

第 5 章

范 式

命题公式的范式(Normal Forms of Propositional Formula)简称范式(Normal Forms, NF),指的是公式的规范(标准)形式。

范式包含析取范式(Disjunctive Normal Form, DNF)和合取范式(Conjunctive Normal Form, CNF)。

主范式包含主析取范式和主合取范式。

引入范式和主范式的原因如下。

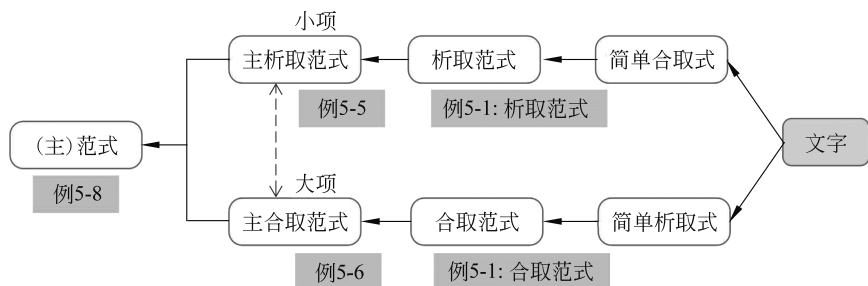
1. 范式

- 范式是命题逻辑中的一种标准形式,用于将复杂的命题公式转换为更简单、更统一的形式。它通常包括析取范式和合取范式,这两种范式分别通过析取(或)和合取(与)操作将命题公式中的简单子句组合起来。
- 范式的主要作用是简化命题公式的表示,使得复杂的逻辑结构变得清晰易懂。通过转换为范式形式,可以更容易地判断公式的真值情况,并进行逻辑推理和公式化简。
- 在实际应用中,范式常用于数据库设计、逻辑推理系统、自动推理工具等领域,以优化数据结构,提高推理效率。

2. 主范式

- 主范式是范式的一种特殊形式,包括命题公式的主析(合)取范式(Principal Disjunctive & Conjunctive Normal Form, PDNF & PCNF)。主析取范式是所有简单合取式都是极小项的析取范式,而主合取范式是所有简单析取式都是极大项的合取范式。
- 主范式的关键特点是其唯一性。对于任何一个命题公式,其主析取范式和主合取范式都是唯一的(不考虑命题变元的排列顺序)。这种唯一性使得主范式在逻辑推理和公式简化中具有重要作用,可以用于判断公式的等价性,进行真值表的简化等。
- 在逻辑推理和公式化简中,主范式提供了一种强大的工具,使得复杂的逻辑问题可以转换为更简单的形式来处理。

本章思维导图



本章内容主要围绕例 5-5、例 5-6 和例 5-8 展开讨论。

5.1 范 式

5.1.1 基本概念

【定义 5-1】 文字。

命题变元及其否定统称为文字。如 p , $\neg p$ 。

【定义 5-2】 简单析取式。

仅由有限个文字组成的析取式称为简单析取式。如 $p, \neg p \vee q, q \vee p \vee \neg p, p \vee \neg q \vee r \vee \neg s$ 。

【定义 5-3】 简单合取式。

仅由有限个文字组成的合取式称为简单合取式。如 $p, \neg p \wedge \neg q, p \wedge \neg p, q \wedge p \wedge \neg p, p \wedge \neg q \wedge r$ 。

注意：单个文字既是简单析取式，又是简单合取式。

因为 $p \vee p \Leftrightarrow p, p \wedge p \Leftrightarrow p$ 。

从定义不难看出：

- (1) 一个简单析取式是重言式，当且仅当它同时含有某个命题变元及其否定式。
- (2) 一个简单合取式是矛盾式，当且仅当它同时含有某个命题变元及其否定式。

5.1.2 范式

【定义 5-4】 析取范式。

一个命题公式称为析取范式，当且仅当它具有形式 $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ (n 大于或等于 1)，其中 A_i ($i=1, 2, 3, \cdots, n$) 为简单合取式。如： $p \vee \neg q, (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r), q \wedge \neg p$ 。

注：析取范式指的是括号(如果有括号)之间是析取，括号内是合取，而且只能出现单层括号。

【定义 5-5】 合取范式。

一个命题公式称为合取范式，当且仅当它具有形式 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ (n 大于或等于 1)，其中 A_i ($i=1, 2, 3, \cdots, n$) 为简单析取式。如： $p \vee \neg q, (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q \vee r), q \wedge \neg p$ 。

