

数学培优竞赛一讲一练

(高一年级,第2版)

朱华伟 程汉波 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

本书是《数学培优竞赛讲座(高一年级,第2版)》(ISBN:9787302665083)的配套练习册,为读者提供自我检测.内容以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,按照普通高中高一年级数学教科书的进度分专题编写,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;在有利于学生把高中数学教科书的知识巩固深化的同时,恰到好处地为学生拓宽著名大学强基计划招生和竞赛数学的知识;以著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

本书附有参考答案及解析,为学生提供解题思路、方法和技巧,以检验学生对数学知识的理解水平和掌握程度.

本书可供高中准备参加高考数学、大学自主招生和高中数学竞赛的学生学习使用,也可供中学数学教师、数学爱好者、高等师范院校数学教育专业大学生、研究生及数学教师参考使用.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售.

版权所有,侵权必究.举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn.

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛一讲一练. 高一年级 / 朱华伟, 程汉

波编著. -- 2 版. -- 北京: 清华大学出版社, 2024.

6. -- ISBN 978-7-302-66506-9

I. G634.603

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024L3T135 号

责任编辑: 王 定

封面设计: 周晓亮

版式设计: 思创景点

责任校对: 成凤进

责任印制: 丛怀宇

出版发行: 清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址: 北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编: 100084

社 总 机: 010-83470000

邮 购: 010-62786544

投稿与读者服务: 010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈: 010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者: 大厂回族自治县彩虹印刷有限公司

经 销: 全国新华书店

开 本: 185mm×260mm

印 张: 10.5

字 数: 236 千字

版 次: 2022 年 8 月第 1 版

2024 年 7 月第 2 版

印 次: 2024 年 7 月第 1 次印刷

定 价: 49.80 元

产品编号: 106698-01

前言

从 1985 年我国第一次派队参加国际数学奥林匹克竞赛(简称 IMO)以来,中国代表队参加了 38 次 IMO(1985 年派两名队员参赛,1998 年因故没有参赛),24 次获总分第一(有 15 次六位队员都得金牌),8 次第二,2 次第三,第四、六、八名各 1 次,224 人次参赛,共获金牌 180 块,银牌 36 块,铜牌 6 块.早在 1994 年,中国科学院数学物理学部王梓坤院士就讲到,近年来,我国中学生在 IMO 中“连续获得团体冠军,个人金牌数也名列前茅,消息传来,全国振奋.我国数学,现在有能人,后继有强手,国内外华人无不欢欣鼓舞”.这对青少年学好数学无疑是极大的鼓励和鞭策,极大地激发了青少年学习数学的热情.

为了给对数学有兴趣的高中生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台,我们以高考数学难题、著名大学强基计划招生和国内外高中数学竞赛为背景,根据多年辅导高中生参加高考数学、大学自主招生、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛所积累下来的经验、体会和素材,编写了这套《数学培优竞赛讲座》(高一年级、高二年级、高三年级),以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》(高一年级、高二年级、高三年级).

《数学培优竞赛讲座》按照普通高中数学教科书的进度分专题编写,在内容的安排上力求与课堂教学同步,采用从课内到课外逐步引申扩充、由浅入深、由易到难、循序渐进的教学方法;在夯实基础的同时,通过新颖、有趣的数学问题,构建通往高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛的捷径;尽可能地帮助学生扩展知识视野,提高思维能力;在有利于学生把高中数学教材的知识巩固深化的同时,又恰到好处地为学生拓宽有关强基计划和竞赛数学的知识;以高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛中的热点、难点问题为载体,介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧,激发学生创新与发现的灵感,帮助学生开发智力,提高水平去参加高考数学、著名大学强基计划招生和高中数学竞赛.

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写,每讲的主要栏目如下.

名人名言欣赏:以名人名言开宗明义,开启每讲的数学学习之旅.

知识方法还要:详细归纳相关的知识、方法与技巧,突出重点、难点和考点.对于高中数学教科书没有的内容,尽可能给出新知识、新方法的产生背景.对给出的知识、方法与技巧尽可能做到系统、完整.

