绪论　维里定理

分析力学是以经典力学的一些基本原理为基础,利用数学搭建起来理论框架,用数学语言描述物理概念和物理规律或者它们之间联系的学科。维里定理(Virial theorem)的推导就很体现这一点。

考虑 n 个粒子系统,第 a 个粒子质量为 m_a,位置矢量和动量分别为 $\boldsymbol{r}_a$ 和 $\boldsymbol{p}_a$,对 $\sum\limits_{a=1}^{n}\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a$ 求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a=\sum_a\dot{\boldsymbol{p}}_a\cdot\boldsymbol{r}_a+\sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_a \tag{0.1}$$

根据牛顿运动定律,上式容易化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a=\sum_a\boldsymbol{F}_a\cdot\boldsymbol{r}_a+\sum_a\frac{p_a^2}{m_a} \tag{0.2}$$

物理量的时间平均定义为

$$\bar{f}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\int_0^\tau f\,\mathrm{d}t \tag{0.3}$$

(0.2)式左边量的平均为

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a}=\lim_{\tau\to\infty}\frac{1}{\tau}\left[\left(\sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a\right)_{t=\tau}-\left(\sum_a\boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{r}_a\right)_{t=0}\right] \tag{0.4}$$

对于限制在有限空间的粒子体系,动量和位置坐标都是有限值,因此(0.4)式右边取长时间极限时应为零。(0.2)式等号右边第二项为 2 倍的系统动能 T,因此(0.2)式平均以后的结果为

$$0=\overline{\sum_a\boldsymbol{F}_a\cdot\boldsymbol{r}_a}+2\overline{T} \tag{0.5}$$

或者

$$\overline{T}=-\frac{1}{2}\overline{\sum_a\boldsymbol{F}_a\cdot\boldsymbol{r}_a} \tag{0.6}$$

其中 $-\dfrac{1}{2}\overline{\sum\limits_a\boldsymbol{F}_a\cdot\boldsymbol{r}_a}$ 称为克劳修斯维里或维里。系统若为保守系,有势函数 $U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n)$,则(0.6)式可化为

$$\bar{T}=\frac{1}{2}\overline{\sum_a \nabla_a U\cdot \boldsymbol{r}_a} \tag{0.7}$$

数学上 k 次齐次函数定义为

$$U(\alpha\boldsymbol{r}_1,\alpha\boldsymbol{r}_2,\cdots,\alpha\boldsymbol{r}_n)=\alpha^k U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n) \tag{0.8}$$

其中 $\alpha\neq 0$。例如,谐振子势就是 2 次齐次函数。若系统势函数是 k 次齐次函数,则

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}U(\alpha\boldsymbol{r}_1,\alpha\boldsymbol{r}_2,\cdots,\alpha\boldsymbol{r}_n)=k\alpha^{k-1}U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n) \tag{0.9}$$

另一方面,(0.9)式左边导数可以直接表示为

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}U(\alpha\boldsymbol{r}_1,\alpha\boldsymbol{r}_2,\cdots,\alpha\boldsymbol{r}_n)=\sum_a \boldsymbol{r}_a\cdot\nabla'_a U(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\cdots,\boldsymbol{r}'_n) \tag{0.10}$$

其中 $\boldsymbol{r}'_a=\alpha\boldsymbol{r}_a$。比较(0.9)式和(0.10)式,可得

$$\sum_a \boldsymbol{r}'_a\cdot\nabla'_a U(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\cdots,\boldsymbol{r}'_n)=k\alpha^k U(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n) \tag{0.11}$$

根据(0.8)式,(0.11)式化为

$$\sum_a \boldsymbol{r}'_a\cdot\nabla'_a U(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\cdots,\boldsymbol{r}'_n)=kU(\boldsymbol{r}'_1,\boldsymbol{r}'_2,\cdots,\boldsymbol{r}'_n) \tag{0.12}$$