注：析取范式指的是括号(如果有括号)之间是合取，括号内是析取，而且只能出现单层

括号。

从定义不难看出：

- (1) 一个析取范式是重言式,当且仅当它同时含有某个命题变元及其否定式。
- (2) 一个合取范式是矛盾式,当且仅当它同时含有某个命题变元及其否定式。

【定义 5-6】 析取范式与合取范式统称为范式。

5.1.3 性质

析取范式与合取范式的性质：

- (1) 一个析取范式是矛盾式,当且仅当它的每个简单合取式都是矛盾式；
- (2) 一个合取范式是重言式,当且仅当它的每个简单析取式都是重言式。

例如： $(p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge \neg r) \vee r$ 是一个析取范式,而 $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge r$ 是一个合取范式。

因此,形如 $\neg p \wedge q \wedge r$ 的公式既是由一个简单合取式构成的析取范式,又是由三个简单析取式构成的合取范式。

类似地,形如 $p \vee \neg q \vee r$ 的公式既可看成析取范式,也可以看成合取范式。

5.1.4 求范式的基本步骤

- (1) 将公式中的联结词划归成 $\neg$ 、 $\vee$ 或者 $\wedge$ (先用相应的公式去掉 $\vee$ 或者 $\wedge$)。

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \\ p \leftrightarrow q &\Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \end{aligned}$$

- (2) 将否定联结词消去或内移到各命题变元之前。

$$\begin{aligned} \neg \neg p &\Leftrightarrow p \\ \neg (p \vee q) &\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q \\ \neg (p \wedge q) &\Leftrightarrow \neg p \vee \neg q \end{aligned}$$

- (3) 利用分配律、结合律将公式转换为合取范式或析取范式。

$$\begin{aligned} p \wedge (q \vee r) &\Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ p \vee (q \wedge r) &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{aligned}$$

【例 5-1】 求 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的范式。

$$\begin{aligned} &((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p \\ &\Leftrightarrow \neg(\neg(p \vee q) \vee r) \vee p \\ &\Leftrightarrow (\neg \neg(p \vee q) \wedge \neg r) \vee p \\ &\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \neg r) \vee p \\ &\Leftrightarrow ((p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r)) \vee p \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p && \text{(析取范式)} \\ &\Leftrightarrow p \vee (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \\ &\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r) && \text{(析取范式)} \\ &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg r \vee p) && \text{(合取范式)} \\ &\Leftrightarrow (p \vee q \vee p) \wedge (\neg r \vee p) && \text{(合取范式)} \end{aligned}$$

从上述式子可以看出,范式(析取或者合取)不唯一。

拓展*: 从键盘输入一个合式公式,用程序实现求解范式。

5.1.5 范式的应用

【例 5-2】 某电子设备由三个独立的部件 a 、 b 、 c 组成,只有当至少两个部件正常工作时,设备才能运行。请写出该设备能够运行的逻辑条件的合取范式。

解: 首先需要定义部件 a 、 b 、 c 的状态。假设每个部件正常工作为真(True),用逻辑变量 a 、 b 、 c 表示,否则为假(False)。

根据题目描述中“只有当至少两个部件正常工作时,设备才能运行”,可以分析出以下情况:

- (1) 部件 a 和 b 正常工作, c 可以正常工作或不正常工作;
- (2) 部件 a 和 c 正常工作, b 可以正常工作或不正常工作;
- (3) 部件 b 和 c 正常工作, a 可以正常工作或不正常工作。

将上述三种情况转换为逻辑表达式,得到:

- (1) $(a \wedge b) \wedge (c \vee \neg c)$ 。注意 $(c \vee \neg c)$ 总是为真,因此可以简化为 $a \wedge b$ 。
- (2) $(a \wedge c) \wedge (b \vee \neg b)$ 。同样地, $(b \vee \neg b)$ 总是为真,因此可以简化为 $a \wedge c$ 。
- (3) $(b \wedge c) \wedge (a \vee \neg a)$ 。 $(a \vee \neg a)$ 也总是为真,因此可以简化为 $b \wedge c$ 。

由于题目要求的是“至少两个部件正常工作”,故需要将上述三种情况中的至少一种为真作为整个逻辑表达式的条件,这可以通过逻辑或($\vee$)来实现,但因为最终需要合取范式,故需要将这些析取式转换为合取范式。然而,在这个特定的情况下,由于每个子表达式已经是“且”($\wedge$)的形式,并且只需要它们中的至少一个为真,所以整个表达式已经是“或”连接的一系列“且”表达式,这实际上已经是一个析取范式。

但为了满足题目要求,可以将析取范式视为一个特殊的合取范式,因为它没有引入任何额外的逻辑连接符(除了已经是析取范式形式的子表达式)。因此,该设备能够运行的逻辑条件的合取范式为:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$

