

第3章

多维随机变量

章节内容 3

1. 二维离散型随机变量。
2. 二维连续随机变量。
3. 联合分布函数。
4. 边缘分布。
5. 条件分布与独立性。
6. 二维随机变量的变换及函数的分布。

3.1 二维离散型随机变量

3.1.1 二维离散型随机变量的典型案例

案例 3.1 在射击游戏中,参加游戏的人先掷一次骰子,若出现点数为 X ,则射击 X 次。设甲击中目标的概率为 p ,记击中目标的次数为 Y 。求 (X,Y) 的分布律。

分析 联合分布律综合反映了射手的“射击技术”和“骰子运气”。

第 1 步 确定一维随机变量的样本空间。

① X 的取值范围是: $1 \sim 6$; ② Y 的取值范围是: $0, 1, 2, \dots, X$ 。

第 2 步 计算条件发生的概率和条件概率。

(1) 条件发生的概率为

$$P\{X=i\}=1/6, \quad i=1,2,\dots,6 \quad (3.1)$$

(2) 条件概率为

$$P\{Y=j \mid X=i\}=C_i^j p^j (1-p)^{i-j}, \quad q=1-p; j=0,1,2,\dots,i$$

第 3 步 计算联合分布律。

若记 $a=1/6$, 则对于 $j \leq i, i=1,2,\dots,6$, 有

$$p_{ij}=P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j \mid X=i\}P\{X=i\}=a \cdot C_i^j p^j q^{i-j} \quad (3.2)$$

联合分布律的具体形式如表 3.1 所示。

表 3.1 联合分布律表(射击游戏)

Y	X					
	1	2	3	4	5	6
0	$aC_1^0 p^0 q^1$	$aC_2^0 p^0 q^2$	$aC_3^0 p^0 q^3$	$aC_4^0 p^0 q^4$	$aC_5^0 p^0 q^5$	$aC_6^0 p^0 q^6$
1	$aC_1^1 p^1 q^0$	$aC_2^1 p^1 q^1$	$aC_3^1 p^1 q^2$	$aC_4^1 p^1 q^3$	$aC_5^1 p^1 q^4$	$aC_6^1 p^1 q^5$
2	0	$aC_2^2 p^2 q^0$	$aC_3^2 p^2 q^1$	$aC_4^2 p^2 q^2$	$aC_5^2 p^2 q^3$	$aC_6^2 p^2 q^4$

续表

Y	X					
	1	2	3	4	5	6
3	0	0	$aC_3^3p^3q^0$	$aC_4^3p^3q^1$	$aC_5^3p^3q^2$	$aC_6^3p^3q^3$
4	0	0	0	$aC_4^4p^4q^0$	$aC_5^4p^4q^1$	$aC_6^4p^4q^2$
5	0	0	0	0	$aC_5^5p^5q^0$	$aC_6^5p^5q^1$
6	0	0	0	0	0	$aC_6^6p^6q^0$

3.1.2 二维离散型随机变量的典型分析思路

问题 3.1 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} (i=1,2)$, 且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$, 则 $P\{X_1=X_2\}=(\quad)$ 。
(A)0 (B)1/4 (C)1/2 (D)1

分析 需注意 X_1, X_2 同分布未必独立。因为 $P\{X_1X_2=0\}=1$, 所以 $P\{X_1X_2 \neq 0\}=0$, 由此可列出如表 3.2 所示的联合分布律表。

(1)在联合分布律表中,表 3.2 中注明“①”的位置概率全为 0,即

$$\begin{aligned} P\{X_1=-1, X_2=-1\} &= P\{X_1=-1, X_2=1\}=0 \\ P\{X_1=1, X_2=-1\} &= P\{X_1=1, X_2=1\}=0 \end{aligned}$$

(2)依据全概率公式,表 3.2 中注明“②”的位置概率为

$$\begin{aligned} P\{X_1=-1, X_2=0\} &= P\{X_1=0, X_2=-1\}=1/4 \\ P\{X_1=1, X_2=0\} &= P\{X_1=0, X_2=1\}=1/4 \end{aligned}$$

