

一个工程控制系统首先必须是稳定的,因此稳定性是工程控制系统分析的出发点。系统正常工作的状态称为平衡状态,系统在受到扰动后,原先的平衡状态被破坏,系统围绕原平衡状态来回运动,这种现象称为“振荡”。系统出现振荡后,一种可能是离平衡状态越来越远,这类系统称为不稳定系统,不稳定系统是无法正常工作的。另一种可能是这种振荡逐渐衰减,最终恢复到原先的平衡状态,这类系统叫稳定系统(又叫渐近稳定系统)。稳定是工程系统正常工作的前提。对一个稳定的系统,如果输入一个信号,系统可能达到一个新的稳定状态,这个新的稳定状态与预定的平衡位置的误差称为稳态误差,系统消除稳态误差的能力由系统稳态特性所决定,这种特性称稳态特性。系统达到稳定状态之前的过程称为动态过程,动态过程中振荡过大,或者动态过程时间太长,系统都不能很好工作。在系统动态过程中表现的性质称为动态特性。因此,自动控制系统分析包括三部分内容:稳定性、稳态特性和动态特性。

分析控制系统性能最直接的方法是求解系统的微分方程,这就是系统的时域分析。时域分析可以精确地分析系统的动态特性和稳态特性。但当微分方程的阶次超过三阶,方程的求解就比较困难,不便于工程上应用。但时域分析物理意义清楚,便于建立系统的性能指标,所以它仍然是系统分析的基础。

本章主要讨论:典型测试信号;控制系统的稳定性(稳定性概念、稳定性判据);控制系统的稳态特性(稳态误差概念、稳态误差系数、提高系统稳态精度的方法);控制系统的动态响应(控制系统的动态性能指标、一阶系统的动态响应、二阶系统的动态响应、高阶系统的动态响应、用 MATLAB 求系统的动态响应)。

3.1 典型测试信号

实际系统的输入信号常具有不确定性,因而很难用解析方法表达。分析控制系统要有一个进行比较的基准,为此,需要用统一的典型输入信号来测试系统的性能。对典型的测试信号的要求是:它们是简单的时间函数,便于进行数学分析和实验研究,系统的实际输入信号可以看成是这些测试信号的组合。常用的典型测试信号主要有阶跃信号、速度(斜坡)信号、加速度(抛物线)信号、脉冲信号和正弦信号等。

3.1.1 阶跃信号

阶跃信号是一种广泛存在的瞬变信号,如图 3-1(a)所示,例如电动机突然加载或卸载。

它的数学表达式为

$$r(t) = R \cdot u(t) = \begin{cases} R & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-1)$$

式中, R 为阶跃信号的幅值。 $u(t)$ 称为单位阶跃信号, 单位阶跃信号也常表示为 $1(t)$ 。

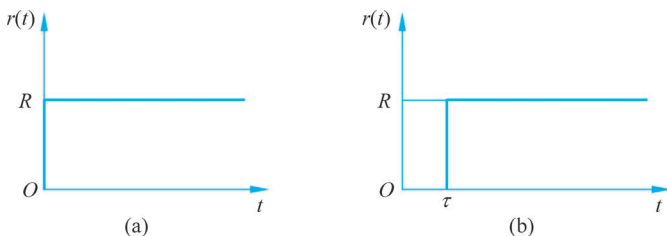


图 3-1 阶跃信号

图 3-1(b) 是在 $t = \tau$ 时刻产生的阶跃信号, 记为 $R \cdot u(t - \tau)$, 具体是

$$r(t) = R \cdot u(t - \tau) = \begin{cases} R & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \quad (3-2)$$

单位阶跃信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \quad (3-3)$$

而幅值为 R 的阶跃信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[Ru(t)] = \frac{R}{s} \quad (3-4)$$

3.1.2 速度(斜坡)信号

速度信号也称匀速信号、斜坡信号, 它对时间 t 的变化率是常数, 如图 3-2 所示。速度信号主要用于测试系统匀速运动的性能, 它等于阶跃信号对时间 t 的积分, 其数学表达式为

$$r(t) = R \cdot tu(t) = \begin{cases} R \cdot t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-5)$$

式中, R 为速度信号的斜率; $tu(t)$ 为单位速度信号。

单位速度信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[tu(t)] = \frac{1}{s^2} \quad (3-6)$$

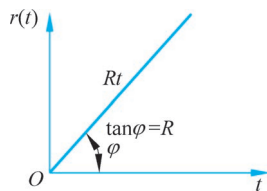


图 3-2 速度信号

3.1.3 加速度(抛物线)信号

加速度信号(见图 3-3)等于速度信号对时间的积分, 主要用于测试系统等加速运动的性能, 其数学表达式为

$$r(t) = \frac{1}{2} R \cdot t^2 u(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} R t^2 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (3-7)$$

式中, R 为常数; $\frac{1}{2}t^2 u(t)$ 为单位加速度信号。

单位加速度信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}\left[\frac{1}{2}t^2 u(t)\right] = \frac{1}{s^3} \quad (3-8)$$

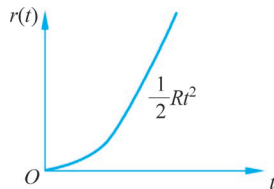


图 3-3 加速度信号

3.1.4 脉冲信号

图 3-4 是脉动信号(也称实际脉冲信号)的图形,其数学表达式为

$$r(t) = \begin{cases} \frac{A}{h} & 0 \leq t \leq h \\ 0 & 0 > t, t > h \end{cases} \quad (3-9)$$

式中, h 为脉动宽度, A = 常数, 是脉动的面积, 当 $h \rightarrow 0$ 时脉动信号就成为脉冲信号。 $A = 1$ 的脉冲信号称为单位脉冲信号, 或单位脉冲函数。图 3-4 是实际脉冲信号, 图 3-5 是单位脉冲信号, 其数学表达式为

$$r(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty & t = 0 \\ 0 & t \neq 0 \end{cases} \quad (3-10)$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\epsilon} \delta(t) dt = 1 \quad (3-11)$$

其中, ϵ 是任意小的正数。

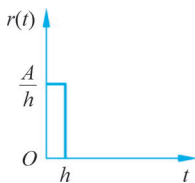


图 3-4 实际脉冲信号

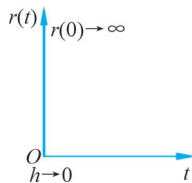


图 3-5 单位脉冲信号

单位脉冲信号是阶跃信号的导数。脉冲信号常在研究干扰对系统的影响时应用。由于脉冲函数的值出现无穷大, 所以在工程上, 常将 $h < 0.1T$ (T 为系统的时间常数) 的实际脉冲信号当成是理想脉冲信号。

单位脉冲信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1 \quad (3-12)$$

当 $r(t) = \delta(t)$ 时, 系统的响应叫作单位脉冲响应。系统单位脉冲响应的拉氏变换就是系统的传递函数

$$C(s) = G(s)\delta(s) = G(s) \quad (3-13)$$

3.1.5 正弦信号

正弦信号如图 3-6 所示, 其数学表达式为

$$r(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (3-14)$$

式中, A 为幅值; ω 为角频率; φ 是初相或称相位移。

正弦信号在实验研究频率响应时是很有用的, 常利用它求取系统的频率特性。

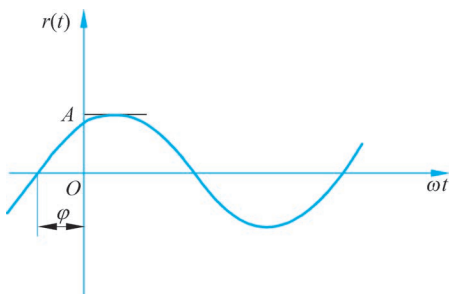


图 3-6 正弦信号

幅值为 1, 相位移 $\varphi=0$ 时, 正弦信号的拉氏变换为

$$\mathcal{L}(\sin \omega t) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (3-15)$$

3.2 控制系统的稳定性分析

控制系统能正常工作的前提是系统必须是稳定的。只有稳定的系统, 分析它的稳态性能和动态性能才有意义。本节讨论线性定常系统的稳定性问题。

3.2.1 稳定性的基本概念

如果系统在平衡状态(设平衡状态为坐标系统原点)受到扰动, 使被控制量 $c(t)$ 偏离平衡状态, 扰动消失后, 被控制量 $c(t)$ 不会立即回到平衡点。如果经过一段时间, 系统又回到原先的平衡状态, 则称系统是渐近稳定的, 有时简称为稳定的。

若系统围绕原点作等幅振荡, 或趋于某一非零值, 则称系统是临界稳定。

若系统偏离原点越来越远(或振荡幅值越来越大), 则称系统是不稳定的。

例 3-1 如图 3-7 所示的单摆, 垂直向下的位置 A 是它的平衡状态。若摆受到一外力作用, 它将偏离平衡位置至 A' 的位置, 在重力作用下, 摆将向平衡位置运动。由于存在各种阻力, 摆幅将逐渐减小, 经过一段时间, 摆必将回到平衡位置。这个系统是稳定的。

如果不存在阻力, 那么摆将在平衡位置左右来回摆动, 系统就处于等幅振荡, 系统为临界稳定。

例 3-2 例 2-17 的倒立摆系统, 其直立状态是平衡位置。一旦受到外力扰动, 摆必定倒下(离平衡位置越来越远)而回不到平衡位置上, 所以这个系统是不稳定的。

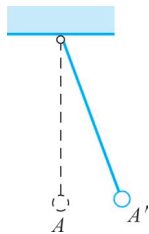


图 3-7 单摆的稳定性

3.2.2 线性定常系统稳定的充分必要条件

系统的稳定性可以通过求解系统的微分方程来判定。线性定常系统的微分方程具有如下形式

$$\begin{aligned}
 & a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) \\
 & = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{dr(t)}{dt} + b_0 r(t)
 \end{aligned} \quad (3-16)$$

式中, $r(t)$ 、 $c(t)$ 分别为系统的输入和输出。

线性微分方程式(3-16)的解或系统的响应 $c(t)$ 由输入 $r(t)$ 和初始条件决定。方程的初始条件就是系统的初始状态。若输入 $r(t)=0$, 系统的响应由系统的初始状态唯一决定, 称为系统的零输入响应 $c_{0r}(t)$; 若系统处于零初始状态, 则系统的响应由系统的输入 $r(t)$ 唯一决定, 称为系统的零状态响应 $c_{0z}(t)$ 。对于线性系统可应用叠加原理, 即系统的输出 $c(t)$ 可看成是由零输入响应 $c_{0r}(t)$ 与零状态响应 $c_{0z}(t)$ 的线性叠加, 即

$$c(t) = c_{0r}(t) + c_{0z}(t) \quad (3-17)$$

判定系统的稳定性就是判定在零输入条件下, 由于扰动或其他原因使系统偏离平衡状态, 扰动消失后系统能否恢复到平衡状态。换句话说, 系统的稳定性只由零输入响应决定, 因此只要研究式(3-16)微分方程的齐次方程的解。齐次微分方程

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dc(t)}{dt} + a_0 c(t) = 0 \quad (3-18)$$

的解由特征方程决定, 其特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-19)$$

做因式分解, 式(3-19)也可写成

$$\prod_{i=1}^k (s + \sigma_i) \prod_{j=1}^l (s^2 + 2\zeta_j \omega_{nj} s + \omega_{nj}^2) = 0 \quad (3-20)$$

其中, $|\zeta_j| < 1, \omega_{nj} > 0$ 。

假设特征方程式(3-19)没有重根, 分解式(3-20)说明它有 k 个实根和 l 对复根。于是式(3-18)的解具有如下形式:

$$c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{j=1}^l B_j e^{-\zeta_j \omega_{nj} t} (\alpha_j \cos \omega_{dj} t + \beta_j \sin \omega_{dj} t) \quad (3-21)$$

式中, $\omega_{dj} = \omega_{nj} \sqrt{1 - \zeta_j^2}$ 。 A_i 、 B_j 、 α_j 和 β_j 均为实常数, 由特征方程的系数和初始条件决定。由(3-21)可以看出, σ_i 和 ζ_j 的值决定了方程解(系统响应)的特性。

若 $\sigma_i > 0, \zeta_j > 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0 \quad (3-22)$$

系统是稳定的。

若 $\sigma_i > 0, \zeta_j = 0$, 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \sum_{i=1}^k A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{j=1}^l B_j (\alpha_j \cos \omega_{dj} t + \beta_j \sin \omega_{dj} t) \quad (3-23)$$

