数学培优竞赛讲座

（六年级，第 2 版）

朱华伟　编著

清华大学出版社

北　　京

内 容 简 介

本书是以国内外小学数学各种培优竞赛为背景，以《义务教育数学课程标准》的理念和要求为准绳编写的，力求与课堂教学同步，在夯实基础的同时，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径. 本书分培优篇和竞赛篇两大部分，按照专题讲座的形式编写，每讲均设置知识方法扫描、经典例题解析，并配有强化训练及参考答案，注重数学思想的渗透，通过穿插数学案例、名家名言及独特的解题思路，引导学生发现数学的美妙，从而激发学生学习数学的兴趣.

本书可供小学六年级师生及家长使用，也可供小学生数学竞赛培训机构人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 六年级 / 朱华伟编著. -- 2 版.
北京 ：清华大学出版社，2024. 7. -- ISBN 978-7-302-66665-3

Ⅰ. G624.503

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 20243VN395 号

责任编辑：王 定
封面设计：周晓亮
版式设计：思创景点
责任校对：成凤进
责任印制：

出版发行：清华大学出版社
网 址：https://www.tup.com.cn，https://www.wqxuetang.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编：**100084
社 总 机：010-83470000 **邮 购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张：**17.25 **字 数：**350 千字
版 次：2021 年 8 月第 1 版 2024 年 8 月第 2 版 **印 次：**2024 年 8 月第 1 次印刷
定 价：69.80 元

产品编号：106693-01

前　言

提升基础学科的科研水平，培养世界一流的拔尖创新人才，是推动人类文明进步和世界持续发展的重要动力．培养拔尖创新人才，一定要从娃娃抓起、从基础教育抓起．因此，重视并加强基础教育阶段的数学、物理等教育迫在眉睫，尤其是对于数理拔尖人才的早期识别和培养，给予这些好苗子一个适合的、特殊的成长机会及高水平的、有效的学习资源至关重要．

为了给对数学有兴趣的小学生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，我们以国内外小学数学各种培优竞赛为背景，以《义务教育数学课程标准》的理念和要求为准绳，根据多年培训“华罗庚金杯赛”选手和辅导小学数学资优生参加数学考试的经验、体会和素材，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（三年级、四年级、五年级、六年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（三年级、四年级、五年级、六年级）．

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分．

培优篇　与课堂教学同步，从课内到课外逐步引申扩充，由浅入深，由易到难，循序渐进，是课堂教学的自然延伸；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径；在学生力所能及的范围内扩展知识视野，提高思维能力；在巩固深化小学数学教材知识的同时，拓宽小学数学和竞赛数学的知识．

竞赛篇　以小学数学各种竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生发现与创新的灵感．这些内容是数学奥林匹克竞赛中生动活泼、富于创新性的内容．这类问题的特点是涉及的数学知识较少而包含的技巧较多，理解和解决这类问题往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法却相当困难，没有固定的模式可以套用．它要求学生自己去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、类比、排序、估计、构造、递推、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法，发现规律，找到解决问题的门径，这恰是数学奥林匹克竞赛试题所应有的风格．这些内容可帮助学生开发智力、提高水平，去参加高层次的竞赛．

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下．

名人名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅.

知识方法述要：详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点.

例题精讲：主要包含“分析”“解”“分析与解”和“评注”，由基础题、提高题、综合题组成. 本书中很多例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，以起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系. 总之，评注的目的在于，一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的.

同步训练：含选择题、填空题、解答题，遵循因材施教原则，同步训练题的设置兼顾多个层次的学习需求，分为 A，B，C 三层，便于分层教学，师生在实际教学中可按需取舍. 例如，对于数学基础较好的学生，可以在完成 A 组和 B 组习题的基础上努力尝试完成 C 组习题；对于数学基础较弱的学生，可以在完成 A 组习题的前提下努力尝试完成 B 组习题. 为方便自学，在书后每题均给出了详细解答过程.

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测. 书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度. 《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果.

希望通过对本书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣.

本书是小学生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点中学、破解数学考试压轴题的利器，是小学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友.

在本书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢. 由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正.

2024 年 5 月

目　　录

培优篇/1

第 1 讲　分数的巧算 …… 1
第 2 讲　比较大小 …… 8
第 3 讲　估计与估算 …… 15
第 4 讲　定义新运算 …… 21
第 5 讲　分数的分拆 …… 30
第 6 讲　工程问题 …… 37
第 7 讲　分数应用题 …… 44
第 8 讲　百分数应用题 …… 51
第 9 讲　比和比例问题 …… 58
第 10 讲　行程问题 …… 65
第 11 讲　列方程解应用题 …… 73
第 12 讲　方程组 …… 80
第 13 讲　不定方程 …… 88
第 14 讲　列表与图解 …… 96
第 15 讲　圆与组合图形 …… 103
第 16 讲　勾股定理与弦图 …… 110
第 17 讲　共高定理 …… 118
第 18 讲　共边定理 …… 127
第 19 讲　立体图形 …… 134

竞赛篇/142

第 20 讲　枚举与筛选 …… 142
第 21 讲　最优化问题 …… 148
第 22 讲　配对法 …… 159

第 23 讲　对策问题 …… 164
第 24 讲　反证法 …… 171
第 25 讲　不变量原理 …… 176
第 26 讲　抽屉原理 …… 182
第 27 讲　染色与赋值 …… 187
第 28 讲　构造法 …… 194
第 29 讲　极端原理 …… 200
第 30 讲　离散最值问题 …… 206

同步训练参考答案 …… 211

培优篇

第 1 讲　分数的巧算

> 我们有些青少年学习数学时，害怕运算，特别是比较复杂一些的计算题，他们往往半途而废……要学好数学，就要不怕繁，不怕难，要有算到底的决心.
>
> ——华罗庚

知识方法述要

在三年级第 2 讲高斯的故事、第 6 讲加减法的巧算，四年级第 2 讲乘除法的巧算，五年级第 1 讲小数的巧算、第 27 讲数列的求和中，同学们已经学会了许多计算的方法与技巧，这些都是我们进一步学习分数巧算的基础.