(3)依据规范性,表 3.2 中注明“③”的位置概率为

$$P\{X_1=0, X_2=0\}=0$$

综上,可得 $P\{X_1=X_2\}=0$, 故选 A。

表 3.2 联合分布律表的填表顺序

X_2	X_1			
	-1	0	1	$p_{\cdot j}$
-1	①	②	①	1/4
0	②	③	②	1/2
1	①	②	①	1/4
$p_{i \cdot}$	1/4	1/2	1/4	—

3.2 二维连续型随机变量

3.2.1 二维连续型随机变量的典型案例

问题 3.2 如图 3.1 所示,设二维连续型随机变量 (X, Y) 服从单位圆域 $G=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ 上的均匀分布,求其联合密度函数,并计算概率 $P\{X \leq Y-1\}$ 。

仿真计算 3.1

```

close all, left = -1.2; right = 1.2; up = 1.2; down = -1.2;
a_right = 0.05; a_up = a_right * (up-down)/(right-left);
plot([left, right], [0, 0], 'k-'), grid on, hold on
plot([right-a_right, right, right-a_right], [a_up, 0, -a_up], 'k-')
plot([0, 0], [up, down], 'k-')
plot([-a_right, 0, a_right], [up-a_up, up, up-a_up], 'k-')
theta = 0; 0.01:2 * pi; x = cos(theta); y = sin(theta); n =
round(length(y)/4);
plot(x, y, 'k-'), plot([-1.5, 0.5], [-1.5, 0.5] + 1, 'k-')
H_pa = patch([x(n:2 * n)], [y(n:2 * n)], [0 0 0]);
set(H_pa, 'EdgeColor', [0, 0, 1], 'EdgeAlpha', 1, 'FaceAlpha', 0.7),
set(gcf, 'Position', [100 100 330 300]),
syms x, int(sqrt(1-x^2) - x - 1, -1, 0)/pi

```

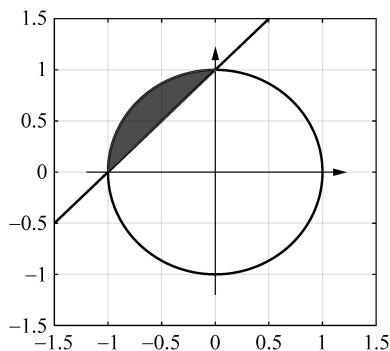


图 3.1 圆上均匀分布

分析 二维连续型随机变量的典型困难在刻画非零密度的上边界-下边界-左边界-右边界。随机变量 (X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi}, x^2 + y^2 \leq 1 \quad (3.3)$$

方法一 利用几何概型。如图 3.1 所示, 依据几何概型公式有

$$P\{X \leq Y - 1\} = \frac{\text{面积(阴影)}}{\text{面积(圆)}} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi - 2}{4\pi} \quad (3.4)$$

方法二 利用积分公式。如图 3.1 所示, 阴影面的上边界为 $\sqrt{1-x^2}$, 下边界为 $x+1$, 经变换得

$$\begin{aligned}
 P\{X \leq Y - 1\} &= \int_{X \leq Y-1} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^0 \int_{x+1}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dx dy \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} - x - 1 dx = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

3.2.2 二维连续型随机变量的典型分析思路

问题 3.3 设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = k e^{-\langle 2x+y \rangle}, x > 0, y > 0 \quad (3.6)$$

试确定常数 k , 并计算概率 $P\{Y \leq X\}$ 。

分析 依据概率密度的规范性可知 $k=2$, 实际上有

$$1 = k \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\langle 2x+y \rangle} dx dy = k \int_0^{+\infty} e^{-2x} dx \cdot \int_0^{+\infty} e^{-y} dy = \frac{k}{2} \quad (3.7)$$

另外, 如图 3.2 所示, 有

$$\begin{aligned}
 P\{Y \leq X\} &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{+\infty} \int_0^x 2e^{-(2x+y)} dy dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} \int_0^x e^{-y} dy dx \\
 &= \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} (1 - e^{-x}) dx = \int_0^{+\infty} 2e^{-2x} - 2e^{-3x} dx = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