系统趋于等幅振荡, 是临界稳定的。

若 $\sigma_i < 0$, 则 $c(t)$ 是发散的, 因而系统是不稳定的。而若 $\zeta_j < 0$, 则系统将趋于无界振荡, 也是不稳定的。

$\sigma_i = 0$ 的情况比较复杂。如果 0 是特征方程式(3-19)的单根, 那么响应式(3-21)中会出

现一个常数项,系统临界稳定;如果 0 是重根,则响应 $c(t)$ 会出现 $t, t^2, \dots$, 这些项,系统不稳定。对于 $\zeta_j = 0$ 的情况很类似。当 $\zeta_j = 0$ 时 $\pm j\omega_{nj}$ 是式(3-19)的根,如果 $j\omega_{nj}$ 是单根系统临界稳定;当 $j\omega_{nj}$ 是重根时, $c(t)$ 会出现 $t \cos \omega_{nj} t, t \sin \omega_{nj} t, t^2 \cos \omega_{nj} t, t^2 \sin \omega_{nj} t, \dots$ 之类项,系统不再稳定。

综上所述,可得线性定常系统渐近稳定的充分必要条件是:系统特征方程所有根(系统的特征根)都具有负实部,或系统的所有极点都位于左半 s 开平面(即不包含虚轴的左半平面)上。工程上总是要求系统是渐近稳定的,经典理论中简称为稳定的。

系统特征方程的根是由特征方程的系数决定的,特征方程的系数取决于系统的固有特性(结构和参数),因此系统的稳定性取决于系统的固有特性,而与外部的输入无关。

利用系统特征方程的根可以判别系统的稳定性,但求取高阶特征方程的根不是一件容易的事。利用 MATLAB 可以求得近似解。但这是后话。这里先介绍 19 世纪末提出的一种代数判据——劳斯(Routh)判据,它是一种避免对特征方程直接求解,而通过方程的系数用间接的方法来判别系统特征根位置的判据。

3.2.3 劳斯稳定性判据

1. 线性定常系统稳定的必要条件

线性定常系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (3-24)$$

式中, $a_i (i=0, 1, \dots, n)$ 为实数,不失一般性,设 $a_n > 0$ 。

方程式(3-24)的所有根均具有负实部(也即系统稳定)的必要条件是特征方程所有系数均严格为正。

例 3-3 考虑以下三个系统:

$$5s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 6 = 0$$

$$5s^4 + 4s^3 - 2s^2 + s + 5 = 0$$

$$5s^4 + 4s^3 + 2s^2 + s + 5 = 0$$

由系统稳定的必要条件知:第一个系统 s 项系数为零,第二个系统 s^2 项系数为负,所以这两个系统是不稳定的;第三个系统满足稳定的必要条件,但不能判定其是否稳定。 ■

2. 劳斯判据

劳斯判据是一种根据系统特征方程的系数来判别系统稳定性的代数判据。对于式(3-24)特征方程,按以下步骤来判别系统的稳定性。

(1) **建立劳斯表**。将给定的特征方程式系数按下列规则排在劳斯表的前两行:

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\dots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\dots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\dots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\dots$
$\vdots$				
s	p_1			
s^0	q_1			

此劳斯表中,第一列 $s^n, s^{n-1}, \dots, s^0$ 为辅助列,它表明这个表有 $n+1$ 行。

(2) 计算劳斯表的其他系数。计算规则为

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \dots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - b_2 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - b_3 a_{n-1}}{b_1}$$

$$c_3 = \dots$$

$$\vdots$$

在计算中遇到缺项,则用 0 代替。例如 $n=4$,在计算 b_2 时要用到 a_{n-5} ,这时 a_{n-5} 用 0 代表。劳斯表最后两行必定只有一个元素。

(3) 劳斯稳定性判据。系统稳定的充分必要条件是劳斯表首列系数非零且不改变符号。

例 3-4 已知系统的特征方程为 $s^4 + 7s^3 + 17s^2 + 17s + 6 = 0$,试用劳斯判据判别其稳定性。

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 1 & 17 & 6 \\ s^3 & 7 & 17 & 0 \\ s^2 & 14.57 & 6 & \\ s^1 & 14.12 & & \\ s^0 & 6 & & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素非零且无符号变化,说明该系统特征方程没有正实部根,所以系统稳定。 ■

(4) 如果劳斯表中第一列元素皆非零,则元素符号变化的次数等于特征方程具有正实部根的个数。

例 3-5 已知系统的特征方程为 $s^3 + 4s^2 + 10s + 50 = 0$,用劳斯判据判别其稳定性。

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 4 & 50 \\ s^1 & -2.5 & 0 \\ s^0 & 50 & \end{array}$$

劳斯表中第一列元素的符号变化两次,说明该系统有两个具有正实部的根,所以系统不稳定。 ■

(5) 劳斯表中某行第一个元素为零,且此行其余项不全为零。

此时系统肯定是不稳定的,为了继续运算,可用一个充分小的正数 ϵ 代替零,然后按规则继续排列劳斯表。

例 3-6 试用劳斯判据判别下列系统特征方程的稳定性。

$$s^5 + s^4 + 5s^3 + 5s^2 + 2s + 1 = 0$$

解 列出劳斯表

s^5	1	5	2
s^4	1	5	1
s^3	$0(\epsilon)$	1	0
s^2	$5 - \frac{1}{\epsilon}$	1	
s^1	$\frac{5\epsilon - 1 - \epsilon^2}{5\epsilon - 1}$		
s^0	1		

劳斯表中 s^3 第一个元素为零,可以用一个任意小的正数 ϵ 来代替零元素,然后按规则继续排列。由于 ϵ 很小, $\frac{5\epsilon - 1}{\epsilon} < 0$, $\frac{5\epsilon - 1 - \epsilon^2}{5\epsilon - 1} > 0$ (可以用求 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 的极限来判定),说明劳斯表中第一列元素有两次符号变化,特征方程有两个具有正实部的根,所以系统不稳定。 ■

(6) 劳斯表中某一行元素全为零。

在劳斯表元素计算中,如果出现某一行元素全为零,说明特征方程在 s 平面上存在关于 s 平面原点对称的根,例如 $(s + \sigma)(s - \sigma)$ 或 $(s + j\omega)(s - j\omega)$ 。此时,可用全零行上面一行的元素构造一个辅助方程,利用辅助方程对 s 求导后得到的方程系数代替全零行的元素,然后按规则完成劳斯表的排列。所有数值相同、符号相异的根都可由辅助方程求得。

例 3-7 判别如下特征方程的稳定性。

$$s^3 + s^2 + 16s + 16 = 0$$

解 列出劳斯表

s^3	1	16	
s^2	1	16	← 辅助多项式: $p(s) = s^2 + 16$
s^1	2	0	← 原 s^1 行系数全为零,用 $\frac{dp(s)}{ds}$ 的系数代替
s^0	16		

劳斯表中 s^1 行元素全为零,这时可用其上面一行的元素构造一个辅助多项式 $p(s)$: $p(s) = s^2 + 16$,求 $p(s)$ 对 s 的导数,得

$$\frac{dp(s)}{ds} = 2s$$

以其系数替换全为零行的元素,再按规则继续排列劳斯表。从表中看,虽然第一列元素不变号,但由于 s^1 行元素全为零,所以存在一对共轭虚根。解辅助方程 $p(s) = s^2 + 16 = 0$ 可求得这对共轭虚根: $s_{1,2} = \pm 4j$,系统为临界稳定。 ■

3. 劳斯判据的应用

劳斯判据可判别线性定常系统的稳定性,它还可用来确定使系统稳定的参数取值范围。

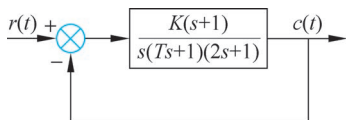


图 3-8 例 3-8 系统

例 3-8 确定使图 3-8 所示系统稳定的 K 、 T 的取值范围。

解 闭环系统的特征方程为

$$\begin{aligned} & s(Ts+1)(2s+1)+K(s+1) \\ &= 2Ts^3+(2+T)s^2+(1+K)s+K=0 \end{aligned}$$

劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 2T & 1+K \\ s^2 & 2+T & K \\ s^1 & 1-K\frac{T-2}{T+2} & \\ s^0 & K & \end{array}$$

由劳斯判据,要使系统稳定,必须同时满足以下条件

$$\begin{aligned} 2T &> 0 \\ 2+T &> 0 \\ 1-K\frac{T-2}{T+2} &> 0 \\ K &> 0 \end{aligned}$$

由上述四式可解得

$$T > 2, 0 < K < \frac{T+2}{T-2}$$

或

$$0 < T \leq 2, K > 0$$

所以系统的稳定区域如图 3-9 所示。

例 3-9 设系统的特征方程为 $s^3+8s^2+10s+2=0$, 试判别系统的稳定性,并分析有几个根位于直线 $s=-1$ 与虚轴之间。

解 列出劳斯表

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 8 & 2 \\ s^1 & 9.75 & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

系统是稳定的。

为分析位于 $s=-1$ 右边根的个数,令 $s=s_1-1$,代入特征方程得 $s_1^3+5s_1^2-3s_1-1=0$, 列出劳斯表

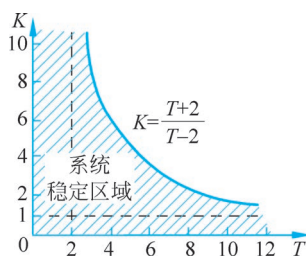


图 3-9 例 3-8 系统稳定区域

$$\begin{array}{rcl}
 s^3 & 1 & -3 \\
 s^2 & 5 & -1 \\
 s^1 & -2.8 & \\
 s^0 & -1 &
 \end{array}$$

第一列元素符号变化一次,所以有一个根在直线 $s = -1$ 与虚轴之间。 ■

3.2.4 用 MATLAB 分析系统的稳定性

MATLAB 中有多个命令可用于求系统的特征根,系统的零、极点以及绘制系统的零、极点在 s 平面上的分布图。这些命令如下。

(1) $p = \text{pole}(\text{sys})$: 计算系统的极点。

例 3-10 已知系统的传递函数为 $W(s) = \frac{s+2}{s^3+2s^2+4s+3}$, 求系统的极点。

解 执行以下命令

```

num=[1,2];
den=[1,2,4,3];
sys=tf(num,den);
p=pole(sys)
p =
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i
    -1.0000

```

(2) $r = \text{roots}(p)$: 求多项式的根, p 是多项式的系数向量。

例 3-11 求上例特征多项式的根。

解 执行以下命令

```

p=[1,2,4,3];
r=roots(p)
r =
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i
    -1.0000

```

(3) $[z, p, k] = \text{zpkdata}(\text{sys}, 'v')$: 获取系统的零、极点向量和增益。

例 3-12 获取例 3-10 系统的零、极点向量和增益。

解 对例 3-10, 只要再执行 $[z, p, k] = \text{zpkdata}(\text{sys}, 'v')$ 使得

```

z =
    -2
p =
    -0.5000+1.6583i
    -0.5000-1.6583i
    -1.0000
k =
    1

```

(4) $\text{pzmap}(\text{sys})$: 绘制系统的零、极点图, 极点以“×”表示, 零点以“°”表示。

$[p, z] = \text{pzmap}(\text{sys})$: 不绘图, 返回系统的零、极点向量。

例 3-13 绘制例 3-10 系统的零、极点图。

解 对例 3-10 的系统,执行命令 `pzmap(sys)`得图 3-10 的零、极点分布图。

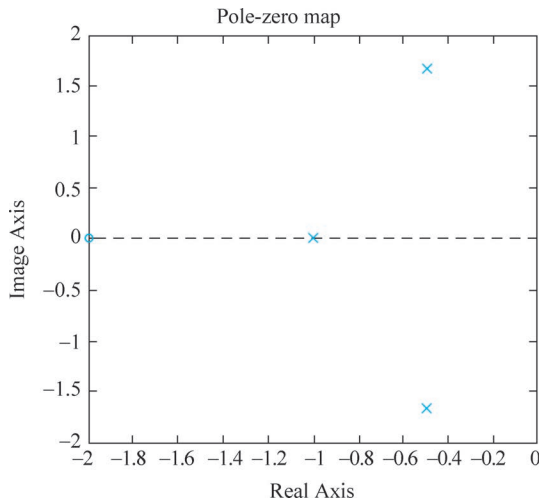


图 3-10 例 3-10 系统零、极点分布图

3.3 控制系统的稳态特性——稳态误差分析

衡量系统稳态特性好坏的主要时域指标是稳态误差。稳态误差是反映系统控制精度的一种度量,是衡量稳态响应质量的时域指标。工程上,通常用系统对典型测试信号的稳态响应来表征系统的稳态精度。显然只有稳定的系统,稳态误差才有意义。

