互独立。

同样，必然事件也与任何一个事件相互独立。

例 1-5-1 设试验 E 为“抛掷甲、乙两枚硬币，观察出现正反面的情况”，记 A 表示“甲币出现正面”，B 表示“乙币出现正面”，讨论事件 A 与 B 的独立性。

解：样本空间 $S=\{$甲正乙正，甲正乙反，甲反乙正，甲反乙反$\}$，易得

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AB)=\frac{1}{4}$$

于是 $P(AB)=P(A)P(B)$，即事件 A 与 B 相互独立。

例 1-5-2 设试验 E 为“抛掷一枚骰子，观察出现的点数”，记 A 表示“点数小于 5”，B 表示“点数是奇数”，讨论事件 A 与 B 的独立性。

解：样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,3,5\}$，$AB=\{1,3\}$，故

$$P(A)=\frac{4}{6},\quad P(B)=\frac{3}{6},\quad P(AB)=\frac{2}{6}$$

可知 $P(AB)=P(A)P(B)$，所以事件 A 与 B 相互独立。

在判别事件的独立性时，一定要根据定义，不能依靠直觉。

设 A、B、C 是 3 个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，$P(AC)=P(A)P(C)$同时成立，则称事件 A、B、C **两两独立**。

由上述 3 个等式不能推出 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，对于 3 个事件，如果

$$\begin{cases} P(AB)=P(A)P(B) \\ P(BC)=P(B)P(C) \\ P(AC)=P(A)P(C) \\ P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \end{cases}$$

则称**事件 A、B、C 相互独立**。

对于 $n(n\geqslant 3)$个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，如果其中任意 $n-1$ 个事件相互独立且 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$，则称**事件** $A_1,A_2,\cdots,A_n$ **相互独立**。

显然有以理结论：

结论 1.4 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $k(2\leqslant k\leqslant n)$个事件相互独立。

结论 1.5 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立，则其中任意 $k(1\leqslant k\leqslant n)$个事件换成对立事件形成的新的 n 个事件也相互独立。

从上面的定义和例子可以看出，两事件相互独立的含义是它们中一个发生与否对另一个发生的概率没什么影响。在实际生活中，事件的独立性的分析需要根据事件的实际意义和需要进行，具体问题需具体分析。如果两个事件之间没有关联(或者关联很小时，为了研究方便)，可以认为它们是相互独立的。

例 1-5-3 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性。如图 1-5-1 所示，设有四个独立工作的元件 1，2，3，4 按串联再并联的方式连接。设第 i 个元件的可靠性为 $p_i(i=1,2,3,4)$，试求系统的可靠性。

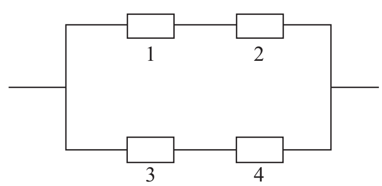

图 1-5-1 系统构成

解:以 A_i 表示"第 i 个元件正常工作"($i=1,2,3,4$),以 A 表示"系统正常工作"事件,由题意可知 A_1,A_2,A_3,A_4 相互独立,$P(A_i)=p_i$,且 $A=A_1A_2\cup A_3A_4$,故

$$P(A)=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)=p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4$$

例 1-5-4 甲、乙、丙三人各射击一次,他们各自中靶与否相互独立,且已知 3 人各自中靶的概率分别是 0.5、0.6、0.8。求下列事件的概率:

(1) 恰有一人中靶;

(2) 至少有一人中靶。

解:记事件 A、B、C 分别表示"甲中靶""乙中靶""丙中靶",D 表示"恰有一人中靶",E 表示"至少有一人中靶",则事件 A、B、C 相互独立,且 $P(A)=0.5$,$P(B)=0.6$,$P(C)=0.8$。

(1) 因为 $D=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$,所以

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A\overline{B}\,\overline{C})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{A}\,\overline{B}C)\\&=P(A)P(\overline{B})P(\overline{C})+P(\overline{A})P(B)P(\overline{C})+P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)=0.26\end{aligned}$$

(2) 因为 $E=A\cup B\cup C$,所以

$$P(E)=P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.96$$

例 1-5-5 假设一种型号的迫击炮击中目标的概率为 0.3,现要以 99%的概率保证击中目标,指挥员至少需要多少门此种型号的迫击炮各发一枚炮弹?(假设各炮击中目标与否相互独立。)

解:设需要 n 门炮,以 A_i 表示"第 i 门炮击中目标",$i=1,2,\cdots,n$,以 B 表示"至少有 1 门炮击中目标",根据题意知 $P(A_i)=0.3$,$P(B)\geqslant 0.99$,且 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立。又因 $B=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,故 $P(B)=1-P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\cdots\overline{A}_n\right)=1-0.7^n$,解不等式 $1-0.7^n\geqslant 0.99$ 得 $n\geqslant 12.91$,于是 n 最小可取 13。

概率很小的事件在一次试验中不可能发生,如果它发生了,一定存在有利于它发生的条件,这一论断称为**实际推断原理**或**小概率原理**。

例 1-5-6 4 人玩一副 52 张的扑克牌,其中一人连续 3 次发牌都没有得到 A 牌。问:他是否有理由抱怨自己今天打牌的"运气"不好?

