第1章

实数与函数

函数理论是数学分析的基础. 如果类比初等数学的加减乘除四则运算法则，高等数学的运算实际上就是三则运算，即微分(导数)、积分和完备(正交)基的变换(见第3分册《高等代数》). 数学分析的微积分关于函数的研究都是定义在实数集上的，因此，我们将先讨论实数的有关概念.

1.1 实数

简单地说，实数可以分为有理数和无理数两类，或正实数、负实数和零三类. 有理数可以分成整数和分数，而整数可以分为正整数、负整数和零. 分数可以分为正分数和负分数. 无理数可以分为正无理数和负无理数.

1.1.1 实数及其性质

在代数学中，我们通常用 $\mathbf{R}$ 表示实数集，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集，$\mathbf{C}$ 表示复数集，$\mathbf{N}$ 表示自然数集，$\mathbf{Z}$ 表示整数集，其中 $\mathbf{R}^+$ 表示正实数集，$\mathbf{R}^-$ 表示负实数集，$\mathbf{N}^+$ 表示正自然数集. 在高等数学中，实数集合通常用字母 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}^n$ 表示，而 $\mathbf{R}^n$ 表示 n 维实数空间. 每一个有理数既可以用分数 $\dfrac{p}{q}$ ($q\neq 0$，p、q 为整数)来表示，也可以用无限十进循环小数或有限十进小数(可看成是从某位开始全为零的无限循环小数)来表示，而不能表示成分数 $\dfrac{p}{q}$ 的实数称为无理数.

实数主要有以下性质：

(1) 封闭性：任意两个实数在经过加、减、乘、除(除数不为0)运算后，所得的和、差、积、商仍然是实数.

(2) 有序性：任意两个实数 a、b 必定满足下列三个关系之一：$a>b$、$a<b$、$a=b$.

(3) 稠密性：任意两个不相等的实数之间必会存在一个实数，并且既有有理数，也有无理数.

(4) 阿基米德(Archimedes)性：对任何两个实数 a、b，如果 $a>b>0$，则存在正整数 n，使得 $nb>a$.

(5) 传递性：对任意三个实数 a、b、c，若 $a<b$、$b<c$，则 $a<c$.

为方便起见，我们通常用 $\mathbf{R}$ 来表示实数，即 $\mathbf{R}=\{x\,|\,x \text{ 为实数}\}$.

数轴是表示实数的一种几何方法,任一实数都与数轴上唯一一点对应,同样地,数轴上的每一点也唯一地对应着一个实数.正是由于所有实数与整个数轴上的点有着这样的一一对应关系,实数是不可数的.

1.1.2 绝对值

从数轴上看,实数 a 的绝对值$|a|$就是点 a 到原点的距离.数学中对实数 a 的绝对值是这样定义的:

$$|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0\\ -a, & a<0\end{cases}.$$

绝对值有以下性质:

1. $|a|=|-a|\geqslant 0$,当且仅当 $a=0$ 时等号成立;
2. 对任何实数 a,总有$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$;
3. 对于两个实数 a 和 b,$|ab|=|a||b|$,$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\ (b\neq 0)$;
4. 当$|a|<h$,相当于$-h<a<h$;当$|a|\leqslant h$,相当于$\Leftrightarrow -h\leqslant a\leqslant h$;
5. 对于任何实数 a、b,有$|a|-|b|\leqslant|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$,我们称该不等式为三角形不等式.

下面只给出性质 5 的证明,其他性质的证明由读者自行完成.

证 由性质 2 可知

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,\quad -|b|\leqslant b\leqslant|b|.$$

由同向不等式的相加法则得到

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant|a|+|b|.$$

再由性质 4,上式等价于

$$|a+b|\leqslant|a|+|b|. \tag{1-1}$$

若将式(1-1)中 b 改为$-b$,不等式仍然成立,即证明了右边的不等式.

又因为$|a|=|a-b+b|$,根据式(1-1)有

$$|a|\leqslant|a-b|+|b|.$$

所以

$$|a|-|b|\leqslant|a-b|. \tag{1-2}$$

将式(1-2)中 b 改为$-b$,即证明了左边的不等式.