例题精讲:含“分析”“解”和“评注”,从易到难,拾级而上,由基础题、提高题、综合题组成.本丛中很多例题的解答之后有评注,评注是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析,以起到画龙点睛的作用;对可进一步深入研究的问题予以拓展引申,意在引导学生去创造;对一题多解的问题提出相关的解法,发现特技与通法之间的联系.总之,评注的目的在于,一方面揭示问题的背景和来源,另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提



出解决问题的新方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的。

同步训练：含选择题、填空题、解答题，为方便自学，在书后每题均给出详细解答过程。

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测；书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度。《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸显科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、应用意识和分析问题、解决问题能力的培养。希望通过对本丛书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和乐趣，进而激发学习数学的兴趣。

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词：“数学好玩。”我们深信本书能让学生品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说：“数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！”

本丛书是高中生参加数学竞赛的宝典，是冲刺著名大学强基计划招生、破解高考数学压轴题的利器，是中学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友。

在本丛书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢。由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正。

李华伟

2024年5月于深圳中学新校区

目 录

	试题	答案
第 1 讲 集合与逻辑	1	77
第 2 讲 基本不等式	3	79
第 3 讲 二次函数	5	81
第 4 讲 函数的概念、图像与性质	7	83
第 5 讲 幂函数、指数函数与对数函数	9	85
第 6 讲 绝对值	11	87
第 7 讲 不等式的解法	13	90
第 8 讲 三角函数的概念、图像与性质	15	92
第 9 讲 三角恒等变换	17	94
第 10 讲 三角不等式	19	96
第 11 讲 三角函数的最值	21	99
第 12 讲 反三角函数与三角方程	23	101
第 13 讲 三角代换	25	103
第 14 讲 正弦定理与余弦定理	27	105
第 15 讲 平面向量	29	107
第 16 讲 向量与几何	31	110
第 17 讲 复数的概念、运算与几何意义	33	113
第 18 讲 复数的三角形式、单位根及其应用	35	114
第 19 讲 复数与几何	37	116
第 20 讲 直线与平面	40	118
第 21 讲 空间角与距离	42	121
第 22 讲 截面、折叠与展开	44	125
第 23 讲 多面体与旋转体	47	129
第 24 讲 概率统计初步	50	132
第 25 讲 圆	53	135
第 26 讲 点共线与线共点	57	138



	试题	答案
第 27 讲 平面几何中的著名定理	61	142
第 28 讲 几何不等式与几何极值	65	146
第 29 讲 几何变换	69	150
第 30 讲 轨迹与作图	73	155

第1讲 集合与逻辑

一、填空题

1. 设集合 $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, 若 A 中所有三元子集的三个元素之和组成的集合为 $B = \{-1, 3, 5, 8\}$, 则集合 $A =$ _____.

2. 已知 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}_+, A = \{x^2 + x + 1, -x, -x - 1\}, B = \left\{-y, -\frac{y}{2}, y + 1\right\}$. 若 $A = B$, 则 $x^2 + y^2 =$ _____.

3. 在集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2011\}$ 中, 末位数字为 1 的元素个数为_____.

4. 设 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 为正整数, 任取其中四个数求和, 得到集合 $\{44, 45, 46, 47\}$, 则这五个数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 的值从小到大依次为_____.

5. 如果集合 A, B 同时满足 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}, A \cap B = \{1\}, A \neq \{1\}, B \neq \{1\}$, 就称有序集对 (A, B) 为“好集对”. 这里有序集对 (A, B) 意指, 当 $A \neq B$ 时, (A, B) 和 (B, A) 是不同的集对. 那么“好集对”一共有_____个.

6. 设 S 为 $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ 的一个子集, 且 S 中任意两个不同元素的和都不能被 5 整除. 请问: 集合 S 中最多能有_____个元素.

7. 设 a_1, a_2, a_3, a_4 是四个有理数, 使得

$$\{a_i a_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} = \left\{-24, -2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 1, 3\right\},$$

则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 的值为_____.

8. 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ 的两个子集, 满足: A 与 B 的元素个数相同, 且 $A \cap B$ 为空集. 若 $n \in A$, 总有 $2n + 2 \in B$, 则集合 $A \cup B$ 的元素个数最多为_____.

二、解答题

9. 已知集合 $A = \{(x, y) \mid ax + y = 1\}, B = \{(x, y) \mid x + ay = 1\}, C = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$, 则

(1) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 是一个二元集?

(2) 当 a 取何值时, $(A \cup B) \cap C$ 是一个三元集?



10. 判断下面命题是否正确:

设 A, B 是坐标平面上两个点集, $C_r = \{(x, y) \mid X^2 + y^2 \leq r^2\}$. 若对任何 $r \geq 0$ 都有 $C_r \cup A \subseteq C_r \cup B$, 则必有 $A \subseteq B$.

11. 设 S 是一些互不相同的四元数组 (a_1, a_2, a_3, a_4) 的集合, 其中 $a_i = 0$ 或 $1, i = 1, 2, 3,$

4. 已知 S 的元素个数不超过 15, 且满足: 若 $(a_1, a_2, a_3, a_4), (b_1, b_2, b_3, b_4) \in S$, 则

$$(\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}, \max\{a_4, b_4\}) \in S$$

且

$$(\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}, \min\{a_4, b_4\}) \in S.$$

求 S 的元素个数的最大值.

