

数学培优竞赛讲座

(四年级, 第2版)

朱华伟 编著

清华大学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以国内外小学数学各种培优竞赛为背景,以《义务教育数学课程标准》的理念和要求为准绳编写,力求与课堂教学同步,在夯实基础的同时,构建通往数学奥林匹克前沿的捷径.本书分培优篇和竞赛篇两大部分,按照专题讲座的形式编写,每讲均设置知识方法述要、例题精讲,并配有同步训练及参考答案,注重数学思想的渗透,通过穿插数学案例、名家名言及独特的解题思路,引导学生发现数学的美妙,从而激发学生学习数学的兴趣.

本书可供小学四年级师生及家长使用,也可供小学生数学竞赛培训机构人员参考.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

数学培优竞赛讲座. 四年级 / 朱华伟编著. -- 2 版.

北京:清华大学出版社,2024. 7. -- ISBN 978-7-302

-66663-9

I. G624.503

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024HU6178 号

责任编辑:王 定

封面设计:周晓亮

版式设计:思创景点

责任校对:成凤进

责任印制:

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:11.5 字 数:232 千字

版 次:2021 年 8 月第 1 版 2024 年 8 月第 2 版 印 次:2024 年 8 月第 1 次印刷

定 价:49.80 元

产品编号:106706-01

前 言

提升基础学科的科研水平，培养世界一流的拔尖创新人才，是推动人类文明进步和世界持续发展的重要动力。培养拔尖创新人才，一定要从娃娃抓起、从基础教育抓起。因此，重视并加强基础教育阶段的数学、物理等教育迫在眉睫，尤其是对于数理拔尖人才的早期识别和培养，给予这些好苗子一个适合的、特殊的成长机会及高水平的、有效的学习资源至关重要。

为了给对数学有兴趣的小学生提供一个扩展知识视野、提高解题能力和培养创新精神的平台，我们以国内外小学数学各种培优竞赛为背景，以《义务教育数学课程标准》的理念和要求为准绳，根据多年培训“华罗庚金杯赛”选手和辅导小学数学资优生参加数学考试的经验、体会和素材，编写了这套《数学培优竞赛讲座》（三年级、四年级、五年级、六年级），以及配套的《数学培优竞赛一讲一练》（三年级、四年级、五年级、六年级）。

《数学培优竞赛讲座》每册分培优篇和竞赛篇两大部分。

培优篇 与课堂教学同步，从课内到课外逐步引申扩充，由浅入深，由易到难，循序渐进，是课堂教学的自然延伸；在夯实基础的同时，通过新颖、有趣的数学问题，构建通往数学奥林匹克前沿的捷径；在学生力所能及的范围内扩展知识视野，提高思维能力；在巩固深化小学数学教材知识的同时，拓宽小学数学和竞赛数学的知识。

竞赛篇 以小学数学各种竞赛中的热点、难点问题为载体，介绍竞赛数学中令人耳目一新的解题方法与技巧，激发学生发现与创新的灵感。这些内容是数学奥林匹克竞赛中生动活泼、富于创新性的内容。这类问题的特点是涉及的数学知识较少而包含的技巧较多，理解和解决这类问题往往不需要很多专门的数学知识，而发现解法却相当困难，没有固定的模式可以套用。它要求学生自己去探索、尝试，通过观察、思考，利用归纳、枚举、类比、排序、估计、构造、递推、反证、奇偶分析、染色、赋值、不变量等方法，发现规律，找到解决问题的门径，这恰是数学奥林匹克竞赛试题所应有的风格。这些内容可帮助学生开发智力、提高水平，去参加高层次的竞赛。

《数学培优竞赛讲座》以专题讲座的形式编写，每讲的主要栏目如下。



名人名言欣赏：以名人名言开宗明义，开启每讲的数学学习之旅。

知识方法述要：详细归纳相关的知识、方法与技巧，突出重点、难点和赛点。

例题精讲：主要包含“分析”“解”“分析与解”和“评注”，由基础题、提高题、综合题组成。本书中很多例题的解答之后有评注，评注的作用是对某些问题或解答过程中意犹未尽之处进行阐述分析，以起到画龙点睛之效；对可进一步深入研究的问题予以拓展引申，引导学生去创造；对一题多解的问题提出相关的解法，发现特技与通法之间的联系。总之，评注的目的在于，一方面揭示问题的背景和来源，另一方面启迪学生发现解决问题的思路及通过合理猜测提出新问题的方法，使学生不仅知其然，更知其所以然，以期达到授之以渔的目的。

同步训练：含选择题、填空题、解答题，遵循因材施教原则，同步训练题的设置兼顾多个层次的学习需求，分为A，B，C三层，便于分层教学，师生在实际教学中可按需取舍。例如，对于数学基础较好的学生，可以在完成A组和B组习题的基础上努力尝试完成C组习题；对于数学基础较弱的学生，可以在完成A组习题的前提下努力尝试完成B组习题。为方便自学，在书后每题均给出了详细解答过程。

《数学培优竞赛一讲一练》是《数学培优竞赛讲座》的配套练习册，可以为使用者提供自我检测。书后附有详细解答，可以检验使用者对数学知识的理解水平和掌握程度。《数学培优竞赛一讲一练》与《数学培优竞赛讲座》配套使用，能达到更好的学习效果。

希望通过对本书的学习，学生能够发现数学的美丽和魅力，体会数学的思想和方法，感受数学的智慧和创新，体验经过不懈的探索而获得成功的兴奋和快乐，进而激发学习数学的兴趣。

本书是小学生参加数学竞赛的宝典，是冲刺重点中学、破解数学考试压轴题的利器，是小学数学教师进行数学竞赛辅导、进修的益友。

在本书的编写过程中，笔者参考并引用了有关资料中的优秀题目，为求简明，书中未一一注明出处，在此，谨向原题编者表示感谢。由于笔者水平有限，书中难免会有疏漏之处，诚挚欢迎读者批评与指正。

李华伟

2024年5月

目 录

培 优 篇/1

第 1 讲	智巧趣题	1
第 2 讲	乘除法的巧算	6
第 3 讲	巧填运算符号	13
第 4 讲	24 点游戏	17
第 5 讲	乘除法数字谜	21
第 6 讲	竖式除法填空题	27
第 7 讲	横式填空题	35
第 8 讲	有趣的数阵图 (1)	39
第 9 讲	有趣的数阵图 (2)	46
第 10 讲	平均数问题	53
第 11 讲	假设法与鸡兔同笼问题	58
第 12 讲	比较法与盈亏问题	63
第 13 讲	倒推法与还原问题	68
第 14 讲	归一问题	73
第 15 讲	数码问题	78
第 16 讲	行程问题	82
第 17 讲	三角形内角和	88
第 18 讲	巧算面积	94

竞 赛 篇/100

第 19 讲	图形的计数	100
第 20 讲	最短线路	106
第 21 讲	合理下料	113



第 22 讲 格点与面积	118
第 23 讲 几何趣题	126
第 24 讲 天平问题	131
同步训练参考答案	135



第1讲 智巧趣题

一个做学问的人,除学习知识外,还要有 *tast*, 这个词不太好翻译,有的译成品味,喜爱. 一个人要有大的成就,就要有相当清楚的 *tast*.