仿真计算 3.2

```
close all,hold on,grid on,
H_pa = patch([0,1,1,0],[0,0,1,0],'c')
plot([0,1.2],[0,1.2],'r','LineWidth',2)
text(1.05,1,'y = x','FontSize',20,'Color','r')
text(0.5,0.2,'积分区域','FontSize',20,'Color','k')
set(gca,'XTick',[ ],'YTick',[ ]),box off
set(gcf,'Position',[100 100 500 300]),
syms x,int(2 * (exp(-2 * x)-exp(-3 * x)),0,inf)
```

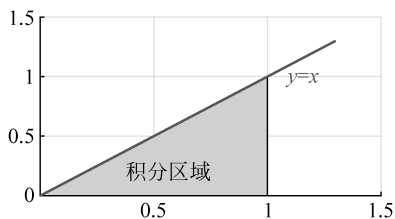


图 3.2 无限区域上的分布

3.2.3 蒲丰投针及其仿真试验

案例 3.2 将一张画有很多等距平行线(间距 $d \geq 1$)的白纸平放在地上,再将一根长度为 1 的针投到白纸上,记事件 A 表示“针与平行线相交”。试求概率 $P(A)$ 。

分析 如图 3.3 所示,记针的中点到最近一条平行线的距离为 X ,针与平行线的夹角为 φ ,因 $X \sim U(0, d/2)$, $\varphi \sim U(0, \pi)$,则联合分布密度为

$$f(x, \varphi) = \frac{2}{\pi d}, 0 < x < \frac{d}{2}, 0 < \varphi < \pi \quad (3.8)$$

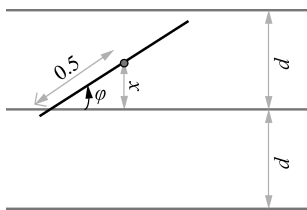


图 3.3 针与平行线相交示意图

针与平行线相交等价于 $X \leq \frac{1}{2} \sin \varphi$, 故所求概率为

$$P(A) = P\left\{X \leq \frac{1}{2} \sin \varphi\right\} = \iint_{x \leq \frac{1}{2} \sin \varphi} f(x, \varphi) dx d\varphi = \frac{2}{\pi d} \int_0^{\pi} \int_0^{\frac{1}{2} \sin \varphi} dx d\varphi = \frac{2}{\pi d} \quad (3.9)$$

如图 3.4 所示,当 $d=1$ 时,有 $P(A) = \frac{2}{\pi} \approx 0.6369$, 仿真统计可验证该结论。

仿真计算 3.3

```
close all,clear,clc,box on,hold on,grid on,nn = 1:6;
for i = nn, rng(0), l = 1, d = 1, n = 1e4 * i;
X = unifrnd(0,d/2,n,1); Phi = unifrnd(0,pi,n,1);
Yes = X < sin(Phi) * l/2; m = sum(Yes); Pa(i) = m/n; end
plot(1e4 * nn, ones(size(nn)) * 2 * l/pi/d, 'r-', 'line-width', 2)
set(gca,'ytick',[0.632, 2 * l/pi/d, 0.638], 'FontSize', 12)
```

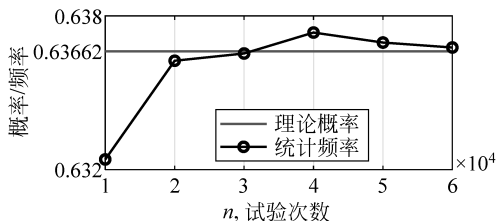


图 3.4 理论概率和统计频率

```
plot(1e4 * nn, Pa, 'k-o', 'linewidth', 2), xlabel('n, 试验次数')
legend('理论概率', '统计频率', 'location', 'south')
set(gcf, 'Position', [100 100 400 200]), ylabel('概率/频率')
```

3.2.4 一论圆概率误差

案例 3.3 如图 3.5 所示,圆概率误差(circular error probable, CEP)是衡量导弹弹着点散布的关键指标之一,用于表征射击密集度性能,等于出现概率为 50% 的圆形误差范围的半径。换言之,在弹着平面上,以平均弹着点为中心,多次射击中有 50% 的弹着点到中心的距离小于 CEP。例如,CEP=1 km,表示仅有 50% 的弹着点落入直径 1 km 的圆内。因此,CEP 值越小,表示导弹的命中精度越高;反之,CEP 值越大,说明导弹的命中精度越低。若导弹的落点坐标为 (X, Y) , 其密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x, y < \infty \quad (3.10)$$