(0.12)式作变量代换 $\boldsymbol{r}'_a\to\boldsymbol{r}_a$,再取平均,则

$$\overline{\sum_a \boldsymbol{r}_a\cdot\nabla_a U}=k\bar{U} \tag{0.13}$$

(0.7)式化为

$$\bar{T}=\frac{k}{2}\bar{U} \tag{0.14}$$

(0.14)式就是维里定理。

显然推导过程大部分为数学问题,只是利用了必要的物理概念和物理规律,这样得到的抽象公式却可以解释直观物理现象。北京大学林纯镇教授曾给过估算太阳温度的例子。对于引力势能满足距离反比关系,也就是 $k=-1$,太阳的平均势能的量级为 $k\bar{U}\sim G\dfrac{MM}{R}$,其中 M 是太阳质量,R 是太阳半径。粗略地假设太阳大部分是氢核(实际有 1/4 为氦核),质子质量为 m,则容易估算太阳含质子数为 $N=\dfrac{M}{m}$。对于太阳,可以假设平均动能都是无规运动动能(这是物理假设),则 $\bar{T}=\dfrac{3}{2}Nk_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{temp}}$($k_{\mathrm{B}}$ 为玻耳兹曼常量)。代入(0.14)式可估算太阳的平均温度为

$$T_{\mathrm{temp}}\sim G\frac{mM}{3k_{\mathrm{B}}R} \tag{0.15}$$

代入基本常量简单估算得太阳平均温度 $T_{\text{temp}} \sim 10^7 \text{K}$，这与实际比较接近。当然太阳表面和中心温度非常不同，在中心更高温度下，氢核发生聚变。但这里只利用了少许的力学概念，通过数学推导出简单公式(0.14)，再与热学概念结合就可以大致估算出太阳的平均温度。这里完全没有涉及核聚变等概念，只是力学理论框架下的推论，可以窥探到物理概念结合数学工具显现出的强大威力。事实上，这就是所谓的物理理论。

分析力学是经典力学理论，在本书所涉及范围，数学主要用到多元微积分和线性代数的知识。分析力学也是搭建其他物理理论的基础理论框架，随着学习的深入，同学们将会有更深刻的体会。

第1章　拉格朗日方程

考虑 N 个质点体系，用牛顿方程求解力学体系的运动，就需要建立 $3N$ 个动力学方程。这些质点的坐标和速度往往满足某些事先给定的条件，例如，质点的运动限制在球面上等。这时还应建立相应的约束方程。如果有未知的作用力，还需要列出有关这些力的关系式。即使只对其中几个量的变化规律感兴趣，也必须面对一个庞大的方程组，或者把所有的未知量一起解出来，或者实施消去其他未知量的烦琐步骤。为了克服处理复杂力学体系时遇到的困难，人们寻找其他形式的动力学方程来代替牛顿动力学方程。拉格朗日方程就是其中之一，也是其中最常见和最重要的一个。在拉格朗日方程中，理想约束的约束力不见了，由于约束的存在而不再独立的坐标也已消去，因而使方程组得到简化。另一方面，拉格朗日力学理论框架更具推广性，量子场论中拉格朗日量是核心物理量。下面就从约束开始，逐步给出拉格朗日方程。

1.1　完整系

1.1.1　约束

考查一个球摆：长 l 的轻杆一端悬在 O 点，一质量为 m 的质点固定在这个轻杆另一端。以 O 为固定点，轻杆可任意摆动。以 O 点为坐标原点，竖直方向为 z 轴，水平面为 x-y 面，建立直角坐标系，则质点坐标为(x，y，z)。假设轻杆拉力为 λ，则运动方程为

$$-mg\hat{z}-\lambda\hat{r}=m\boldsymbol{a} \tag{1.1.1}$$

还有一个约束方程

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=l \tag{1.1.2}$$

无约束时质点自由度为3，而此时有一个杆的约束，自由度减为2。即，有两个独立变量就可以完全描述质点的运动，如图1.1中(θ，ϕ)两个变量。

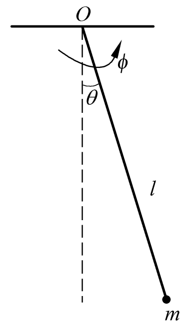

图 1.1　球摆

一般情况下，一个复杂的力学体系，质点的位置和速度往往受到一些事先加上的几何学或运动学的限制，这些限制称为约束或约束条件。由于约束，各质点的坐标 $\boldsymbol{r}_i$ 和速度 $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 之间存在一定的关系，这些约束关系通常可用约束方程来表示。例如，N 个质点的力学体系有 k 个约束方程

$$f_i(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \dot{\boldsymbol{r}}_1, \dot{\boldsymbol{r}}_2, \cdots, \dot{\boldsymbol{r}}_N, t) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{1.1.3}$$