——杨振宁



知识方法述要

解答智巧趣题只需要动脑筋和具备一些最简单的计算知识即可,不需要其他知识. 这些题目可以训练学生的观察和数学思维能力,也可以作为课间娱乐性的“消遣”.



例题精讲

【例 1-1】 密封的瓶中,如果放进 1 个细菌,1 分钟后瓶中就充满了细菌. 已知每个细菌每秒分裂成 2 个,两秒分裂成 4 个……如果开始放进 2 个细菌,要使瓶中充满细菌,需要多少秒?

解 开始放进 2 个细菌,相当于“放入 1 个细菌时,第二秒开始时的情形”. 由题意知,要使瓶中充满细菌,需要 59 秒.

评注 例 1-1 将开始放进两个细菌,转化为“放入 1 个细菌时,第二秒开始时的情形”,这种解题策略在数学中称为化归. 匈牙利著名数学家路莎·彼得曾对化归给出一个夸张的比喻:“假设在你面前有煤气灶、水龙头、水壶和火柴,你想烧些



开水,应当怎么去做?”正确的回答是:“在水壶中放上水,点燃煤气,再把水壶放到煤气灶上。”接着路莎又提出了第二个问题:“如果其他的条件都没有变化,只是水壶中已经放了足够的水,这时你又当如何去做?”这时,人们往往会很有信心地回答:“点燃煤气,再把水壶放到煤气灶上。”但是路莎指出,这一回答并不能使她感到满意.因为,更好的回答应是这样的:“只有物理学家才会这样去做,而数学家们则会倒去壶中的水,并声称我已经把后一个问题化归成先前的问题了。”

上述比喻尽管有点夸张,但却十分生动地说明了化归的实质——把所需要解决的问题转化为已能解决的问题.

【例 1-2】 用一个平底锅烙饼,每次只能放 2 张饼,烙熟 1 张饼需 2 分钟(正、反面各需 1 分钟).如果要烙 7 张饼,最少需要多少分钟?

解 先一起放入 2 张饼,一分钟后,一面已熟,2 张饼均翻个身,一分钟后这 2 张饼都熟了,烙这 2 张饼共用了 2 分钟.

按照同样的方法再烙 2 张饼,仍用 2 分钟.

剩下的 3 张饼采取如下这样的烙法.

先将 2 张饼同时放入锅内一起烙,一分钟后 2 张饼都熟了一面,这时可取出 1 张,第 2 张翻个身,再放入第 3 张,又烙了一分钟,第 2 张已烙熟取出,第 3 张翻个身,再将第 1 张放入烙另一面,再烙一分钟,锅内的 2 张饼均已烙熟,可一起取出,烙最后 3 张共用了 3 分钟.

所以,烙 7 张饼最少需要 7 分钟.

评注 例 1-2 的烙法充分利用了平底锅每次烙 2 张饼的特点,所以所用时间是最少的.需要指出的是,例 1-2 源于一道流传很广的趣味数学题:

用一个平底锅烙饼,每次只能放 2 张饼,烙熟 1 张需 2 分钟(正、反面各需 1 分钟),问:烙熟 3 张饼最少要几分钟?

上述解法也正好是将 7 张饼化归为 3 张的情形.若将 7 张饼改为任意大于 3 的奇数,解法完全一样.

【例 1-3】 盒子中有 10 个红球、10 个白球和 10 个蓝球,它们的形状、大小都相同.如果我闭上眼睛,一次至少取出多少个,才能保证其中至少有 3 个球颜色相同?

解 从运气最坏的情况考虑,每种颜色的球各取 2 个,共有 6 个,这时再取 1 个,即共取 7 个,可确保有 3 个颜色相同的球.

评注 例 1-3 属于一类很有意思的问题,这类问题在小学、初中数学竞赛中屡见不鲜,如:

(1) 衣柜里有 10 件绿色的衣服、6 件白色的衣服、7 件红色的衣服、2 件蓝色

的衣服,如果闭着眼睛取衣服,那么至少要取_____件,才能保证取出的衣服中最少有两件颜色是相同的.(《小学生报》数学竞赛试题)

答案是5.

(2) 现在有黑色、白色、红色袜子各5只,它们的规格是一样的,混杂地放在一起,黑暗中想取颜色相同的袜子两双,问:至少要取多少只才能达到要求?(陕西省首届小学数学奥林匹克邀请赛试题)

答案是至少取10只.

这类问题的解法都是从“极端情形”考虑,问题的背景是抽屉原则——把 $n+1$ 件物品放到 n 个抽屉里,那么,必有一个抽屉要放进两件或两件以上的物体.

【例 1-4】 在密码学中,直接可以看到的内容为明码,对明码进行某种处理后得到的内容为密码. 有一种密码,将 26 个英文字母 $a, b, c, \dots, z$ (不论大小写)依次对应 $1, 2, 3, \dots, 26$ 这 26 个自然数,如表 1-1 所示. 当明码对应的序号 x 为奇数时,密码对应的序号 $y = (x+1) \div 2$; 当明码对应的序号 x 为偶数时,密码对应的序号 $y = x \div 2 + 13$.

表 1-1

字	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
字	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
序	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

按上述规定,请你算出明码“love”译成密码是什么?

解 明码 l 序号为 12, 密码对应序号为 $12 \div 2 + 13 = 19$, 密码为 s ;

明码 o 序号为 15, 密码对应序号为 $(15+1) \div 2 = 8$, 密码为 h ;

明码 v 序号为 22, 密码对应序号为 $22 \div 2 + 13 = 24$, 密码为 x ;

明码 e 序号为 5, 密码对应序号为 $(5+1) \div 2 = 3$, 密码为 c ;

所以, $love$ 译成密码为 $shxc$.



A 组

1. 杯子里有一些细菌,1 秒后每个细菌分裂为两个细菌,然后每隔 1 秒,杯里的每个细菌都一分为二,1 分钟后杯中充满了细菌. 那么,在经过_____秒时,杯中的细菌占据了半个杯子.

2. 从一本厚书中掉出了若干页,它们的页码相连,现知最前一面的页码为



327,最后一面的页码也是这几个数字,只是顺序不同,那么最后一面的页码是_____.

3. 一只蠕虫顺着桌腿往上爬,每天白天往上爬 3 厘米,晚上则往下掉 1 厘米,桌腿高 75 厘米,如果从地面算起,蠕虫需要_____天才能爬到桌腿顶端.

4. 口袋中有红、黄、蓝三种颜色的玻璃球各 50 个,不看口袋,至少要摸出_____个,才能保证摸出的红球与黄球的和比蓝球多,或黄球与蓝球的和比红球多,或蓝球与红球的和比黄球多.

5. 某人把一副黑、白两色的围棋子混装在一个盒子里,然后每次从盒子中摸出 3 枚棋子. 他至少摸_____次,才能保证其中有两次取出的棋子是相同的.

6. 三年级(2)班有 44 名学生,他们都订了甲、乙、丙三种报刊中的若干种:有的订甲,有的订乙,有的订丙,有的订甲、乙,有的订甲、丙或乙、丙,还有的甲、乙、丙三种都订. 他们中至少有_____名学生订的报刊相同.

7. 六年级(1)班共有 42 人,其中 20 人参加了数学竞赛,10 人参加了作文竞赛. 已知全班有 2 人既参加了数学竞赛又参加了作文竞赛,则没有参加这两个竞赛的有_____人.