对于复杂的分数运算题，先要全面审题，仔细观察已知数的特征，分清运算顺序，再根据运算法则和运算律以及分数的性质选择合理而巧妙的算法. 常用的方法和技巧有通分、约分、凑整、分解、分拆等.

例题精讲

【例 1-1】 计算：$\left(\frac{1}{30}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}\right)\times 2\frac{1}{7}$.

解法 1 先求出 30，35，63 的最小公倍数. $30=2\times3\times5$，$35=5\times7$，$63=3\times3\times7$，所以最小公倍数是 $2\times3\times3\times5\times7=630$. 原式通分，有

$$原式=\left(\frac{21}{630}+\frac{18}{630}+\frac{10}{630}\right)\times\frac{15}{7}$$

$$=\frac{49}{630}\times\frac{15}{7}\text{(约分)}$$
$$=\frac{1}{6}.$$

解法 2　原式$=\left(\frac{1}{2\times3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\frac{1}{3\times3\times7}\right)\times\frac{15}{7}$
$$=\frac{21+18+10}{2\times3\times3\times5\times7}\times\frac{15}{7}$$
$$=\frac{49}{2\times3\times7\times7}$$
$$=\frac{1}{6}.$$

评注　例 1-1 这两种解法同样都用到通分和约分的技巧,只有一点小区别:解法 2 在通分时不急于把分母算出,而是边算边约分.只是这一点小小的不同,却节省了求连乘积的运算,约分也简单些,使计算快了不少.

【例 1-2】　计算:$\dfrac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\times2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4.375\right)\div19\frac{8}{9}}$.

分析　分数、小数合在一起的四则运算,是小学数学的重要训练内容,要求算得准、算得快.这个题目,是用繁分式的形式给出了加、减、乘、除的混合运算,它的另一个形式是
$$\left(2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\times2\frac{5}{14}\right)\div\left[\left(3\frac{1}{12}+4.375\right)\div19\frac{8}{9}\right].$$

算这道题时,要注意两点:

(1) 在乘除运算中,带分数要化为假分数,及时约分.

(2) 在加减运算中,如果分数、小数同时出现,那么就把它们都化为分数,或都化为小数.

解法 1　原式$=\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{2}{3}\times\frac{33}{14}}{\left(\frac{37}{12}+\frac{35}{8}\right)\div\frac{179}{9}}=\dfrac{\frac{21}{8}-\frac{11}{7}}{\frac{179}{24}\times\frac{9}{179}}$
$$=\left(\frac{21}{8}-\frac{11}{7}\right)\times\frac{8}{3}$$
$$=7-4\frac{4}{21}=2\frac{17}{21}.$$

解法 2　原式$=\dfrac{\dfrac{21}{8}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{33}{14}}{\left(\dfrac{37}{12}+\dfrac{35}{8}\right)\times\dfrac{9}{179}}$

$=\dfrac{\dfrac{21}{8}-\dfrac{11}{7}}{\dfrac{179}{24}\times\dfrac{9}{179}}\times\dfrac{56}{56}$

$=\dfrac{147-88}{21}$

$=2\dfrac{17}{21}.$

评注　例 1-2 这两种方法的共同之处,其一是在前两步运算中都将乘除运算中的带分数化成了假分数,及时进行了约分;其二是将 4.375 化成了分数$\dfrac{35}{8}$,这两步很关键.两种方法的不同之处是解法 1 运用了乘法的分配律,解法 2 则是采用了化简繁分式的通常方法——分子、分母同乘以一个不为 0 的数.这里还要指出:$\dfrac{1}{2}$,$\dfrac{1}{4}$,$\dfrac{3}{4}$,$\dfrac{1}{8}$,$\dfrac{3}{8}$,$\dfrac{5}{8}$,$\dfrac{7}{8}$的小数形式为 0.5,0.25,0.75,0.125,0.375,0.625,0.875,同学们一定要很熟悉,在具体计算时,可以节省时间.

【例 1-3】　计算:$\dfrac{19\dfrac{5}{9}+3\dfrac{9}{10}-5.22}{19\dfrac{5}{9}-6\dfrac{27}{50}+5.22}\div\left(\dfrac{1993\times0.4}{1995\times0.5}+\dfrac{1.6}{1995}\right).$

解　原式$=\dfrac{19\dfrac{5}{9}+\dfrac{45}{50}-2-\dfrac{11}{50}}{19\dfrac{5}{9}-1-\dfrac{27}{50}+\dfrac{11}{50}}\div\left(\dfrac{1993\times0.4}{1995\times0.5}+\dfrac{4\times0.4\times0.5}{1995\times0.5}\right)$

$=\dfrac{19\dfrac{5}{9}-1\dfrac{8}{25}}{19\dfrac{5}{9}-1\dfrac{8}{25}}\div\left[\dfrac{1993+(4\times0.5)}{1995}\times\dfrac{0.4}{0.5}\right]$

$=1\div\dfrac{0.4}{0.5}$

$=1\dfrac{1}{4}.$

【例 1-4】 化简:$\dfrac{3.875\times\frac{1}{5}+38\frac{3}{4}\times 0.09-0.155\div 0.4}{2\frac{1}{6}+\left[\left(4.32-1.68-1\frac{8}{25}\right)\times\frac{5}{11}-\frac{2}{7}\right]\div 1\frac{9}{35}+1\frac{11}{24}}$.