研究表明:稳态误差与系统的结构和参数以及输入信号的特性有很大关系。控制系统设计的任务之一就是要在保证系统稳定的前提下,尽量地减小乃至消除稳态误差。

3.3.1 稳态误差和控制系统类型

1. 稳态误差定义

误差的定义有两种方法。

从输出端定义:误差为系统输出量的希望值与实际值之差。但在实际中此差值信号常常无法测量,一般只有理论意义。

从输入端定义:误差为系统的输入信号与主反馈信号之差。此信号在实际中可测量,所以具有一定的物理意义。

当主反馈为单位反馈时,这两种定义是一致的。本书总采用后一种定义。

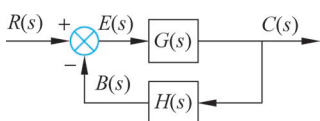


图 3-11 典型的控制系统方框图

图 3-11 是典型的控制系统方框图。系统误差 $e(t)$ 定义为输入量 $r(t)$ 与反馈量 $b(t)$ 的差值,即

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (3-25)$$

对单位反馈系统 ($H(s)=1$), $b(t)=c(t)$, 误差 $e(t)$ 为

$$e(t) = r(t) - c(t) \quad (3-26)$$

误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-27)$$

则

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} R(s) \quad (3-28)$$

以下是假设系统是稳定的,这时系统的稳态误差 e_{ss} 是 $t \rightarrow \infty$ 时的系统误差的极限

$$e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3-29)$$

用终值定理可求得系统的稳态误差 e_{ss}

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (3-30)$$

式(3-30)说明,系统的稳态误差不仅与系统的结构参数有关,而且与系统的输入有关。因此研究系统的稳态误差,必须研究不同结构类型系统在不同输入作用下的稳态误差。

为了使稳态误差与系统结构参数、输入的关系更加清晰,将式(3-30)中的开环传递函数 $G(s)H(s)$ 写成时间常数表达式(见式(2-14))

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)} \quad (3-31)$$

K 为开环增益。如果开环传递函数表示为零极点形式(式(2-15)),则 K 与开环增益因子 K_r 间成立

$$K = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j} \quad (3-32)$$

其中, p_j 为非零极点。系统的稳态误差可表示为

$$\begin{aligned} e_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + \frac{K \prod_{i=1}^{m_1} (\tau_i s + 1) \prod_{k=1}^{m_2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}{s^\nu \prod_{j=1}^{n_1} (\tau_j s + 1) \prod_{l=1}^{n_2} (T_l^2 s^2 + 2\zeta_l T_l s + 1)}} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} sR(s) \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \end{aligned} \quad (3-33)$$

由上式可看出,决定系统稳态误差的结构和参数主要是:系统在原点的开环极点数(ν)、系统的开环增益(K)和输入量的特性。在研究系统稳态误差时,人们选择阶跃信号($R(s) = \frac{R}{s}$)、速度信号($R(s) = \frac{R}{s^2}$)和加速度信号($R(s) = \frac{R}{s^3}$)作为典型输入信号。

2. 控制系统的类型

典型的系统开环传递函数如式(3-31)所示,将开环传递函数在原点处的极点数 ν 称为

系统的类型:

$\nu=0$, 称为 0 型系统。

$\nu=1$, 称为 1 型系统。

$\nu=2$, 称为 2 型系统。

3.3.2 稳态误差系数和稳态误差计算

1. 单位阶跃输入时, 系统的稳态误差

对单位阶跃输入 $r(t)=u(t)$, $R(s)=\frac{1}{s}$, 将其代入式(3-33), 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \quad (3-34)$$

定义位置稳态误差系数 K_p

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^\nu} \quad (3-35)$$

于是

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (3-36)$$

对 0 型系统

$$K_p = K \quad (3-37)$$

对 1 型系统及高于 1 型的系统

$$K_p = \infty \quad (3-38)$$

对单位阶跃输入, 系统的稳态误差分别为

0 型系统

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K} \quad (3-39)$$

1 型及高于 1 型的系统

$$e_{ss} = 0 \quad (3-40)$$

各型系统单位阶跃输入时输出响应的波形如图 3-12(a) 所示。

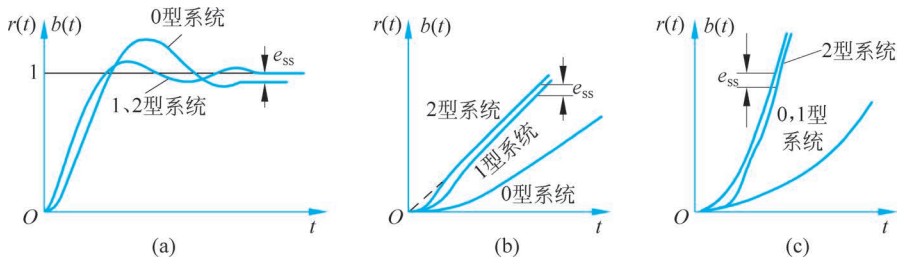


图 3-12 各型系统的稳态误差

2. 速度输入时系统的稳态误差

对单位速度输入, $r(t)=t \cdot u(t)$, $R(s)=\frac{1}{s^2}$, 将其代入式(3-33), 求得系统的稳态误

差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \quad (3-41)$$

定义速度稳态误差系数 K_v :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-1}} \quad (3-42)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \quad (3-43)$$

对 0 型系统

$$K_v = 0 \quad (3-44)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} \rightarrow \infty \quad (3-45)$$

对 1 型系统

$$K_v = K \quad (3-46)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \quad (3-47)$$

对 2 型及以上的系统

$$K_v = \infty \quad (3-48)$$

$$e_{ss} = 0 \quad (3-49)$$

各型系统单位速度输入时的输出响应波形如图 3-12(b)所示。

3. 加速度输入时系统的稳态误差

对单位加速度输入, $r(t) = \frac{1}{2}t^2 \cdot u(t)$, $R(s) = \frac{1}{s^3}$, 将其代入式(3-33), 求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\nu}} \quad (3-50)$$

定义加速度稳态误差系数 K_a

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G(s) H(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\nu-2}} \quad (3-51)$$

系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \quad (3-52)$$

对 0 型和 1 型系统

$$K_a = 0 \quad (3-53)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_a} \rightarrow \infty \quad (3-54)$$

对 2 型系统

$$K_a = K \quad (3-55)$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \quad (3-56)$$

各型系统的单位加速度输入的输出响应波形如图 3-12(c) 所示。

表 3-1 给出各类系统稳态误差与稳态误差系数、系统开环增益及输入信号之间的关系。这里指出, 尽管稳态误差只对稳定系统才有意义, 但是对任何系统我们都可以对它定义稳态误差系数。

表 3-1 稳态误差与系统结构参数、输入信号特性之间关系一览表

类型	稳态误差系数			阶跃输入 $r(t) = R \cdot 1(t)$	速度输入 $r(t) = Rt$	加速度输入 $r(t) = \frac{1}{2}Rt^2$
ν	K_p	K_v	K_a	位置误差 $e_{ss} = \frac{R}{1+K_p}$	速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_v}$	加速度误差 $e_{ss} = \frac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\frac{R}{1+K}$	∞	∞
1	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$	∞
2	∞	∞	K	0	0	$\frac{R}{K}$

例 3-14 某系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{4(s+3)(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+8)}$$

试求:

- (1) 系统的稳态误差系数 K_p, K_v, K_a ;
- (2) 当输入 $r(t) = (6+4t)u(t)$ 时, 系统的稳态误差;
- (3) 当输入为 3rad/s 时, 如何做才能使系统的稳态误差在 0.3rad/s 之内。

解

(1) 稳态误差只有在系统稳定的条件下才有意义, 故先判别系统的稳定性。系统的特征方程为

$$\Delta(s) = s^4 + 11s^3 + 30s^2 + 44s + 48$$

用劳斯判据不难判定系统是稳定的。

(2) 这是 1 型系统, 于是有

$$K_p = \infty$$

$$K_v = K = 4 \times \frac{3 \times 4}{1 \times 2 \times 8} = 3$$

$$K_a = 0$$

当输入 $r(t) = (6+4t)u(t)$, 它是阶跃信号 $6u(t)$ 和速度信号 $4tu(t)$ 的线性组合, 所以系统的稳态误差为

$$e_{ss} = 0 + \frac{R}{K_v} = \frac{4}{3}$$

(3) 当输入为 3rad/s , 为保证系统的稳态误差在 0.3rad/s 之内, 即要求 $e_{ss} = \frac{3}{K_v} < 0.3$, 所以

$$K_v > \frac{3}{0.3} = 10$$

所以必须将系统的开环增益扩大 $10/3$ 倍。可以验证, 当 $K_v > 10$ 时, 系统依然是稳定的。

3.3.3 几点结论

(1) 系统的稳态误差只有对稳定的系统才有意义。

(2) 系统的稳态误差与系统的结构和参数以及输入信号的特征有关。这里系统的结构是指开环系统中积分器的数量, 并据此将系统分为 0 型、1 型、2 型系统。系统的参数是指系统的开环增益。输入信号的特征主要指输入信号的类型, 分别以单位阶跃信号、速度信号和加速度信号作为典型的输入信号。还需指出, 开环增益和输入信号的幅值只影响稳态误差的大小, 不能决定稳态误差的存在与否。

(3) 对系统设计来说, 如要消除稳态误差, 必须在保持稳定的前提下, 增加开环系统中积分器的数量, 而减小稳态误差则只要加大系统的开环增益。

(4) 扰动引起的稳态误差, 可以应用终值定理求取。以图 2-19 为例:

$$\frac{E(s)}{N(s)} = -\frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3-57)$$

得到

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} sN(s) \frac{G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} \quad (3-58)$$

3.4 控制系统的动态特性——动态响应分析

3.4.1 控制系统动态响应指标

控制系统除了稳定性和稳态误差这两个性能之外, 动态响应性能是另一个重要特性, 也称动态特性。系统过度振荡或响应过于缓慢都会使系统不能正常工作。系统动态响应性能用系统阶跃输入时的动态响应指标来衡量。常用的动态响应指标如下(图 3-13)。

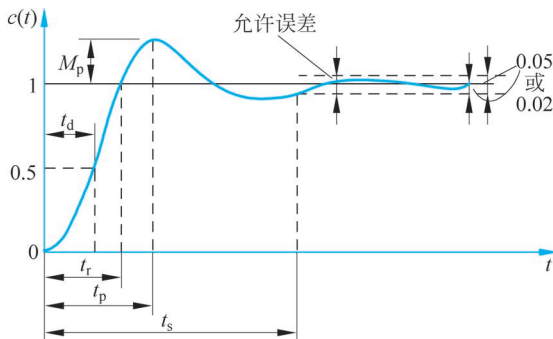


图 3-13 系统的典型动态响应曲线

1. 最大超调量 M_p

最大超调量简称超调量。如果阶跃响应的终值 $c(\infty)$ 是有限的, 且输出响应的最大峰值 $c(t_p)$ 大于响应的终值 $c(\infty)$, 那么

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-59)$$

式中, t_p 为峰值时间, 即输出达到最大值的时间; $c(\infty)$ 是输出响应的终值, 对单位反馈系统来说, 一般 $c(\infty)$ 等于输入信号的幅值。

2. 调整时间 t_s

调整时间为输出响应达到并维持在 $c(\infty)$ 的某个误差百分比的范围内所需的时间。误差百分比通常取 2% 或 5%, 简称为 2% 准则或 5% 准则。

当 $t > t_s$ 之后, 系统便进入了稳态阶段。

3. 延迟时间 t_d

延迟时间为输出响应第一次达到输出响应终值 $c(\infty)$ 的 50% 所需的时间。

4. 上升时间 t_r

上升时间为从 0 上升到第一次达到 $c(\infty)$ 所需的时间。对无振荡系统定义为从 $c(\infty)$ 的 10% 上升到 $c(\infty)$ 的 90% 所需的时间。

在控制系统性能分析中, “快、准、稳” 是三个基本要求。“准” 的要求是通过稳态误差来考核的, 前一节已经就这个指标进行了详细分析, 增加系统的型号和提高开环增益可以消除或者减小稳态误差。可是这样做很容易引起闭环的不稳定, 这个结论在第 4 章和第 5 章会有详细的说明。在本节介绍的动态响应的指标中, 延迟时间 t_d 和上升时间 t_r 反映了系统对输入反应的快速性; 峰值时间 t_p 也反映了系统反应的快速性, 因为有的系统是在几个振荡周期后才达到最大值的, 因而它与上升时间含义未必一致; 另外调整时间 t_s 刻画了系统达到稳态的速度, 它从另一侧面描述了系统的快速性。对于稳定的系统, 我们还会比较它们的相对稳定性, 即考察它们的稳定程度。超调量 M_p 和调整时间 t_s 描述了系统的相对稳定性。超调量比较大的系统相对稳定性较差, 调整时间较长的系统相对稳定性也比较差。从上面的分析可以看出, 这些指标常常是相互牵制的, 增加系统型号可以提高准确度但可能会导致失稳, 响应快的系统可能导致超调量大, 常常顾此失彼。解决冲突的途径是优化, 设计一个加权的指标实现兼顾各方, 例如做不到 M_p 和 t_r 同时最小, 那么我们考虑综合指标 $\frac{1}{2}M_p +$