【例 5-3】 学校设立奖学金,评选条件是学生必须满足以下至少一项:学习成绩(g)优秀且社会实践(p)丰富,或者科研成果(r)显著且获得过荣誉(h)。请写出获得奖学金的逻辑条件的合理范式。

解: 根据条件,可得:

- (1) 学习成绩(g)优秀且社会实践(p)丰富,表示为 $g \wedge p$;
- (2) 科研成果(r)显著且获得过荣誉(h),表示为 $r \wedge h$ 。

整个奖学金评选条件的逻辑表达式是这两个条件的析取,即:

$$(g \wedge p) \vee (r \wedge h)$$

这个表达式已经是析取范式形式,因为它直接表示了两种可能的获奖方式。

5.2 主 范 式

由于一个命题公式的析(合)取范式不是唯一的,因此不能作为命题公式的规范形式(标准形式),为了使任意命题公式转换为唯一的标准形式,故引入主范式的概念。

5.2.1 主析取范式

【定义 5-7】 设命题公式 A 中含有 n 个命题变元,如果 A 的析取范式中所有的简单合取式都是极小项,则称该析取范式为 A 的主析取范式。

【定理 5-1】 任何命题公式都存在着与之等价的主析取范式,并且是唯一的。

【定义 5-8】 在含有 n 个命题变元的简单合取式中,若每个命题变元和它的否定不同时出现,而二者之一必出现且仅出现一次,且称这样的简单合取式为极小项。

例如,有两个变元的小项:

$\neg p \wedge \neg q$ 、 $\neg p \wedge q$ 、 $p \wedge \neg q$ 、 $p \wedge q$,如表 5-1 所示。

表 5-1 两个命题变元的小项

		m_0	m_1	m_2	m_3
p	q	$\neg p \wedge \neg q$	$\neg p \wedge q$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge q$
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	1	0	0	0	1

- (1) 有 n 个变元,则有 2^n 个小项。
 - (2) 每组指派有且只有一个小项为 T。
- 为了记忆方便,可将各组指派对应的为 T 的小项分别记作 $m_0, m_1, m_2, \cdots, m_{2^n-1}$ 。

两个命题变元 p, q , 其小项共有 4 个,可表示为:

m_0

$\neg p \wedge \neg q$

m_1

$\neg p \wedge q$

m_2

$p \wedge \neg q$

m_3

$p \wedge q$

例如,有三个命题变元 p, q, r , 其小项共有 8 个,如表 5-2 所示。

表 5-2 三个命题变元的小项

小 项	编 码	真 值 指 派	小项的真值
$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$	m_{000} / m_0	000	1
$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	m_{001} / m_1	001	1
$\neg p \wedge q \wedge \neg r$	m_{010} / m_2	010	1
$\neg p \wedge q \wedge r$	m_{011} / m_3	011	1
$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	m_{100} / m_4	100	1
$p \wedge \neg q \wedge r$	m_{101} / m_5	101	1

$p \rightarrow q$ 的主析取范式:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow m_0 \vee m_1 \vee m_3$$

$p \leftrightarrow q$ 的主析取范式:

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow m_0 \vee m_3$$

2. 等价公式法

一个命题公式 A 的主析取范式还可以通过等价公式的方法求出, 具体求解步骤为:

(1) 将 WFF 转换为析取范式 A ;

(2) 若析取范式 A 中某简单合取式 p 不含命题变元 q , 则添加 $(q \vee \neg q)$, 然后应用分配律展开, 即

$$p \Leftrightarrow p \wedge 1 \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$$

(3) 将式子中重复出现的简单合取式和相同变元都消去;

(4) 按角标从小到大进行析取。

注:

(1) 命题公式的主析合取范式唯一;

(2) 两命题公式若有相同的主析合取范式, 则二命题公式等价;

(3) 主析取范式可以用求和符号“ Σ ”表示。

【例 5-5】 求例 5-1 中 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的主析取范式。

解: $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$

$$\Leftrightarrow (p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \vee p \quad (\text{析取范式})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge T \wedge \neg r) \vee (T \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge T \wedge T) \quad (\text{析取范式})$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge \neg r) \vee ((p \vee \neg p) \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge (q \vee \neg q) \wedge (r \vee \neg r))$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \vee ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r))$$

$$\vee ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r))$$

$$\Leftrightarrow ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r)) \vee ((p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r))$$

$$\vee ((p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r))$$

$$\Leftrightarrow (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$$

(主析取范式)

