

绪论：漫游在博弈中的逻辑

逻辑和博弈的交汇处有很多值得研究的问题。在这篇绪论中，我们会简要地阐释它们如何自然地交汇在一起，并引领读者以一种轻松的姿态漫步其中，从而领略到这种交汇所展现出的多重景致。伴随着这一游览过程，全书中的很多主题都会一一呈现，并将在之后的章节得到更为系统的介绍。若读者时间紧迫，可直接跳至第一章。

0.1 逻辑与博弈的邂逅

博弈的魅力 博弈作为长期存在且无处不在的实践，构成了人类文化中独特的部分（Huizinga, 1938; Hesse, 1943）。此外，对研究人类交互行为的专家而言，博弈为生动直觉的认知过程提供了一个丰富的模型。从而令理论与实践这两个视角自然地融汇在一起：一系列历久弥新的博弈模型为它们的融合提供了一个自由的认知实验工具。继而，博弈无疑会出现在很多学科中：经济学、哲学、语言学、计算机科学、认知科学和社会科学。在本书中，我们将聚焦于博弈与逻辑领域的交汇之处。在此绪论部分，我们将通过一系列例子向读者展示两者如何自然地交汇在一起，而这里略微触及的众多主题将在本书更具技术性的章节中得以更加深入地探究。

博弈的逻辑和作为博弈的逻辑 接下来，我们将触及涵盖在书名《逻辑与博弈》（*Logic in Games*）中的两个方面。该题目中的连接词“in”被有意地模棱两可化。首先，它包含博弈的逻辑，亦即一般性博弈结构的研究，由此引导我们将逻辑与博弈论、计算机科学以及哲学联系起来。该研究采用了“博弈逻辑”这一领域的标准研究方法：追溯博弈，或者说博弈内部推理的本质特征。其次，它也包含作

为博弈的逻辑，亦即借助于博弈研究逻辑，通过“逻辑博弈”捕捉到基本的逻辑推理活动并提出理解逻辑是什么的新方法。因此，我们有了以下的双向循环图：



此外，这种双向图是一种螺旋式旋转的循环图，我们也可以用旋转木马的概念来理解这两个领域之间的关系：通过相关联的逻辑博弈去认识博弈逻辑，或者通过相应的博弈逻辑去认识逻辑博弈。一些学生困惑于这种双向视角，从而偏向于其中一个方向而忽视了另外一个。不过在本书中，尽管我们尚未完全理解它们如何交织在一起，但这两个方向依然都会得到呈现。自始至终我们的侧重点会是博弈的逻辑，而作为博弈的逻辑将是不可或缺的补充。

这篇绪论是以一种非正式的方式遍览逻辑与博弈的交汇研究。首先，我们会介绍一些简单的逻辑博弈，说明它们如何自然而然地引发关于博弈的一般性问题。这将引领我们探讨这些博弈的一般性定义、它们与计算机科学中进程的类比，以及标准进程逻辑对于它们的分析。其次，我们会探讨有着自身研究动机和关注点的博弈论领域。我们会讨论它的一些基本主题，彰显出其中的逻辑意味，并描绘出逻辑与博弈论交汇研究的大致脉络。在这个交汇研究中，尤为典型的是一种由分析玩家引出的所谓“弈博论”，它将涉及很多哲学逻辑的基本论题。最后，我们还会阐释本书所涉及的内容。

0.2 逻辑博弈

论辩博弈 (argumentation game) 虽然逻辑在古代的起源不是很清楚，但是对法律、政治和哲学辩论的思考似乎成为逻辑出现在希腊、印度和中国传统文化中的一个关键因素。稍微比较下，我们就可以发现辩论与博弈其实十分类似。一个人秉持着一个反驳对手的观点，也许可以赢得一场争论，但是也有可能尝到失败的苦涩。在这个争论过程中，适时的回应至关重要。而这种对话性正好是逻辑历史进程中的一贯坚持，尽管逻辑的成型也依赖于描述性的方面。在逻辑的数学转向后，

我们对于言语对话的研究有了精确的模型 (Lorenzen, 1955)。例如，考虑下面这个著名的推理：

从前提 $\neg A, A \vee B$ 得到结论 B

用描述性的逻辑观点来看，这个推演规则表明了我们如何基于自身所掌握的数据来理解世界的模样。然而，我们也可以用对话性的方式来看待它，把它视为论辩博弈中的一个基本子结构。譬如， P 是一个拥护结论 B 的支持者， O 是一个反对结论但承认前提 $\neg A$ 和 $A \vee B$ 的反对者，他们在辩护过程中轮流发言。我们记录了如下一些可能的步骤：