除了三角形不等式,我们经常还会用到以下两个不等式.

1.1.3 两个重要的不等式

1. 平均值不等式 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 n 个正实数,则

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n),$$

其中$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$和$\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$分别称为 n 个正实数的几何平均数与算术平均数.

2. 伯努利不等式　设 $h>-1$，n 为自然数，则有

$$(1+h)^n \geqslant 1+nh,$$

此不等式可用中学数学中的数学归纳法加以证明.

1.2　数集及其确界

本节介绍实数集 $\mathbf{R}$ 上的两类重要的数集——区间与邻域，特别是邻域的概念，其包含了“极限”的数学思维特点. 然后讨论有界集，并给出“确界定理”，该定理是极限的理论基础.

1.2.1　区间

设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，我们规定：

(1) 满足 $\{x|a<x<b, x\in\mathbf{R}\}$ 的数集为开区间，记作 (a,b)；

(2) 满足 $\{x|a\leqslant x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$ 的数集为闭区间，记作 $[a,b]$；

(3) 满足 $\{x|a\leqslant x<b, x\in\mathbf{R}\}$ 的数集为左闭右开区间，记作 $[a,b)$；

(4) 满足 $\{x|a<x\leqslant b, x\in\mathbf{R}\}$ 的数集为左开右闭区间，记作 $(a,b]$；

其中 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 统称半开半闭区间.

另外，我们用区间 $(-\infty,+\infty)$ 表示实数集 $\mathbf{R}$，其中“∞”读作“无穷大”. 这样一来，我们就可以用“$+\infty$”和“$-\infty$”表示以下的一些数集. 如

$$\{x \mid x\geqslant a\}=[a,+\infty),$$
$$\{x \mid x\leqslant a\}=(-\infty,a],$$
$$\{x \mid x>a\}=(a,+\infty),$$
$$\{x \mid x<a\}=(-\infty,a).$$

注意：“∞”所在端点均为开区间.

1.2.2　邻域

“邻域”是微积分学最重要的概念之一，也是刻画函数极限最基础的概念，在微分和积分经常用到.

定义 1-1（邻域的定义）　若 $a\in\mathbf{R}$，$\delta>0$，我们把满足 $|x-a|<\delta$ 的所有实数称为点 a 的 δ 邻域，记作

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta).$$

当不需要注明邻域半径 δ 时，通常是对某个确定的邻域半径 δ，常将它表示为 $U(a)$，简称 a 的邻域. 其实，邻域半径的 δ 是一个变量，这个变量的特征就是可以“任意的无限小”，这是“邻域”概念最基本的特征.

当数集中不包含点 a 时，我们将满足 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数称为点 a 的 δ 去心邻域，记作

$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)-\{a\}.$$

同样地，当不需要注明邻域半径 δ 时，常将它写作 $U^{\circ}(a)$，简称 a 的去心邻域.

另外，还有下面几种邻域的概念及符号表示，供大家参考：

(1) 点 a 的 δ 右邻域 $U_+(a,\delta)=\{x\mid 0\leqslant x-a<\delta\}=[a,a+\delta)$，简记为 $U_+(a)$；

(2) 点 a 的 δ 左邻域 $U_-(a,\delta)=\{x\mid -\delta<x-a\leqslant 0\}=(a-\delta,a]$，简记为 $U_-(a)$；

(3) 点 a 的 δ 去心右邻域 $U^\circ_+(a,\delta)=(a,a+\delta)$，简记为 $U^\circ_+(a)$；

(4) 点 a 的 δ 去心左邻域 $U^\circ_-(a,\delta)=(a-\delta,a)$，简记为 $U^\circ_-(a)$.

当 M 为充分大的正数时，数集

$$U(\infty)=\{x\mid x>M\},\quad U(+\infty)=\{x\mid x>M\},\quad U(-\infty)=\{x\mid x<-M\},$$

分别称为 ∞ 邻域、$+\infty$ 邻域、$-\infty$ 邻域.

1.2.3 有界集及其确界

首先介绍几个量词符号的含义，这是数学家们约定俗成的，读者要熟记，这样继续学习才方便.