$\frac{1}{2}t_r$, 或者等价地 $\frac{1}{2}M_p + \frac{1}{2}t_p$, 让这个加权指标达到最小, 如果参数在一个闭区间上取值, 数学理论支持这个最优解的存在性。还有一种常用的指标是带积分的指标, 用 $e(t) = r(t) - c(t)$ 表示系统的误差, 那么 $\int_0^\infty |e(t)| dt$ 就表示了误差的积累。既快又稳的系统对应的 $\int_0^\infty |e(t)| dt$ 应该比较小。为了突出稳态部分的误差, 人们用 $\int_0^\infty t |e(t)| dt$ 作为指标。

这种指标称为时间乘绝对误差积分准则, 用 ITAE 表示。由于绝对值函数存在不可导点, 因此又用 $\int_0^\infty t e^2(t) dt$ 代替 ITAE, 称为时间乘平方误差积分准则, 记成 ITSE。

3.4.2 一阶系统的动态响应

一阶系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1} \quad (3-60)$$

式中, T 为一阶系统的时间常数。图 3-14 为其方框图。

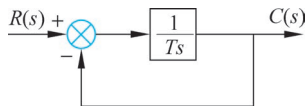


图 3-14 一阶系统方框图

考虑一阶系统的单位阶跃响应。当输入 $r(t) = u(t)$ 时,

$R(s) = \frac{1}{s}$, 系统输出响应的拉氏变换为

$$C(s) = W(s)R(s) = \frac{1}{s(Ts + 1)} \quad (3-61)$$

将 $C(s)$ 展开成部分分式

$$C(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + (1/T)} \quad (3-62)$$

对式(3-62)进行拉氏反变换得

$$c(t) = 1 - e^{-t/T} \quad t \geq 0 \quad (3-63)$$

图 3-15 是其响应曲线。

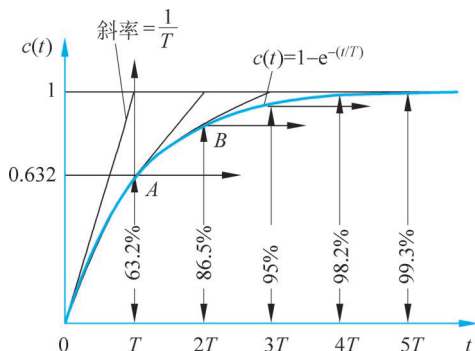


图 3-15 一阶系统的单位阶跃响应

一阶系统的单位阶跃响应按指数规律单调上升,其主要特点是:

(1) $c(t)$ 的初始值 $c(0)=0$, 终值为 $c(\infty)=u(t)=1$, 所以它是位置无差系统。

(2) 在 $t=T$ 时,

$$c(T) = (1 - e^{-1}) = 0.632 \quad (3-64)$$

说明一阶系统响应达到 63.2% 终值的时间等于系统的时间常数 T 。 T 越小, $c(t)$ 响应速度越快。

(3) 在任意时刻, $c(t)$ 上升速度是曲线在该时刻的斜率, 即

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \quad (3-65)$$

在 $t=0$ 时曲线切线的斜率为

$$\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0} = \frac{1}{T} e^{-t/T} \Big|_{t=0} = \frac{1}{T} \quad (3-66)$$

随着 t 的增长, $\frac{dc(t)}{dt}$ 单调递减, 即 $c(t)$ 的增长速度在递减。在 $t = t_0$ 处, 切线为 $y = c(t_0) + \frac{1}{T}e^{-t_0/T}(t - t_0)$ 。容易验证, 当 $t = t_0 + T$ 时, $y = 1$, 这说明如响应保持即时速度不变, 经过 T 将达到稳态值。

(4) 由式(3-63)可以看出, $c(t)$ 单调增长, 趋近终值 $c(\infty)$ 。在实践中, 都以 $c(t)$ 达到与稳态值 $c(\infty)$ 的误差不大于某一百分比 Δ 的时间作为一阶系统的调整时间 t_s 。图 3-15 同时给出了 $t = T, 2T, 3T, 4T$ 和 $5T$ 时, 响应曲线分别上升到稳态值的百分比。可见,

$$\text{当 } t = 3T \text{ 时} \quad c(t) = 95\%c(\infty)$$

$$\text{当 } t = 4T \text{ 时} \quad c(t) = 98.2\%c(\infty)$$

$$\text{当 } t = 5T \text{ 时} \quad c(t) = 99.3\%c(\infty)$$

因此, 若取 $\Delta = 5\%$, 则 $t_s = 3T$; 若取 $\Delta = 2\%$, 则 $t_s = 4T$ 。

(5) 一阶系统的上升时间 t_r 定义为由终值的 10% 上升到 90% 所需的时间, 不难求得

$$t_s = 2.2T \quad (3-67)$$

3.4.3 二阶系统动态响应的描述参数

典型二阶系统的微分方程是

$$T^2 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t) \quad (3-68)$$

或

$$\frac{d^2 c(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dc(t)}{dt} + \omega_n^2 c(t) = \omega_n^2 r(t) \quad (3-69)$$

式中, ζ 是系统的阻尼比, $\omega_n = \frac{1}{T}$ 为无阻尼振荡角频率(或自然振荡角频率)。

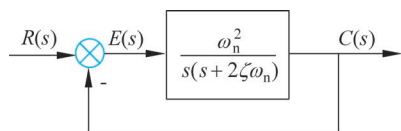


图 3-16 二阶系统的方框图

式(3-68)和式(3-69)描述的二阶系统常常画成图 3-16 所示的典型结构。

系统的传递函数为

$$W(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3-70)$$

系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3-71)$$

系统的特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} \quad (3-72)$$

(1) 欠阻尼情况 ($0 < \zeta < 1$): 系统的两个极点(特征根)是一对共轭复数, 即

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d \quad (3-73)$$

式中, ω_d 叫作阻尼振荡角频率, 且

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (3-74)$$

系统极点位于左半 s 平面上, 如图 3-17(a) 所示。图中的角 θ ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) 称为阻尼角, $\zeta = \cos\theta$ 。

阻尼角越大,阻尼比越小。

(2) 临界阻尼情况($\zeta=1$): 系统有一对相等的,位于负实轴上的实极点,如图 3-17(b)所示。这时 $W(s)=\frac{\omega_n^2}{(s+\omega_n)^2}$ 。

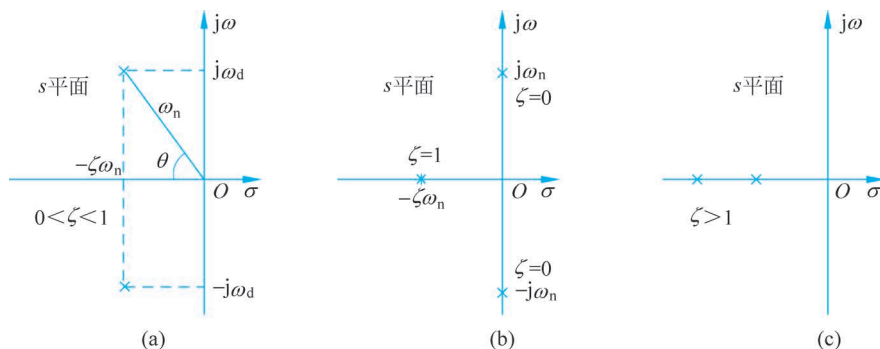


图 3-17 二阶系统的极点分布图

(3) 过阻尼情况($\zeta>1$): 系统有两个不等的位于负实轴上的负实根,如图 3-17(c)所示。这时 $W(s)=\frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$ 相当于两个惯性环节的串联。

(4) 无阻尼情况($\zeta=0$): 系统具有一对位于虚轴上的共轭极点,也示于图 3-17(b)中。

3.4.4 二阶系统的单位阶跃响应

由式(3-70),当 $R(s)=\frac{1}{s}$,系统输出响应的拉氏变换为

$$C(s)=\frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)} \quad (3-75)$$

求式(3-75)的拉氏反变换,可得系统的单位阶跃响应。

(1) 欠阻尼情况:此时,式(3-75)的部分分式展开为

$$\begin{aligned} C(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2+2\zeta\omega_ns+\omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s+\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s+\zeta\omega_n)^2+\omega_d^2} \end{aligned} \quad (3-76)$$

系统的单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) &= \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = 1 - e^{-\zeta\omega_nt} \left(\cos\omega_dt + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_dt \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_nt} (\sqrt{1-\zeta^2} \cos\omega_dt + \zeta \sin\omega_dt) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_nt} (\sin\theta \cos\omega_dt + \cos\theta \sin\omega_dt) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_nt} \sin(\omega_dt + \theta) \end{aligned} \quad (3-77)$$

式中

$$\theta = \arccos \zeta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \quad (3-78)$$

(2) 无阻尼情况: 当 $\zeta = 0$ 时, $\omega_d = \omega_n$, $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。应用连续性, 从式(3-77)得到

$$c(t) = 1 - \sin(\omega_n t + \theta) = 1 - \cos \omega_n t$$

响应呈等幅振荡。

(3) 临界阻尼情况: 这时 $\zeta = 1$, 单位阶跃响应的拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

响应为

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(\omega_n t + 1)$$

(4) 过阻尼情况: 这时系统有两个不相等的负极点, 应用式(3-72), 可以得到单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} \left(\frac{e^{s_2 t}}{s_2} - \frac{e^{s_1 t}}{s_1} \right)$$

图 3-18 给出了不同 ζ 值 ($\zeta > 0$) 下, 二阶系统的单位阶跃响应曲线。由图可见: 随着 ζ 值减小, 系统的响应速度增快; 当 $\zeta < 1$ 时, 产生了振荡, 也产生了超调, ζ 越小, 系统响应的振荡越剧烈。

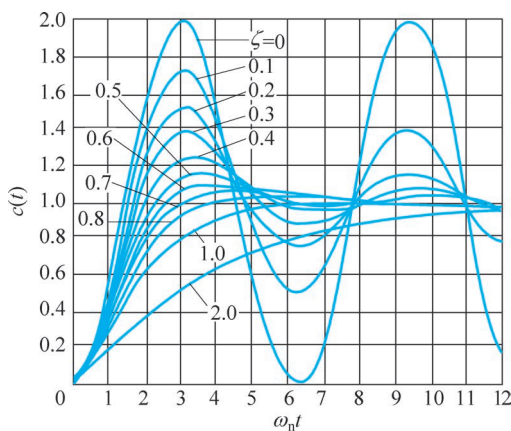


图 3-18 二阶系统的单位阶跃响应

3.4.5 二阶系统的动态响应指标

下面仅讨论欠阻尼情况的动态响应指标与系统参数 ζ 和 ω_n 的关系。

1. 最大超调量 M_p

按照最大超调量的定义有

$$M_p = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3-79)$$

式中, t_p 是峰值时间, 即 $c(t)$ 的极值点, 因此

$$\frac{dc(t)}{dt} = \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} [-\zeta\omega_n \sin(\omega_d t + \theta) + \omega_d \cos(\omega_d t + \theta)] = 0$$

由于 $\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \neq 0$, 所以, 上式成立的条件是

$$\zeta \sin(\omega_d t + \theta) = \sqrt{1-\zeta^2} \cos(\omega_d t + \theta)$$

注意 $\cos \theta = \zeta$, $\sin \theta = \sqrt{1-\zeta^2}$, 从上式可得 $\sin \omega_d t = 0$, 即

$$\omega_d t = n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

最大峰值是第一个峰值, 故 $n=1$ 。于是得

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (3-80)$$

将式(3-80)代入式(3-79), 并考虑 $c(\infty)=1$, 得

$$M_p = (c(t_p) - 1) \times 100\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (3-81)$$

可见, 最大超调量 M_p 只与阻尼比 ζ 有关。图 3-19 给出了 M_p 与 ζ 的关系曲线。 M_p 随 ζ 的增大而减小, $\zeta=0$ 时, $M_p=100\%$, 而 $\zeta=1$ 时, $M_p=0$ 。

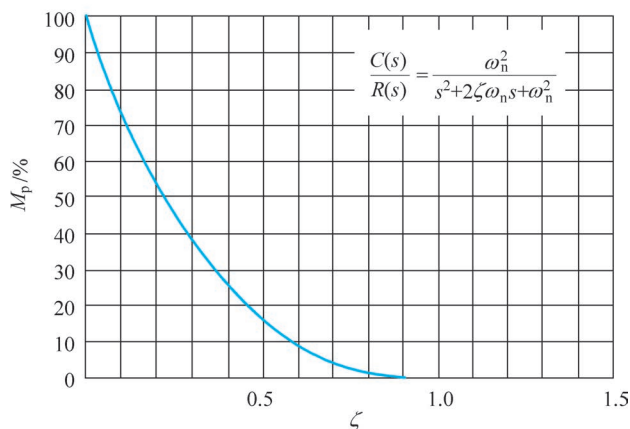


图 3-19 欠阻尼二阶系统 M_p 与 ζ 的关系

2. 调整时间 t_s

对于欠阻尼二阶系统, 计算调整时间 t_s 是不连续的, 因而通常是利用其单位阶跃响应的包络线(图 3-20)来近似计算。由式(3-77), 包络线的方程是

$$b(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \quad (3-82)$$

对于一定的 ζ , 包络线方程是两条对称于 $c(t)=1$ 水平直线的指数曲线, 记 $T' = \frac{1}{\zeta\omega_n}$, T' 也称为时间常数。工程上调整时间用下式近似计算:

$$\text{对于 } 5\% \text{ 准则} \quad t_s = 3T' = \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (3-83)$$