解 原式的分子$=\dfrac{31}{40}+\dfrac{31}{40}\times\dfrac{9}{2}-\dfrac{31}{40}\times\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{31}{40}\times\left(1+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{31}{8}.$$

原式的分母$=\dfrac{13}{6}+\left[\left(\dfrac{108}{25}-\dfrac{42}{25}-\dfrac{33}{25}\right)\times\dfrac{5}{11}-\dfrac{2}{7}\right]\times\dfrac{35}{44}+\dfrac{35}{24}$

$$=\frac{13}{6}+\left[\frac{33}{25}\times\frac{5}{11}-\frac{2}{7}\right]\times\frac{35}{44}+\frac{35}{24}$$

$$=\frac{13}{6}+\left[\frac{3}{5}-\frac{2}{7}\right]\times\frac{35}{44}+\frac{25}{24}$$

$$=\frac{13}{6}+\frac{11}{35}\times\frac{35}{44}+\frac{35}{24}$$

$$=\frac{93}{24}$$

$$=\frac{31}{8}.$$

所以,原式等于 1.

评注 解例 1-4 这类题时,在乘除运算中,小数宜化为分数,带分数宜化为假分数,并将运算结果及时约分. 在加减运算中,当小数、分数都出现时,通常都化为分数,因为分数化为小数时,有可能出现无限循环小数. 当然,在能都化为有限小数时,也可以都化为小数.

【例 1-5】 计算:$\dfrac{(1+17)\times\left(1+\frac{17}{2}\right)\times\left(1+\frac{17}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{17}{19}\right)}{(1+19)\times\left(1+\frac{19}{2}\right)\times\left(1+\frac{19}{3}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{19}{17}\right)}$.

分析 本题的分子、分母不能按照计算顺序逐个乘起来,比较观察可知,分子部分为 $18\times\frac{19}{2}\times\frac{20}{3}\times\frac{21}{4}\times\cdots\times\frac{36}{19}=18\times19\times20\times\cdots\times36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\cdots\times\frac{1}{19}$,分母部分为 $20\times\frac{21}{2}\times\frac{22}{3}\times\cdots\times\frac{36}{17}=20\times21\times\cdots\times36\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\cdots\times\frac{1}{17}$. 再通过约分就可以简便地算出结果来.

解　原式$=\dfrac{18\times\dfrac{19}{2}\times\dfrac{20}{3}\times\cdots\times\dfrac{36}{19}}{20\times\dfrac{21}{2}\times\dfrac{22}{3}\times\cdots\times\dfrac{36}{17}}$

$$=\frac{18\times19\times20\times\cdots\times36\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\cdots\times\dfrac{1}{19}}{20\times21\times22\times\cdots\times36\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\cdots\times\dfrac{1}{17}}$$

$$=18\times19\times\frac{1}{18}\times\frac{1}{19}$$

$$=1.$$

评注　当分数的分子、分母都以比较复杂的算式出现时,应该把分子、分母看作一个整体,看能不能运用分数的基本性质进行约分.

【例 1-6】　计算:$\dfrac{1.2\times2.4\times4.8+2\times4\times8+\dfrac{1}{13}\times\dfrac{2}{13}\times\dfrac{4}{13}}{1.2\times3.6\times10.8+2\times6\times18+\dfrac{1}{13}\times\dfrac{3}{13}\times\dfrac{9}{13}}$.

分析　如果按照运算顺序分别算出分子和分母部分的结果,那就太麻烦了,观察算式的特点,分子部分三项的积都含有因数 $1\times2\times4$,分母部分三项的积都含有因数 $1\times3\times9$,可以将分子部分的表示形式转化为 $1\times2\times4\times\left[1.2^3+2^3+\left(\dfrac{1}{13}\right)^3\right]$,分母部分的表示形式转化为 $1\times3\times9\times\left[1.2^3+2^3+\left(\dfrac{1}{13}\right)^3\right]$,通过约分就可以很简便地算出结果来.

解　原式$=\dfrac{1.2^3\times1\times2\times4+2^3\times1\times2\times4+\left(\dfrac{1}{13}\right)^3\times1\times2\times4}{1.2^3\times1\times3\times9+2^3\times1\times3\times9+\left(\dfrac{1}{13}\right)^3\times1\times3\times9}$

$$=\frac{1\times2\times4\times\left[1.2^3+2^3+\left(\dfrac{1}{13}\right)^3\right]}{1\times3\times9\times\left[1.2^3+2^3+\left(\dfrac{1}{13}\right)^3\right]}$$

$$=\frac{8}{27}.$$

评注　直接计算比较麻烦,这里是逆向应用分配律,并把公因数提出来,从整体考虑使计算变得简单.

下面以两个例子来介绍有规律的数的运算.

【例 1-7】 计算:$19+9\frac{1}{2}+7\frac{1}{4}+3\frac{1}{8}+8\frac{1}{16}+4\frac{1}{32}$.

解 原式$=(19+9+7+3+8+4)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)$

$=50+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{32}\right)-\frac{1}{32}$

$=50+1-\frac{1}{32}$

$=50\frac{31}{32}$.