8. 五年级(1)班有 46 人,喜欢打乒乓球的有 32 人,喜欢打羽毛球的有 26 人,既喜欢打乒乓球又喜欢打羽毛球的至少有_____人.

B 组

9. 盒子里有一些黑球和白球. 将黑球数量变成原来的 5 倍,总的球数将会变成原来的 2 倍. 如果将白球数量变成原来的 5 倍,那么总的球数将会变成原来的_____倍.

10. 小明和小华下棋,他们执棋从①号位出发,轮流顺着箭头方向前进(见图 1-1). 小明走的规则是 3 步—1 步—3 步—1 步……(即①—④—⑤—②…),小华走的规则是 2 步—1 步—2 步—1 步……(即①—③—④—⑥…). 那么在他们各自走了 100 次以后,小明的棋子走到了_____号位,小华的棋子走到了_____号位.

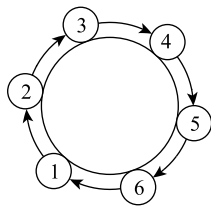


图 1-1

11. 试从数 1234512345123451234512345 中划去 10 个数字,使所剩下的数最大.

12. 男孩小佳说:“前天我还只有 10 岁,而明年我就要满 13 岁了.”试问:这可能吗?(注:计岁方法是只要未到 11 周岁生日,便都算为 10 岁)

C 组

13. 小猫咪咪在下雨之前总要打喷嚏,今天它打了喷嚏,小佳想:“这意味着今天要下雨了。”他的想法对吗?

14. 老师在一张纸上画了一些圆,他问学生甲:“这里有多少个圆?”“7个。”学生甲回答。“正确。”老师说。“而这里有多少个圆?”老师又问学生乙。“5个。”学生乙回答。“正确!”老师也肯定了学生乙的回答。试问:老师在这张纸上到底画了多少个圆?



第2讲 乘除法的巧算

技巧是数学知识中最有价值的部分,比仅仅获得信息还要有价值得多。但是,我们应该怎样教技巧呢?学生只有通过模仿与实践,才能学到技巧。

——G. 波利亚



知识方法述要

1. 乘法的运算定律

(1) 乘法交换律.

两个数相乘,交换因数的位置,积不变. 即 $a \times b = b \times a$.

(2) 乘法结合律.

三个数相乘,可以把前两个数结合起来先乘,再和第三个数相乘;也可以把后两个数结合起来先乘,再和第一个数相乘,它们的积不变. 即

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

这里应注意,如果推广到多个数相乘,我们可以选择两个因数相乘,得出较简单的整十、整百、整千……的积,再将这个积与其他因数相乘;有时也可以把某个因数分解成两个因数,使其中的一个因数与其他某个因数的积成为较简单的数,然后再与其他因数相乘. 这样,就可以进行巧算.

(3) 乘法分配律.

两个数的和(或差)与一个数相乘,可以用每一个数分别与这个数相乘,再把所得的积相加(或相减). 即

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c.$$

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c.$$

当两个数相乘时,有时可以把一个因数变为两个数的和与另一个因数相乘;也可以把一个因数变为两个数的差与另一个因数相乘. 这样,就可以进行巧算.

2. 除法的运算性质

(1) 商不变性质.

被除数和除数同乘以(或同除以)一个数(零除外),它们的商不变.即

$$a \div b = (a \times n) \div (b \times n) = (a \div n) \div (b \div n) (n \neq 0).$$

(2) 两个数的和(或差)除以一个数的运算.

两个数的和(或差)除以一个数,可以用这个数分别去除这两个数(在都能整除的情况下),再求两个商的和(或差).即

$$(a + b) \div c = a \div c + b \div c,$$

$$(a - b) \div c = a \div c - b \div c.$$

这个性质也可以推广到多个数的和(或差)除以一个数的情况.

(3) 乘除同级运算带着符号“搬家”的性质.

① 两个数的商除以一个数,等于这两个数中的被除数先除以该数,再除以这两个数中的除数.即

$$a \div b \div c = a \div c \div b.$$

② 两个数的积除以一个数,等于用除数先去除任意一个因数,再与另一个因数相乘.即

$$a \times b \div c = a \div c \times b = b \div c \times a.$$

以上这两条运算性质,说明在连除、乘除混合运算时,可以交换除数、因数的位置,在交换位置时,一定要连同运算符号一起“搬家”.

(4) 乘除混合运算去括号的性质.

① 一个数除以两个数的积,等于这个数依次除以这两个因数.即

$$a \div (b \times c) = a \div b \div c.$$

② 一个数乘以两个数的商,等于这个数乘以两个数中的被除数,再除以两个数中的除数.即

$$a \times (b \div c) = a \times b \div c.$$

③ 一个数除以两个数的商,等于这个数除以两个数中的被除数,再乘以两个数中的除数.即

$$a \div (b \div c) = a \div b \times c.$$

由以上三个运算性质,我们可以看出这样的规律:乘除混合运算的算式中,如果括号前是除号,去掉括号改变运算顺序时,要把括号内的除号变为乘号,乘号变为除号;如果括号前是乘号,则不需要改变括号内的运算符号.反之,算式需要添括号改变运算顺序时,规律也是如此.

需要注意的是,我们在应用以上运算性质时,商尽可能不要有余数.如果商有余数,在应用这些运算性质时,要注意余数是会发生变化的.



例题精讲

【例 2-1】 巧算下面各题.

(1) $125 \times 32 = ?$

分析 先将 32 分解为 4×8 , 再将 125 和 8 结合起来先乘.

解 125×32
 $= 125 \times (8 \times 4)$
 $= 125 \times 8 \times 4$
 $= 1000 \times 4$
 $= 4000.$

(2) $5 \times 64 \times 25 \times 125 \times 97 = ?$

分析 把 64 分解成 $2 \times 4 \times 8$, 分别与 5, 25, 125 结合.

解 $5 \times 64 \times 25 \times 125 \times 97$
 $= 5 \times (2 \times 4 \times 8) \times 25 \times 125 \times 97$
 $= (5 \times 2) \times (25 \times 4) \times (125 \times 8) \times 97$
 $= 10 \times 100 \times 1000 \times 97$
 $= 97000000.$

(3) $252 \times 99 = ?$

分析 把 99 变为 $100 - 1$, 则可以运用乘法分配律进行运算.

解 252×99
 $= 252 \times (100 - 1)$
 $= 252 \times 100 - 252$
 $= 25200 - 252$
 $= 24948.$

(4) $87 \times 27 + 72 \times 87 + 87 = ?$

分析 在这个算式中, 加数 87 可以看成 87×1 . 这样, 三个乘法式子中就有公因数 87, 逆用乘法分配律, 便可巧算.

