

第一篇

函数、极限与连续

第一章 函数与极限

函数是高等数学的主要研究对象,极限是高等数学的基本研究工具,连续则是函数的一个重要性质.本章在复习函数的基础上讨论函数的极限和连续.

第一节 函数

函数是数学中最重要的概念之一.它是从大量实际问题中抽象出来的,体现出符合形式逻辑和辩证逻辑的数学思维.函数概念多方面地促进数学向前发展,它几乎是现代数学每一分支的主要研究对象.由于函数概念内涵的逐步扩充,因而数学新的分支也不断地涌现.

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密联系.函数一词是微积分的奠基人之一——德国的哲学家兼数学家莱布尼茨(Leibniz, 1646—1716)首先采用的.到了 1837 年,德国数学家狄利克雷(Dirichlet, 1805—1859)抽象出了直至今日仍为人们易于接受,并且较为合理的函数概念.

一、函数及其性质

1. 函数的概念

引例 1 (飞机升力产生的原理) 1738 年,瑞士数学家、物理学家丹尼尔·伯努利(D. Bernoulli, 1700—1782)得到关于流动气体的如下伯努利方程:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = C,$$

式中, P 为气流的压强, ρ 为气流的密度, v 为气流的速度, C 为常数.伯努利方程表明:在沿流线运动的过程中,单位体积流体的压力能 P 与动能 $\frac{1}{2}\rho v^2$ 的总和保持不变,即总能量守恒.流体力学将方程中的 P , $\frac{1}{2}\rho v^2$, C 分别称为静压、动压和总压.

将伯努利方程改写成

$$P = -\frac{1}{2}\rho v^2 + C,$$

可见,流动气体对物体的压强 P 随着气流速度 v 的变化而改变,气流的速度增大时,压强就

减小;速度减小时,压强就增大;速度为零时,压强达到最大(等于总压 C).这一结论被称为伯努利定律.

下面说明伯努利定律的应用.地铁站台上都画有安全线,这样做的缘由可用伯努利定律来解释:当列车高速驶来时,列车车厢周围的空气将被带动而运动起来,压强随之减小.站台上的旅客若离列车过近,身体前后将出现明显的压强差,从而会被吸向列车而受伤.

飞机飞行时的绝大部分升力由机翼产生,其原理也基于伯努利定律.图 1-1 所示为飞机飞行时位于气流中的机翼的一个剖面,机翼的上表面圆钝,下表面平缓.当飞机前行时,气流流过翼型,只要上翼面压强小而下翼面压强大,就会产生升力 L .实际情况是:空气流到翼型的前缘分成上、下两股,分别沿翼型的上、下表面流过,并在翼型的后缘汇合后向后

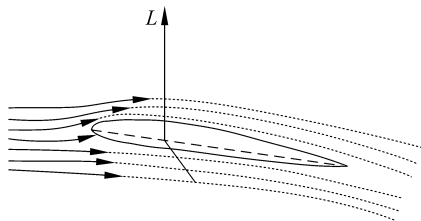


图 1-1

流去.在翼型的上表面,由于正迎角和翼面外凸的作用,流管收缩,流速增大,由伯努利定律,压力将降低;而在翼型的下表面,气流受阻,流管扩张,流速减慢,压力增大.于是就形成上翼面压强小而下翼面压强大的情况,升力 L 就这样产生了.

引例 2(椭圆的方程) 由解析几何,中心在坐标原点,长短半轴分别为 a, b 的椭圆可表示为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

此式给出了椭圆上动点的坐标 (x, y) 之间的相依关系.根据方程可确定 x 的取值范围为

$[-a, a]$,对于区间 $[-a, a]$ 中的每一个值, y 有确定的值 $y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ 与之对应.

引例 3 某家银行定期存款利率如下表所示:

时间	三个月	半年	一年	二年	三年	五年
年利率/%	1.40	1.60	1.70	1.90	2.35	2.40

在利率表中,每一个年限都有一个确定的利率与之对应,储户根据该表就可以算出存款的利息.

引例 4 物理学运动方程中,自由落体运动的距离公式 $s = \frac{1}{2}gt^2$.

上述几个例子虽然反映的事物不一样,表现的形式也不尽相同,但是它们都有一个共同的规律,即它们都反映了两个变量之间的相互依存关系,这种相依关系由一种对应法则来确定.根据这种法则,当其中的一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时,另一个变量就有确定的值与之对应,两个变量间的这种对应关系就是函数概念的实质.

定义 1.1 设 x 和 y 是某一变化过程中的两个变量, D 是一个非空数集,如果对于 D 中每个值 x ,变量 y 按照一定的对应法则 f 总有唯一确定的数值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y = f(x)$.其中 D 称为函数的定义域, x 称为自变量, y 称为因变量.