【例 1-8】 计算:$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\frac{3}{60}+\cdots+\frac{59}{60}\right)$.

分析与解 逐项相加,计算很繁琐,现对同分母的一组中各数相加,找规律.因为$\frac{k}{n}+\frac{n-k}{n}=1$,于是有$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$,$\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}=1\frac{1}{2}$,$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}+\frac{4}{5}=2$,$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{4}{6}+\frac{5}{6}=2\frac{1}{2}$,…,$\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60}=29\frac{1}{2}$.

所以,原式$=\frac{1}{2}+1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+\cdots+29\frac{1}{2}$

$=\frac{1}{2}\times(1+2+\cdots+59)=885$.

同步训练

A 组

1. 计算:$6.8\times\frac{8}{25}+0.32\times4.2-8\div25=$________.

2. 计算:$\left(\frac{191919}{989898}+\frac{190190}{980980}+\frac{19001900}{98009800}\right)\div\frac{19}{98}\div\frac{9898}{1919}=$________.

3. 1000减去它的一半,再减去余下的$\frac{1}{3}$,再减去余下的$\frac{1}{4}$,依此下去,直到减去余下的$\frac{1}{500}$,最后剩下________.

4．计算：$\dfrac{1+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{3}}}{1-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}=$________.

5．计算：$\left(265\dfrac{6}{7}+181\dfrac{10}{11}+153\dfrac{12}{13}\right)\div\left(\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{13}\right)=$________.

6．计算：$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{62}+\dfrac{1}{124}+\dfrac{1}{248}+\dfrac{1}{496}=$________.

7．计算：$41\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}+51\dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{5}+61\dfrac{1}{5}\times\dfrac{5}{6}=$________.

8．计算：$\dfrac{1\dfrac{2}{3}+2\dfrac{3}{4}+3\dfrac{4}{5}+\cdots+1994\dfrac{1995}{1996}+1995\dfrac{1996}{1997}}{3\dfrac{1}{3}+5\dfrac{2}{4}+7\dfrac{3}{5}+\cdots+3989\dfrac{1994}{1996}+3991\dfrac{1995}{1997}}=$________.

B 组

9．计算：$76\times\left(\dfrac{1}{23}-\dfrac{1}{53}\right)+23\times\left(\dfrac{1}{53}+\dfrac{1}{76}\right)-53\times\left(\dfrac{1}{23}-\dfrac{1}{76}\right)=$________.

10．计算：$\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{8}\right)-\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{12}\right)+\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{16}\right)-\left(\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{20}\right)=$________.

11．尽可能化简：$\dfrac{116690151}{427863887}$.

12．计算：

$$\dfrac{1}{1}+\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{3}{1}-\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{4}{1}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\dfrac{9}{1}-\dfrac{8}{2}+\dfrac{7}{3}-\dfrac{6}{4}+\cdots+\left(\dfrac{1}{9}\right)\right).$$

C 组

13．计算：$481\dfrac{1}{6}+265\dfrac{1}{12}+904\dfrac{1}{20}-184\dfrac{29}{30}-160\dfrac{41}{42}-703\dfrac{55}{56}$.

14．若 $\dfrac{n}{666}=0.2y17y17y17\cdots$，其中 y 为一个数码且 $y17$ 为循环节．请问：正整数 n 的最大可能值是什么？

第 2 讲　比较大小

> 数学的基本结果往往是一些不等式而不是等式.
>
> ——E. 贝肯巴赫

知识方法述要

比较大小在我们的日常生活中经常遇到，如比较年龄大小、东西多少、线段长短、面积大小、价格高低等，都是比较数的大小. 比较两个数的大小有许多方法，本讲通过典型例题介绍常用的几种方法.

例题精讲

【例 2-1】 将 $3.\dot{1}\dot{4}$，$3.1\dot{4}$，$3.\dot{1}4\dot{1}$，3.14，3.141 按照从大到小的顺序排列：________，________，________，________，________.

解　$3.\dot{1}\dot{4}=3.141414\cdots$，$3.1\dot{4}=3.144444\cdots$，$3.\dot{1}4\dot{1}=3.141141\cdots$，$3.14=3.140000\cdots$，$3.141=3.141000\cdots$（添 0 是为了便于比较），它们的整数部分、小数的十分位和百分位上的数字相同，通过比较千分位和万分位上的数字，知

$$3.1\dot{4}>3.\dot{1}\dot{4}>3.\dot{1}4\dot{1}>3.141>3.14.$$

评注　比较循环小数大小的方法是：先把循环小数改写成无限小数的形式，再按比较小数大小的方法来判断谁大谁小.

【例 2-2】 编号为 1，2，3 的三只蚂蚁分别举起质量为 $\frac{115}{127}$，$\frac{302}{333}$，$\frac{439}{488}$ 克的重物. 问：金、银、铜牌应分别发给几号蚂蚁？

分析与解　这是第六届“华杯赛”的一道初赛题. 本题实际上是要把三个分数 $\frac{115}{127}$，$\frac{302}{333}$，$\frac{439}{488}$ 按从大到小的顺序排列. 当然可以把它们都转化为小数：$\frac{115}{127}=0.905\cdots$，

$\frac{302}{333}=0.906\cdots$，$\frac{439}{488}=0.899\cdots$，再比较大小. 但这样比较麻烦、费时，而且事先并不能判定小数取几位才能比较出大小，要在初赛给定的几十秒钟内算出结果是很难的. 为此采用的简便解法如下.