解 $87 \times 27 + 72 \times 87 + 87$
 $= 87 \times (27 + 72 + 1)$
 $= 87 \times 100$
 $= 8700.$

(5) $9 \times 25 \times 1313 - 13 \times 2525 = ?$

分析 我们可以把 1313 和 2525 进行分解, $1313=13\times 101$, $2525=25\times 101$. 这样, 两个乘法式子中就有公因式 $13\times 25\times 101$.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & 9\times 25\times 1313-13\times 2525 \\
 &= 9\times 25\times 13\times 101-13\times 25\times 101 \\
 &= 25\times 13\times 101\times (9-1) \\
 &= 25\times 13\times 101\times 2\times 4 \\
 &= (25\times 4)\times (13\times 2)\times (100+1) \\
 &= 2600\times 100+2600\times 1 \\
 &= 262600.
 \end{aligned}$$

$$(6) \quad 8+88+888+8888=?$$

分析 8 可以分解成 8×1 , 88 可以分解成 8×11 , 888 可以分解成 8×111 , 8888 可以分解成 8×1111 . 因此, 可以先求出 $(1+11+111+1111)$ 的和, 再与 8 相乘.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & 8+88+888+8888 \\
 &= 8\times 1+8\times 11+8\times 111+8\times 1111 \\
 &= 8\times (1+11+111+1111) \\
 &= 8\times 1234 \\
 &= 9872.
 \end{aligned}$$

$$(7) \quad 1234+2341+3412+4123=?$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & 1234+2341+3412+4123 \\
 &= (1+2+3+4)\times 1000+(1+2+3+4)\times 100+(1+2+3+4)\times 10 \\
 &\quad + (1+2+3+4) \\
 &= (1+2+3+4)\times (1000+100+10+1) \\
 &= 10\times 1111 \\
 &= 11110.
 \end{aligned}$$

$$(8) \quad 19981999\times 19991998-19981998\times 19991999=?$$

分析 所给算式是乘积之差的形式, 而且没有相同的因数. 我们细心观察后可以发现, 把 19991998 化成 $(19991999-1)$ 后, 就能出现相同的因数, 从而能运用乘法分配律进行巧算.

$$\begin{aligned}
 \text{解} \quad & \text{原式} = 19981999\times (19991999-1)-19981998\times 19991999 \\
 &= 19981999\times 19991999-19981999-19981998\times 19991999 \\
 &= 19991999\times (19981999-19981998)-19981999
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&=19991999 \times 1 - 19981999 \\&=10000.\end{aligned}$$

【例 2-2】 巧算下面各题.

(1) $725 \div 25 = ?$

分析 可运用“商不变”的运算性质.

解 $725 \div 25$
 $= (725 \times 4) \div (25 \times 4)$
 $= 2900 \div 100$
 $= 29.$

(2) $62400 \div 800 = ?$

解 $62400 \div 800$
 $= (62400 \div 100) \div (800 \div 100)$
 $= 624 \div 8$
 $= 78.$

(3) $(125 + 325) \div 25 = ?$

解 $(125 + 325) \div 25$
 $= 125 \div 25 + 325 \div 25$
 $= 5 + 13$
 $= 18.$

(4) $4800000 \div 125 \div 25 \div 32 = ?$

解 $4800000 \div 125 \div 25 \div 32$
 $= 4800000 \div (125 \times 25 \times 32)$
 $= 4800000 \div 100000$
 $= 48.$

(5) $427 \div 268 \times 359 \div 427 \times 268 \div 359 = ?$

解 原式 $= (427 \div 427) \times (268 \div 268) \times (359 \div 359)$
 $= 1 \times 1 \times 1$
 $= 1.$

(6) $1064 \div 28 + 1736 \div 28 = ?$

解 $1064 \div 28 + 1736 \div 28$
 $= (1064 + 1736) \div 28$
 $= 2800 \div 28$
 $= 100.$

$$(7) 4444 \times 3333 = ?$$

$$\begin{aligned} \text{解 原式} &= 4444 \times 9999 \div 3 \\ &= 4444 \times (10000 - 1) \div 3 \\ &= (44440000 - 4444) \div 3 \\ &= 44435556 \div 3 \\ &= 14811852. \end{aligned}$$

评注 例2-2(7)中没有9999,但可以想办法“造”出9999.

$$(8) 1 \div (2 \div 3) \div (3 \div 4) \div (4 \div 5) \div (5 \div 6) = ?$$

分析 按给定的顺序计算既繁又难,而且对没有学过分数计算的学生来说,做出这道题是不可能的.但我们应用除法的运算性质去掉括号后,就将连续出现“ $\times A \div A$ ”.由于“ $m \times A \div A = m$ ”,所以,可以巧算.

$$\begin{aligned} \text{解 } 1 \div (2 \div 3) \div (3 \div 4) \div (4 \div 5) \div (5 \div 6) \\ &= 1 \div 2 \times 3 \div 3 \times 4 \div 4 \times 5 \div 5 \times 6 \\ &= 1 \div 2 \times (3 \div 3) \times (4 \div 4) \times (5 \div 5) \times 6 \\ &= 1 \div 2 \times 6 \\ &= 1 \times (6 \div 2) \\ &= 3. \end{aligned}$$



同步训练

A 组

巧算下面各题.

1. $37 \times 48 \times 625 =$ _____.
2. $825 \div 25 =$ _____.
3. $875000 \div (1000 \div 8) =$ _____.
4. $1326 \div 39 =$ _____.
5. $999 \times 99 \times 9 =$ _____.
6. $156 \times 68 - 17 \times 156 + 156 \times 48 =$ _____.
7. $372 \div 162 \times 54 =$ _____.
8. $864 \times 27 \div 54 =$ _____.
9. $616 \div 36 \times 18 \div 22 =$ _____.
10. $1344 \div 24 + 2088 \div 24 + 864 \div 24 =$ _____.
11. $(12 \times 21 \times 45 \times 102) \div (15 \times 4 \times 7 \times 51) =$ _____.



12. $88+888+8888+88888=$ _____.

..... B 组

13. $454 \times 198 =$ _____.

14. $248 \times 201 =$ _____.

15. $9999 \times 1111 + 3333 \times 6667 =$ _____.

16. $1998 \times 19991999 - 1999 \times 19981998 =$ _____.

17. $3333 \times 5555 + 6 \times 4444 \times 2222 =$ _____.

18. $2974 \times 2926 =$ _____.

19. $19991999 \times 1999 - 19991998 \times 1998 - 19991998 =$ _____.

20. $471471471471 \div 157157157157 =$ _____.

..... C 组

21. $98989898 \times 99999999 \div 1010101 \div 11111111 =$ _____.

22. $125000125 \times 444711 + 125000125 \times 136481 =$ _____.

23. $999999999 \times 888888888 \div 666666666 =$ _____.

24. $\underbrace{99 \cdots 9}_{1998 \text{ 个 } 9} \times \underbrace{99 \cdots 9}_{1998 \text{ 个 } 9} + 1 \underbrace{99 \cdots 9}_{1998 \text{ 个 } 9}$ 的得数末尾有多少个零?



第3讲 巧填运算符号

在数学中,技巧是解决问题的能力,是构想证明的能力,是敏锐地评判答案与证明的能力.因而,在数学中,技巧比仅仅掌握信息还重要得多.

——G. 波利亚



知识方法述要

巧填运算符号,即在算式中填上符合题目要求的运算符号,使算式成立.解答这类问题,首先要求我们要灵活运用四则运算法则,其次要熟练掌握加、减、乘、除运算中各个部分之间的关系,如被减数—减数=差,被减数—差=减数,减数+差=被减数,等等.