对于 2% 准则

$$t_s = 4T' = \frac{4}{\zeta \omega_n} \quad (3-84)$$

式(3-83)和式(3-84)计算的 t_s 是与阻尼比 ζ 有关的,图 3-21 给出了不用包络线代替时调整时间与阻尼比之间的精确关系,它们是不连续的。当用式(3-83)和式(3-84)计算 t_s 时,它们满足双曲线关系。

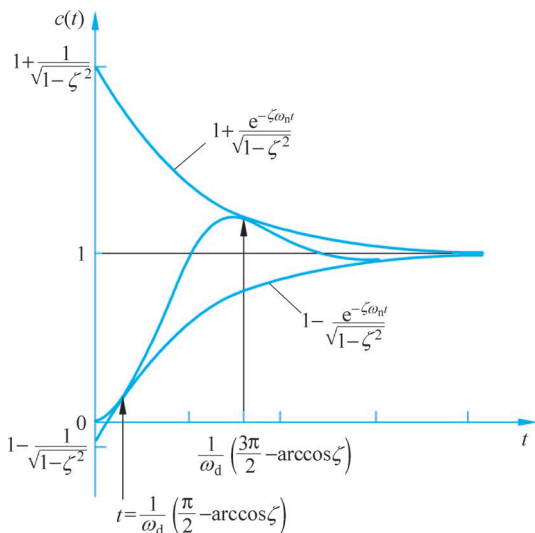


图 3-20 单位阶跃响应的包络线

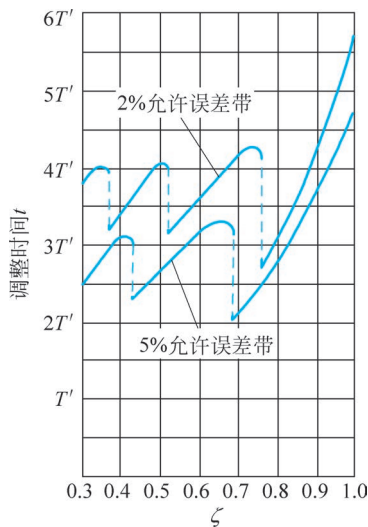


图 3-21 调整时间 t_s 与阻尼比之间的关系

3. 上升时间 t_r

按上升时间 t_r 的定义, $c(t_r) = 1$, 即

$$c(t_r) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t_r} \sin(\omega_d t_r + \theta) = 1$$

上式成立的条件是

$$\sin(\omega_d t_r + \theta) = 0$$

则

$$t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} \quad (3-85)$$

式中, $\theta = \arccos \zeta$ 。

以上动态响应指标的计算公式仅适用于典型的二阶系统 $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 的欠阻尼情形, 如果实际系统不是典型的二阶系统(如含有零点), 或者不是欠阻尼情形, 则必须根据各指标的定义用解析法或利用数字仿真的方法求解。

3.4.6 二阶系统的参数优化

二阶系统 $W(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 的典型结构由图 3-16 给出, 它是 1 型的, 开环增益

是 $\frac{\omega_n}{2\zeta}$ 。 ω_n 称为无阻尼自然振荡频率,常常是由系统本身的特征决定的,相对固定。阻尼比 ζ 是系统的可变参数,二阶系统的参数优化就是对 ζ 的优化。为了减小对速度信号的稳态误差,阻尼比 ζ 应该取较小的值。同时较小的阻尼比使得单位阶跃响应的速度快,上升时间短(图 3-18)。然而小的阻尼比会使得超调量 M_p 变大,相对稳定性降低。因此必须在快速性、稳态误差和相对稳定性之间合理折中,选取一个能够兼顾各方面的阻尼比。

从图 3-19 可以看出,当阻尼比 ζ 为 $0 \sim 0.5$ 时,超调量 M_p 下降很快,但在 $\zeta > 0.6$ 之后,随着 ζ 增加,超调量的下降减缓。为了兼顾各方面,人们取 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707$ 为二阶系统最佳工程参数,这时对应的阻尼角正好是 45° 。在具体设计时,一般将 ζ 取为 $0.6 \sim 0.8$ 。

优化系统阻尼比可以采用局部反馈的办法。将典型二阶系统画成图 3-22 所示结构。

为了改变系统的阻尼比,可以采用一个局部反馈(图 3-23)。

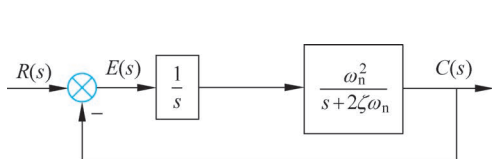


图 3-22 典型二阶系统

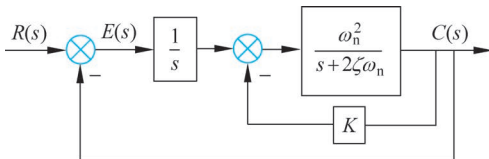


图 3-23 优化二阶系统阻尼比的方案

局部反馈组成的闭环传递函数是 $\frac{\omega_n^2}{s + 2\left(\zeta + \frac{K\omega_n}{2}\right)\omega_n}$, 无阻尼振荡频率没有变化,但是

阻尼比成为 $\zeta + \frac{K\omega_n}{2}$ 。可以通过选择 K 将阻尼比配置到适当值。

当阻尼比为二阶工程最佳的时候,即 $\zeta = 0.707$, 容易计算:

$$M_p = e^{-\pi} \approx 4.3\%, \quad \omega_n t_r = \frac{3\sqrt{2}}{4}\pi \approx 3.33,$$

$$\omega_n t_s = 6.14(2\%), \quad \omega_n t_s = 4.73(5\%)$$

其中的调整时间是利用包络线算出的,没有用近似式(3-83)和式(3-84),它比近似公式要稍微大些。

如果将目标函数取成 $J = \int_0^\infty t |e(t)| dt$, 其中 $e(t) = r(t) - c(t)$ 为误差。可以证明当

阻尼比取成 $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时, J 取到最小值。这个指标综合考虑了误差和时间,反映了快速性和相对稳定性的要求。这与我们前面的分析是一致的。

3.5 高阶系统的动态响应

3.5.1 高阶系统动态响应的特点

一般将 3 阶以上的系统称为高阶系统。严格地说,实际的控制系统大多是高阶的。

高阶系统的传递函数零、极点表达形式为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K_r(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} \quad (3-86)$$

设系统有不相同的实极点和共轭复极点。当输入为单位阶跃函数时,响应 $C(s)$ 是

$$C(s) = \frac{K_r \prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s \prod_{j=1}^q (s+p_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)} \quad (3-87)$$

式中, $q+2r=n$ 。展开成部分分式:

$$C(s) = \frac{a_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{a_j}{s+p_j} + \sum_{k=1}^r \frac{b_k(s+\zeta_k \omega_k) + c_k \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2}}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2} \quad (3-88)$$

对上式进行拉氏反变换,求得系统的单位阶跃响应为

$$\begin{aligned} c(t) = & a_0 + \sum_{j=1}^q a_j e^{-p_j t} + \sum_{k=1}^r b_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} t \\ & + \sum_{k=1}^r c_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin \omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} t \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (3-89)$$

式中的系数 a_j 、 b_k 和 c_k 的值,取决于式(3-86)中各参数。

图 3-24 给出高阶系统单位阶跃响应的一些典型形式。

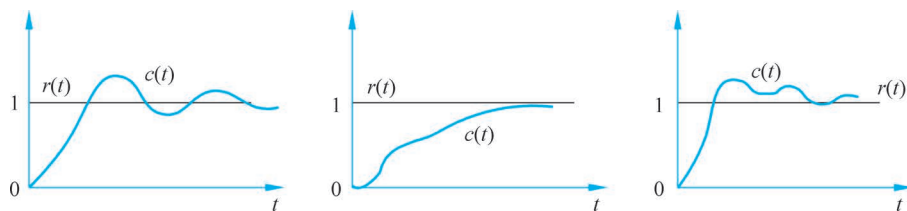


图 3-24 高阶系统的单位阶跃响应曲线

由式(3-89)可见:

(1) 如果式(3-86)中所有 p_j 的实部大于零,则高阶系统单位阶跃响应的稳态响应是

$$c(\infty) = a_0 = \frac{K_r \prod_{i=1}^m z_i}{\prod_{j=1}^n p_j}。若系统是稳定的,动态响应是一些衰减的指数函数和正弦函数的$$

线性组合,所以高阶系统的响应曲线常是由一些不同振幅、不同频率的振荡曲线叠加而成的。

(2) 稳定系统的所有极点均具有负实部,极点负实部的绝对值越大,即极点离虚轴越远,与之对应的响应分量衰减得越快。因此系统的响应主要由靠近虚轴的极点决定。

3.5.2 主导极点和偶极子

用直接求解高阶系统微分方程的方法来分析系统的性能往往比较困难。目前解决的方法有两种:一是借助计算机,如用 MATLAB 软件求解;二是将高阶系统用一个二阶系统来

近似,利用二阶系统的动态响应指标来分析和设计高阶系统。过去主要常用后一种方法,此时需引入主导极点的概念。

1. 主导极点

如果高阶系统距虚轴最近的极点至多与其他极点距虚轴的距离小的 $\frac{1}{5}$,并且它附近没有零点,那么距虚轴最近的极点对系统响应将起主导作用,这种极点叫作系统的主导极点。主导极点通常是一对共轭复极点,很多高阶系统都有一对主导极点。尽管这是一种近似,但在系统研究中,避免了部分分式分解和大量的拉氏反变换,给系统分析和设计带来了方便。

例 3-15 三阶系统的闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{312\,000}{(s+60)(s^2+20s+5200)}$$

系统闭环极点 $p_{1,2} = -10 \pm j71.4$, $p_3 = -60$, 该系统单位阶跃响应的精确解为

$$c(t) = 1 - 0.143e^{-10t} \sin(71.4t + 27.03^\circ) - 0.684e^{-60t} \quad (3-90)$$

若考虑到一对共轭复极点 p_1 、 p_2 的实部和实极点 p_3 的实部之比为

$$\frac{\operatorname{Re}[p_1]}{\operatorname{Re}[p_3]} = \frac{-10}{-60} = \frac{1}{6} < \frac{1}{5}$$

根据主导极点的定义, p_1 、 p_2 可视为一对主导极点。这一点由式(3-90)不难理解, 随时间 t 的增大, 闭环极点 p_3 所对应的动态分量很快衰减到零, 而且该极点离虚轴越远, 其对应的动态分量衰减的速度越快, 对系统的影响就越小。若忽略 p_3 的影响, 则得到近似系统

$\frac{5200}{s^2+20s+5200}$, 它的单位阶跃响应为

$$c_1(t) = 1 - 1.01e^{-10t} \sin(71.4t + 82.07^\circ) \quad (3-91)$$

图 3-25 给出它们的比较, 可以看出近似程度是理想的, 尤其是波型的跟踪效果很好。

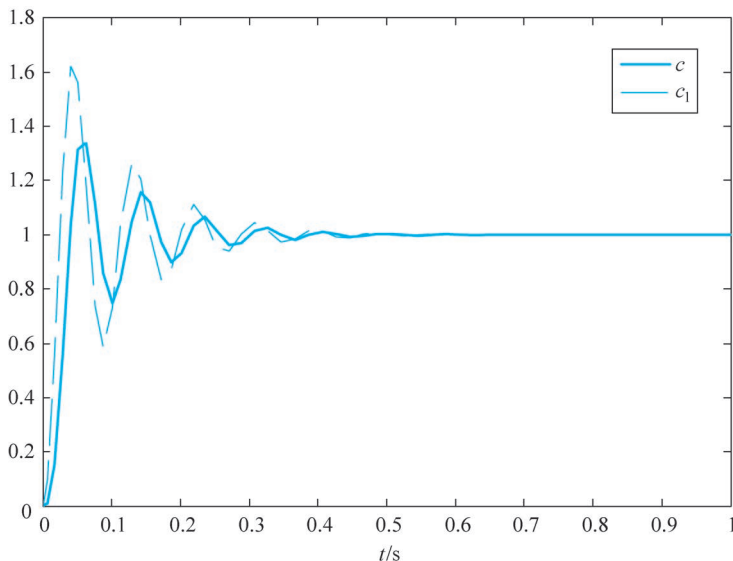


图 3-25 例 3-15 的输出和近似输出的比较

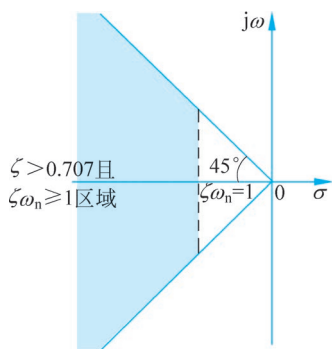


图 3-26 例 3-16 要求的主导极点的区域

例 3-16 如果希望某高阶系统满足性能指标: 阶跃响应的最大超调量 $\leq 4.3\%$, 按 2% 准则的调整时间 $t_s \leq 4\text{s}$ 。试确定主导极点在 s 平面上的区域。