试计算 CEP。

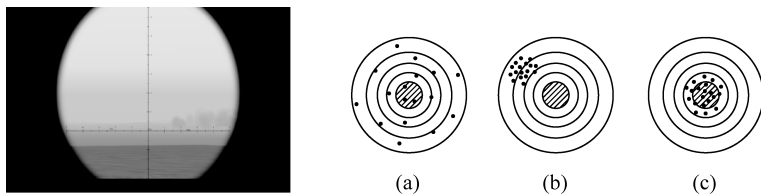


图 3.5 瞄准镜的稳定性和准确性示意图

分析 CEP 对应的概率为

$$P(\text{CEP}) = \iint_{x^2+y^2 \leq \text{CEP}^2} \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}} dx dy \quad (3.11)$$

换元得

$$\begin{aligned} P(\text{CEP}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\text{CEP}} \frac{r}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr d\theta = \int_0^{\text{CEP}} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \int_0^{\frac{\text{CEP}^2}{2\sigma^2}} e^{-R} dR = 1 - e^{-\frac{\text{CEP}^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

解得

$$\text{CEP} = \sigma \sqrt{-2\ln(1 - P(\text{CEP}))} \quad (3.12)$$

将 $P(\text{CEP}) = 50\%$ 代入上式得

$$\text{CEP} = \sigma \sqrt{2\ln 2} = 1.177\sigma \quad (3.13)$$

如图 3.6 所示,可知:①约 50% 的导弹会落在 CEP 内 (1.177σ);②约 43.7% 的导弹会落在 CEP 外、2CEP 内 (2.3548σ);③约 6.1% 的子弹会落在 2CEP 外、3CEP 内 (3.5322σ)。

仿真计算 3.4

```
close all,clear,clc,box on,hold on,grid on,
sigma = 1,CEP = sigma * sqrt(2 * log(2))
CEPs = [1:3] * CEP
P = 1-exp(-CEPs.^2/(2 * sigma^2))
semilogy(CEPs/CEP,P,'r-o','linewidth',2)
set(gca,'ytick',P,'FontSize',12),xlabel('n,
CEP 的倍数'),yticklabels({'50 %','93.9 %',
'99.8 %'})
ylabel('P(n),CEP 倍数对应的概率'),
set(gcf,'Position',[100 100 400 400])
```

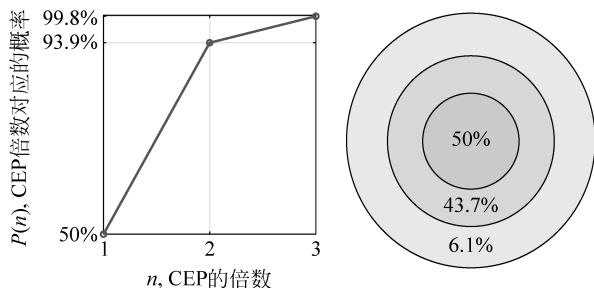


图 3.6 CEP 倍数与对应概率

3.3 联合分布函数

3.3.1 离散型联合分布的典型形态

问题 3.4 试求二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数,其中 X,Y 的联合分布律为

$Y \backslash X$	1	2	
1	0.1	0.4	(3.14)
2	0.2	0.3	

分析 如图 3.7 所示,若 X,Y 的不同取值分别为 m,n ,则离散型联合分布的不同取值数量至多为 $mn+1$,每个分布律取值对应一个矩形域,所以有

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 1 \text{ 或 } y < 1 \\ 0.1, & 1 \leq x < 2, 1 \leq y < 2 \\ 0.1 + 0.2, & 1 \leq x < 2, y \geq 2 \\ 0.1 + 0.4, & x \geq 2, 1 \leq y < 2 \\ 1, & x \geq 2, y \geq 2 \end{cases} \quad (3.15)$$