例题精讲

【例 3-1】 在等号左边的每两个数之间,填上加号或减号,也可以用括号,使算式成立.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 1.$$

分析与解 (1) 1,2,3,4,5 五个数之和是 15,使若干个加起来的和是 8,减去其余的数(和是 7),就可以完成此题.但根据目前这五个数的排列顺序,不可能得到 $8-7=1$.能否使等式成为 $3-2=1$ 呢? 原式可变为

$$1+2-(3+4-5)=1,$$

即可得

$$1+2-3-4+5=1.$$

(2) 接上述分析,改变 1,2,3,4,5 的排列顺序为 1,3,4,2,5,于是可想到:

$$1+3+4-(2+5)=1,$$

即可得

$$1-2+3+4-5=1.$$



【例 3-2】 在下面五个 5 之间填上适当的运算符号 +、-、×、÷ 和 (), 使算式成立.

$$5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5 = 10.$$

分析 对于这类问题,我们可以不加分析,用拼凑的方法去做,但这样做往往带有很大的盲目性,而且不容易找到规律.怎么办呢? 解决这类问题,我们可以用倒推法,即从最后一个数字逐步向前推.对本题,我们可以这样想:

如果最后一个 5 的前面填上 + 号,那么,原式变为

$$\underbrace{5 \quad 5 \quad 5}_{\text{组成5}} \quad 5 + 5 = 10.$$

再重复上面的方法,如果四个 5 中最后一个 5 的前面又填上 + 号,那么,上式变为

$$\underbrace{5 \quad 5}_{\text{组成0}} \quad 5 + 5 + 5 = 10.$$

于是有以下几种情况:

$$(5-5) \times 5 = 0, (5-5) \div 5 = 0, 5 \times (5-5) = 0.$$

如果在倒数第二个 5 的前面填 -、× 或 ÷ 等符号,是不是也能成立呢?

如果最后一个 5 的前面填的是一号,那么,原式变为

$$\underbrace{5 \quad 5 \quad 5}_{\text{组成15}} \quad 5 - 5 = 10.$$

有以下一种情况: $5 \times 5 - 5 - 5 = 15$.

如果在最后一个 5 的前面填 ×、÷ 等符号,是不是也能成立呢? 请你自己试试看.

解 $(5-5) \times 5 + 5 + 5 = 10;$

$$(5-5) \div 5 + 5 + 5 = 10;$$

$$5 \times (5-5) + 5 + 5 = 10;$$

$$5 \times 5 - 5 - 5 = 10;$$

$$(5 \div 5 + 5 \div 5) \times 5 = 10;$$

$$(5 \times 5 + 5 \times 5) \div 5 = 10;$$

$$55 \div 5 - 5 \div 5 = 10.$$

评注 例 3-2 只要找到使等式成立的一种填法就可以了,但多做出一些解答,可以使我们的思维更有条理,思路更活跃,视野更开阔.

注意最后一种解法,解这类题时,不一定要在每两个数字之间都填上符号.

【例 3-3】 在下面 12 个 8 之间填上 +、-、×、÷, 使算式成立.

$$8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 = 2000.$$

分析 这道题如果我们采用倒推法,那就会非常麻烦,怎么办呢?我们可以采用凑数法,即先找出一个与2000接近的数,如 $8888 \div 8 + 888 = 1999$. 这个数比2000少1. 这样,原题就转化为能不能用剩下的四个8凑出一个1的问题. 如 $88 \div 88 = 1$, $8 \div 8 + 8 - 8 = 1$,这都是很容易看出来的.

解 $8888 \div 8 + 888 + 88 \div 88 = 2000$;

$8888 \div 8 + 888 + 8 \div 8 + 8 - 8 = 2000$.

评注 凑数法是先找出一个与结果较接近的数,根据这个数与结果的差,对剩余的数进行调整,使算式成立.

要注意的是,题目中如果没有允许用括号,那么解题时也是不允许用括号的.

【例3-4】 在下面算式中合适的地方填上括号,使等式成立.

(1) $7 \times 9 + 12 \div 3 - 2 = 47$;

(2) $7 \times 9 + 12 \div 3 - 2 = 75$.

分析与解 (1) 可以考虑由 $7 \times 9 + 12 \div 3$ 加括号凑成49,因为 $7 \times 7 = 49$,于是,我们可考虑用 $9 + 12 \div 3$ 加括号凑成7,于是得到 $7 \times [(9 + 12) \div 3] - 2 = 47$.

(2) 按照(1)的思路,考虑由 $7 \times 9 + 12 \div 3$ 加括号凑成77,因为 $7 \times 11 = 77$,于是想用 $9 + 12 \div 3$ 凑成11,但这是不可能的. 由于 $7 \times 9 = 63$,如果 $12 \div 3 - 2$ 加括号凑成12,这样问题就解决了. 于是得 $7 \times 9 + 12 \div (3 - 2) = 75$.

解答填运算符号问题,需要对四则运算有较深刻的认识与理解,同时通过填运算符号又可以加深对四则运算的认识和理解,这类题目也是培养分析能力、推理能力的好素材.



同步训练

A 组

1. 用适当的运算符号把下面三个相同的数字连接起来,使结果等于30.

$$5 \quad 5 \quad 5 = 30;$$

$$6 \quad 6 \quad 6 = 30.$$

2. 在下列四个4之间填上适当的运算符号+、-、 $\times$ 、 $\div$ 和(),使算式成立.

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 2.$$

3. 在下列五个4之间填上适当的运算符号+、-、 $\times$ 、 $\div$ 和(),使算式成立.

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 \quad 4 = 5.$$



4. 在 1,2,3,4,5 之间填上适当的运算符号 +、-、×、÷ 和 (), 使算式成立.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 = 10.$$

5. 已知 1,2,3,4 四个数,试选择 +、-、×、÷ 中的符号和 (), 列出至少 10 个答案为 0 的算式.

6. 在下面五个 6 之间填上适当的运算符号 +、-、×、÷ 和 (), 使等式成立.

$$6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6 = 18.$$

7. 在下面的数字之间填上五个“+”, 组成算式, 使算出的结果最小.

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

8. 在下面的 □ 中填上合适的运算符号, 使等式成立.

$$(1 \square 9 \square 9 \square 2) \times (1 \square 9 \square 9 \square 2) \times (19 \square 9 \square 2) = 1992.$$

----- B 组 -----

9. 在 □ 中填上适当的运算符号 +、-、×、÷, 使下面等式成立, 这样填写的方法共有 _____ 种.

$$6 \square 3 \square 2 = 5 \square 4.$$

10. 在下面各数之间填上适当的运算符号和括号, 使等式成立.

$$10 \quad 6 \quad 9 \quad 3 \quad 2 = 48.$$

11. 在 8 8 8 8 8 8 8 8 中填上适当的运算符号及括号, 使计算结果为 1998. 请写出一个这样的算式.