考虑到这三个分数都接近于 1，因此它们从大到小的排列顺序与 1 和它们的差 $\frac{12}{127}$，$\frac{31}{333}$，$\frac{49}{488}$ 从小到大的排列顺序相同. 将它们都化为分子为 1 的分数形式（除法简单了!）：

$$\frac{1}{10.5\cdots},\frac{1}{10.7\cdots},\frac{1}{9.9\cdots},$$

由于分母越大，值越小，立即可知：$\frac{1}{10.7\cdots}$ $\left(即\frac{302}{333}\right)$ 排第一，$\frac{1}{10.5\cdots}$ $\left(即\frac{115}{127}\right)$ 排第二，$\frac{1}{9.9\cdots}\left(即\frac{439}{488}\right)$ 排第三.

即

$$\frac{115}{127}=1-\frac{12}{127}=1-\frac{127}{12}=1-\frac{1}{10.5\cdots},$$

$$\frac{302}{333}=1-\frac{31}{333}=1-\frac{1}{\frac{333}{31}}=1-\frac{1}{10.7\cdots},$$

$$\frac{439}{488}=1-\frac{49}{488}=1-\frac{1}{\frac{488}{49}}=1-\frac{1}{9.9\cdots}.$$

因为 $\frac{1}{10.7\cdots}<\frac{1}{10.5\cdots}<\frac{1}{9.9\cdots}$，所以 $\frac{302}{333}>\frac{115}{127}>\frac{439}{488}$.

故金牌给 2 号，银牌给 1 号，铜牌给 3 号.

评注　要灵活处理这种比较若干个分数大小的问题，针对这些分数形式上的特点，采用相应的方法，以期迅速得到结果，没有一个固定的方法可言（除非是将它们都变成小数后比较）.

【例 2-3】　试比较 $\frac{111}{1111}$ 和 $\frac{1111}{11111}$ 哪个分数大.

分析　比较 $\frac{111}{1111}$ 和 $\frac{1111}{11111}$，用通分的方法很麻烦，我们采用求倒比较法，即先比较它们倒数的大小，倒数大的分数反而小.

解　观察这两个分数的倒数：

$\frac{111}{1111}$的倒数是$\frac{1111}{111}=10\frac{1}{111}$,

$\frac{1111}{11111}$的倒数是$\frac{11111}{1111}=10\frac{1}{1111}$,

而$10\frac{1}{111}>10\frac{1}{1111}$,

因为倒数越大,原数越小,所以$\frac{111}{1111}<\frac{1111}{11111}$.

评注 例2-3的解法很多.如果你熟悉分数的一个重要性质:一个真分数的分子、分母分别加上一个相同的正数,所得的分数大于原来的分数,那么本题的答案可以从下面的比较得到:

$$\frac{111}{1111}=\frac{1110}{11110}<\frac{1110+1}{11110+1}=\frac{1111}{11111}.$$

如果你熟悉循环小数的分数表示法,那么也可以这样做:

$$\frac{111}{1111}=\frac{999}{9999}=0.\dot{0}99\dot{9},\frac{1111}{11111}=\frac{9999}{99999}=0.\dot{0}999\dot{9},$$

再比较这两个循环小数的大小,可以得到答案.

虽然这两种解法多用了一些超出小学课程内容的知识,但是并不比用倒数的方法简便.

【例2-4】 有5个分数:$\frac{2}{3},\frac{5}{8},\frac{15}{23},\frac{10}{17},\frac{12}{19}$,如果按大小顺序排列,那么排在中间的是哪个数?

分析 比较分数大小,通常的做法是先通分,再比较分子的大小.这道题目的5个分母通分,公分母会是个很大的数,算起来很复杂.我们可以换个方式:将5个分数的分子换成相同的数,再比较分母的大小.也就是说,先找出分子的最小公倍数,再将这些分数进行等值变换.

解 分子的最小公倍数是60,给出的5个分数依次等于:

$$\frac{60}{90},\frac{60}{96},\frac{60}{92},\frac{60}{102},\frac{60}{95},$$

比较分母的大小,居中的分数是$\frac{60}{95}$,即$\frac{12}{19}$.

评注 例2-4是第五届"华杯赛"的一道初赛题,要求选手在60秒内解答完,目的是测验选手的速算技巧和灵活性.如果按通常先找分母最小公倍数的做法,那么不可能在60秒内解答完.

【例 2-5】　图 2-1 中有红色的正方形和圆各一个，蓝色的正方形和圆各一个．红色正方形的边长是 1995 厘米，蓝色正方形的边长是 1993 厘米，红色圆的直径是 2000 厘米，蓝色圆的直径是 2002 厘米．问：红色部分的面积大还是蓝色部分的面积大？（π 取近似值 3.14）

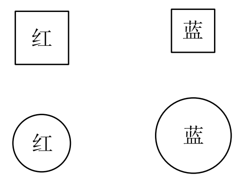

图 2-1

分析与解　如果直接计算比较两个部分的面积大小，那么势必太麻烦．可以这样考虑：

把蓝色正方形盖在红色正方形上，把红色圆盖在蓝色圆上，我们发现：

（1）红色正方形的面积比蓝色正方形的面积大一个宽度为 1 厘米的方框，方框的面积为$(1995+1993)\times2=3988\times2$（平方厘米）．

（2）蓝色圆的面积比红色圆的面积大一个宽度为 1 厘米的圆环，把这个圆环拼成宽为 1 厘米，长近似为 3.14×2001 厘米的近似长方形，圆环的面积近似等于 3.14×2001（平方厘米）．