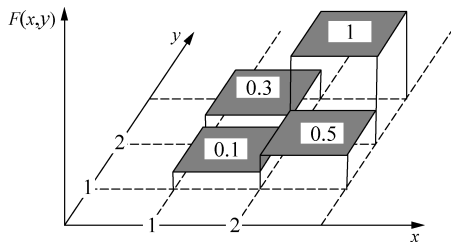


图 3.7 离散型联合分布的典型形态

3.3.2 边缘密度无法决定联合密度

利用密度函数计算分布函数的步骤如下。

步骤 1 确定联合密度函数 $f(x, y)$ 和非零密度区域 G ;

步骤 2 找到 $F(x, y) = 0$ 和 $F(x, y) = 1$ 对应的区域;

步骤 3 计算 G 上的联合分布函数。

评注 3.1 边缘密度无法确定联合密度

依据联合分布函数 $F(x, y)$ 可以算得 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$, 反之则不行, 除非 X 和 Y 之间有独立性约束。换言之, 联合密度一旦确定, 边缘密度就确定了, 反之则不成立。

反例 3.1 考虑如下两个不同的联合密度函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ (见图 3.8):

$$\begin{cases} f(x, y) = x + y, x \in [0, 1], y \in [0, 1] \\ g(x, y) = (1/2 + x)(1/2 + y), x \in [0, 1], y \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.16)$$

它们有相同的边缘密度:

$$f_X(x) = (1/2 + x), x \in [0, 1], f_Y(y) = (1/2 + y), y \in [0, 1] \quad (3.17)$$

仿真计算 3.5

```
clc,close all,clear,x=0:0.02:1;y=x;[x1,y1]=meshgrid(x,y);%网格化
subplot(121),box on,f=x1+y1;mesh(x,y,f);xlabel('x');ylabel('y');zlabel('f(x,y)');
set(gca,'fontsize',12),view(20,16)
subplot(122),box on,f=(x1+0.5).*(y1+0.5);mesh(x,y,f);xlabel('x');ylabel('y');zlabel('g(x,y)');
set(gca,'fontsize',12),view(20,16),set(gcf,'position',[100,100,700,200])
```

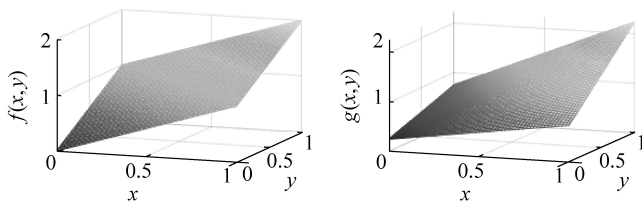


图 3.8 反例 3.1 的密度曲面

反例 3.2 两个不同的联合正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_1 = 0.6)$ 和 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_2 = 0)$, (见图 3.9), 有相同的边缘分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 。

仿真计算 3.6

```
clc,close all,clear,mu=[0 0];x=-3:0.1:3;y=x;[x1,y1]=meshgrid(x,y);%网格化
sig=[0.25 0.3;0.3 1];f=mvnpdf([x1(:) y1(:)],mu,sig);F=reshape(f,numel(y),numel(x));%矩阵重塑
subplot(121),mesh(x,y,F);box on,xlabel('x');ylabel('y');zlabel('f(x,y)');set(gca,'fontsize',12),
sig=[0.25 0;0 1];f=mvnpdf([x1(:) y1(:)],mu,sig);F=reshape(f,numel(y),numel(x));%矩阵重塑
subplot(122),mesh(x,y,F);box on,xlabel('x');ylabel('y');zlabel('g(x,y)');
set(gca,'fontsize',12),set(gcf,'position',[100,100,700,200])
```

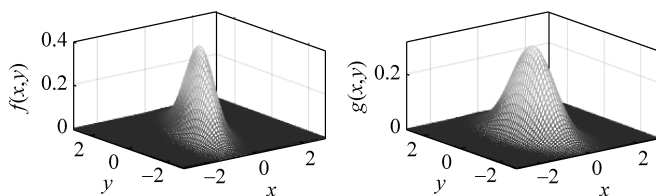


图 3.9 反例 3.2 的密度曲面

反例 3.3 联合正态密度 $f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)}$ 和非正态密度 $g(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \cdot$

$(1 + \sin x \cdot \sin y)$ (见图 3.10), 有相同的边缘密度:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}, f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2} \quad (3.18)$$