12. 在下面算式中适当的地方填上括号, 使等式成立.

$$6 + 36 \div 3 - 2 \times 4 - 1 = 8;$$

$$6 + 36 \div 3 - 2 \times 4 - 1 = 14.$$

----- C 组 -----

13. 把运算符号 +、-、×、÷ 分别填在适当的 ○ 中, 运算符号不能重复使用, 并在 □ 中填上适当的整数, 使下面的两个等式都成立. 这时, □ 中的数是几?

$$9 \bigcirc 13 \bigcirc 7 = 100;$$

$$14 \bigcirc 2 \bigcirc 5 = \square.$$

14. 试在 15 个 8 之间适当的位置填上适当的运算符号: +、-、×、÷, 使运算结果等于 1986.

$$8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 8 = 1986.$$



第 4 讲 24 点游戏

数学之美是很自然明白地摆着的。

——哈尔莫斯



知识方法述要

24 点游戏的玩法是从一副扑克牌中任意抽取四张牌,然后把牌的点数用加、减、乘、除与括号连起来,算出来的数要等于 24,每张牌的点数恰好使用一次. A 算 1 点, J 算 11 点, Q 算 12 点, 老 K 算 13 点.

玩过 24 点游戏的小朋友都知道,有时四张牌的点数可以有多种算法得到 24,有时却一种方法都没有. 假如你抽到的四张牌是 3, 4, 4, 8, 就有 $(4+3-4) \times 8 = 24$, $(8+4-4) \times 3 = 24$. 而如果你抽到的四张牌是不同花色的四张 A, 这时你就没办法算出 24.

24 是一个极为有趣的自然数. 它的个位数字和十位数字都是双数, 更为有趣的是, 24 恰好是 1~4 这四个自然数连乘的积:

$$24 = 1 \times 2 \times 3 \times 4.$$

24 也可以表示成两个自然数的积:

$$24 = 1 \times 24, \quad 24 = 2 \times 12,$$

$$24 = 3 \times 8, \quad 24 = 4 \times 6.$$

24 还可以写成三个连续自然数的和:

$$24 = 7 + 8 + 9.$$

熟练地掌握 24 及其运算特征, 有利于快速算出 24, 使我们在 24 点游戏中, 把握主动权, 始终立于不败之地.



例题精讲

【例 4-1】 四张卡片上的数字分别是 7, 3, 5, 4, 请你填上合适的运算符号, 使



计算结果等于 24.

分析与解 依题意,在这四个数的中间如果填上+,结果等于 19,比 24 少 5,而我们发现 3×4 比 $3+4$ 正好多 5,因此,我们可以这样算:

$$7+5+3 \times 4=24.$$

【例 4-2】 用 1,4,4,5 四个数,填上合适的运算符号快速算出 24.

分析与解 很明显,我们看到 $4 \times (1+5)=24$,三个数已经能够算出 24 了,可惜的是还有一个 4 没有用.而根据规则,必须把这个 4 也用进去,怎么办?怎样把这个多余的 4 用到算式里面而又不影响得数呢?

利用“乘法分配律”: $4 \times (1+5)=4 \times 1+4 \times 5=24$.

评注 例 4-2 我们利用了“乘法分配律”:

$$a \times (b+c)=a \times b+a \times c,$$

我们还会用到:

$$a \times (b-c)=a \times b-a \times c.$$

【例 4-3】 有 6,5,10,2 四个数,在它们之间填上+、-、 $\times$ 、 $\div$ 和(),使结果等于 24(每个数只能用一次).

分析与解 要使这四个数列出的算式的结果等于 24,可以从计算结果等于 24 的一些算式中去考虑,如 $2 \times 12=24$, $6 \times 4=24$, $30-6=24$, $120 \div 5=24$,……我们可以使用数 6,5,10,2 和运算符号及括号,这就需要我们用已知数凑成所需的数.例如

(1) 根据 $2 \times 12=24$,可以组成算式

$$2 \times (10 \times 6 \div 5)=24;$$

$$2 \times (10 \div 5 \times 6)=24;$$

$$(10 \div 5) \times (2 \times 6)=24;$$

$$(10 \div 5) \times (6 \times 2)=24.$$

(2) 根据 $4 \times 6=24$,可以组成算式

$$10 \div 5 \times 2 \times 6=24;$$

$$10 \times 2 \div 5 \times 6=24.$$

(3) 根据 $30-6=24$,可以组成算式

$$10 \times (5-2)-6=24.$$

(4) 根据 $120 \div 5=24$,可以组成算式

$$10 \times 2 \times 6 \div 5=24.$$

评注 如果交换乘数与被乘数的位置,还可以组成许多算式.你还能想出一

些算式吗?

【例 4-4】 小华和小勇各有四张卡片,上面依次写着 1,2,3,4 四个数.每人从手中任意抽出两张卡片凑成四张进行快算 24 游戏,游戏时算式里可添加 +、-、 $\times$ 、 $\div$ 、() 等运算符号.谁先算出来,谁就胜一次,得 1 分,最后积分多者为胜.如果双方经过反复试算都算不出 24 来,就为和局,都不得分.请你将游戏中能得分的情况列举出来.

分析与解 这种游戏实质上是把四个自然数 1,2,3,4 各重复一次进行运算,在这样有重复的八个数中,每次取出四个数,共有 19 种不同的取法.在 19 种不同的情况中,算不出 24 的只有 6 种,有 13 种情况能算出 24.

1 1 2 2, 1 1 2 3, 1 1 2 4, 1 1 3 3, 1 2 2 3, 2 3 3 4 都算不出 24.

1 1 3 4	$(1+1) \times 3 \times 4 = 24;$
1 1 4 4	$(1+1+4) \times 4 = 24;$
1 2 2 4	$(1+2) \times 2 \times 4 = 24;$
1 2 3 3	$(1+3) \times 2 \times 3 = 24;$
1 2 3 4	$1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24;$
1 2 4 4	$(1+2) \times (4+4) = 24;$
1 3 3 4	$(3+3) \times 1 \times 4 = 24;$
1 3 4 4	$(3+4-1) \times 4 = 24;$
2 2 3 3	$(3+3) \times 2 \times 2 = 24;$
2 2 3 4	$(2 \times 2 + 4) \times 3 = 24;$
2 2 4 4	$(2 \times 4 + 4) \times 2 = 24;$
2 3 4 4	$3 \times 4 \div 2 \times 4 = 24;$
3 3 4 4	$3 \times 4 + 3 \times 4 = 24.$



同步训练

A 组

- 用 2,3,4,6 四个数字组成一个结果是 24 的算式,这个算式是_____.
- 用四则运算符号 +、-、 $\times$ 、 $\div$ (每种可用多次,也可不用)、括号 (如果需要的话) 及四个数 3,3,5,6 组成算式,使最后得数为 24. 算式为_____.
- 用四则运算符号 +、-、 $\times$ 、 $\div$ (每种可用多次,也可不用)、括号 (如果需要的话) 及四个数 6,8,8,9 组成算式,使最后得数为 24. 算式为_____.



4. 用四则运算符号 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ (每种可用多次,也可不用)、括号(如果需要的话)及四个数 $2, 6, 9, 9$ 组成算式,使最后得数为 24 . 算式为_____.

5. 用 $5, 5, 5, 1$ 四个数字及四则运算符号($+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$)和括号组成结果是 24 的算式. 这个算式是_____.

6. 用 $2, 2, 6, 9$ 组成一个结果是 24 的算式,这个算式是_____.

7. 用 $2, 4, 10, 10$ 组成一个结果是 24 的算式,这个算式是_____.

8. 有四张扑克牌 $4, J, 8, 9$,请你在四张牌之间填上四则运算符号和括号,使计算结果等于 24 .

B 组

9. 四张相同的牌能算出 24 点吗? 能的在()内打“ $\checkmark$ ”,不能的打“ $\times$ ”.

