第 5 章 Chapter 5

离散时间信号与系统分析

5.1 基本要求

- 了解离散时间信号的定义和基本描述方法；
- 熟悉典型离散信号的定义以及离散时间信号的基本运算；
- 能熟练利用卷积和经典法求解差分方程；
- 熟练掌握基本信号的 Z 变换及其基本性质，并根据性质求解信号的变换式；
- 熟练掌握 Z 逆变换的部分分式展开法，熟悉 Z 逆变换的留数求解法；
- 了解 Z 变换和拉普拉斯变换的关系，掌握不同序列收敛域的特点；
- 了解离散时间信号的傅里叶变换(DTFT)与离散傅里叶变换(DFT)的概念。

5.2 重点与难点

- 离散系统响应的求解；
- Z 变换的性质；
- 逆变换的求解。

5.3 知识要点

5.3.1 离散时间信号及其时域特性

1. 定义

离散时刻才有定义的信号称为离散时间信号，简称为离散信号。离散时间信号有时也称为序列。

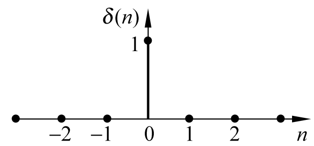
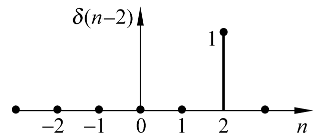
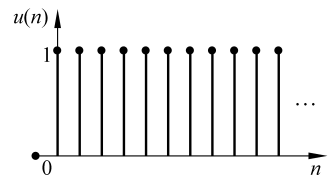
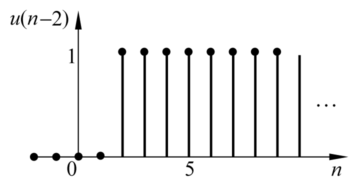
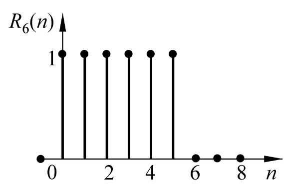
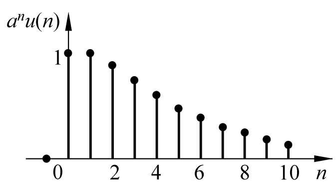
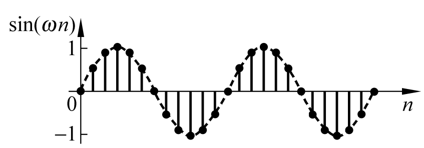
2. 离散信号的描述方式

离散信号的描述方式有 3 种形式：解析形式、序列形式和图形形式。

3. 典型的离散时间信号

典型离散信号的表达式及其图形如表 5-1 所示。

表 5-1　典型离散信号的表达式及其图形

序列名称	表　达　式	图　　形
单位取样序列	$\delta(n)=\begin{cases}1, & n=0\\0, & n\neq 0\end{cases}$	
	延时 m 个时间单位的单位取样序列 $\delta(n-m)$ 为 $\delta(n-m)=\begin{cases}1, & n=m\\0, & n\neq m\end{cases}$	
单位阶跃序列	$u(n)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\0, & n<0\end{cases}$	
	延时 m 个时间单位的单位阶跃序列 $u(n-m)$ 为 $u(n-m)=\begin{cases}1, & n\geqslant m\\0, & n<m\end{cases}$	
矩形序列	$\boldsymbol{R}_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & n<0, n\geqslant N\end{cases}$	
单边实指数序列	$x(n)=a^n u(n)=\begin{cases}a^n, & n\geqslant 0\\0, & n<0\end{cases}$	
正弦序列	$x(n)=\sin(\omega n+\varphi)$	

5.3.2　离散时间系统

1. 定义

将输入序列 $x(n)$ 经某种变换或处理映射成输出序列 $y(n)$ 的唯一性变换或运算，记为

$$y(n)=\mathrm{T}[x(n)] \tag{5-1}$$

离散时间系统如图 5-1 所示。

图 5-1　离散时间系统

2. 线性非移变系统

(1) 线性性。对输入的线性组合产生的响应，是原来各个输入单独产生的响应同样的线性组合，即

$$\mathrm{T}[ax_1(n)+bx_2(n)]=a\mathrm{T}[x_1(n)]+b\mathrm{T}[x_2(n)] \tag{5-2}$$