符号“$\forall$”表示“任意”或“任意一个”或“当……”，它被认为是将英文字母 A 倒过来；

符号“$\exists$”表示“存在”或“能找到”，它被认为是将英文字母 E 反过来.

应用这两个符号表述定义和定理既简练又明确.

定义 1-2 设 E 是一个非空数集，若 $M\in\mathbf{R}$，使得对 $\forall x\in E$，有 $x\leqslant M$，则称 M 为 E 的一个**上界**；若 $L\in\mathbf{R}$，使得对 $\forall x\in E$，有 $x\geqslant L$，则称 L 为 E 的一个**下界**.

显然，任何大(小)于 $M(L)$ 的数，也都是 E 的上(下)界. 当数集 E 既有上界又有下界时，称 E 为**有界集**. 如果 E 为有界集，则可以表述为：$\exists X>0$，使得对 $\forall x\in E$ 有 $|x|\leqslant X$；反之，若 E 不是有界集，则称它为无界集.

例 1 证明 $[0,1]$ 有界；$\mathbf{R}^+$ 无上界.

证 因为对任意的 $x\in[0,1]$，有 $0\leqslant x\leqslant 1$，故 $[0,1]$ 是有界的.

而对任意 $M>0$，存在 $M+1\in\mathbf{R}^+$，$M+1>M$，故任意 $M>0$ 都不是 $\mathbf{R}$ 的上界，所以 $\mathbf{R}^+$ 无上界.

由定义 1-2 不难看出，若一个数集有上界，则它必定有无穷多个上界，而在这无穷多个上界中，最受人们关注的是这些上界中最小的上界，我们称之为数集的**上确界**. 类似地，我们把有下界的数集的最大下界，称为该数集的**下确界**.

下面给出它们的精确定义：

定义 1-3 设 E 是非空数集，若 $\exists\alpha\in\mathbf{R}$，且满足：

(1) $\forall x\in E$，有 $x\leqslant\alpha$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有 $\alpha-\varepsilon<x_0$；

则称 α 是数集 E 的上确界，记作

$$\alpha=\sup E.$$

不难看出：(1)表明 α 是数集 E 的上界；(2)表明任何小于 α 的数 $\alpha-\varepsilon$ 都不是数集 E 的上界，即数集 E 的上确界 α 是数集 E 的最小的上界.

这里“sup”是 supremum 的缩写，我们用来表示“上确界”.

类似地有：

定义 1-4 设 E 是非空数集，若 $\exists\beta\in\mathbf{R}$，且满足：

(1) $\forall x\in E$，有 $x\geqslant\beta$；

(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in E$，有 $x_0<\beta+\varepsilon$；

则称 β 是数集 E 的下确界，记作

$$\beta=\inf E.$$

同样地：(1)表明 β 是数集 E 的下界；(2)表明任何大于 β 的数 $\beta+\varepsilon$ 都不是 E 的下界，即数集 E 的下确界 β 是数集 E 的最大的下界.

这里“inf”是 infimum 的缩写，我们用来表示“下确界”.

例 2　证明 $\sup\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{N}^+\right\}=1$；$\inf\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{N}^+\right\}=\frac{1}{2}$.

证　事实上，$\forall n\in\mathbf{N}^+$，有 $\frac{n}{n+1}<1$；对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0=1$，有 $1-\varepsilon<\frac{n_0}{1+n_0}$，我们只需取 $n_0>\frac{1}{\varepsilon}-1$，即

$$\sup\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{N}^+\right\}=1;$$

$\forall n\in\mathbf{N}^+$，总有 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{n}{n+1}$；对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists n_0=1$，有 $\frac{n_0}{n_0+1}=\frac{1}{2}<\frac{1}{2}+\varepsilon$，即

$$\inf\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{N}^+\right\}=\frac{1}{2}.$$

由上面一些例子，我们容易看出：

(1) 有限数集必定存在上、下确界，它的上、下确界分别为该有限数集的最大数和最小数.