(1) $3 \quad 3 \quad 3 \quad 3$ (); (2) $4 \quad 4 \quad 4 \quad 4$ ();

(3) $5 \quad 5 \quad 5 \quad 5$ (); (4) $6 \quad 6 \quad 6 \quad 6$ ();

(5) $7 \quad 7 \quad 7 \quad 7$ (); (6) $8 \quad 8 \quad 8 \quad 8$ ();

(7) $9 \quad 9 \quad 9 \quad 9$ (); (8) $10 \quad 10 \quad 10 \quad 10$ ();

(9) $11 \quad 11 \quad 11 \quad 11$ (); (10) $12 \quad 12 \quad 12 \quad 12$ ().

10. Q 与三张相同的牌都能算出 24 点,应该怎样算呢?

(1) $Q \quad 3 \quad 3 \quad 3$; (2) $Q \quad 5 \quad 5 \quad 5$;

(3) $Q \quad 8 \quad 8 \quad 8$; (4) $Q \quad J \quad J \quad J$.

11. 小明和小莉一起玩 24 点游戏,看谁算得又快又多. 已知四张牌的点数分别为 $2, 6, 3, 4$. 允许用 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 和(),如 $4 \times 6 \times (3 - 2) = 24$. 你还能帮助小明和小莉得出其他不同的算法吗? 试一试.

12. 用四张连号的牌,如 $1, 2, 3, 4$ 可以列式: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$,算出 24 点,你还能想出哪些算法?

C 组

13. 从标有 $2, 3, 4, 5, 6, 7$ 的六张卡片中,任意抽出四张,得到四个不同的整数,请你运用 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 四种运算符号和括号算出答案 24 . 不能算出 24 的有多少种情况?

14. 两人面对面做游戏,其中一人执红色卡片三张,依次标有 $1, 3, 5$ 三个数;另一人执白色卡片三张,依次标有 $2, 4, 6$ 三个数. 游戏时,每人随意抽出两张卡片,在桌面上摆出四个数,两人同时口算,只准用 $+$ 、 $-$ 、 $\times$ 、 $\div$ 运算,运算中可添加括号,看谁先算出答案 24 . 请你考虑,这样的游戏有多少种不同的情况发生? 是否每一局都能算出 24 ?



第5讲 乘除法数字谜

吸引我转向数学的原因在于数学能够在思想的训练方面实际地作出贡献.

——苏利文



知识方法述要

在《数学培优竞赛讲座(三年级,第2版)》第9讲我们学习了加减法数字谜,这一讲我们学习关于乘除法的数字谜,分析思考步骤与加减法数字谜的过程一样.



例题精讲

【例 5-1】 下面竖式中的字母 X, Y, Z 代表三个不同的数字. 请问: X, Y, Z 是什么数字时, 算式成立?

$$\begin{array}{r} X \quad Y \\ \times \quad Z \\ \hline 4 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

分析与解 观察这个乘法算式, 可知 $Y \times Z$ 的个位数字是 5, 那么 $Y \times Z$ 只可能是 1×5 或 (5×1) , 3×5 (或 5×3), 5×5 , 7×5 (或 5×7), 9×5 (或 5×9), 即 Y, Z 中至少有一个是 5, 另一个为 1, 3, 5, 7, 9 之一.

若 $Z=5$, 则 $X=8, Y=7$ 符合要求.

若 $Y=5$, 则由乘积是 435, 知 Z 至少是 7, 即 Z 是 7 或 9, 但不论 Z 是 7 还是 9, 都找不到适合算式的 X 值, 所以 $Y \neq 5$.

所以使算式成立的 X, Y, Z 分别为 8, 7, 5.

【例 5-2】 在下面的乘法算式中, 相同的字母代表相同的数字, 不同的字母代表不同的数字, 求这个算式.



$$\begin{array}{r}
 A \ B \ C \ D \ E \\
 \times \qquad \qquad \qquad 4 \\
 \hline
 E \ D \ C \ B \ A
 \end{array}$$

分析与解 因为积还是五位数,没有进位,所以 $A < 3$. 从个位上看, E 与 4 相乘的积一定是偶数,所以 A 只能是 2. 与 4 相乘的积个位是 2 的只有 3 和 8,从积的最高位分析, E 应是 8. 原算式变为

$$\begin{array}{r}
 2 \ B \ C \ D \ 8 \\
 \times \qquad \qquad \qquad 4 \\
 \hline
 8 \ D \ C \ B \ 2
 \end{array}$$

由于积的万位是 8,说明千位没有进 1,那么 $B < 3$. 由于不同的字母代表不同的数字,且 $A=2$,所以 B 只能是 0 或 1.

如果 $B=0$,从十位上看,4 与 D 相乘,积一定是偶数,加个位进上来的 3,积的十位不可能是 0,所以 $B \neq 0$.

如果 $B=1$,则 $D=7$.

在百位上, $C \times 4 + 3$ (进位) = $\square C$,且百位必须向千位进 3,所以 $C=9$.

因此,本题的解是

$$\begin{array}{r}
 2 \ 1 \ 9 \ 7 \ 8 \\
 \times \qquad \qquad \qquad 4 \\
 \hline
 8 \ 7 \ 9 \ 1 \ 2
 \end{array}$$

评注 解乘数是一位数的乘法数字谜,突破口往往在个位.

【例 5-3】 下面算式中的“江”“峡”“美”三个汉字分别代表三个不同的数字,请把这个算式写出来.

$$\begin{array}{r}
 \text{江} \ \text{峡} \ \text{美} \\
 \times \ \text{峡} \ \text{江} \ \text{美} \\
 \hline
 \square \ \square \ \square \ \square \\
 \square \ \square \ \text{江} \\
 \square \ \square \ \square \ \text{峡} \\
 \hline
 \square \ \square \ \square \ \square \ \square \ \square
 \end{array}$$

分析与解 观察算式可以发现,被乘数江峡美乘以乘数十位上的“江”所得的数还是三位数,且这个三位数的末位数字还是“江”,所以选择乘数十位上的“江”字作为突破口.

由于江峡美乘以“江”的积还是三位数,所以“江”表示的数小于 4;又由于这个乘积的末位数字是“江”,所以“江”不能表示 1,只能表示 2 或 3. 若“江”表示 3,则“美”表示 1,这与江峡美乘以“美”的积是四位数相矛盾,所以“江”表示 2,则“美”表示 6.

由于 $\overline{\text{江峡美}}$ 即 $\overline{2\text{峡}6}$ 乘以“峡”的积是四位数,且这个四位数的末位数字还是“峡”,所以“峡”只能表示8.

由于“江”“峡”“美”三个汉字所表示的数字都已确定,所以可以根据乘法计算法则把算式写出来.