(2) 非移变性。输入的延时将产生输出同样的延时，即如果输入 $x(n)$引起的响应为序列 $y(n)$，那么

$$\mathrm{T}[x(n-m)]=y(n-m) \tag{5-3}$$

(3) 线性非移变系统的差分描述。设 $x(n),x(n-1),\cdots,x(n-M)$表示输入序列及其移位序列，$y(n),y(n-1),\cdots,y(n-N)$表示输出序列及其移位序列，线性非移变系统的输入输出序列的线性常系数差分方程可描述为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k) \tag{5-4}$$

其中，参数 N 称为系统的阶次；式(5-4)描述的系统为 N 阶系统；系数 a_k,b_k 为常数。

3. 差分方程的经典求解法

(1) 迭代法。由于差分方程存在递归或迭代关系，所以可以用迭代方法求解差分方程。

(2) 经典解法。差分方程经典解法与连续时间系统微分方程的经典解法类似，都是把系统响应分解为齐次解和特解两部分，求解步骤如下。

① 求齐次解。令差分方程式(5-4)右端为零，得齐次差分方程，即

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=0 \tag{5-5}$$

特征方程为

$$\sum_{k=0}^{N}a_k p^{N-k}=0 \tag{5-6}$$

特征方程式(5-6)的根称为特征根。设特征方程有 N 个相异的特征根，表示为 $p_k(k=1,2,\cdots,N)$，则差分方程的齐次解为

$$y_{\mathrm{h}}(n)=\sum_{k=1}^{N}C_k p_k^n \tag{5-7}$$

若有重根，假设 p_1 为 m 重根，其他均为单根，则齐次解为

$$y_{\mathrm{h}}(n)=\sum_{k=1}^{m}C_k n^{k-1}p_1^n+\sum_{k=2}^{N-m+1}A_k p_k^n \tag{5-8}$$

其中，C_k,A_k 等是由初始条件确定的待定系数。

② 求特解。特解 $y_{\mathrm{p}}(n)$的函数形式与激励形式有关。表 5-2 列出了差分方程几种典型的激励所对应的特解。选定特解后，代入原差分方程式(5-4)，可以求出特解中的待定系数 P_i。

表 5-2 差分方程几种典型的激励所对应的特解

激励 $x(n)$	特解 $y_p(n)$
a^n	当 a 不是特征根时，$y_p(n)=P_1a^n$ 当 a 是特征单根时，$y_p(n)=P_1na^n$，以此类推
$\cos\omega_0 n$ 或 $\sin\omega_0 n$	当所有特征根不等于 $e^{\pm j\omega_0}$ 时，$y_p(n)=P_1\cos\omega_0 n+P_2\sin\omega_0 n$ 当 $e^{\pm j\omega_0}$ 是特征单根时，特解在上式基础上乘以 n
n^m	当 1 不是特征根时，$y_p(n)=P_m n^m+P_{m-1}n^{m-1}+\cdots+P_z n+P_0$ 当 1 是特征单根时，$y_p(n)=n(P_m n^m+P_{m-1}n^{m-1}+\cdots+P_z n+P_0)$，以此类推

③ 求完全解。完全解是齐次解与特解之和，即 $y(n)=y_h(n)+y_p(n)$。

④ 由系统的初始条件确定齐次解中的待定系数 C_k。

4. 卷积和

零输入响应就是输入为零时仅由起始状态所引起的响应，用 $y_{zir}(n)$表示。零状态响应就是起始状态为零时仅由输入序列所引起的响应，用 $y_{zsr}(n)$表示。系统的单位取样响应定义为系统在 $\delta(n)$激励下系统的零状态响应，用 $h(n)$表示。