特别地，当约束方程与速度无关时，

$$f_i(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, k \tag{1.1.4}$$

称为完整约束(holonomic constraints)；而(1.1.3)式则表示非完整约束(nonholonomic constraints)。有时约束方程是微分方程形式，不可积的微分约束是非完整约束。只受到完整约束的力学体系称为完整系；受到非完整约束的力学体系称为非完整系。另外，若约束方程不显含时间，则称为稳定约束(scleronomic constraints)；否则，称为非稳定约束(rheonomic constraints)。(1.1.2)式就是完整约束，而且是稳定约束，相应的球摆就是完整系。

例 1.1　长为 l 的轻杆在 x-y 平面内可任意运动，一质点固定在这个轻杆一端，坐标为(x, y)，轻杆的另一端 O 点坐标为(x_0, y_0)。

(1) 若 O 点固定，则

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = l^2 \tag{1.1.5}$$

是完整约束，且是稳定约束。

(2) 若 O 点沿 y 轴作简谐振动，$y_0 = A\cos\omega t$，则

$$(x - x_0)^2 + (y - A\cos\omega t)^2 = l^2 \tag{1.1.6}$$

是完整约束，但是非稳定约束。

还有一类用不等式表示的约束，称为可解约束，而把用等式表示的约束称为不可解约束。可解约束有时被归入非完整约束，因为在不等号成立的条件下实际上对坐标不起限制作用。可解约束可以分段处理而解除(见例 1.2)，以后主要讨论不可解约束。

例 1.2　一质点在半径为 R 的刚性球面运动(原点在球心)，则

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant R^2 \tag{1.1.7}$$

将质点运动分为在球面和离开球面两部分，在球面运动按完整约束 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 处理，离开球面即脱离约束，两部分运动在交接处连续。

1.1.2　广义坐标

考虑一个力学体系，包含 N 个质点，且受到如(1.1.4)式所示的 k 个完整约束。此时原 $3N$ 个坐标不再完全独立，只有 $s=3N-k$ 个是独立的。可以适当选择一组新的独立变量 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)$，进行如下的坐标变换

$$\boldsymbol{r}_i=\boldsymbol{r}_i(q_1, q_2, \cdots, q_s, t), \quad i=1,2,\cdots,N \tag{1.1.8}$$

(1.1.8)式的量应选得使(1.1.4)式成为恒等式。若是稳定约束，总可选择适当的坐标变换使(1.1.8)式不显含时间 t。这组独立的变量 $(q_1, q_2, \cdots, q_s)$ 称为广义坐标(generalized coordinates)，它可以是直角坐标、极坐标、柱坐标、球坐标或是其他物理量。相应的 $\dot{q}_i$ 称为广义速度(generalized velocity)。由(1.1.8)式可得速度矢量和广义速度的关系

$$\dot{\boldsymbol{r}}_i=\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t} \tag{1.1.9}$$

$\dot{q}_j$ 与 q_j 是相互独立的量，由(1.1.9)式可得

$$\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{1.1.10}$$

另一方面，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)=\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial q_j}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right) \dot{q}_j+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j+\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial t}\right)$$

代入(1.1.9)式可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_k}\right)=\frac{\partial \dot{\boldsymbol{r}}_i}{\partial q_k} \tag{1.1.11}$$

(1.1.10)式和(1.1.11)式称为两个经典拉格朗日关系。在完整系中，独立的广义坐标的数目 $s(s=3N-k)$ 称为这个体系的自由度。

例 1.3　对例 1.1 中第一种情况稳定约束，坐标 $(x, y) \Rightarrow 1$ 个独立变量，若选 θ 为广义坐标，直角坐标可利用广义坐标表示为

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0-l \sin \theta \\ y=y_0-l \cos \theta \end{array}\right. \tag{1.1.12}$$

坐标变换不显含时间 t。对例 1.1 中第二种情况非稳定约束，则

$$\left\{\begin{array}{l} x=x_0-l \sin \theta \\ y=A \cos \omega t-l \cos \theta \end{array}\right. \tag{1.1.13}$$

坐标变换显含时间 t。

1.2　虚功原理和广义力

本节介绍虚功原理(virtual work principle)和广义力概念,利用它们讨论静力平衡的问题。静力平衡系统涉及约束力,怎么越过这些约束力而得到平衡条件呢?