(2) 若数集 E 有上、下确界，则它的上、下确界可能属于 E(如 $\sup(-\infty,b]=b$)，也可能不属于 $E\left(\text{如 }\sup\left\{\frac{n}{n+1}\middle| n\in\mathbf{N}^+\right\}=1\right)$.

显然，无上(下)界的数集一定不存在上(下)确界，那么有上(下)界的数集是否一定存在上(下)确界呢？

关于数集确界的存在性问题，我们给出如下定理：

定理 1-1(确界定理)　若非空数集 E 有上(下)界，则数集 E 必存在上(下)确界.

例 3　设 A,B 为非空有界数集，$S=A\cup B$，证明：

(1) $\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$；

(2) $\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

证　(1) 因为 A,B 非空有界，所以 S 非空有界. 根据确界定理，S 的上、下确界都存在.

一方面，$\forall x\in S$，有 $x\in A$ 或 $x\in B$，于是 $x\leqslant\sup A$ 或 $x\leqslant\sup B$，从而$\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$，即 $\sup S\leqslant\max\{\sup A,\sup B\}$；

另一方面，$\forall x\in A$，有 $x\in S$，于是 $x\leqslant\sup S$，从而 $\sup A\leqslant\sup S$.

$\forall x\in B$，有 $x\in S$，于是 $x\leqslant\sup S$，从而 $\sup B\leqslant\sup S$.

所以有 $\sup S\geqslant\max\{\sup A,\sup B\}$；

综上所述有：$\sup S=\max\{\sup A,\sup B\}$.

(2) 同法可证：$\inf S=\min\{\inf A,\inf B\}$.

若把 $+\infty$ 和 $-\infty$ 补充到实数集中，并规定任一实数 a 与 $+\infty$，$-\infty$ 的关系如下：

$$a<+\infty,\quad a>-\infty,\quad -\infty<+\infty,$$

那么我们可以将确界定义加以推广：

若数集 S 无上界，则定义 $+\infty$ 为 S 的非正常上确界，记作

$$\sup S=+\infty.$$

若数集 S 无下界，则定义 $-\infty$ 为 S 的非正常下确界，记作

$$\inf S=-\infty.$$

在这样的定义下，我们同样可以将定理 1-1 加以扩充：

任一非空数集必有上(下)确界(正常的或非正常的).

自然数集 $\mathbf{N}$ 仅有下确界，但没有上确界，可以表示为

$$\inf\mathbf{N}=0,\quad \sup\mathbf{N}=+\infty.$$

1.3 函数

函数是数学中的一个基本概念，也是代数学里面最重要的概念之一. 函数是研究变量之间关系的数学方法. 本节将在中学数学关于函数学习的基础上，进一步讨论函数的严格定义、函数的类型、函数的特性和一些运算规则.

1.3.1 函数的定义

现代数学关于函数的定义有许多种，比如，代数定义、几何定义和映射定义等. 下面给出常规严格的代数定义.

定义 1-5 设 A 是非空数集. 若存在对应关系 $f(x)$，对 A 中任意数 $x(\forall x\in A)$，按照对应关系 $f(x)$，对应唯一一个 $y\in\mathbf{R}$，则称 $f(x)$ 是定义在 A 上的函数，表示为 $f:A\to\mathbf{R}$. 其中数 x 对应的数 y 称为 x 的函数值，表示为 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 数集 A 称为函数 $f(x)$ 的**定义域**，函数值的集合 $f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ 称为函数 $f(x)$ 的**值域**.

关于函数的定义 1-5，需要做以下几点说明：

1. 函数的定义域和对应法则是函数的两个本质因素，所以我们常用 $y=f(x)$，$x\in A$ 表示一个函数. 函数 $f(x)=1$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 和 $g(x)=\dfrac{x}{x}$，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，由于对应法则和定义域不同，所以它们是两个不同的函数.

2. $x(\forall x\in A)$ 是函数的定义域，通常称 x 为自变量；对应的函数值的集合 $y=f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$ 称为函数 $f(x)$ 的值域，又称 y 为因变量.