$$\Leftrightarrow m_{110} \vee m_{100} \vee m_{010} \vee m_{111} \vee m_{101}$$

$$\Leftrightarrow m_6 \vee m_4 \vee m_2 \vee m_7 \vee m_5$$

$$\Leftrightarrow m_2 \vee m_4 \vee m_5 \vee m_6 \vee m_7$$

$$\Leftrightarrow \Sigma_{2,4,5,6,7} \quad (\text{主析取范式})$$

5.2.3 主合取范式

【定义 5-9】 设命题公式 A 中含有 n 个命题变元, 如果 A 的合取范式中所有的简单析取式都是大项, 则称该合取范式为 A 的主合取范式。

【定理 5-3】 任何命题公式都存在着与之等价的主合取范式, 并且是唯一的。

【定义 5-10】 在含有 n 个命题变元的简单析取式中, 若每个命题变元和它的否定不同时出现, 而二者之一必出现且仅出现一次, 则称这样的简单析取式为大项。

例如, 有两个变元的大项及其真值表如表 5-4 所示。

表 5-4 两个命题变元的大项

		M_0	M_1	M_2	M_3
p	q	$p \vee q$	$p \vee \neg q$	$\neg p \vee q$	$\neg p \vee \neg q$
F	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
T	F	T	T	F	T
T	T	T	T	T	F

(1) 有 n 个变元, 则有 2^n 个大项。
 (2) 每组指派有且只有一个大项为 F。
 为了记忆方便, 可将各组指派对应的为 F 的大项分别记作 $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{2^n-1}$ 。
 两个命题变元 p, q , 其大项共有 4 个, 可表示为

$$\begin{aligned} M_0 & p \vee q & M_1 & p \vee \neg q \\ M_2 & \neg p \vee q & M_3 & \neg p \vee \neg q \end{aligned}$$

例如, 有三个命题变元 p, q, r , 其大项共有 8 个, 如表 5-5 所示。

表 5-5 三个命题变元的大项

大 项	编 码	真 值 指 派	大项的真值
$p \vee q \vee r$	M_{000}/M_0	000	0
$p \vee q \vee \neg r$	M_{001}/M_1	001	0
$p \vee \neg q \vee r$	M_{010}/M_2	010	0
$p \vee \neg q \vee \neg r$	M_{011}/M_3	011	0
$\neg p \vee q \vee r$	M_{100}/M_4	100	0
$\neg p \vee q \vee \neg r$	M_{101}/M_5	101	0
$\neg p \vee \neg q \vee r$	M_{110}/M_6	110	0
$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$	M_{111}/M_7	111	0

n 个变元的大项:

$$\begin{aligned} M_0 & p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \\ M_1 & p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee \neg p_n \\ & \dots \dots \dots \\ M_{2^n-1} & \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \dots \vee \neg p_n \end{aligned}$$

大项的性质:

- (1) 没有两个大项是等价的, 且每个大项有且仅有一个成假赋值, 若成假赋值所对应的二进制数转换为十进制数为 i , 就将所对应的大项记作 M_i ;
 - (2) 任意两个不同的大项的析取为永真式;
 - (3) 全体大项的合取为矛盾式。
- 合取范式的求解示例见例 5-1。

5.2.4 主合取范式的求法

主合取范式的求法如下。

1. 真值表法(略)

【定理 5-4】 在命题公式 A 的真值表中, 真值为 0 的指派对应的大项的合取, 即为 A 的主合取范式。

2. 等价公式法

一个命题公式 A 的主合取范式还可以通过等价公式的方法求出, 其推演步骤为:

(1) 将命题公式 A 转换为合取范式 A' ;

(2) 若合取范式 A' 中某简单析取式 p 不含命题变元 q , 则添加 $(q \vee \neg q)$, 然后应用分配律展开, 即

$$p \Leftrightarrow p \vee 0 \Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q)$$

(3) 将式子中重复出现的简单析取式和相同变元都消去;

(4) 按角标从小到大进行合取。

注: 主合取范式可以用求积符号“ Π ”表示。

【例 5-6】 求例 5-1 中 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的主合取范式。

解: $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$

$$\Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg r) \quad (\text{析取范式})$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \quad (\text{合取范式})$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee F) \wedge (p \vee F \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee (r \wedge \neg r)) \wedge (p \vee (q \wedge \neg q) \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow ((p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r)) \wedge ((p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r))$$

$$\Leftrightarrow (p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \quad (\text{主合取范式})$$

$$\Leftrightarrow M_{000} \wedge M_{001} \wedge M_{011}$$

$$\Leftrightarrow M_0 \wedge M_1 \wedge M_3$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{0,1,3} \quad (\text{主合取范式})$$