这个算式写出来是

$$\begin{array}{r}
 286 \\
 \times 826 \\
 \hline
 \boxed{1}\boxed{7}\boxed{1}\boxed{6} \\
 \boxed{5}\boxed{7}2 \\
 \boxed{2}\boxed{2}\boxed{8}8 \\
 \hline
 \boxed{2}\boxed{3}\boxed{6}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{6}
 \end{array}$$

评注 “江峡美”“峡江美”,一层层迷(谜)雾笼罩着“江”“峡”,把雾一层层拨去,把谜一点点解开,枯燥的数字也发出了感慨:“江山美江山美!”(2和6在例5-3中分别用“江”和“美”表示,3和“山”谐音)

【例5-4】 下面的除法算式中,相同的汉字表示相同的数字,不同的汉字表示不同的数字,当每个汉字各表示什么数字时能使下面的竖式成立?(请写出这个除法算式)

$$\begin{array}{r}
 \text{庆回归} \\
 \text{回归} \overline{) \text{喜庆回归}} \\
 \underline{\text{回归}} \\
 \text{港回} \\
 \underline{\text{归澳}} \\
 \text{庆回归} \\
 \underline{\text{庆回归}} \\
 0
 \end{array}$$

分析与解 观察算式可以发现,这是一道两位数除四位数,商是三位数且没有余数的除法算式.算式中商百位上的数“庆”与除数 $\overline{\text{回归}}$ 的乘积还是 $\overline{\text{回归}}$,所以选择“庆”作为突破口.

由于商百位上的数“庆”与除数 $\overline{\text{回归}}$ 的乘积还是 $\overline{\text{回归}}$,所以“庆”表示1.

由于“庆”表示1,那么 $11 - \text{“归”} = \text{“港”}$,而 $\text{“港”} - \text{“归”} = 1$,所以“归”表示5,“港”表示6.

由于“归”表示5,而商十位上的数“回”与除数 $\overline{\text{回归}}$ (即 $\overline{\text{回}5}$)相乘的积是两位数,那么“回”只能表示2.

由于“庆”“回”“归”三个汉字所表示的数字都已确定,即除数是25,商是125,那么根据除法各部分间的关系,就可以写出这个除法算式了.



这道除法算式是

$$\begin{array}{r}
 125 \\
 25 \overline{) 3125} \\
 \underline{25} \\
 62 \\
 \underline{50} \\
 125 \\
 \underline{125} \\
 0
 \end{array}$$

评注 在解答用汉字、字母或符号表示未确定数字的除法数字谜时,有时可以分析除法竖式中几次减法计算之间的关系,从而使某些数字得到确定.



同步训练

A 组

1. 在下面算式中,不同的汉字代表不同的数字,那么,北+京+市+迎+春+杯+赛+好=_____.

$$\begin{array}{r}
 \text{北京市迎春杯赛好} \\
 \times 9 \\
 \hline
 111111111
 \end{array}$$

2. 已知下面的乘法算式:

$$\begin{array}{r}
 1 A B C D E \\
 \times 3 \\
 \hline
 A B C D E 1
 \end{array}$$

则 $\overline{ABCDE}$ 是_____.

3. 在下面的乘法算式中,不同的汉字代表不同的数字,相同的汉字代表相同的数字,那么这些不同汉字代表的数字之和是_____.

$$\begin{array}{r}
 \text{北京数学迎春杯赛} \\
 \times \text{赛} \\
 \hline
 111111111
 \end{array}$$

4. 在下面竖式中,已知“数”字代表1,“学”字代表2,“生”字代表0,“赛”字代表5.你知道其他的汉字代表什么数字吗?“竞”=_____,“报”=_____,“小”=_____.

$$\begin{array}{r}
 \text{小学生数学报数学竞赛} \\
 \times \qquad \qquad \qquad \text{赛} \\
 \hline
 \text{数竞生生竞学生竞小学赛}
 \end{array}$$

5. 在下面的乘法算式中,“我”“学”“数”“乐”各代表四个不相同的数字,如果“乐”代表9,那么,“我”代表_____,“数”代表_____,“学”代表_____.

$$\begin{array}{r}
 \text{我学数学乐} \\
 \times \qquad \text{我学数学乐} \\
 \hline
 \text{数数数学数数学学数学}
 \end{array}$$

6. 在下面的乘法算式中,每一个方框里要填一个数字,每个汉字代表一个数字(不同的汉字代表不同的数字,相同的汉字代表相同的数字).那么,这个乘法算式的最后乘积是_____.

$$\begin{array}{r}
 \qquad \qquad \square\square\square\square \\
 \times \qquad \qquad \square\square\square\square \\
 \hline
 \qquad \qquad \square\square\square\square 1 \\
 \qquad \square\square\square\square 9 \\
 \qquad \square\square\square\square 9 \\
 \square\square\square\square 9 \\
 \hline
 \text{新年新年} 9 9 9 1
 \end{array}$$

7. 在下面的乘法算式中, A, B 表示不同的数字,那么 $A+B=$ _____.

$$\begin{array}{r}
 \qquad \qquad A B \\
 \times \quad B A \\
 \hline
 \qquad 1 1 4 \\
 \quad 3 0 4 \\
 \hline
 3 1 5 4
 \end{array}$$

8. 在下面的除法算式中,方格表示擦掉的数字, A 和 B 表示商的数字.那么 $A=$ _____, $B=$ _____.

$$\begin{array}{r}
 \qquad \qquad \qquad A \quad B \\
 5 \square \overline{) \square \square \square \square} \\
 \underline{\square 6 \square} \\
 \square \square \square \\
 \underline{4 3 2} \\
 0
 \end{array}$$

B 组

9. 在下面的乘法算式中, A, B 和 C 表示不同的数字,每个方格代表一个非零数字.求 A, B 和 C 分别代表什么数字.



$$\begin{array}{r}
 A B C \\
 \times \quad A B C \\
 \hline
 \square \square \square 9 \\
 \square \square \square 4 \\
 \square \square \square 1 \\
 \hline
 \end{array}$$

10. 在下面的乘法算式中, A, B, C 和 D 表示不同的数字, $\overline{ABC}$ 是一个三位数, 求三位数 $\overline{ABC}$.

$$\begin{array}{r}
 A B C \\
 \times \quad D \\
 \hline
 1673
 \end{array}$$

11. 有一个四位数 $\overline{abcd}$, 乘以 9 以后, 所得的积是 $\overline{dcba}$, 这个四位数是多少?

12. 下面竖式中的每个不同汉字代表 $0 \sim 9$ 中不同的数字. 那么, 这个乘法竖式的积是多少?

$$\begin{array}{r}
 \text{奥林匹克} \\
 \times \quad \text{奥林匹克} \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * * * * * * *
 \end{array}$$

C 组

13. 下面算式中, 不同字母表示不同的数字, 相同字母表示相同的数字, 那么被除数是多少?

$$\begin{array}{r}
 A \quad I \quad L \quad S \quad \overline{) \quad L \quad Y \quad R \quad I \quad C \quad S} \\
 \underline{S \quad I \quad U \quad R} \\
 R \quad I \quad O \quad C \quad C \\
 \underline{R \quad A \quad I \quad C \quad O} \\
 A \quad G \quad Y \quad L \quad S \\
 \underline{R \quad Y \quad L \quad Y \quad U} \\
 R \quad G \quad Y \quad R
 \end{array}$$

14. 给出数字谜算式:

$$(\overline{\text{华老}} + \overline{\text{百年}} + \overline{\text{华诞}}) \times [\overline{\text{三年}} - (\text{金} + \text{坛} + \text{翻} + \text{番})] = 2010,$$

其中不同的汉字代表 $0 \sim 9$ 中的不同数字, 相同的汉字代表相同数字. 请你写出一种使等式成立的填数法.