1.2.1　虚位移

我们已经学过质点运动产生的位移。无限小位移可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\mathrm{d}t)-\boldsymbol{r}(t) \tag{1.2.1}$$

这是在时间变化过程中实际产生的位移。若 $\mathrm{d}t=0$,则 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$。$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 由运动微分方程(以及初始条件)唯一决定。$\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 满足约束方程。考虑 N 个质点组成的力学体系,受到 k 个完整约束。在时刻 t,如果约束方程用(1.1.4)式表示,则在时刻 $t+\mathrm{d}t$,约束方程为

$$f_i(\boldsymbol{r}_1+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N+\mathrm{d}\boldsymbol{r}_N,t+\mathrm{d}t)=0 \tag{1.2.2}$$

为强调此位移与下面引入的虚位移的区别,我们称之为实位移(virtual displacements)。

虚位移是在某一瞬时 t,物体或质点在约束所允许的条件下任何可能发生的无限小位移,或假想的无限小位移,所以称为虚位移。虚位移只要求满足约束方程,不要求满足动力学方程,也不唯一。虚位移用 $\delta\boldsymbol{r}$ 表示,记为 $\delta\boldsymbol{r}=\delta x\boldsymbol{i}+\delta y\boldsymbol{j}+\delta z\boldsymbol{k}$,以示其无限小,又区别于实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$。对(1.1.4)式的完整约束条件,有

$$f_i(\boldsymbol{r}_1+\delta\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2+\delta\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_N+\delta\boldsymbol{r}_N,t)=0 \tag{1.2.3}$$

比较(1.2.2)式和(1.2.3)式,可知实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是随时间真实发生的,而虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 则不是随时间发生的。对于(1.1.8)式定义的坐标变换,有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j+\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial t}\mathrm{d}t \tag{1.2.4}$$

而虚位移与时间无关,因此

$$\delta\boldsymbol{r}_i=\sum_{j=1}^{s}\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j \tag{1.2.5}$$

由(1.2.3)式～(1.2.5)式看出,在稳定约束情形,约束方程与时间无关,因此实位移可能是虚位移中的一个;在非稳定约束情形,实位移往往不同于任何一个虚位移。虚位移的引入,是为了描述约束的某种局部性质,所以只考虑“无限小”的位移。例如,在曲面约束情形下,如图 1.2 所示,虚位移在切

平面内，不仅长度任意(但是无限小)，而且方向任意(张成一个平面)。从某点产生的虚位移描述的是曲面在该点的切平面邻域。如果曲面本身随时间运动，其上质点的 $\delta\boldsymbol{r}$ 是曲面在某时刻固定情况下，质点在曲面上可能的位移，这些虚位移均在该点曲面的切平面内。而 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 则是质点的真实位移，只有一个。

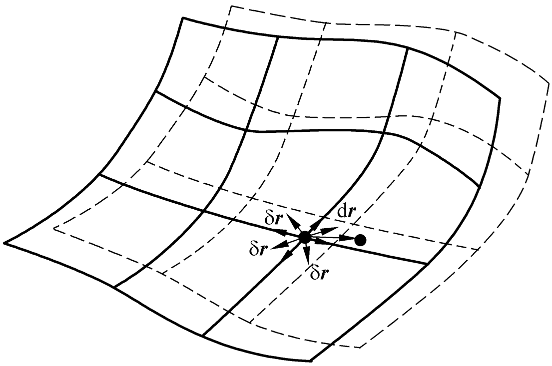

图 1.2　虚位移 $\delta\boldsymbol{r}$ 和实位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 示意图

功的定义为 $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$，那么 $\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{r}$ 自然被称为力 $\boldsymbol{F}$ 在虚位移上所做的虚功，$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i$ 称为力学体系各质点所受作用力的虚功之和。一般而言，虚功实际上并不是功。

1.2.2　理想约束

在系统受到约束时，和自由系统的运动情况不同，引起这种改变是因为系统受到约束的作用，这种作用就是约束(反)力。约束力对受到作用的各点的虚位移各有一虚功。如果系统中各质点的约束力的虚功之和等于零，即

$$\sum_i \boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.2.6}$$

其中，$\boldsymbol{R}_i$ 是第 i 个质点所受约束力的合力，$\delta\boldsymbol{r}_i$ 是它的虚位移，则这种约束称为理想约束。引入理想约束这个概念的意义在于，一方面这种约束的约束力很容易从方程中消去，另一方面，确实有相当广泛的一大类复杂结构的约束是理想的。下面是常见理想约束的一些实例。

(1) 固定或运动变化着的光滑曲面、曲线约束下的质点组；

(2) 用刚性轻杆联结的两质点；

(3) 两个刚体用理想铰链联结于一点；

(4) 两刚体在运动中以理想光滑表面相接触；(理想光滑：几何方面指表面无限可导，物理方面指表面光滑无摩擦。)