解:一次发牌中没有得到 A 牌的概率是 $\mathrm{C}_{48}^{13}\big/\mathrm{C}_{52}^{13}=0.3038$,假设各次发牌相互独立,三次发牌都没有得到 A 牌的概率是$\left(\mathrm{C}_{48}^{13}\big/\mathrm{C}_{52}^{13}\right)^3=0.028$,这是一个小概率事件。现在小概率事件发生了,说明另有原因,即自己运气不好。

习题 1.5

(1) 三公司独立按时完成某项工作的概率分别为$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{4}$,$\frac{1}{5}$,如果它们互相合作,求按时完成该项工作的概率。

(2) 一正四面体,3 个面分别染成红色、黄色与蓝色,第四面涂以红、黄、蓝 3 种颜色,抛掷该四面体,观察向下一面的颜色,用 A、B、C 分别表示"向下一面有红色""向下一面有黄色""向下一面有蓝色"事件,判别 A、B、C 是否两两独立,判别 A、B、C 是否相互独立?

(3) 有 10 道选择型测验题,一人随意猜答,他答对不少于 6 道题的概率是多少?

(4) 有一个口袋中有 4 只白球、2 只红球,从袋中随机抽取 3 只,则取出 2 只白球、1 只红球的概率是多少?

(5) 某人射击的命中率为 0.7,现独立地重复射击 5 次,则恰有 2 次命中的概率是多少?

应用案例与拓展　　人物小传——许宝騄　　本章小结与知识结构

本章习题

1. 选择题

(1) 设事件 A 与事件 B 互不相容,则(　　)。

A. $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$　　B. $P(AB)=P(A)P(B)$

C. $P(A)=1-P(B)$　　D. $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

(2) 设 A、B 是两个随机事件,且 $0<P(A)<1$,$P(B)>0$,$P(B|A)=P(B|\overline{A})$,则必有(　　)。

A. $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$　　B. $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(AB)\neq P(A)P(B)$

(3) 设 A、B 为随机事件,且 $P(B)>0$,$P(A|B)=1$,则必有(　　)。

A. $P(A\cup B)>P(A)$　　B. $P(A\cup B)>P(B)$

C. $P(A\cup B)=P(A)$　　D. $P(A\cup B)=P(B)$

(4) 已知 $0<P(B)<1$,且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$,则下列选项成立的是(　　)。

A. $P[(A+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$

B. $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$

C. $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$

D. $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$

2. 填空题

(1) 已知 A、B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{AB})$,且 $P(A)=p$,则 $P(B)=$________。

(2) 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1%和 2%,现从由 A 和 B 的产品分别占 60%和 40%的一批产品中随机抽取一件,发现是次品,则该次品属 A 生产的概率是________。

(3) 袋中有 50 个乒乓球,其中 20 个是黄球,30 个是白球,现有两人依次随机地从袋中各取一球,取后不放回,则第二个人取得黄球的概率是________。

(4) 设两两相互独立的三事件 A、B 和 C 满足条件:$ABC=\phi$,$P(A)=P(B)=P(C)<$

$\frac{1}{2}$，且已知 $P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16}$，则 $P(A)=$________。

3. 计算题

(1)(取球问题)袋中有 5 个白球、3 个黑球，分别按下列三种取法在袋中取球。

① 有放回地取球：从袋中取 3 次球，每次取一个，看后放回袋中，再取下一个球。

② 无放回地取球：从袋中取 3 次球，每次取一个，看后不再放回袋中，再取下一个球。

③ 一次取球：从袋中任取 3 个球。

针对以上三种取法，求恰好取得 2 个白球的概率。

(2) 甲、乙两城市在某季节内下雨的概率分别为 0.4 和 0.35，而同时下雨的概率为 0.15，求在此季节内甲、乙两城市中至少有一个城市下雨的概率。

(3) 一盒子内有 10 只晶体管，其中 4 只是坏的，6 只是好的，从中无放回地取两次晶体管，每次取一只，当发现第一次取得的是好的晶体管时，求第二次取的也是好的晶体管的概率。

(4) 某种集成电路使用到 2000h 还能正常工作的概率为 0.94，使用到 3000h 还能正常工作的概率为 0.87，有一块集成电路已工作了 2000h，它还能再工作 1000h 的概率为多大？

(5) 现有两种报警系统 A 和 B，每种系统单独使用时，系统 A 可靠性为 0.92，系统 B 的有效概率为 0.93，在系统 A 失灵的条件下，B 的有效概率为 0.85，求：

① 同时使用这两个系统的可靠性；

② 在 B 失灵的条件下，A 的可靠性。

(6) 两信息分别编码为 X 和 Y 传送出去，接收站接收时，X 被误收作为 Y 的概率为 0.02，而 Y 被误收作为 X 的概率为 0.01。信息 X 与 Y 传送的频繁程度之比为 2∶1，若接收站收到的信息为 X，问原发信息也是 X 的概率为多少？

(7) 将 A、B、C 三个字母之一输入信道，输出为原字母的概率为 α，而输出为其他任意字母的概率都是 $(1-\alpha)/2$。现将字母串 $AAAA$、$BBBB$、$CCCC$ 之一输入信道，输入 $AAAA$、$BBBB$、$CCCC$ 的概率分别为 p_1、p_2、p_3 $(p_1+p_2+p_3=1)$，已知输出的是 $ABCA$，问输入的是 $AAAA$ 的概率是多少？(假设信道传输各字母的工作是相互独立的。)

考研真题