3. 在函数定义中，对每一个 x，只能有唯一的 y 值与它对应，这种函数称为单值函数. 若允许同一个 x 值可以和多于一个的 y 值相对应，则称为多值函数. 在第六分册《复变函数论》中重点讨论多值函数.

4. 根据函数的定义，虽然函数都存在定义域，但是常常并不明确指出函数的定义域，这时认为函数的定义域是自明的，即定义域是使得函数 $y=f(x)$ 有意义的实数 x 的集合 $A=\{x\,|\,f(x)\in\mathbf{R}\}$. 对于具有实际意义的函数，它的定义域则要受实际意义的约束. 如球的体积 V 是半径 r 的函数 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$，其中 $r\in[0,+\infty)$.

1.3.2 函数的表示法

函数除了通常的三种表示方法，即解析法、列表法、图像法之外，还有语言描述法.

有些函数在其定义域的不同部分用不同的解析式来表达，这样的函数我们称之为分段函数. 例如，函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}.$$

其含义如下：当 x 在 $(0,+\infty)$ 内取值，对应的函数值等于 1；当 $x=0$ 时，则 $f(0)=0$；当 $x\in(-\infty,0)$ 时，则 $f(x)=-1$. 我们将这样的函数称为符号函数，记作 $\operatorname{sgn}x$.

还有一些函数，它们无法用解析法、列表法或图像法表示，只能用言语来描述，如定义在 $\mathbf{R}$ 上的狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数}\\ 0, & x\text{ 为无理数}\end{cases}$$

和定义在 $[0,1]$ 上的黎曼函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\left(p,q\text{ 为正整数},\dfrac{p}{q}\text{ 为既约分数}\right),\\ 0, & x=0,1\text{ 和无理数}.\end{cases}$$

1.3.3 函数的四则运算

由定义 1-5，我们知道函数有三要素：定义域、对应关系、值域. 实质上当一个函数的定义域和对应关系确定时，它的值域也被唯一地确定，因此定义两个函数的相等和四则运算，只需同时考虑定义域和对应关系这两个要素即可.

给定两个函数 $f(x),x\in A$ 和 $g(x),x\in B$，记 $D=A\cap B$ 且 $D\neq\varnothing$. 现对 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的相等以及 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 D 上的和、差、积的运算作如下规定：

(1) 若 $A=B$，且 $\forall x\in A$，有 $f(x)=g(x)$，则称函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等，表示为 $f(x)=g(x)$.

比如 $f(x)=x,x\in\mathbf{R}$ 与 $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x),x\in\mathbf{R}$. 虽然函数的解析式不同，但它们具有相同的定义域，并且对 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$x=x(\sin^2x+\cos^2x),$$

于是，函数 $f(x)=x,x\in\mathbf{R}$ 与 $g(x)=x(\sin^2x+\cos^2x),x\in\mathbf{R}$ 相等.

相反地，对于函数 $f(x)=x+1$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1},x\in\mathbf{R}-\{1\}$. 虽然对 $\forall x\in\mathbf{R}-\{1\}$，有 $x+1=\dfrac{x^2-1}{x-1}$. 但是这两个函数的定义域不相等，于是 $f(x)\neq g(x)$.

(2) $F(x)=f(x)+g(x),x\in D$,

$G(x)=f(x)-g(x),x\in D$,

$H(x)=f(x)g(x),x\in D$.

若在 D 中剔除使 $g(x)=0$ 的 x 值，即当 $D^*=D-\{x\mid g(x)=0\}\neq\varnothing$ 时，还可以对

$f(x)$与$g(x)$在D^*的商运算作出如下定义：

$$L(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad x\in D^*.$$

今后为叙述方便，我们常将$f(x)$与$g(x)$的和、差、积、商分别写作

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.3.4 复合函数

在有些实际问题中，自变量与因变量的函数关系是通过其他变量才建立起来的. 例如，函数

$$t=\ln y \quad 与 \quad y=x-1.$$

经过中间变量y的传递生成新函数$t=\ln(x-1)$，于是t又是x的函数. 仅对$y=x-1$来说，x可取任意实数，但是对生成的新函数而言，此处必须要求$y=x-1>0$，即$x>1$. 此时我们将$t=\ln(x-1)$称为函数$t=\ln y$与$y=x-1$的**复合函数**.