(1) 定义。$x(n)$与 $h(n)$的卷积和，称为离散卷积，简称为卷积。任意两个序列 $x(n)$和 $y(n)$的卷积定义为

$$x(n)*y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)y(n-k) \tag{5-9}$$

(2) 卷积和的性质。卷积和的性质如表 5-3 所示。

(3) 卷积和的计算。卷积和的计算主要包括以下方法：

① 直接利用定义。根据定义求卷积和的解析式。

② 图解法。采用变量替换、反折、平移、相乘、求和等步骤。

③ 竖乘法。模仿两个整数的乘法过程。

④ 利用卷积和的性质。

表 5-3 卷积和的性质

性质名称	表 达 式
交换律	$x(n)*y(n)=y(n)*x(n)$
结合律	$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$
分配律	$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$
与 $\delta(n)$的卷积	$x(n)*\delta(n)=x(n)$ $x(n)*\delta(n-m)=x(n-m)$

⑤ Z 变换法。将时域卷积运算转化为 Z 变换乘法运算。

5.3.3 Z 变换

1. 定义

序列 $x(n)$的 Z 变换定义为

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{5-10}$$

单边Z变换的定义为

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{5-11}$$

2. 收敛域

(1) 有限长序列。

有限长序列只在有限区间($n_1\sim n_2$)范围内序列的值不为零，它的Z变换为

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=n_1}^{n_2}x(n)z^{-n} \tag{5-12}$$

显然，它的收敛域为$0<|z|<\infty$。收敛域是否包含$z=0$和$z=\infty$两个点取决于n_1，n_2的情况。如果$n_1\geqslant 0$，则收敛域为$0<|z|\leqslant\infty$；如果$n_2\leqslant 0$，则收敛域为$0\leqslant|z|<\infty$。

(2) 右边序列。

右边序列只在$n\geqslant n_1$时有非零值，它的Z变换为

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=n_1}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{5-13}$$

该级数的收敛域是以某一个圆的外部区域，即Z变换收敛域是$|z|>R_{x-}$。如果$n_1\geqslant 0$，这时的右边序列就是因果序列，它的收敛域为$R_{x-}<|z|\leqslant\infty$，包含了$z=\infty$；如果$n_1<0$，这时的右边序列属于非因果的序列，它的收敛域为$R_{x-}<|z|<\infty$，不包含$z=\infty$。

(3) 左边序列。

左边序列只在$n\leqslant n_2$时有非零值，它的Z变换为

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{n_2}x(n)z^{-n} \tag{5-14}$$

该级数的收敛域是以某一个圆的内部区域，即Z变换收敛域是$|z|<R_{x+}$。如果$n_2\leqslant 0$，这时的左边序列就是逆因果序列，它的收敛域是$0\leqslant|z|<R_{x+}$，包含了$z=0$；如果$n_2>0$，这时的左边序列属于非逆因果的序列，它的收敛域是$0<|z|<R_{x+}$，不包含$z=0$。

(4) 双边序列。

双边序列在区间($-\infty$，$+\infty$)上都有非零值，它可以看成一个逆因果序列和一个因果序列之和。它的Z变换为

$$X(z)=\mathrm{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}=\sum_{n=-\infty}^{-1}x(n)z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \tag{5-15}$$

双边序列Z变换收敛域为一个圆环，即双边序列的Z变换收敛域为$R_{x-}<|z|<R_{x+}$。如果$R_{x+}\leqslant R_{x-}$，则$X(z)$没有收敛域，即Z变换实际上不存在。

3. 常用序列的Z变换

常用序列的Z变换如表5-4所示。

表5-4 常用序列的Z变换

序号	序　列	Z 变 换	收敛域
1	$\delta(n)$	1	z平面
2	$u(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}=\dfrac{z}{z-1}$	$\|z\|>1$