仿真计算 3.7

```
clc,close all,clear,mu=[0 0];x=-3;0.1;3;y=x;[x1,y1]=meshgrid(x,y);
F=exp(-x1.^2-y1.^2)/pi;subplot(121),mesh(x,y,F);box on
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('f(x,y)');set(gca,'fontsize',12),view(20,16)
F=(exp(-x1.^2-y1.^2)/pi).*(1+sin(x1).*sin(y1));
subplot(122),mesh(x,y,F);box on,xlabel('x');ylabel('y');zlabel('g(x,y)');
set(gca,'fontsize',12),view(20,16),set(gcf,'position',[100,100,700,200])
```

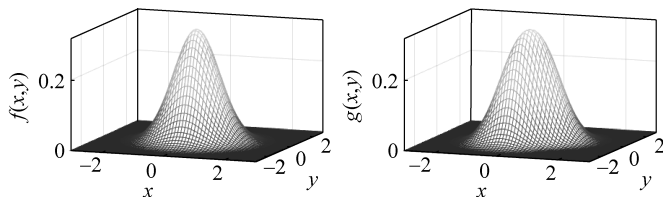


图 3.10 反例 3.3 的两个联合密度曲面

反例 3.4 两个独立的正态分布的线性组合服从正态分布,但是不独立的正态分布的线性组合未必服从正态分布。例如,如下的两个联合密度(见图 3.11):

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \quad (3.19)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-(x^2+y^2)} \left(1 + \frac{\sin x}{|x|} \cdot \frac{\sin y}{|y|} \right) \quad (3.20)$$

后者既不服从联合正态分布,也无法分离(即不独立),但是与前者有相同的边缘密度。

仿真计算 3.8

```
clc,close all,clear,mu=[0 0];x=-3;0.1;3;y=x;[x1,y1]=meshgrid(x,y);
F=exp(-x1.^2-y1.^2)/pi;subplot(121),mesh(x,y,F);box on
xlabel('x');ylabel('y');zlabel('f(x,y)');set(gca,'fontsize',12),view(-30,30)
F=(exp(-x1.^2-y1.^2)/pi).*(1+sin(x1)./abs(x1).*sin(y1)./abs(y1));
```

```
subplot(122),mesh(x,y,F);box on,xlabel('x');ylabel('y');zlabel('g(x,y)');
set(gca,'fontsize',12),view(-30,30),set(gcf,'position',[100,100,700,200])
```

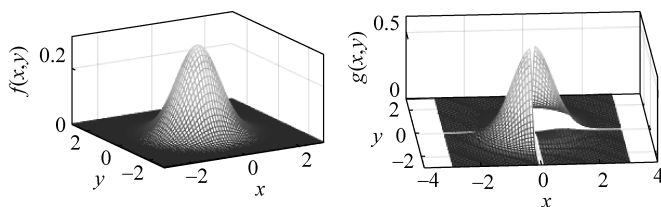


图 3.11 反例 3.4 的两个联合密度曲面

3.3.3 协同作战中的联合分布

评注 3.2 教学能手比赛案例——协同作战

协同作战中的风险意识及最优决策,利用了二维等可能分布:提前出发和加快行军速度是两种不同的决策方式,在相同风险控制条件下,它们的代价不同。

案例 3.4 在某次军事演习中,舟桥连收到命令要赶到某小河的 D 岸为行进中的战斗部队架设浮桥。假设舟桥连将于夜间 0 点到 1 点之间到达河岸;战斗部队将于夜间 1 点至 2 点之间到达河岸。

(1)若舟桥连需要 0.5 小时完成架桥,问战斗部队到达河岸能立即过河的概率是否满足 5% 的风险控制要求?

(2)舟桥连连长作为决策者,面临舟桥连和战斗部队的双向要求:早到意味着本连队有早起压力;迟到意味着拖累战斗部队。如何决策才能满足 5% 的风险控制要求?