- 1 O 首先开始挑战 P 对于主张 B 的辩护
- 2 因为 O 承认 $A \vee B$ ， P 现在要求 O 从 A 和 B 中做出选择
- 3 O 必须做出回应，没有其他选择

由此，我们分别列出 O 的两个可能的选择：

- 3' O 承认 A
- 4' P 现在指出 O 也承认 $\neg A$

此时 P 赢了，因为 O 自相矛盾。

- 3'' O 承认 B
- 4'' 现在 P 使用 O 的这个承诺为 1 做出辩护

O 无话可说并且认输。

此处体现出一个关键的特征。玩家 P 有一个获胜策略：无论 O 选择什么， P 都可以赢得这场博弈。这也反映出了在辩论中逻辑有效性是成立的。如果在反对者承认了推理前提的条件下，结论的支持者有获胜策略，那么称这个推理是有效的。这种实用主义观点可以与称为保持真值的语义有效性或者称为可演绎的语法有效性相提并论。而论辩中的有效论证就是那些只要选好每一步就必然可以获胜的论证。

给博弈论读者的注释 上述场景可以简单地视为博弈论其中的一个扩展式博弈 (extensive game)。类似地，这里所采用的策略概念是一类标准的函数，它为每

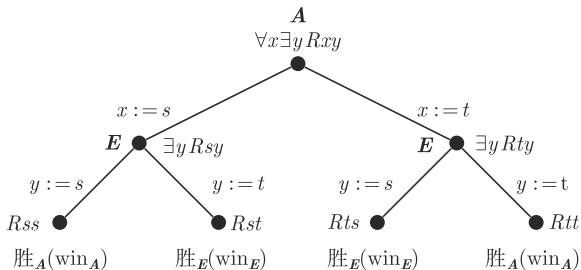
个玩家在每一轮都指定了一个行动，并且各个玩家的行动都不会彼此互相牵制。扩展式博弈和策略会在本书中反复出现，并且逻辑与博弈论之间的很多具体联系都将会依据我们的既定脉络展开。

一致性博弈 (consistency game) 论辩式对话是让逻辑与博弈产生联系的一种方式，而另一方面，这种对话具有逻辑一致性的要求。譬如，玩家 **O** 有一个正面的目标，需要宣称集合 $\{\neg A, A \vee B, \neg B\}$ 是一致的。事实上，保持一致性也是日常交流的重要特征。在中世纪的逻辑研究中，出现过—个名为“义务博弈” (obligation game) 的逻辑试题，它要求学生在回应老师的挑战时保持一致性，以此来测试他们的辩论技巧：

在这个严格的测试中，一共有 n 轮选择。老师依次给出简要的断言 $P_1, P_2, \dots, P_n$ ，在每个断言给出后，学生必须选择接受或反对它。如果接受， P_i 将添加到学生当前的断言集中；如果反对，则 $\neg P_i$ 将添加到学生当前的断言集中。学生只有自始至终都保持一致性才算通过测试。

该逻辑试题出自 Hamblin (1970)。关于该问题的更多历史细节和更为准确的描述，可参见 Dutilh-Novaes (2007) 和 Uckelman (2009)。原则上，学生总是有一个获胜策略——通过选择某个可以完全解释老师断言的模型 **M**，然后根据断言在模型 **M** 中的真假来选择接受或反对断言。当然，现实中的博弈要比这个简单的过程复杂得多。

赋值博弈 (evaluation game) 另一个著名的逻辑博弈产生于人们对于断言的理解。假设两个人正在讨论一个关于数字的量词陈述 $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ 。一个玩家 **A** 选择一个数字 x ，另一个玩家 **E** 必须给出一个数字 y 使得 $\varphi(x, y)$ 为真。直观地说，**A** 向这个最初的断言发起挑战，而 **E** 要为此断言做出辩护。更具体而言，假设一个简单模型里有两个对象 s 和 t ，以及一个二元关系 $R = \{\langle s, t \rangle, \langle t, s \rangle\}$ (被称为二元循环)。关于断言 $\forall x \exists y Rxy$ 的赋值博弈可以用如下树形图表示，其中的叶子节点表示相对应的获胜者：