【例 5-7】 求 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r)$ 的主合取范式。

解: $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r)$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee \neg r) \quad (\text{合取范式})$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee F \vee r) \wedge (F \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee (q \wedge \neg q) \vee r) \wedge ((p \wedge \neg p) \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (r \vee p \vee q)$$

$$\Leftrightarrow (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$\Leftrightarrow M_{100} \wedge M_{110} \wedge M_{011} \wedge M_{111}$$

$$\Leftrightarrow M_4 \wedge M_6 \wedge M_3 \wedge M_7$$

$$\Leftrightarrow M_3 \wedge M_4 \wedge M_6 \wedge M_7$$

$$\Leftrightarrow \Pi_{3,4,6,7} \quad (\text{主合取范式})$$

练习: 求 $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow \neg r) \wedge (\neg r \rightarrow (p \vee q))$ 的主范式。

5.3 主析取范式与主合取范式的关系

设 Z 为命题公式 A 的主析取范式中所有小项的集合, R 为命题公式 A 的主合取范式中所有大项的集合, 则

$$R = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\} - Z$$

或

$$Z = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\} - R$$

故已知命题公式 A 的主析取范式, 可求得主合取范式; 反之亦然。

注意到小项与大项之间具有关系:

$$\neg m_i \wedge M_i, \neg M_i \wedge m_i (m_5: P \wedge \neg Q \wedge R, M_5: \neg P \wedge Q \wedge \neg R)$$

设命题公式 A 中含 n 个命题变元, 且设 A 的主析取范式中含 k 个小项 $m_{j_1}, m_{j_2}, \dots, m_{j_k}$, 则 $\neg A$ 的主析取范式中必含 $2^n - k$ 个小项 $m_{i_1}, m_{i_2}, \dots, m_{i_{2^n-k}}$, 且 $\{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\} - \{j_1, j_2, \dots, j_k\} = \{i_1, i_2, \dots, i_{2^n-k}\}$,

所以

$$\begin{aligned} \neg A &\Leftrightarrow m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \dots \vee m_{i_{2^n-k}} \\ A &\Leftrightarrow \neg (m_{i_1} \vee m_{i_2} \vee \dots \vee m_{i_{2^n-k}}) \\ &\Leftrightarrow \neg m_{i_1} \wedge \neg m_{i_2} \wedge \dots \wedge \neg m_{i_{2^n-k}} \\ &\Leftrightarrow M_{i_1} \wedge M_{i_2} \wedge \dots \wedge M_{i_{2^n-k}} \end{aligned}$$

主范式(包括主析取范式和主合取范式)的求法如下。

(1) 求范式。先通过等值推演将所给的命题公式转换为析取范式(合取范式)。

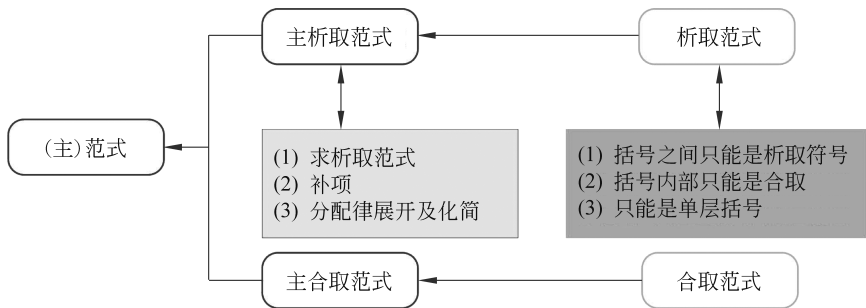
(2) 补项。若某个简单合取式(简单析取式) A 中既不含变项 p_i , 又不含变项 $\neg p_i$, 则使用

$$A \Leftrightarrow A \wedge 1 \Leftrightarrow A \wedge (p_i \vee \neg p_i) \Leftrightarrow (A \wedge p_i) \vee (A \wedge \neg p_i)$$

或

$$A \Leftrightarrow A \vee 0 \Leftrightarrow A \vee p_i \wedge \neg p_i \Leftrightarrow (A \vee p_i) \wedge (A \vee \neg p_i)$$

(3) 化简。消去重复变项和矛盾式, 如用 $p, m_i, 0$ 分别代替 $p \wedge \neg p, m_i \vee \neg m_i$ 和矛盾式等。



【例 5-8】 求例 5-1 中 $((p \vee q) \rightarrow r) \rightarrow p$ 的主范式。

解: 主合析取范式