显然方框的面积比圆环的面积大，因此红色部分的面积比蓝色部分的面积大．

【例 2-6】　试比较

$$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{296个2}与\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{185个3}$$

哪一个大．

分析　要比较两个（正）数的大小，可采用求商比较法，即要比较 A 与 B 的大小（A，B 都是正数），我们就求出商$\dfrac{A}{B}$，将这个商与 1 比较大小．如果$\dfrac{A}{B}>1$，则 $A>B$；如果$\dfrac{A}{B}=1$，则 $A=B$；如果$\dfrac{A}{B}<1$，则 $A<B$．

解　因为 $296=37\times8$，$185=37\times5$，所以

$$\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{296个2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{185个3}}$$

$$=\underbrace{\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8个2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5个3}}\times\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8个2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5个3}}\times\cdots\times\frac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8个2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5个3}}}_{37个}$$

因为$\dfrac{\overbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}^{8个2}}{\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{5个3}}=\dfrac{256}{243}>1$,所以$\underbrace{2\times2\times2\times\cdots\times2}_{296个2}>\underbrace{3\times3\times3\times\cdots\times3}_{185个3}$.

同步训练

A 组

1. 现有5个数A,B,C,D,E.如果A大于D,C大于B而小于E,B大于D,E小于A,那么________>________>________>________>________.

2. 有红、黄、蓝、白、黑5种颜色的玻璃球若干个.已知黄的比蓝的多、比红的少,蓝的比白的多,红的比黑的少,那么(　　).

A. 黑<白　　B. 黑>白　　C. 黑=白　　D. 无法判断

3. 判断A,B,C,D与1的大小关系.

$A\div0.1=1$,$1.2\div B=1$,$C\times0.03=1$,$120\times D=1$,则

A ________ 1,B ________ 1,C ________ 1,D ________ 1.

4. $1.6\times A=B\div\dfrac{3}{4}=C\times\dfrac{4}{7}=D\div1\dfrac{1}{4}$,把$A,B,C,D$按从小到大的顺序排列是________<________<________<________.

5. 养鸡专业户要用96米长的竹篱笆围成一个长方形或正方形的养鸡场.若围成长方形,则其长是宽的2倍,且一条长边利用旧墙;若围成正方形,则也有一条边利用旧墙.那么,________的面积比________的面积大,大________平方米.

6. 甲、乙两根绳子同样长.如果甲绳剪去$\dfrac{2}{5}$,乙绳剪去$\dfrac{2}{5}$米,那么这时两根绳子相比较是________.

①甲绳长;②一样长;③乙绳长;④不能确定哪根长.

7. 在下面四个算式中,最大的得数是(　　).

A. $\left(\dfrac{1}{17}+\dfrac{1}{19}\right)\times20$　　B. $\left(\dfrac{1}{24}+\dfrac{1}{29}\right)\times30$

C. $\left(\dfrac{1}{31}+\dfrac{1}{37}\right)\times40$　　D. $\left(\dfrac{1}{41}+\dfrac{1}{47}\right)\times50$

8. 在下面四个算式中,最大的得数是(　　).

A. $1992\times1999+1999$　　B. $1993\times1998+1998$

C. $1994\times1997+1997$　　D. $1995\times1996+1996$

B 组

9. 把下面各数填在适当的横线上.

$$\frac{14}{19},\frac{13}{24},\frac{14}{23},\frac{15}{19},\frac{13}{23}$$

________ < ________ < ________ < ________ < ________.

10. 有 8 个数,$0.\dot{5}\dot{1}$,$\frac{2}{3}$,$\frac{5}{9}$,$0.5\dot{1}$,$\frac{24}{47}$,$\frac{13}{25}$是其中的 6 个.如果从小到大排列,第四个数是 $0.5\dot{1}$,那么从大到小排列,第四个数是________.

11. 图 2-2 是两个红色的圆和两个蓝色的圆,红色圆的直径分别是 1992 厘米和 1949 厘米,蓝色圆的直径分别是 1990 厘米和 1951 厘米.问:两个红色圆的面积大还是两个蓝色圆的面积大?

12. 图 2-3 中的大圆盖住了小圆的一半面积(阴影).问:在小圆内的大圆的弧线 AMB 的长度和小圆的直径相比,哪个比较长一些?

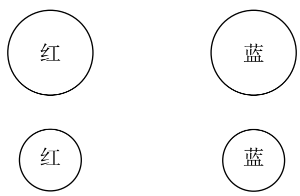

图 2-2

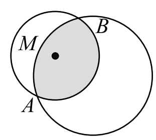

图 2-3

C 组

13. 图 2-4 中有两个红色的正方形,两个蓝色的正方形,它们的面积已在图中标出(单位:平方厘米),问:红色的两个正方形面积大还是蓝色的两个正方形面积大?请说明理由.

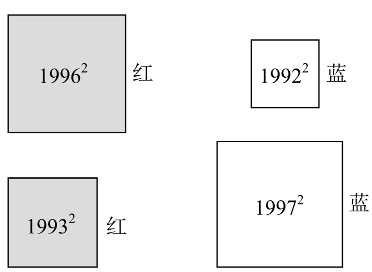

图 2-4

14. 给出如下十个自然数:

6907,73,769,3043,19,1480,373,41,321,21,768,178.

请你说出 25758 是其中哪几个数之和?

第3讲　估计与估算

一个人就好像一个分数，他的实际才能好比分子，而他对自己的估价好比分母. 分母越大，则分数的值就越小.