博弈论者会把它视为一个带有四段历史的扩展式博弈。

显然，公式 $\forall x \exists y Rxy$ 在二元循环模型中必为真，而这一明显事实再次反映出博弈论的特征。玩家 **E** 在这个赋值模型中有一个获胜策略，这个策略可以被表述为“选择那些不同于 **A** 所提到过的对象”。因此，和前面的例子一样，一个逻辑上的概念（真）与一个恰当的博弈中存在一个获胜策略相对应起来。通过给出一个关于赋值博弈 $\text{game}(\varphi, \mathbf{M}, s)$ 的一般化定义（ φ 为任意的一阶公式， $\mathbf{M}$ 为任意的模型， s 为任意赋值变元），这一事实会更加清晰明确（参考第十四章）。此处，一个被称为证实者（verifier）的玩家 **V** 宣称公式是真的，而一个被称为证伪者（falsifier）的玩家 **F** 宣称它是假的。

事实 对于所有模型、赋值和公式而言，以下两个断言等价：(a) $\mathbf{M}, s \models \varphi$ ，(b) **V** 在赋值博弈 $\text{game}(\varphi, \mathbf{M}, s)$ 中有一个获胜策略。

逻辑博弈（logic game） 迄今为止，逻辑博弈伴随着各式各样的研究而出现 (Hodges, 2001)。大量的现代逻辑可以被视作博弈的形式，并广泛应用于模型检测 (Hintikka, 1973)、论辩和对话 (Lorenzen, 1955)、模型的相似性比较 (Fraïssé, 1954; Ehrenfeucht, 1961)，或者为给定的公式建构模型 (Hodges, 2006; Hirsch et al., 2002)。我们将在本书的第四部分介绍其中一些主要的类型，并揭示出：一旦我们能够发现区分角色与目的的方法，那么任何有意义的逻辑任务都可以被“博弈化” (gamification)。尚且不论这种转化所带来的技术上的裨益，对于多主体的交互任务而言，它都迈出了有趣的一步：既重建了逻辑概念，也让逻辑研究者不再成为孤独的思考者和证明者。

0.3 从逻辑博弈到一般的博弈结构

现在我们进一步讨论本书的另一个方向。逻辑博弈作为博弈的一个子类，尽管涉及多种多样的博弈论问题，它也是一类非常专业的活动。前面的赋值博弈就很好地说明了这一点。我们现在先简要地浏览三个基本问题：决定性（determinacy）、博弈等价性和博弈运算。

决定性 上述赋值博弈中有一个简单却显著的特点：证实者或证伪者中总有一人有获胜策略。这点源于逻辑排中律。在任何语义模型中，给定一个公式 φ ，要么 φ 为真，要么它的否定为真。因此，证实者 V 要么在针对 φ 的博弈中有一个获胜策略，要么在针对 $\neg\varphi$ 的博弈中有一个获胜策略。针对后面的这种情况，我们可以利用一类运算将 V 的角色切换为证伪者 F ，从而将其等价地表示为 F 在针对 φ 的博弈中有一个获胜策略。这类双人博弈中存在一人有获胜策略的情况被称为决定的。

上述关于博弈论方面的结论是 Zermelo (1913) 的研究结果，也出现在 Euwe (1929) 的研究结果中。值得一提的是，我们这里所讨论的都是那些只有玩家 A 和 E 所参与的双人博弈，他们最终只有获胜或失败两个结果，并且该博弈的回合数也是固定有穷的。

定理 所有具有固定有穷回合数的零和双人博弈 (zero-sum two-player game) 都是决定的。

证明 这里的证明具有求解博弈的风格，并且此风格也会在本书中反复出现。我们提供一种自下而上的算法，用以判定玩家在这类有穷的博弈树的任何给定节点 (node) 都具有获胜策略。首先，将最终节点上是 A 获胜的那些节点染成黑色，而把玩家 E 获胜的剩余最终节点染成白色。然后逐步按如下规则扩展染色。如果节点 n 的所有子节点都已经被染色，从下面两步中选择一步：

- (a) 如果轮到玩家 A 行动，并且至少有一个子节点是黑色，那么将 n 染为黑色；如果所有的子节点都是白色，则将 n 染为白色；
- (b) 如果轮到玩家 E 行动，并且至少有一个子节点是白色，那么将 n 染为

白色；如果所有的子节点都是黑色，则将 n 染为黑色。

这个过程将所有对应玩家 A 具有获胜策略的节点染成了黑色，将所有对应玩家 E 具有获胜策略的节点染成了白色。通过归纳证明，可以说明这种染色充分性的关键所在：一个玩家在某一轮具有获胜策略当且仅当这个玩家在下一轮至少有一个子节点仍然具有获胜策略。