下面给出复合函数的具体定义：

定义 1-6 设有两个函数$y=f(u)$，$u\in D$与$u=g(x)$，$x\in E$，若G是E中使$u=g(x)\in D$的x的非空子集，即

$$G=\{x\mid g(x)\in D, x\in E\}\neq\varnothing,$$

则对每一个$x\in G$，按照对应关系g对应唯一一个$u\in D$，再按照对应关系$f(u)$对应唯一一个y. 这样就确定了一个定义在G上，以x为自变量，y为因变量的函数. 记作

$$y=f[g(x)],\quad x\in G,$$

或

$$y=(f\cdot g)(x),\quad x\in G.$$

称为函数$y=f(u)$，$u\in D$与$u=g(x)$，$x\in E$的**复合函数**. 其中$f(u)$称为**外函数**，$g(x)$称为**内函数**，u为**中间变量**.

比如，由函数$t=\sqrt{y}$与$y=(x-1)(2-x)$生成的复合函数是

$$(f\cdot g)(x)=t=\sqrt{(x-1)(2-x)},$$

而此时复合函数的定义域由$y\geqslant 0$确定，即$\{x\mid (x-1)(2-x)\geqslant 0\}$. 于是，此复合函数的定义域为$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$.

当然，复合函数也可以由多个函数复合而成. 例如，由以下三个函数

$$y=\log_a u,\quad u\in(0,+\infty),$$

$$u=\sqrt{z},\quad z\in[0,+\infty),$$

$$z=1-x^2,\quad x\in(-1,1).$$

形成的复合函数为$y=\log_a\sqrt{1-x^2}$，$x\in(-1,1)$.

此外，我们不仅能将若干个简单函数生成为复合函数，而且还要善于将复合函数“分解”为若干个简单函数. 例如，函数$y=\tan^5\sqrt[3]{\lg\arcsin x}$是由五个简单函数$y=u^5$，$u=\tan v$，$v=\sqrt[3]{w}$，$w=\lg t$，$t=\arcsin x$所生成的复合函数.

f与g只是函数f与g的一种复合运算. 一般来说，$f\cdot g\neq g\cdot f$. 例如，设$f(x)=$

$\sin x, g(x)=x^2$，则

$$(f\cdot g)(x)=\sin x^2\neq(\sin x)^2=(g\cdot f)(x),\quad \forall x\neq 0.$$

这说明函数的复合运算与实数的加、乘运算不同，它不满足交换律，但容易证明它满足结合律：

$$f\cdot(g\cdot h)=(f\cdot g)\cdot h.$$

1.3.5 反函数

定义 1-7 设函数 $y=f(x), x\in A$. 若对于值域 $f(A)$ 中每一个 y_0，A 中有且只有一个值 x_0 和它对应，即 $f(x_0)=y_0$，则按此对应法则能得到一个定义在 $f(A)$ 上的函数，称这个函数为 $f(x)$ 的**反函数**，记作

$$f^{-1}: f(A)\to A,$$
$$x=f^{-1}(y),\quad y\in f(A).$$

关于定义 1-7 的理解，需注意：

(1) f^{-1} 是 f 的反函数，反之，f 也是函数 f^{-1} 的反函数. 此时称 f 与 f^{-1} 互为反函数，并且有

$$f^{-1}[f(x)]\equiv x,\quad x\in A \text{ 和 } f[f^{-1}(y)]\equiv y, y\in f(A).$$

(2) 反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域和值域恰好是原函数的值域和定义域.

例如，函数 $y=2x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，值域也是 $\mathbf{R}$. $\forall y\in\mathbf{R}$(值域)对应 $\mathbf{R}$(定义域)中唯一一个 x，即 $x=\dfrac{1}{2}(y-1)$，则 $y=2x+1$ 的反函数是 $x=\dfrac{1}{2}(y-1), y\in\mathbf{R}$.