解 对应于二阶系统来说, 超调量为 4.3% 时的阻尼比 $\zeta = 0.707$, 而 $\theta = \arccos \zeta = 45^\circ$, 所以 $\zeta = 0.707$, 它对应 s 平面上与负实轴夹角为 45° 的直线。按 2% 准则调整时间 $t_s \leq 4\text{s}$ 的要求, 有

$$t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \leq 4$$

$$\zeta \omega_n \geq 1$$

这样, 就决定了满足要求的极点在 s 平面上的区域为如图 3-26

所示的灰色区域。

主导极点的具体位置还必须结合对系统的其他要求, 如上升时间 t_r 等来最后确定。

在运用主导极点来设计系统时, 还有一个概念要介绍, 这就是偶极子。

2. 偶极子

如果一个极点和一个零点重合, 称为偶极子。偶极子的极点和零点互相抵消, 对系统响应没有影响。如果极点和零点之间距离小于它们与主导极点之间距离的 $1/10$, 也可当作偶极子处理。远离坐标原点的偶极子对系统动态性能的影响可以忽略。

例 3-17 某三阶系统的闭环传递函数为

$$W(s) = \frac{62.5(s + 2.5)}{(s^2 + 6s + 25)(s + 6.25)}$$

系统极点为 $-3 \pm j4$ 和 -6.25 , 零点为 -2.5 , 它们在 s 平面上的分布如图 3-27 所示。

先不考虑实极点和实零点的影响。一对复极点的 $\zeta = 0.6$, $\omega_n = 5$, 按二阶系统的动态性能指标, 超调量为 $M_p = 10\%$, 2% 误差的调整时间为 $t_s = 1.33\text{s}$ 。只考虑系统零点对动态响应的影响时, 通过计算得系统的超调量为 $M_p = 55\%$, 调整时间为 $t_s = 1.33\text{s}$ 。

如同时考虑实极点的影响, 通过计算机仿真, 超调量为 $M_p = 38\%$, 调整时间为 $t_s = 1.6\text{s}$ 。

显然, 由于实零点与复极点的实部数值相当, 所以对系统动态响应有较大的影响。虽然实极点的实部大于复极点实部的两倍, 但它对系统的影响也是不可忽略的。并且可以看到, 零点使系统的响应加速, 从而增大了超调量。附加极点则起到阻尼作用, 一方面减小了系统的超调量, 另一方面延长了调整时间。

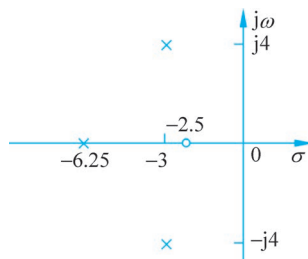


图 3-27 例 3-17 系统的零、极点分布

3.6 利用 MATLAB 分析系统性能

本节介绍应用 MATLAB 求取线性系统的动态响应, 分析系统的时域性能指标。主要介绍求取系统动态响应的 step、impulse 和 lsim 命令。

3.6.1 step 命令

step 是求取系统单位阶跃响应的命令,格式如下:

step(sys) 计算并绘制线性系统 sys 的单位阶跃响应。

step(sys,t) 功能同上,并可以指定仿真终止时间 t。t 是仿真的时间轴,可以是标量,也可以通过“t=0:步长:终止时间”设定时间矢量。

step(sys1,sys2,...,sysN)和 step(sys1,sys2,...,sysN,t) 同时绘制多个系统的单位阶跃响应。

step(sys1,PlotStyle1,...,sysN,PlotStyleN) 功能同以上命令,并可指定曲线的绘制属性,如颜色和线型等。

例 3-18 已知二阶系统的输出拉氏变换为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} R(s) \quad (3-92)$$

用 step 命令绘制 $\zeta = 0.1, 0.2, 0.4, 0.7, 1.0, 2.0$ 的单位阶跃响应曲线,横坐标取相对时间 $\omega_n t$ 。

解 要绘制多条曲线,所以选用上述第三条命令: step(sys1,sys2,...,sysN,t)。具体命令如下:

```
t=[0:0.1:12];
num=[1];
zt1=0.1; den1=[1,2*zt1,1];
zt2=0.2; den2=[1,2*zt2,1];
zt3=0.4; den3=[1,2*zt3,1];
zt4=0.7; den4=[1,2*zt4,1];
zt5=1.0; den5=[1,2*zt5,1];
zt6=2.0; den6=[1,2*zt6,1];
sys1=tf(num,den1);
sys2=tf(num,den2);
sys3=tf(num,den3);
sys4=tf(num,den4);
sys5=tf(num,den5);
sys6=tf(num,den6);
step(sys1,sys2,sys3,sys4,sys5,sys6,t)
```

执行后,屏幕显示所有 ζ 值下的响应曲线,如图 3-28 所示。

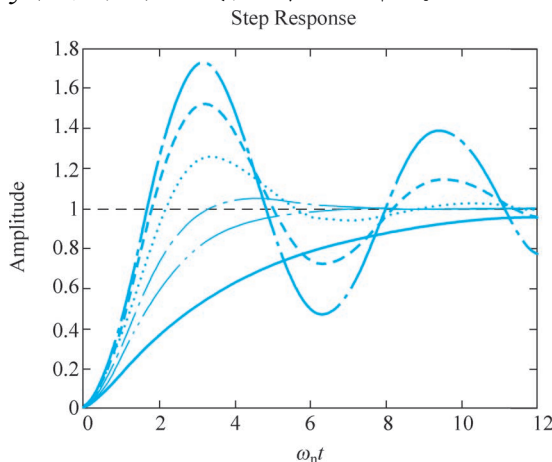


图 3-28 不同 ζ 值下,系统的单位阶跃响应

3.6.2 impulse 命令

impulse 是求取系统单位脉冲响应的命令。impulse 命令与 step 命令有相同的格式,其功能也相同,但求取的是系统单位脉冲响应。具体格式如下:

impulse(sys) 计算并绘制线性系统 sys 的单位脉冲响应。

impulse(sys,t) 功能同上,并可以指定仿真终止时间 t。t 是仿真的时间轴,可以是标量,也可以通过“t=0:步长:终止时间”设定时间矢量。

impulse(sys1,sys2,...,sysN)和 impulse(sys1,sys2,...,sysN,t) 同时绘制多个系统的单位脉冲响应。

impulse(sys1,PlotStyle1,...,sysN,PlotStyleN) 功能同以上命令,并可指定曲线的绘制属性,如颜色和线型等。

例 3-19 求上例的单位脉冲响应。

解 只要将上例中的最后一条命令改为 impulse(sys1,sys2,sys3,sys4,sys5,sys6,t)。屏幕上显示脉冲响应曲线,如图 3-29 所示。 ■

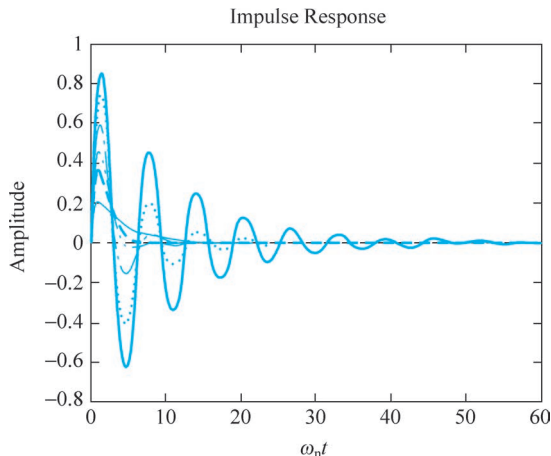


图 3-29 不同 ζ 值下,系统的单位脉冲响应

3.6.3 lsim 命令

lsim 是求取系统对任意输入响应的命令,格式如下:

lsim(sys,u,t) 计算并绘制线性系统 sys 在输入为 $u(t)$ 时的响应。时间 t 是仿真的时间轴,通过“t=0:步长:终止时间”设定时间矢量。u 中给出每个时刻的输入序列,所以它是向量。

lsim(sys1,sys2,...,sysN,u,t) 同时仿真多个系统。

lsim(sys1,PlotStyle1,sys2,PlotStyle2,...,sysN,PlotStyleN,u,t) 可以指定各系统曲线的绘制属性,如颜色、线型等。

例 3-20 计算下列二阶系统的单位斜坡响应

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

解 用以下命令可求得结果:

```
num=1;
den=[1,0.4,1];
sys=tf(num,den);
t=[0:0.1:10];
u=t;
lsim(sys,u,t)
```

屏幕上显示系统的单位斜坡响应曲线,如图 3-30 所示。

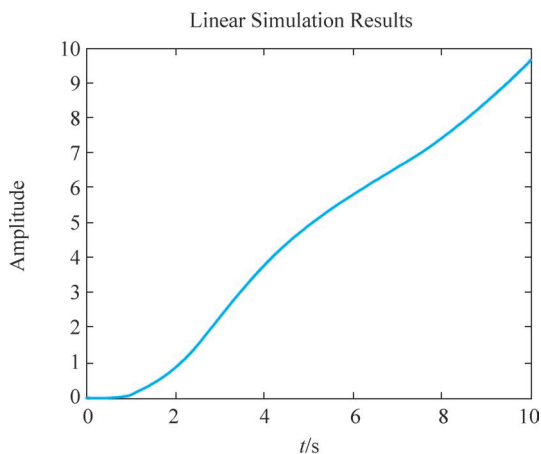


图 3-30 例 3-20 系统的单位斜坡响应曲线

还可用 `step` 命令计算斜坡响应。单位斜坡信号等于单位阶跃信号的积分,因此可以在系统的传递函数中人为地串联一个积分环节后,其单位阶跃响应就是原系统的单位斜坡响应。

原系统中串联一个积分环节后的传递函数为

$$W_1(s) = \frac{1}{s} \times \frac{1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

执行以下命令:

```
num=1;
den=[1,0.4,1,0];
sys=tf(num,den);
step(sys,10)
```

可获得相同的结果。

小结

线性定常系统的时域分析是经典控制理论的基础,它包括分析系统的稳定性、稳态特性和动态特性。

分析系统特性从理论上讲可以通过用求解系统微分方程的方法进行。但要求解析解不只是计算复杂,而且对高阶系统来说常常是不可行的。因此在控制理论中总是设法寻求其他方法来解决系统的分析问题。

闭环系统稳定性是系统动态特性中最重要的性质。工程系统能正常工作的前提必须是稳定的。在时域中研究系统稳定性的主要手段是劳斯稳定性判据。但劳斯判据在分析系统稳定性中的应用是有局限性的,它不能给出如何使不稳定的系统稳定的方法。

系统稳态特性是系统的控制精度问题,对于稳定系统,它用系统的稳态误差系数表征,包括位置误差系数 K_p 、速度误差系数 K_v 、加速度误差系数 K_a 。它们分别反映了系统在单位阶跃输入、单位速度输入和单位加速度输入时,系统稳态误差的大小。稳态误差系数由系统的结构和参数决定。在结构上,是开环系统中所含有积分器的数量,或在 s 平面上 $s=0$ 的极点数。在参数上,是系统的开环增益 K 。系统是否存在稳态误差决定于系统的结构及输入信号的类型,稳态误差的大小则决定于系统的参数及输入信号的大小。

系统的动态特性是由系统动态响应特性决定的,为了定量描述系统的动态特性,用表征系统动态响应的一些参数作为系统的动态性能指标,主要有超调量 M_p 、调整时间 t_s 、上升时间 t_r 和延迟时间 t_d 。超调量 M_p 和调整时间 t_s 反映系统的相对稳定性;上升时间 t_r 和延迟时间 t_d 则反映了系统响应的快速性。快速性和相对稳定性都是系统所要求的,但二者往往存在矛盾,需要在设计中合理选优,折中处理。

实际系统大多是高阶系统,许多高阶系统的动态特性都可以用主导极点近似。因此,二阶系统的动态响应指标对高阶系统仍然有实际意义。二阶系统的主要参数是阻尼比 ζ 和无阻尼振荡角频率 ω_n ,它们决定了两个极点在 s 平面上的位置,也决定了二阶系统动态响应指标。

MATLAB 软件提供了许多计算系统动态响应的命令,它为高阶系统的仿真提供了便利条件,可以在实际工作中灵活运用。

数学家——爱德华·约翰·劳斯

爱德华·约翰·劳斯(Edward John Routh, 1831年1月20日—1907年6月7日),英国数学家,英国皇家学会会员,亚当斯奖获得者。生于加拿大魁北克市,父亲是曾在滑铁卢服役的英国军官 Randolph Isham Routh 爵士,母亲是 Taschereau 的妹妹 Marie Louise。