——托尔斯泰

知识方法述要

在日常生活中，人们经常根据实际经验对某些量作一个大致估计，比如，某人的身高估计有 1.7 米，明年某市工农业总产值估计有 800 亿元等. 这些估计只能是一个大概数，很难也没有必要精确到几厘米几毫米、几元几角几分. 估算是人们运用各种技巧所进行的快速近似计算.

$\left(1+\frac{19}{92}\right)+\left(1+\frac{19}{92}\times 2\right)+\left(1+\frac{19}{92}\times 3\right)+\cdots+\left(1+\frac{19}{92}\times 10\right)+\left(1+\frac{19}{92}\times 11\right)$结果是 x，那么，与 x 最接近的整数是________.

这道题并不要求计算出 x，而是求"与 x 最接近的整数"，这就是估计或估算.

估计与估算是一种十分重要的算法，在生活实践和数学解题中有广泛的应用，其表现形式通常有以下两种.

(1) 省略尾数取近似值，即观其"大概".

(2) 用放大或缩小的方法来确定某个数或整个算式的取值范围，即估计范围.

例题精讲

【例 3-1】 教师在黑板上写了 13 个自然数，让小明计算其平均数(保留两位小数)，小明计算出的答案是 12.43. 教师说最后一位数字错了，其他的数字都对. 请问：正确答案应该是什么？

分析 乍看一下题目，好像条件不够，我们不知道这 13 个数具体是多少，只知道一个错误的平均数，怎样推导出正确答案呢？仔细审查题意，教师又说最后

一位数字错了,换句话说,前3个数字都是正确的,这就告诉了我们正确的答案应在12.40与12.49之间.因此在计算平均数进行四舍五入之前,正确的答案至少是12.395,且小于12.495.由于$12.395\times13=161.135$,$12.495\times13=162.435$,可见这13个自然数的和应该在161.135与162.435之间,而在这个范围内只有一个整数162,因此这13个自然数的和一定是162,正确的平均数应该是$162\div13\approx12.46$.

解 设正确答案为x,则$12.39<x<12.50$. x是13个自然数的平均数,它的13倍应为一个自然数,所以$161.07<13x<162.5$.

但$161\div13\approx12.38$,$162\div13\approx12.46$.

故应判断$13x$的近似值为162,$x\approx162\div13\approx12.46$.

答:正确答案是12.46.

评注 例3-1中所用的方法称为"放缩法".

对于一个数(比如例3-1中13个数的平均数),如果不知道它的确切数值,我们可以根据题设条件,适当地将它放大或缩小,使它落在一个便于考查的范围内,再进一步确定它的具体值.

当然,这里"放大"与"缩小"要有利于问题的解决.如果放得过大或缩得太小,结果无法确定正确值,反而把问题弄得更复杂,这样施行"放缩"就失败了.

【例3-2】 有34个偶数的平均数,如果保留一位小数,是15.9,如果保留两位小数,得数最小是________.

解 据题设得$15.85\leqslant$平均数<15.95,于是$34\times15.85\leqslant$平均数$\times34<15.95\times34$,即$538.90\leqslant$34个偶数的和<542.30,即$539\leqslant$34个偶数的和$\leqslant542$.因为偶数的和是偶数,又要求最小,故偶数和应是540,$540\div34=15.882\cdots\approx15.88$,故得数最小是15.88.

【例3-3】 求算式$\dfrac{0.12345\cdots051}{0.515049\cdots321}$在表示为小数时,小数点后的第一、第二、第三位数字.

分析与解 如果我们能知道这个算式的值在两个小数之间,而这两个小数的小数点后前三位都相同,那么这三位数字就是当这个算式的值表示为小数时,小数点后的前三位数字.因此,我们考虑将这个算式的分子分母进行"放缩".

用a表示这个算式的值,尝试分子取4位小数,分母取1位小数进行"放缩".

$$\frac{0.1234}{0.6}<a<\frac{0.1235}{0.5},$$

即 $0.2056\cdots<a<0.247\cdots$，无法确定 a 的前三位小数，是因为“放缩”的尺度太大.

尝试分子取 4 位小数，分母取 2 位小数，进行“放缩”.

$$\frac{0.1234}{0.52}<a<\frac{0.1235}{0.51},$$

即 $0.2373\cdots<a<0.2421\cdots$，仍不能确定 a 的前三位小数，继续缩小“放缩”的尺度.

再尝试分子取 5 位小数，分母取 3 位小数，进行“放缩”.

$$\frac{0.12345}{0.516}<a<\frac{0.12346}{0.515},$$

即 $0.2392\cdots<a<0.2397\cdots$，这次放缩成功了，$a$ 是 0.239，其小数点后的前三位是 2，3，9.

评注 从例 3-3 我们看到，放缩尺度的选择是很重要的，尺度太大达不到效果，尺度太小会使计算繁复. 适当的“放缩”尺度需要不断地尝试和不断地总结经验.

【例 3-4】 前 n 项自然数，去掉最小的 20 项，余下的各数之和恰好等于去掉最大的几项余下的各数之和，求 n 的所有可能值.

解 $1+2+\cdots+19+20=210=2\times3\times5\times7$.

去掉最大的几项之和应为 210. 因此，不可能只去 2 项. 而 $21+22+\cdots+29=225>210$，最多只能去掉最大的 8 项.

去掉 3 项，中间一项为 $\frac{210}{3}=70$，$n=71$；

去掉 4 项，中间两项之和为 $\frac{210}{2}=105=52+53$，$n=54$；

去掉 5 项，中间一项为 $\frac{210}{5}=42$，$n=44$；

去掉 6 项，中间两项之和为 $\frac{210}{3}=70$，不是奇数；

去掉 7 项，中间一项为 $\frac{210}{7}=30$，$n=33$；

210 不是 4 的倍数，不能去掉 8 项.