这个算法恰好处在博弈论和计算机科学的分水岭。它指向了我们将在本书中反复讨论的博弈算法——逆向归纳法（backward induction）。逆向归纳法是更为复杂精细的一种算法，它作为一种计算工具已经被用于求解像跳棋这样的实际博弈，以及人工智能中的核心任务 (Schaeffer et al., 2002)。策梅洛 (Zermelo) 和尤伟 (Euwe) 的研究聚焦在国际象棋问题上，这个问题也是早先计算机科学和认知科学的研究兴趣所在，并且它允许平局。该定理表明了存在一个玩家有一个不输的策略，不过由于博弈树太大，我们迄今为止也不知道哪一个玩家有这种策略。

备注 无穷博弈

无穷双人博弈的输赢并非决定的，它们具有独立的研究意义。我们将会在第 五章和第二十章研究它们所引发的逻辑问题。

本书的主要兴趣点是探究如何将博弈论中的基本事实与标准的逻辑规则紧密联系起来。事实上，一种证明策梅洛定理的方法仅仅是通过排中律将下述有穷迭代量化的断言拆成两类情况：“对于 A 的每一个行动，总是存在一个 E 的行动（并以此类推）使得 E 自己获胜”（参考第一章）。

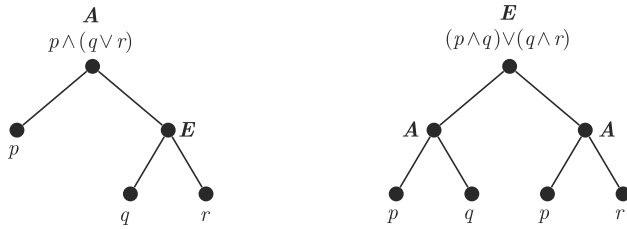
博弈等价性 (game equivalence) 决定性虽然重要，但它仅仅是一些简单博弈所具有的特殊属性。逻辑还会关注关于任意博弈的基本问题。

例 命题分配律 (propositional distribution)

考虑下面合取对于析取的分配律法则：

$$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

下图中的两个有穷树对应于上面两个命题公式的赋值博弈，令 A 表示证伪者并且 E 表示证实者。



这幅图引起了一个直观问题：“两个博弈何时是一样的？”尤为重要的是，分配律的逻辑有效性意味着图示的两个博弈自然在某些含义上是一样的吗？博弈等价性是一个基本问题，博弈论领域已经对它进行了许多研究（Thompson（1952）是一个著名的早期来源），我们也将将在第一章中对这个问题进行更细致的探究。目前就直观而言，如果我们的注意力是在博弈的轮次和行动上，那么这两个博弈是不等价的：它们在礼节方面（谁先玩）和选择结构上就有所不同。

这种探讨博弈的视角是自然而然的，它包括了很多有趣的博弈细节。但是如果玩家的关注点仅仅是可实现的结果，那么以上结论就会发生变化。

在上图的两个博弈中，两个玩家在实现目标方面具有相同的效力： A 可以迫使结果落在集合 $\{p\}$ 和 $\{q, r\}$ ， E 可以迫使结果落入集合 $\{p, q\}$ 和 $\{p, r\}$ 。此处，玩家的“效力”是指不管其他玩家做了什么，该玩家都具有使得博弈的结果位于结果集 U 内的策略。在左图中， A 有左和右两个策略，它们分别生成了效力集 $\{p\}$ 和 $\{q, r\}$ ，而 E 拥有了生成效力集 $\{p, q\}$ 和 $\{p, r\}$ 的策略。在右图中，玩家 E 有左和右两个策略，它们使得 E 可以生成和左图一样的效力集。相比而言，玩家 A 现在有四个策略（其中，左、右分别表示了 E 的策略；而 L 、 R 表示了 E 的策略确定后， A 选择向左（ L ）还是向右（ R ））：

左: L , 右: L , 左: L , 右: R , 左: R , 右: L , 左: R , 右: R

第一个和第四个策略使得 A 的效力集与左图中的一样，而第二个和第三个策略仅生成了一个被前者所包含的较弱效力。 ■

稍后我们将看到博弈等价性服务于何种研究目的。目前，我们注意到分配律是一个具有吸引力的准则，它可以让我们安全地实现转换，并保障玩家的效力可以免受影响。因此，我们熟悉的那些逻辑法则再次阐释了博弈论里的重要内容。