续表

序号	序　　列	Z　变　换	收敛域
3	$a^n u(n)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
4	$-a^n u(-n-1)$	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}=\dfrac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|$
5	$R_N(n)$	$\dfrac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}=\dfrac{z^N-1}{z^N-z^{N-1}}$	$\|z\|>0$
6	$nu(n)$	$\dfrac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}=\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\|z\|>1$
7	$na^n u(n)$	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}=\dfrac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
8	$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}u(n)$	$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}z^{-1}}=\dfrac{z}{z-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 n}}$	$\|z\|>1$
9	$\sin(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}=\dfrac{z\sin\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
10	$\cos(\omega_0 n)u(n)$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega_0}{1-2z^{-1}\cos\omega_0+z^{-2}}=\dfrac{z^2-z\cos\omega_0}{z^2-2z\cos\omega_0+1}$	$\|z\|>1$
11	$(n+1)a^n u(n)$	$\dfrac{1}{(1-az^{-1})^2}=\dfrac{z^2}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$

4. Z 变换的性质

Z 变换的性质如表 5-5 所示。

表 5-5　Z 变换的性质

序号	性质名称	表　达　式	收　敛　域
1	线性性质	$ax(n)+by(n)\leftrightarrow aX(z)+bY(z)$	$\max[R_{x-},R_{y-}]<\|z\|<\min[R_{x+},R_{y+}]$
2	序列移位	$x(n-m)\leftrightarrow z^{-m}X(z)$	$R_{x-}<\|z\|<R_{x+}$
3	尺度变换	$a^n x(n)\leftrightarrow X\left(\dfrac{z}{a}\right)$	$\|a\|R_{x-}<\|z\|<R_{x+}\|a\|$
4	序列反折	$x(-n)\leftrightarrow X\left(\dfrac{1}{z}\right)$	$\dfrac{1}{R_{x+}}<\|z\|<\dfrac{1}{R_{x-}}$
5	序列复共轭	$\overline{x(n)}\leftrightarrow \overline{X(\bar{z})}$	$R_{x-}<\|z\|<R_{x+}$
6	z 域微分	$nx(n)\leftrightarrow -z\dfrac{\mathrm{d}X(z)}{\mathrm{d}z}$	$R_{x-}<\|z\|<R_{x+}$
7	初值定理	$x(0)=\lim\limits_{z\to\infty}X(z)$	$x(n)$为因果序列
8	初值定理	$x(0)=\lim\limits_{z\to 0}X(z)$	$x(n)$为逆因果序列
9	终值定理	$x(\infty)=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z)$	$x(n)$为因果序列，且 $X(z)$除在 $z=1$ 处可以有一阶极点外，其他极点都在单位圆内
10	时域卷积	$x(n)*y(n)\leftrightarrow X(z)Y(z)$	$\max[R_{x-},R_{y-}]<\|z\|<\min[R_{x+},R_{y+}]$

续表

序号	性质名称	表 达 式	收 敛 域
11	帕塞瓦尔公式	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\cdot\overline{y(n)} = \frac{1}{2\pi j}\oint_C X(v)\,\overline{Y\left(\frac{1}{\bar{v}}\right)}v^{-1}\mathrm{d}v$	$R_{x-}\cdot R_{y-}<\|z\|<R_{x+}\cdot R_{y+}$

5. Z 反变换

Z 反变换就是由序列的 Z 变换 $X(z)$求原来序列 $x(n)$的过程。

(1) 幂级数法。幂级数法就是根据 Z 变换的收敛域将 $X(z)$展开成 z 幂级数，即

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \tag{5-16}$$

因此，序列 $x(n)$是 z^{-n} 的系数。将 $X(z)$展开式(5-16)形式的幂级数与 Z 变换的收敛域有关。当 $X(z)$为有理函数时，可用长除法将 $X(z)$展开成幂级数。使用长除法之前，根据收敛域确定对应的是右边序列还是左边序列。若为右边序列，则将 $X(z)$展开成负幂级数；若为左边序列，则将 $X(z)$展开成正幂级数。