第 2 讲 基本不等式

1. 设 $a, b, c, d > 0$, 求证: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geqslant ae + be + ce + de$.

2. 设 a, b 是正数, 求证: $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^3 \geqslant 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + 2$.

3. 已知正数 a, b, c 满足 $a^2 + ab + ac + bc = 6 + 2\sqrt{5}$, 求 $3a + b + 2c$ 的最小值.

4. 求函数 $f(x, y, z) = x^z + y^z - (xy)^{\frac{z}{4}}$, $x, y \in \mathbf{R}_+$, $z \in \mathbf{R}$ 的最小值.

5. 设 $x, y, z > 0$, 求证: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \geqslant \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z}$.



6. 设 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$, 且 $a + b + c = 1$, 求证:

$$(1+a)(1+b)(1+c) \geq 8(1-a)(1-b)(1-c).$$

7. 已知 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是正数, 且 $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$, 求证: $(2+a_1)(2+a_2) \cdots (2+a_n) \geq 3^n$.

8. 正数 x, y, z 满足 $9xyz + xy + yz + zx = 4$, 求证:

$$(1) \quad xy + yz + zx \geq \frac{4}{3};$$

$$(2) \quad x + y + z \geq 2.$$

9. 设 u, v, w 为正实数, 满足条件 $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$, 试求 $u + v + w$ 的最小值.

10. 设 $x, y, z \in \mathbf{R}$, 且 $x + y + z = 0$, 求证: $6(x^3 + y^3 + z^3)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)^3$.

11. 已知 a, b, c, d 是非负实数, 且 $a + b + c + d = 4$, 求

$$\frac{a}{b^3 + 4} + \frac{b}{c^3 + 4} + \frac{c}{d^3 + 4} + \frac{d}{a^3 + 4}$$

的最小值.

第3讲 二次函数

一、填空题

1. 若对任何实数 m , 二次函数 $f(x) = 3x^2 - mx + 2m + 1$ 都通过一定点, 则此定点坐标是_____.
2. 测量过程中, 由于测量仪器和人工观察等误差, 只能得到测量数据的近似值. 对于多次测量所得的数据 $a_1, a_2, \dots, a_n$, 通常要计算它的“最佳近似值” x (“最佳近似值” x 使得“ x 与这 n 个近似数据之差的平方和最小”), 则这个“最佳近似值” $x =$ _____.
3. 函数 $y = ax^2 + bx + c$ 的图像是开口向下的抛物线, a, b, c 各不相等, 且都在集合 $A = \{n \mid |n| \leq 5, n \in \mathbf{Z}\}$ 中取值, 则这些抛物线中通过点 $(0, -1)$ 的有_____条.
4. 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + 2x - 8 > 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - 2ax + 4 \leq 0\}$. 若 $a > 0$, 且 $A \cap B$ 中恰有一个整数, 则 a 的取值范围是_____.
5. 函数 $f(x) = ax^2 - 2ax + 2 + b (a \neq 0)$ 在 $[2, 3]$ 上有最大值 5 和最小值 2, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.
6. 函数 $y = \frac{x-2}{x^2-4x+5}$ 在 $x \in \left[\frac{5}{2}, 3\right]$ 上的最小值和最大值分别是_____.
7. 已知对于 x 的所有实数值, 二次函数 $f(x) = x^2 - 4ax + 2a + 12 (a \in \mathbf{R})$ 的值都是非负的, 则关于 x 的方程 $\frac{x}{a+2} = |a-1| + 2$ 的根的取值范围是_____.
8. 已知 a, b, c 都是正整数, 且抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴有两个不同的交点 A, B . 若 A, B 到原点的距离都小于 1, 则 $a + b + c$ 的最小值是_____.

二、解答题

9. 已知二次函数 $f(x)$ 满足:
 - (1) $f(-1) = 0$;
 - (2) 对一切 x 的值有 $x \leq f(x) \leq \frac{1+x^2}{2}$ 成立.求 $f(x)$ 的解析式.



10. 设函数 $f(x) = 5x^2 + bx + c$ ($b, c \in \mathbf{Z}$), 若方程 $f(x) = 0$ 在区间 $(2, 3)$ 上有两个不等的实根 x_1, x_2 , 求 $f(2) \cdot f(3)$ 的值.

11. 已知函数 $f(x) = ax^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$ ($a > 0$), 若在任何长度为 2 的闭区间上总存在两点 x_1, x_2 , 使 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \frac{1}{4}$ 成立, 求 a 的最小值.