答：n 的可能值是 71，54，44，33.

评注 例 3-4 解答时首先估计项数的范围，然后逐一检验，以确定问题的解.

【例3-5】已知 $S=\frac{1}{\frac{1}{2006}}+\frac{1}{\frac{1}{2007}}+\frac{1}{\frac{1}{2008}}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{2020}}$,求 S 的整数部分.

解　由于 $\frac{1}{2006}>\frac{1}{2007}>\cdots>\frac{1}{2020}$,可对 S 的分母进行放缩:

$$\frac{3}{404}=15\times\frac{1}{2020}<\frac{1}{2006}+\frac{1}{2007}+\cdots+\frac{1}{2020}<15\times\frac{1}{2006}=\frac{15}{2005},$$

所以 $133\frac{11}{15}=\frac{1}{\frac{15}{2006}}<S<\frac{1}{\frac{3}{404}}=134\frac{2}{3}$. 因此,$S$ 的整数部分是 134.

评注　例3-5运用的是典型的放缩技巧.对一列数连加的和进行估计时,我们从中找出最大者与最小者.把所有的数都放大成最大者,得到和 M;把所有的数都缩小成最小者,得到和 m,那么原来的和应在 m 与 M 之间.

【例3-6】　洗衣服要打好肥皂,揉搓得很充分,再拧一拧,当然不可能全拧干.假设使劲拧紧后,衣服上还留有1千克带污物的水.现在有清水18千克,假设每次用来漂洗的水都是整数千克.

(1)分成两次漂洗后,最少的污物残留量是漂洗前的几分之几?

(2)要使污物的残留量小于漂洗前的 $\frac{1}{300}$,至少要漂洗几次?

请给出符合条件的一种漂洗方案.(假设每次漂洗结束时,污物能均匀分布在水中)

解　(1)先把18千克清水平均分成两份,每份9千克,每次用9千克清水漂洗衣服,连同衣服里未拧干的1千克水,共10千克,“拧干”时,污物残留量是原来的 $\frac{1}{10}$.两次漂洗后,污物残留量是原来 $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$.

(2)要使漂洗后污物的残留量小于原来的 $\frac{1}{300}$,至少要漂洗3次.

下面是一种方案:把18千克清水平均分成3份,每份6千克,每次漂洗后,污物残留量是漂洗前的 $\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$.3次漂洗后,污物残留量是原来的

$$\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}\times\frac{1}{7}=\frac{1}{343}<\frac{1}{300}.$$

评注　例3-6中,如果把18千克水分成5千克、6千克、7千克或者4千克、6千克、8千克,可得到另外两种方案.

同步训练

A 组

1. 有若干个小朋友，他们的年龄各不相同. 将他们的年龄分别填入下式的□中，都能使不等式成立. 这些小朋友最多有________个.

$$\frac{1}{2}<\frac{5}{\square}<\frac{3}{4}.$$

2. $\frac{9}{10}+\frac{99}{100}+\frac{999}{1000}+\cdots+\frac{9999999999}{10000000000}$的整数部分是________.

3. $A=\frac{19}{97}+\frac{19}{97}\times2+\frac{19}{97}\times3+\cdots+\frac{19}{97}\times10$，与 A 最接近的整数是________.

4. 有 24 个偶数的平均数，如果保留一位小数的得数是 15.9，那么保留两位小数的得数是________.

5. 1995003 这个数，最多可以拆成________个不同的正整数相加的和.

6. 有一长 3 米的线段，第一次把这条线段三等分后去掉中间一部分，第二次再把剩下的两条线段中的每一段都三等分后去掉中间一部分，第三次再把剩下的所有线段的每一段都三等分后去掉中间一部分. 继续这一过程，这样至少连续________次后，才使剩下的所有线段的长度的和小于 0.4 米.

7. 已知 $S=\dfrac{1}{\frac{1}{1980}+\frac{1}{1981}+\frac{1}{1982}+\cdots+\frac{1}{1997}}$，那么 S 的整数部分是________.

8. 已知 $a=\dfrac{11\times66+12\times67+13\times68+14\times69+15\times70}{11\times65+12\times66+13\times67+14\times68+15\times69}\times100$，则 a 的整数部分是________.

B 组

9. 在算式 $4+8+12+\cdots$ 中，任意连续两项之间的差是一个固定的值. 当其和第一次超过 2022 时，算式中总共有________项.

10. 团体游园购买公园门票的票价表如表 3-1 所示.

表 3-1

购票人数	50 人以下	51～100 人	100 人以上
每人门票价	12 元	10 元	8 元

今有甲、乙两个旅游团，若分别购票，两团总计应付门票费 1142 元；若合在一起作为一个团体购票，总计只应付门票费 864 元. 这两个旅游团各有多少人？

11. 六个分数$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{3}$,$\frac{1}{5}$,$\frac{1}{7}$,$\frac{1}{11}$,$\frac{1}{13}$的和在哪两个连续自然数之间?

12. 从所有分母小于 10 的真分数中,找出一个最接近 0.618 的分数.

C 组

13. 设 a,b,c 是自然数,用四舍五入的方法计算三个分数的和,得近似值为$\frac{a}{5}+\frac{b}{7}+\frac{c}{8}\approx 1.35$,试求 a,b,c 的值.

14. 试比较$\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}\times\cdots\times\frac{99}{100}$与$\frac{1}{10}$的大小.