博弈运算 (game operation) 不仅逻辑法则具有博弈论内容，谓词逻辑中的逻辑常元同样也包含博弈论的内容。赋值博弈为基本的逻辑运算添加了新的博弈色彩：

(a) 合取和析取运算是行动选择： $G \wedge H, G \vee H$

(b) 否定是角色切换，也被称为对偶： $\neg G$ ，或 G^d

显然，选择和切换完全是从旧博弈中形成新博弈的通用运算。在赋值博弈中还有另外一种运算。考虑之前的存在量化公式 $\exists x\psi(x)$ ：

V 选择一个 **M** 中的对象 d ，然后在 $\psi(d)$ 的基础上继续博弈。

然而存在量词 $\exists x$ 并不能作为一个博弈算子，或许这点非常令人惊讶，因为它显然指代了一类由证实者选择对象的原子博弈。上述命题所涉及的一般量化运算其实隐藏在了短语“继续”后面，它暗示了：

(c) 博弈的序列式复合 (sequential composition)： $G; H$

然而，这些只是由旧博弈形成新博弈所涉及的部分运算。接下来我们再举一个例子。截至目前，我们有两种形式的博弈组合。布尔运算 $G \wedge H$ 迫使博弈一开始就要进行选择，没有被选择的博弈根本不会被执行。序列式复合 $G; H$ 可以导致两个博弈都被执行，但是只有在第一个博弈已经完成之后才会执行第二个。现在来考虑两个基本的博弈：“家庭”和“事业”。布尔式的选择运算和序列式复合运算看起来都不是合适的连接词，绝大多数人总是努力用以下运算在家庭和事业中进行着博弈：

(d) 博弈的并行式复合 (parallel composition)： $G \parallel H$

我们在一个博弈中进行一段时间，然后转换到另一个博弈中，以此类推。

在第五部分中，我们将会更系统地研究博弈运算，这其中包括几个逻辑系统的关联问题。

0.4 作为交互进程的博弈

面对真正的博弈 我们已经看到针对逻辑任务的博弈是如何拥有了一个使所有博弈都有意义的一般性结构。现在让我们进入关于实际博弈的研究当中，它们

涉及经济、社会行为、体育或战争等领域。所有这些都涉及具备智能的玩家如何受规则支配，从而选择行动的问题。在此我们不妨换个角度，将逻辑看成分析这些博弈的一般性工具。在这个更广泛的领域里，逻辑不仅阐明了进程结构，而且随着博弈的进行，逻辑还将帮助我们阐释玩家的慎思和行动选择机制。首先，我们从计算机科学的角度来考察这个研究领域中的首要问题。

作为进程的扩展式博弈 博弈富有进程形式的结构，玩家可能在其中有着不同的目标。因此，博弈已经开始取代以往那些单一的工具，并且在如今作为一种现实模型来探讨分布式计算（distributed computation）、复杂计算机系统和网络等对象。一个扩展式博弈是一个树状结构，它由玩家交替在节点上进行移动所形成的可能历史所构成，而结果则通过为所有玩家标记数值效用值，或者根据所有玩家的定性偏好关系进行排序来表示。当去掉偏好关系后，我们就获得了一个扩展式博弈。第一章我们将给出这些概念更形式化的定义，并且在第一部分和第二部分的其余章节添加了更多重要内容，从而对其进行更加深入的探讨。

从逻辑学的角度来看，像这种带有可供选择的行动的树状结构是非常常见的。它们作为“加标转换系统”（labeled transition system）出现在计算机科学中，也是模态逻辑或时态逻辑（temporal logic）的标准模型，其一般形式为

$$M = (S, \{R_a\}_{a \in A}, V)$$

这里的 S 是一个由一些状态或一些世界构成的域， R_a 是 S 上的二元转换关系并且这个关系只对应于给定集合 A 中的那些可以改变状态的原子行动 a ，而赋值 V 为每个原子性质 p 指派了一集使得它成立的状态。逻辑上，有许多对这些进程图的研究（参见 Blackburn et al. (2001) 第一章），这些研究将进程图视为抽象的机制，或者在它被拆成树状结构后，将它视为执行一个进程的所有可能空间。

具体到扩展式博弈而言，博弈状态是由一些行动阶段所构成的域，而这些阶段通过转换玩家们不同的可行行动所关联起来，并且可以用以下特殊的谓词来描述：

$$M = (\text{NODES}, \text{MOVES}, \textit{turn}, \textit{end}, \textit{VAL})$$

非最终节点是关于玩家的轮次点，这些玩家可以外在地转换一些可行的行动。特殊的命题字母 $\textit{turn}_i$ 表示了玩家 i 的轮次，而 $\textit{end}$ 标记了最终的位置。赋值 $\textit{VAL}$