(2) 部分分式展开法。当 $X(z)$是有理函数时，对 $X(z)$进行部分分式展开，然后利用表 5-4 求各简单分式的 Z 反变换。

(3) 留数定理法：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \tag{5-17}$$

其中，C 是 $X(z)$的收敛域内一条逆时针方向环绕原点的围线。

根据复变函数积分中的留数定理，当 $n\geqslant 0$ 时，有

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=\sum[X(z)z^{n-1}\ \text{在}\ C\ \text{内极点上的留数}] \tag{5-18}$$

当 $n<0$ 时，有

$$x(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_C X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z=-\sum[X(z)z^{n-1}\ \text{在}\ C\ \text{外极点上的留数}] \tag{5-19}$$

6. Z 变换与拉普拉斯变换的关系

设离散时间序列 $x(n)$是连续时间信号 $x_a(t)$经过抽样得到的，即 $x(n)=x_a(nT)$，则 $x(n)$的Z 变换 $X(z)$与 $x_a(t)$的拉普拉斯变换 $X_a(s)$之间的关系为

$$X(z)\big|_{z=e^{sT}}=\frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X_a\left(s-jn\frac{2\pi}{T}\right) \tag{5-20}$$

式(5-20)表示了 $X_a(s)$的周期延拓与 $X(z)$的关系。s 平面中宽度为$\frac{2\pi}{T}$的水平带映射成整个 z 平面，左半带映射成单位圆内部，右半带映射成单位圆外部，长度为$\frac{2\pi}{T}$的虚轴映射成单位圆周。

7. Z 变换和 DFT 及 DTFT 的关系

(1) 离散时间序列 $x(n)$的傅里叶变换(DTFT)定义为

$$X(e^{j\omega})=F[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n} \tag{5-21}$$

$X(e^{j\omega})$的傅里叶反变换(IDTFT)为

$$x(n)=F^{-1}[X(e^{j\omega})]=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \tag{5-22}$$

(2) 设有限长序列 $x(n)$，$n=0,1,2,\cdots,N-1$，它的离散傅里叶变换(DFT)定义为

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-23}$$

离散傅里叶反变换(IDFT)为

$$x(n)=\text{IDFT}[x(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1 \tag{5-24}$$

(3) 由于 DFT 只针对有限长序列，所以，必须在有限长序列的前提下来讨论 DFT、DTFT 和 Z 变换之间的关系。DFT、DTFT 和 Z 变换的定义分别为

$$X(z)=L[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z^{-n} \tag{5-25}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\omega n} \tag{5-26}$$

$$X(k)=\text{DFT}[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn},\quad 0\leqslant k\leqslant N-1 \tag{5-27}$$

由此可见，单位圆上的 Z 变换就是序列的 DTFT，而单位圆上 DTFT 的 N 点均匀取样就是 DFT。

5.3.4 离散时间系统的 z 域分析

1. 离散时间系统函数的定义

离散时间系统的系统函数定义为系统零状态响应的 Z 变换与激励的 Z 变换之比，即

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)} \tag{5-28}$$

或

$$H(z)=Z[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n} \tag{5-29}$$

式(5-29)经常用作系统函数的定义，也常用于由系统函数 $H(z)$求系统的单位取样响应 $h(n)$。系统函数 $H(z)$与系统的单位取样响应 $h(n)$是一组 Z 变换对。

2. 系统的零极点

$$H(z)=A\frac{\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)}{\prod_{k=1}^{N}(z-p_k)} \tag{5-30}$$

其中，z_k 是系统函数 $H(z)$的零点；p_k 是系统函数 $H(z)$的极点。$H(z)$的零极点图称为系

统零极点图。

3. 系统函数与频率响应

系统函数与频率响应的关系式

$$H(e^{j\omega})=H(z)\big|_{z=e^{j\omega}} \tag{5-31}$$

即系统的单位取样响应在单位圆上的Z变换就是系统的频率响应。

4. 系统函数与系统稳定性

单位取样响应 $h(n)$ 绝对可和，意味着系统函数在单位圆上收敛，这时系统是稳定的。反之，如果系统稳定，则系统函数在单位圆上收敛。换言之，系统函数收敛域包含单位圆是系统稳定的充分必要条件。