劳斯 11 岁时到英国学习数学,先是在伦敦师从奥古斯都·德·摩根,然后在剑桥师从托德亨特和霍普金斯。1854 年,他在剑桥大学的期末考试中获得第一名,并因此获得“Senior Wrangler”称号(注:麦克斯韦尔(Maxwell)名列第二)。毕业后,劳斯在剑桥大学彼得豪斯学院担任数学私人教练。1855—1888 年,他指导了 600 多名学生,其中 28 人成为“Senior Wrangler”,这是一项无与伦比的荣誉。在 19 世纪中叶剑桥大学鼎盛时期,劳斯作为数学 Tripos

考试的杰出教练而闻名。

在教学之余,劳斯还抽时间写书,以及进行原创性研究。1855 年,他与 Henry Brougham 合作出版了《分析观点:艾萨克·牛顿原理》。1860 年出版了教科书《刚体系统动

力学》，该书拥有广泛受众，使他的稳定性研究走向了世界；在德国，它引起了数学家费利克斯·克莱因和理论物理学家阿诺德·索末菲的注意，当时他们正在准备一篇关于陀螺和陀螺仪的大型论文。这本书对威廉·汤姆森和彼得·格思里·泰特的《自然哲学论》（1867年出版）也产生了很大影响。劳斯的最大贡献是关于运动稳定性方面的研究，剑桥大学也因此授予他亚当斯奖。1876年劳斯提出了著名的劳斯稳定判据，用以确定线性定常系统特征多项式的所有根是否都有负实部，为控制系统理论的发展作出了巨大贡献。

知识点自测

本节通过判断题、单选题和多选题来检测读者对本章知识点的掌握程度，为了便于自我检测，本章末尾给出了解答。

判断题(判断下列说法是否正确)

- 3-1 自动控制系统能正常工作的首要条件是系统必须是稳定的。
- 3-2 在初始条件为零时，如果线性系统的单位脉冲响应是发散的，则系统不稳定。
- 3-3 稳定的系统是指对于任意输入，其输出都是有界的。
- 3-4 线性定常系统稳定的充分必要条件是系统特征方程式的所有根都小于零。
- 3-5 线性系统的稳定性取决于系统内部的固有特性。
- 3-6 线性定常系统的阶跃响应在稳态时持续等幅震荡，说明系统在 s 右半开平面没有闭环极点。
- 3-7 线性定常系统稳定的充分必要条件是劳斯表中的首列元素不改变符号。
- 3-8 劳斯稳定性判据能够有效地分析任何系统的稳定性。
- 3-9 劳斯稳定性判据是一种根据系统特征方程的系数来判别闭环系统稳定性的代数判据。
- 3-10 劳斯表最后两行中，每行只有一个元素。
- 3-11 如果线性定常系统的单位脉冲响应呈现等幅持续振荡，则其劳斯表中必出现全零行。
- 3-12 如果一个系统的所有闭环极点都在 $s = -\sigma_1$ 的左边，则该系统具有稳定裕量 σ_1 。
- 3-13 线性定常系统的稳态误差仅与系统的结构参数有关，与参考输入无关。
- 3-14 只有对于稳定的系统，稳态误差才有意义。
- 3-15 临界稳定的二阶线性系统的阶跃响应稳态误差可以通过稳态误差系数来计算。
- 3-16 对于稳定的线性定常系统，其有限稳态误差与其开环增益 K 有关； K 越大，稳态误差就越小。
- 3-17 线性定常系统的开环增益越大，稳定性越好，稳态性能也越好。
- 3-18 为了减小输入信号引起的稳态误差，可以提高开环传递函数的积分环节个数和增益。
- 3-19 一阶线性定常系统的时间常数越大，闭环极点离虚轴的距离越近，瞬态响应的速度越慢。
- 3-20 对于典型二阶系统来说，其在单位阶跃信号作用下的最大超调量仅是阻尼比的函数。

- 3-21 线性定常二阶系统的复极点实部距离虚轴越近,系统的过渡过程调整时间越长。
- 3-22 在典型二阶系统中,欠阻尼是指系统的阻尼比小于零。
- 3-23 稳定的高阶系统的动态响应是一些衰减的指数函数和正弦函数的线性组合。
- 3-24 如果高阶系统存在一对主导极点,则可用二阶系统来近似。
- 3-25 如果系统极点和零点之间的距离小于它们与主导极点之间距离的 $1/10$,则称为偶极子。

单项选择题(每小题列出的选项中只有一个选项是符合题目要求的)

- 3-26 理想单位脉冲信号 $\delta(t)$ 的积分等于()。
- A. 0 B. 1 C. 2 D. $+\infty$
- 3-27 控制系统的稳定性分为绝对稳定性和相对稳定性。其中,“相对稳定性”是指系统()。
- A. 稳定的程度 B. 稳定的条件 C. 是否稳定 D. 临界稳定
- 3-28 处于平衡状态的系统,在受到扰动作用后会偏离原来的平衡状态。若扰动消失后,经过一段时间,系统又恢复到原平衡状态,则该系统()。
- A. 稳定 B. 临界稳定
- C. 不稳定 D. 稳定或临界稳定
- 3-29 某线性定常系统的特征方程的全部系数同号,且无一系数为零,则该系统()。
- A. 稳定 B. 临界稳定
- C. 不稳定 D. 可能稳定也可能不稳定
- 3-30 若系统特征方程的阶次为 n ,则其劳斯表的行数等于()。
- A. $n-1$ B. n C. $n+1$ D. $n+2$
- 3-31 反映系统控制精度的时域指标是()。
- A. 稳态误差 B. 稳定性 C. 动态特性 D. 快速性
- 3-32 假设某线性定常系统是稳定的,其稳态位置误差系数、速度误差系数和加速度误差系数分别为 K_p 、 K_v 和 K_a ,则当输入信号 $r(t)=Rt$ 时,系统的稳态误差为()。
- A. $R/(1+K_p)$ B. R/K_a
- C. R/K_v D. $R/(1+K_v)$
- 3-33 信号 $r(t)=Rt^2/2$ 的拉氏变换 $R(s)$ 为()。
- A. R/s^3 B. $2R/s^3$ C. $R/2s^3$ D. $1/s^3$
- 3-34 若某线性定常系统在速度信号作用下的稳态误差为非零常数,则该系统的类型为()。
- A. 0 型 B. 1 型 C. 2 型 D. 3 型
- 3-35 已知某单位负反馈系统在单位阶跃输入信号作用下的稳态误差为零,且系统闭环特征方程为 $s^3+2s^2+3s+2=0$,则系统的开环传递函数不可能为()。
- A. $G(s)=\frac{2}{s(s^2+2s+3)}$ B. $G(s)=\frac{3s+2}{s^2(s+2)}$
- C. $G(s)=\frac{1}{s^3+2s^2+3s+1}$ D. $G(s)=\frac{2s^2+3s+2}{s^3}$
- 3-36 下列哪种措施对改善系统的控制精度没有效果:()。

- A. 增加积分环节
B. 提高系统的开环增益
C. 增加微分环节
D. 引入扰动补偿

3-37 已知某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = 1/Ts$, 若取误差限 $\Delta = 5\%$, 则调整时间 t_s 为()。

- A. T B. $2T$ C. $3T$ D. $4T$

3-38 某单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = K/s(Ts + 1)$, 若 T 增大, 则系统的()。

- A. 调整时间增大 B. 阻尼比增大
C. 快速性改善 D. 超调量减小

3-39 在二次振荡环节中, 当阻尼比 $\zeta = 1$ 时, 其阶跃响应 $c(t)$ 为()。

- A. 等幅振荡 B. 衰减振荡 C. 阻尼振荡 D. 单调上升

3-40 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = 16/s(s + 5)$, 则系统的输出响应曲线为()。

- A. 发散振荡 B. 衰减振荡 C. 等幅振荡 D. 单调上升

3-41 下列各个因素中对系统动态性能的影响可以忽略不计的是()。

- A. 主导极点 B. 靠近虚轴的零点
C. 靠近虚轴的极点 D. 远离坐标原点的偶极子

多项选择题(每小题列出的选项中有两个或两个以上选项是符合题目要求的)

3-42 下述关于选择典型测试信号的说法中, 正确的有()。

- A. 选取输入信号的典型形式应大致反映系统的实际工作情况
B. 要从系统工作最有利情况出发来选取典型测试信号
C. 选取的典型测试信号要尽可能简单
D. 典型测试信号的选取需要考虑经济条件的限制

3-43 线性定常系统稳定的充分必要条件是: ()。

- A. 系统的所有特征根都位于闭左半复平面内
B. 系统的所有特征根都小于零
C. 系统的所有特征根都具有负实部
D. 系统特征根中的所有实根小于零, 所有复根具有负实部
E. 系统的所有特征根都位于左半复平面实轴上

3-44 下列关于劳斯稳定判据的说法中正确的是()。

- A. 系统稳定的必要条件是系统特征方程的所有系数同号且不为零
B. 系统稳定的充分必要条件是劳斯表首列元素不为零, 且不改变符号
C. 劳斯判据以开环传递函数判定闭环系统的稳定性
D. 劳斯表某一行中各数都乘以一个整数, 不影响系统稳定性的判断
E. 劳斯表首列元素符号变化的次数等于系统特征方程所具有的负实部根的数目

3-45 已知某 I 型系统在输入信号 $r(t)$ 的作用下产生的稳态误差为非零常数, 则该输入信号可能为()。

- A. $r(t) = 1$ B. $r(t) = 2t$

- C. $r(t) = 0.5t^2$ D. $r(t) = 1 + 2t$
 E. $r(t) = 1 + 2t + 0.5t^2$
- 3-46 对于Ⅱ型系统,下列说法正确的是()。
- A. 能无静差地跟随阶跃信号 B. 能无静差地跟随斜坡信号
 C. 能无静差地跟随加速度信号 D. 能有静差地跟随速度信号
 E. 能无静差地跟随抛物线信号
- 3-47 在自动控制系统中,能反映系统快速性的量包括()。
- A. 峰值时间 t_p B. 延迟时间 t_d
 C. 上升时间 t_r D. 调整时间 t_s
 E. 最大超调量 M_p
- 3-48 对于典型的欠阻尼二阶系统,若无阻尼自然振荡频率 ω_n 不变,阻尼比 ζ 减小,则下列说法中正确的有()。
- A. 调整时间 t_s 增大 B. 最大超调量 M_p 减小
 C. 峰值时间 t_p 减小 D. 系统的稳定性改善
 E. 系统的快速性提高

自测参考答案

判断题: (1) T; (2) T; (3) F; (4) F; (5) T; (6) T; (7) F; (8) F; (9) T; (10) T;
 (11) T; (12) T; (13) F; (14) T; (15) F; (16) T; (17) F; (18) T; (19) T; (20) T;
 (21) T; (22) F; (23) T; (24) T; (25) T

单项选择题: (26) B; (27) A; (28) A; (29) D; (30) C; (31) A; (32) C; (33) A;
 (34) B; (35) C; (36) C; (37) C; (38) A; (39) D; (40) B; (41) D

多项选择题: (42) AC; (43) CD; (44) AB; (45) BD; (46) AB; (47) ABCD;
 (48) AC

习题

A 基本题

A3-1 如图 A3-1 系统,用劳斯判据判别系统的稳定性。若不稳定,确定有几个根在右半 s 平面。

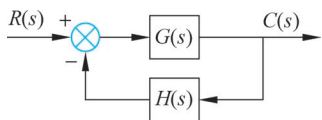


图 A3-1 题 A3-1 的系统方框图

$$(1) G(s) = \frac{10}{s(s-1)(2s+3)}, H(s) = 1$$

$$(2) G(s) = \frac{1}{(s-1)}, H(s) = \frac{s-1}{s+1}$$

$$(3) G(s) = \frac{12}{s(s+1)}, H(s) = \frac{1}{s+3}$$

A3-2 确定使下列系统稳定的 K 值范围。

$$(1) s^4 + 22s^3 + 10s^2 + 2s + K = 0 \quad (2) 0.1s^3 + s^2 + s + K = 0$$

A3-3 试确定下列单位负反馈系统的位置误差系数 K_p , 速度误差系数 K_v 和加速度误差系数 K_a ($G(s)$ 是前向通道传递函数)。

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

A3-4 试画出满足下列要求的共轭复极点在 s 平面上的分布范围。

$$(1) \zeta \geq 0.707, \omega_n \leq 2\text{rad/s}$$

$$(2) 0 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2\text{rad/s}$$

$$(3) 0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \leq 2\text{rad/s}$$

A3-5 用劳斯判据判定题 D2-1 系统的稳定性,并判断在右半 s 平面上的根数。将结果与题 D2-1 的结果进行比较。

A3-6 某闭环系统如图 A3-2 所示。

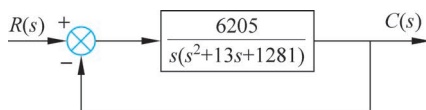


图 A3-2 题 A3-6 闭环系统

(1) 求系统的传递函数 $C(s)/R(s)$;