(5) 两刚体在运动中以完全粗糙表面相接触。(不可相互滑动,例如齿轮的啮合。)

引进虚功以代替实际的功,可把不稳定约束也纳入理想约束的范围。出现摩擦力做功不能忽略的情况时,可将摩擦力看作未知主动力,通过其他关系求出,而约束仍可认为是理想的。

1.2.3 虚功原理

对于静止平衡质点体系,设作用在 i 质点上所有主动力合力为 $\boldsymbol{F}_i$,所有约束力合力为 $\boldsymbol{R}_i$。由于质点静止 $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=\boldsymbol{0}$,所以,$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$,对所有质点求和,则

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \quad\Rightarrow\quad \sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i+\sum_i\boldsymbol{R}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$$

利用理想约束(1.2.6)式,质点系静止平衡条件为

$$\delta W=\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.2.7}$$

此即虚功原理,也称虚位移原理。这个式子里面不再包含约束力,只有主动力,有可能简化静力学问题的求解。

例 1.4 一匀质梯子质量为 M,长为 L,与水平成 θ 角斜靠在墙面上,墙和地面均光滑,但在梯子的地面一端水平施加力 F,求 F。

解:重心竖直坐标 $y=\dfrac{L}{2}\sin\theta$,力 F 作用点的水平坐标 $x=L\cos\theta$,由虚功原理,

$$\delta W=Mg\,\delta y+F\,\delta x=0$$

即

$$\left(\frac{1}{2}Mg\cos\theta-F\sin\theta\right)L\,\delta\theta=0$$

由于 $\delta\theta$ 任意,$\dfrac{1}{2}Mg\cos\theta-F\sin\theta=0$,所以

$$F=\frac{1}{2}Mg\cot\theta$$

思考:若该例题中,力 F 改为梯子与地面的静摩擦力,则情况又如何?

1.2.4 广义力

把(1.2.5)式代入(1.2.7)式,则

$$\delta W=\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\left(\sum_j\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j\right)=\sum_j\left(\sum_i\boldsymbol{F}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j$$

定义广义力(generalized force)为

$$Q_j = \sum_i \boldsymbol{F}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_j} \tag{1.2.8}$$

则有

$$\delta W = \sum_j Q_j \delta q_j \tag{1.2.9}$$

虚功原理要求 $\delta W=0$,q_j 彼此独立,由(1.2.9)式自然得到

$$Q_j = 0,\quad j=1,2,\cdots,s$$

即受理想约束的完整力学系处于静平衡的条件是:作用在系统上的广义力皆为零。

1.3　达朗贝尔原理

虚功原理是分析力学中处理静力学平衡条件问题的普遍方法。对动力学问题,出发点应从静力平衡方程换成牛顿动力学方程:$\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i=m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$,即 $\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i=\boldsymbol{0}$,点积虚位移:$(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$,对所有质点求和:$\sum\limits_i(\boldsymbol{F}_i+\boldsymbol{R}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0$,理想约束下,利用(1.2.6)式得到

$$\sum_i(\boldsymbol{F}_i-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\delta\boldsymbol{r}_i=0 \tag{1.3.1}$$

式中,$-m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i$ 称为达朗贝尔惯性力。若所有主动力虚功为 δW,则

$$\delta W=\sum_i m_i\ddot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\delta\boldsymbol{r}_i \tag{1.3.2}$$

此即达朗贝尔原理(d'Alembert's principle),又称动力学普遍方程。可以看到这个方程中不包含约束力。

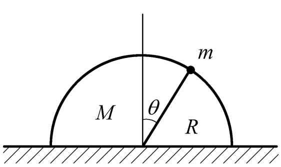

图 1.3　半球面上质点

例 1.5　一质点 m,在半径为 R、质量为 M 的半球面最高处开始滑下,如图 1.3 所示,半球的大圆面在光滑地面自由移动,质点与球面之间摩擦忽略。开始都是静止的,求 m 相对于 M 的运动方程。

解:求解用牛顿力学并不困难,这里用达朗贝尔原理。物体实际是二维运动,原自由度 4 个,$m(x,y)$,$M(X,Y)$,质点下滑时可能离开半球面,因此是可解约束。质点离开半球面以后开始作斜抛运动,而半球面则是匀速直线运动,这部分运动很容易理解,不在此讨论。之前质点在半球面上运动时,一直保持在球面上,因此可认为这一段运动是**完整稳定**约束——M 在地面滑动,m 在 M 的球面下滑,两个约束条件。因此独立