分析 记 x, y 分别为舟桥连与战斗部队到达河岸的时间,则联合密度为

$$f(x, y) = 1, 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2 \quad (3.21)$$

(1)记 $A = \{\text{战斗部队到达河岸时不能立即过河}\}$,对应的积分区域为

$$G_1 = \{(x, y) \mid 0.5 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq x + 0.5\}$$

则战斗部队能立即过河的概率是

$$P(\bar{A}) = 1 - \int_{0.5}^1 \int_1^{x+0.5} 1 \, du \, dv = 1 - 0.5^2/2 = 87.5\% \quad (3.22)$$

(2)**方法一** 提前出发实现提前到达,到达时间由 0 点到 1 点变为 $0-t$ 点到 $1-t$ 点,相当于在不提前出发的条件下减少搭桥时间,搭桥时间从 0.5 点变为 $0.5-t$ 点,如图 1.8(b) 所示,战斗部队不能立即过河对应的积分区域为

$$G_2 = \{(x, y) \mid 0.5+t \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq x+0.5-t\}$$

则战斗部队能立即过河的概率为

$$P(\bar{A}) = 1 - \int_{0.5+t}^1 \int_1^{x+0.5-t} 1 \, dy \, dx = 1 - \frac{(0.5-t)^2}{2} = 95\% \Rightarrow t \approx 0.1838 \quad (3.23)$$

方法二 加快行军速度实现提前到达,到达时间由 0 点到 1 点变为 0 点到 $1-t$ 点,如图 1.8(c) 所示,联合密度为

$$f(x, y) = (1-t)^{-1}, 0 \leq x \leq 1-t, 1 \leq y \leq 2 \quad (3.24)$$

战斗部队不能立即过河对应的积分区域为

$$G_3 = \{(x, y) \mid 0.5 \leq x \leq 1-t, 1 \leq y \leq x+0.5\}$$

则战斗部队能立即过河的的概率为

$$P(\bar{A}) = 1 - \int_{0.5+t}^1 \int_1^{x+0.5-t} (1-t)^{-1} dy dx = 1 - \frac{(0.5-t)^2}{(1-t) \times 1} = 95\% \quad (3.25)$$

解得

$$t \approx 0.2209 > 0.1838 \quad (3.26)$$

评注 3.3 方式不同付出的代价也不同

为了满足5%的风险控制要求,提高行军速度所耗费的时间比提前出发所耗费的时间更多,而且在体能上消耗更大。养兵千日,用兵一时,只有通过充分训练才能将行军速度调整到更快。

3.4 边缘分布

3.4.1 非零密度区域的边界表达式

问题 3.5 如图 3.12 所示,设平面区域 D 由曲线 $y = \frac{1}{x}$ 及直线 $y=0, x=1, x=e^2$ 所围成,二维随机变量 (X, Y) 在区域 D 上服从均匀分布,求 (X, Y) 关于 X, Y 的边缘概率密度。

仿真计算 3.9

```
close all, x = 1:0.01:exp(2), y = 1./x;
plot(x, y, '-r', 'LineWidth', 2); hold on, grid on,
plot([1, exp(2)], [0, 0], '-k', 'LineWidth', 2); hold on, grid on,
H_pa = patch([1, exp(2), flipplr(x), 1], [0, 0, flipplr(y), 0], 'c')
text(2, 0.5, '上界: y = 1/x', 'FontSize', 12, 'Color', 'r')
text(1, -0.1, '下界: y = 0', 'FontSize', 12, 'Color', 'k')
text(2, 0.25, '积分区域', 'FontSize', 12, 'Color', 'k')
legend('上界: y = 1/x', '下界: y = 0', '积分区域', 'location', 'northeast')
set(gca, 'XTick', [0, 1], 'YTick', [-1, 0, 1]), box on, ylim([-0.2, 1])
set(gcf, 'Position', [100 100 250 200])
```

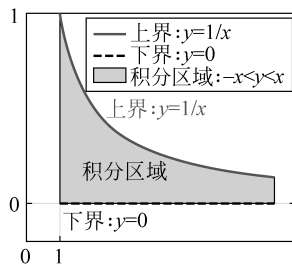


图 3.12 问题 3.5 的非零密度区域

分析 区域 D 的面积为

$$A = \int_1^{e^2} \frac{1}{x} dx = \ln e^2 = 2 \quad (3.27)$$

故区域 D 上的联合密度为

$$f(x, y) = 1/2, (x, y) \in D \quad (3.28)$$