(2) 计算系统的稳态误差系数;

(3) 求闭环系统的零、极点;

(4) 用 MATLAB 求系统的单位阶跃响应曲线;

(5) 讨论闭环极点对系统动态响应的影响,哪些极点起主导作用,哪些极点有重要影响。

A3-7 某反馈系统如图 A3-3 所示。

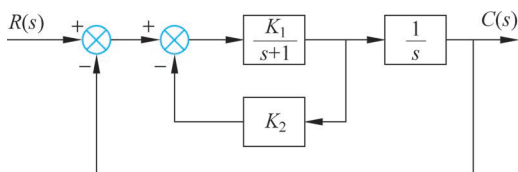


图 A3-3 题 A3-7 系统图

(1) 选择 K_1, K_2 , 使系统的 $\zeta = 0.707, \omega_n = 2\text{rad/s}$;

(2) 选择 K_1, K_2 , 使系统有两个相等的实根 $s = -10$;

(3) 分别求(1)、(2)两种情况下,系统的超调量 M_p , 以及情况(1)下的调整时间 t_s 和上升时间 t_r 。

A3-8 某单位反馈系统的闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k_1(s + \omega_1)}{s^3 + \omega_2 s^2 + k_1 s + k_1 \omega_1}$$

试求输入为 $r(t) = t^2 u(t)$ 时,系统的稳态输出函数表达式。

A3-9 求满足下列各项指标的共轭复极点在 s 平面上配置的区域:

$$\zeta = 0.5, \omega_n \leq 3\text{rad/s}, t_r \leq 1\text{s}$$

A3-10 某系统有一对共轭主导复极点。根据下列指标要求,分别画出主导复极点在 s 平面上的分布区域。

$$(1) 0.5 \leq \zeta \leq 0.707, \omega_n \geq 10\text{rad/s} \quad (2) \zeta \leq 0.707, 5\text{rad/s} \leq \omega_n \leq 10\text{rad/s}$$

$$(3) 0.8 \geq \zeta \geq 0.707, \omega_n \geq 10\text{rad/s} \quad (4) \zeta \geq 0.6, \omega_n \leq 6\text{rad/s}$$

$$(5) \zeta \geq 0.9, \omega_n \leq 0.1\text{rad/s}$$

并计算满足各指标时,系统的超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s 。

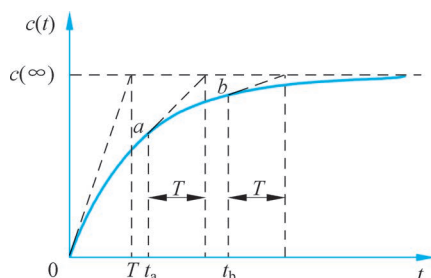


图 B3-1 一阶系统动态响应曲线

B 深入题

B3-1 试证明在一阶系统动态响应曲线上任意点起,以该点的上升速度上升,达到 $c(\infty)$ 所需的时间都是 T 。如图 B3-1 所示,自原点 0 , a 点, b 点起,保持各点的上升速度 $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=0}$, $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_a}$, $\left. \frac{dc(t)}{dt} \right|_{t=t_b}$, 上升到 $c(\infty)$ 所需的时间都是 T 。

B3-2 某系统的传递函数未知,对系统施加输入信号 $r(t)=t(t \geq 0)$,当系统的初始条件为零时,系统的输出响应为 $c(t)=1+\sin t+2e^{-2t}$, $t \geq 0$ 。试确定系统的传递函数。

B3-3 试证明图 B3-2 系统,由扰动 $N(s)$ 引起的系统稳态误差为

$$e_{\text{ssn}} = \lim_{s \rightarrow 0} s E_N(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s N(s) \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

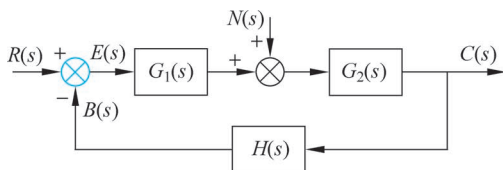


图 B3-2 题 B3-3 系统方框图

B3-4 某系统的方框图如图 B3-3 所示。

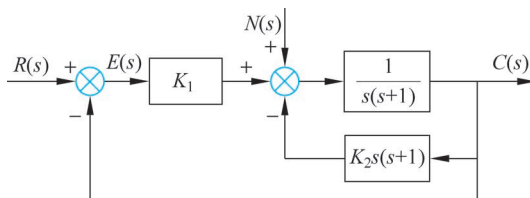


图 B3-3 题 B3-4 系统方框图

试求:

- (1) 系统的稳态误差系数 K_p 、 K_v 、 K_a ;
- (2) 由单位阶跃扰动引起的稳态误差 e_{ssn} ;
- (3) 系统的阻尼比 ζ 与无阻尼振荡角频率 ω_n ;
- (4) 选择 K_1 和 K_2 ,使系统单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$;在斜坡输入下,稳态误差最小;尽量减小阶跃扰动引起的稳态误差。

B3-5 太空望远镜指向控制系统的简化框图如图 B3-4 所示。

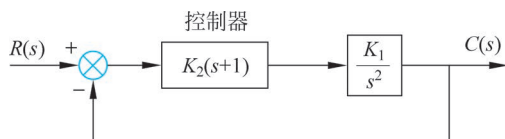


图 B3-4 太空望远镜指向控制系统的简化框图

- (1) 选择 K_1 和 K_2 , 使系统单位阶跃响应的超调量 $M_p \leq 5\%$ (用 MATLAB 解);
- (2) 计算系统单位阶跃响应和单位速度响应的稳态误差。

B3-6 考虑图 B3-5 描述的系统, 其中参数 K 和 F 都是正数。如果要求系统的阻尼比是二阶工程最佳参数, 试求它们的取值范围。

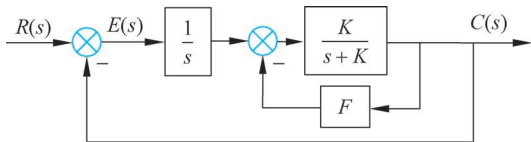


图 B3-5 题 B3-6 系统

C 实际题

C3-1 图 C3-1 为位置随动系统, 图中, M 是电动机, R_a, L_a 是电枢电路的电阻和电感, J_m 是电动机轴上的总转动惯量, B_m 是阻尼系数, 设电动机的力矩系数是 K_t , 反电势常数是 K_b 。 G 是测速发电机, 其电动势 $e_g = K_g \omega$, 电位器 W 的传输系数为 K_s , N_1 与 N_2 为减速齿轮的齿数。当 $u_3 \geq 0$ 时 $u_a \geq 0$ 。当 $i_a > 0$ 时, 测速发电机的极性和电位器 W_c 电刷移动方向如图所示。 R_i 是电流反馈电阻, 电流反馈的作用是稳定电动机的转速。试求:

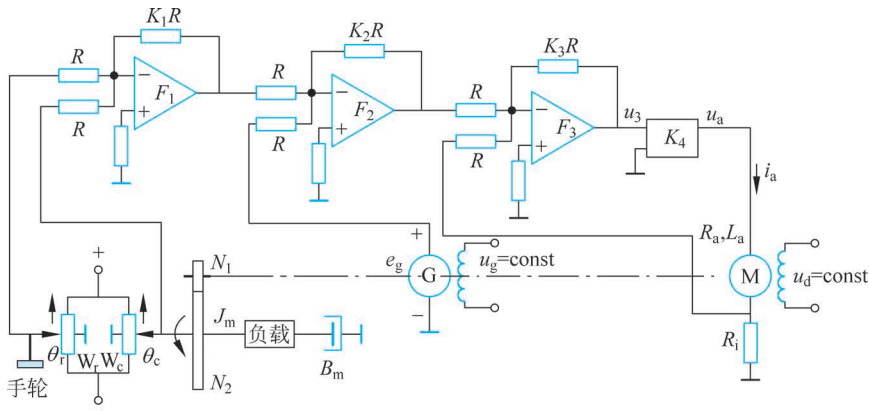


图 C3-1 位置随动系统

- (1) 系统的传递函数, 并画出系统的方框图。
 - (2) 你认为系统的连线是否正确? 如果连线错误, 请改正。
 - (3) 通常 $J_m/B_m \gg L_a/R_a$, 指出当断开和接通测速发电机的反馈连线时, 系统起主导作用的极点。从中说明测速发电机的作用。
 - (4) 计算系统的稳态误差系数 K_p, K_v, K_a , 系统是什么类型的系统, 为什么?
- C3-2 电枢控制直流电动机可以看成是速度控制系统, 反电势是系统的反馈信号。

(1) 按照第 2 章给出的电枢控制电动机的方程式 (2-76) ~ 式 (2-79), 画出系统的方框图;

(2) 假定 R_a, L_a, J, b, K_t 和 K_e 皆等于 1, 当以阶跃指令改变电枢电压 u_a 来改变电机的转速后, 计算系统的稳态误差;

(3) 为使系统阶跃响应的超调量 $M_p \leq 10\%$, 系统的反馈增益 K_e 应当多大?

C3-3 图 C3-2 中的三个 RC 网络分别是相位超前校正网络(a)、相位滞后校正网络(b)

和相位超前-滞后校正网络(c),它们在控制系统的设计中是十分有用的。

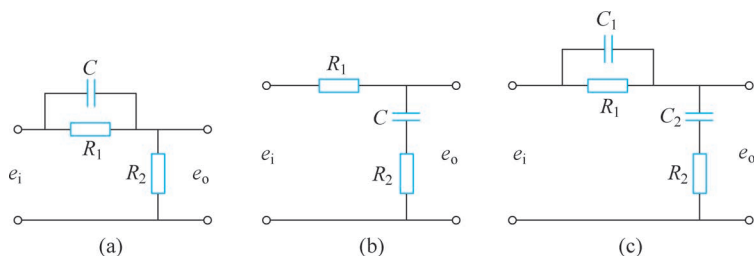


图 C3-2 三种校正 RC 网络

(1) 分别推导它们的传递函数;

(2) 假定 $R_1=R_2=1\text{k}\Omega$, $C=C_1=C_2=1\mu\text{F}$, 分别画出它们的零、极点在 s 平面上的位置;

(3) 分别求输入 $E_i(s)=\frac{1}{s}$ 时, 网络的输出响应 $e_o(t)$ 曲线。

D MATLAB 题

D3-1 设系统的传递函数为

$$(1) G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(s+2)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

$$(3) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

$$(4) G(s) = \frac{6}{s(s+1)(s+2)}$$

试分别求:

(1) 确定系统在单位阶跃输入下的稳态误差;

(2) 如果将共轭极点视为主导极点, 计算系统的超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s ;

(3) 用 MATLAB 求取系统的单位阶跃响应曲线, 与以上计算结果进行比较。并讨论产生差异的原因。

D3-2 某控制系统如图 D3-1 所示。控制器是 PI 调节器, 它的零点可改变系统的稳态和动态特性, 零点可通过调节器的参数来改变。

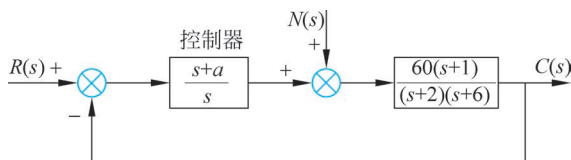


图 D3-1 含 PI 调节器的控制系统

(1) PI 调节器对系统稳态误差的影响: 计算 $a=0$ 和 $a>0$ 时, 系统单位阶跃响应的稳态误差;

(2) 计算 $a=0$, $a=10$ 和 $a=100$ 时, 系统的单位阶跃响应曲线, 分析 a 对动态响应的影响;

(3) 计算 $a=0$, $a=10$ 和 $a=100$ 时, 系统对单位阶跃扰动 ($N(s)=1/s$) 的响应曲线, 分析 a 对系统抗干扰性能的影响。

(4) 你能解释上述计算结果的物理意义吗?

D3-3 已知闭环系统的传递函数

$$G(s) = \frac{6}{s^2 + 5s + 6}$$

- (1) 用解析法计算系统的单位阶跃响应;
- (2) 用 step 命令求系统的单位阶跃响应曲线;
- (3) 比较(1)、(2)的计算结果(超调量 M_p 和按 2% 准则的调整时间 t_s)。

D3-4 用 MATLAB 的 lsim 命令,求以下单位反馈系统对单位速度输入 $(R(s) = \frac{1}{s^2})$ 的响应,并求系统的稳态误差($G(s)$ 是前向通道传递函数)。

$$(1) G(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2}$$

$$(2) G(s) = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(3) G(s) = \frac{2}{s^2(s^2 + 2s + 2)}$$

D3-5 用 MATLAB 的 lsim 命令,求输入为 $u(t) + tu(t) + \frac{1}{2}t^2u(t)$ 时,题 D3-4 系统的响应曲线,并求系统的稳态误差。