又如 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$，值域是 $(0,+\infty)$，$\forall y\in(0,+\infty)$ 对应 $\mathbf{R}$ 中唯一一个 $x=\log_a y$，则 $y=a^x(a>0, a\neq 1)$ 的反函数是 $x=\log_a y, y\in(0,+\infty)$.

实质上，并不是每一个函数都有反函数. 那么什么样的函数才有反函数呢？我们有下面的定理.

定理 1-2 若函数 $y=f(x)$ 在数集 A 严格增加(严格减少)，则函数 $y=f(x)$ 存在反函数，且反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $f(A)$ 也严格增加(严格减少).

函数的严格单调仅是函数存在反函数的充分条件，而不是必要条件.

例如，如图 1-1 所示，函数

$$y=f(x)=\begin{cases}-x+1, & -1\leqslant x<0,\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

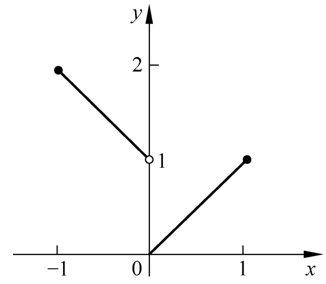

图 1-1

显然该函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上存在反函数

$$x=f^{-1}(y)=\begin{cases}y, & 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 1-y, & 1<y\leqslant 2.\end{cases}$$

但在 $[-1,1]$ 上该函数不是单调函数.

另外，函数在其定义域上不一定有反函数，但是若将函数限定在定义域的某个子集上，它就可能存在反函数. 比如：

(1) $y=x^2$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上不存在反函数. 因为 $\forall y>0$，在定义域 $\mathbf{R}$ 上对应两个不同的

$x=\pm\sqrt{y}$，但若将 $y=x^2$ 限定在$[0,+\infty)$上，它是严格增加的，由定理 1-2 可知，$y=x^2$，$x\in[0,+\infty)$存在反函数 $x=\sqrt{y}$，$y\in[0,+\infty)$.

（2）三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在各自的定义域 $\mathbf{R}$ 上都不存在反函数，但若将 $y=\sin x$ 定义在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\subseteq\mathbf{R}$ 上，它是严格增加的，由定理 1-2 可知，它存在反函数 $x=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$. 同样地，将 $y=\cos x$ 定义在$[0,\pi]\subseteq\mathbf{R}$ 上，它是严格减少的，则存在反函数 $x=\arccos y$，$y\in[-1,1]$.

在数学中，人们习惯用 x 表示函数的自变量，y 表示因变量. 所以 $y=f(x)$的反函数 $x=f^{-1}(y)$，$y\in f(A)$常写作 $y=f^{-1}(x)$，$x\in f(A)$. 而当函数 $y=f(x)$与其反函数 $x=f^{-1}(y)$在一起讨论时，为避免混淆，又常将其反函数表示为 $x=f^{-1}(y)$.

从图像上来看，函数 $y=f(x)$与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

1.3.6 初等函数

我们将常数函数 $y=c$（c 为常数）、幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）、指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）、对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）、三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\operatorname{ctan} x$ 与其反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\arctan x$、$y=\operatorname{arcctan} x$、双曲函数包含双曲正弦函数 $y=\sinh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$、双曲余弦函数 $y=\cosh x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$、双曲正切函数 $y=\tanh x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$、双曲余切函数 $y=\coth x=\frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$等七类函数统称为**基本初等函数**. 而凡是由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次的复合运算所得到的函数，统称为**初等函数**.

双曲函数是由“母函数”$y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 构成.

$y=\log_a\sqrt{x}$、$y=\frac{1+\mathrm{e}^x}{\sqrt{1-x^2}}$，以及多项式函数 $p_n(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$，$x\in(-\infty,+\infty)$等也都是初等函数.

凡不是初等函数的函数，被称为非初等函数. 比如，狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\ \text{为有理数}\\ 0, & x\ \text{为无理数}\end{cases}$$

和符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

等都是非初等函数.

1.4 函数的性质

函数的性质通常是指函数的定义域、值域、解析式、有界性、单调性、奇偶性、周期性和对称性等，其中一些性质可以通过图像直观地显示出来，下面具体讨论.