显然，对于一个稳定的因果系统，其系统函数的收敛域为

$$\begin{cases}R_{x-}<|z|\leqslant\infty\\ 0<R_{x-}<1\end{cases} \tag{5-32}$$

即因果系统稳定的充分必要条件为，其系统函数 $H(z)$ 的所有极点都在单位圆内。

5.4 例题精选

【例 5-1】 下列系统中，$x(n)$ 表示激励，$y(n)$ 表示响应。试判断每个激励与响应的关系是否线性的，是否具有非移变性。

(1) $y(n)=x(n)\cos\left(\dfrac{2n\pi}{5}+\dfrac{\pi}{10}\right)$　　(2) $y(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}x(m)$

解：

(1) 线性性

$$y_1(n)=x_1(n)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$$

$$y_2(n)=x_2(n)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$$

则

$$k_1x_1(n)+k_2x_2(n)\rightarrow[k_1x_1(n)+k_2x_2(n)]\cos\left(\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)=k_1y_1(n)+k_2y_2(n)$$

所以系统是线性的。

移变性

$$y(n)=x(n)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)$$

则

$$x(n-m)\rightarrow y'(n)=x(n-m)\cos\left(\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{10}\right)\neq y(n-m)$$

所以系统是移变系统。

(2) 线性性

$$y_1(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x_1(m),y_2(m)=\sum_{m=-\infty}^{n}x_2(m)$$

则

$$\sum_{m=-\infty}^{n}[k_1x_1(m)+k_2x_2(m)]=k_1y_1(n)+k_2y_2(n)$$

所以系统是线性的。

移变性：

设 $$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$$

则 $x(n-k)\to y'(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}x(m-k)$，令 $m-k=p$

故

$$\sum_{p=-\infty}^{n-k}x(p)=\sum_{m=-\infty}^{n-k}x(m)=y(n-k)$$

所以系统是非移变的。

【例 5-2】 求下列信号的卷积。

(1) $[u(n)-u(n-4)]*[u(n)-u(n-4)]$

(2) $\sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)u(n)*2^n u(n)$

解：

(1) 由卷积的性质可知

$$\begin{aligned}&[u(n)-u(n-4)]*[u(n)-u(n-4)]\\&=[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)]*[\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)]\\&=\delta(n)+2\delta(n-1)+3\delta(n-2)+4\delta(n-3)+3\delta(n-4)+2\delta(n-5)+\delta(n-6)\end{aligned}$$

(2) $$\mathrm{Z}\left[\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)u(n)*2^n u(n)\right]=\frac{z}{z^2+1}\cdot\frac{z}{z-2}=\frac{\frac{2}{5}}{z-2}-\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{j}}{z-\mathrm{j}}+\frac{-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{j}}{z+\mathrm{j}}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)u(n)*2^n u(n)&=\mathrm{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{2}{5}}{z-2}-\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{j}}{z-\mathrm{j}}+\frac{-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{j}}{z+\mathrm{j}}\right]\\&=\left[\frac{2}{5}\cdot 2^n-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{j}\right)\mathrm{j}^n+\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\mathrm{j}\right)(-\mathrm{j})^n\right]u(n)\end{aligned}$$

【例 5-3】 已知差分方程 $y(n)+3y(n-1)+2y(n-2)=f(n)$，激励 $f(n)=2^n u(n)$，初始值 $y(0)=0,y(1)=2$，试用零输入、零状态法求全响应 $y(n)$。

解：

(1) 求零输入响应 $y_{\mathrm{zir}}(n)$。

系统的特征方程为 $p^2+3p+2=0$，故特征根为 $p_1=-1,p_2=-2$，故零输入响应的通解 $y_{\mathrm{zsr}}(n)=A_1(-1)^k+A_2(-2)^k$。待定系数 A_1,A_2 必须根据系统的起始条件来求，而不能根据初始值 $y(0)=0,y(1)=2$ 来求。又因为激励 $f(n)$ 是在 $n=0$ 时刻作用于系统，故起