如果对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应法则 f ,有唯一确定的实数 y_0 与之对应,则称 y_0 为



函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值, 记作 $y_0=f(x_0)$. 集合 $W=\{y|y=f(x), x \in D\}$ 称为函数的值域.

函数的两个要素 对应法则和定义域是函数概念的两个要素. 如果两个函数的定义域相同, 对应法则也相同, 那么这两个函数是相同的, 否则就是不同的.

函数的三种表示方法 函数的表示方法有三种: 表格法、图像法、解析式法.

(1) **表格法** 用表格把自变量的值与之对应的函数值一一列举出来, 这种表示函数的方法称为表格法.

(2) **图像法** 设 $x_0 \in D, y_0=f(x_0)$, 以 x_0 为横坐标、 y_0 为纵坐标, 在直角坐标平面上对应一个点 (x_0, y_0) , 所有这些点在直角坐标平面上构成一个图像, 这个图像称为函数 $y=f(x)$ 的图像. 同样, 这样的图像也可以表示这个函数.

用直角坐标平面上的图像来表示函数的方法称为图像法.

(3) **解析式法** 用解析式表示函数的方法称为解析式法.

定义域 函数的定义域就是自变量能够取到的使函数的解析式有意义的一切实数值的集合, 即自然定义域. 一般可用区间表示.

例如, 引例 2 中由 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 所确定的函数, 其定义域由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 来确定, 即 $[-a, a]$. 而在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义确定的.

例 1 判别函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 是否相同.

解 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域都是 $(-\infty, +\infty)$, 但 $f(x)=x, g(x)=|x|$, 对应法则不同, 故 $f(x) \neq g(x)$.

例 2 求函数 $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ 的定义域.

解 由 $\begin{cases} 16-x^2 > 0, \\ x-1 > 0, \\ x-1 \neq 1, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} |x| < 4, \\ x > 1, \\ x \neq 2, \end{cases}$ 解得 $1 < x < 2$ 及 $2 < x < 4$, 所以此函数的定义域为 $(1, 2) \cup (2, 4)$.

例 3 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1+x, & x \geq 1. \end{cases}$ 求: (1) $f(x)$ 的定义域; (2) 函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right), f(1), f(3)$.

解 (1) $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$;

(2) $f\left(\frac{1}{2}\right)=2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}, f(1)=1+1=2, f(3)=1+3=4$.

本例第一问是求函数的自然定义域. 由于在自变量 x 的不同变化范围内, 函数的表达式不相同, 因此在计算给定点 x_0 处的函数值时要根据 x_0 所在范围(区间)来确定相应的计算式. 像这样, 自变量在定义域的不同范围内取值, 对应法则的解析表达式不一样的函数称为分段函数. 在科学研究、工程技术和现实生活中, 分段函数是比较常见的.

2. 函数的主要性质

(1) 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 任取 $x_1, x_2 \in I$, 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) <$

$f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的; 如果当 $x_1 < x_2$ 时, 总有 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的.

单调增加的区间和单调减少的区间统称为单调区间. 单调增加与单调减少的函数统称为单调函数.

(2) 有界性

若存在 $M > 0$, 使对任意 $x \in I$, 恒有 $|f(x)| \leq M$ 成立, 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 否则称 $f(x)$ 为无界函数.

每一个具有上述性质的 M 都是该函数的界, 也即有界函数的界不是唯一的.

(3) 奇偶性

设函数 $f(x)$ 在关于原点对称的区间 I 上有定义, 如果对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(-x) = -f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是奇函数; 如果对于任意的 $x \in I$, 都有 $f(-x) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是偶函数. 既不是奇函数也不是偶函数的函数称为非奇非偶函数.

由定义可知奇函数的图像关于坐标原点对称, 偶函数的图像关于 y 轴对称.

例如, $y = x^2$ 是偶函数, 图像关于 y 轴对称. $y = x^3$ 是奇函数, 图像关于坐标原点对称.

例 4 证明函数 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

证 显然, $f(x)$ 的定义域 D 为 $(-\infty, +\infty)$. 因为

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln 1 = 0, \end{aligned}$$

即 $f(-x) = -f(x)$, 所以 $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ 是奇函数.

(4) 周期性

设 T 为一个不为零的常数, 如果对于任意的 $x \in D$, 都有 $f(x + T) = f(x)$, 则称函数 $f(x)$ 是周期函数. T 称为函数的周期. 其中最小的正周期称为最小正周期, 简称周期.

例如, $y = \sin x$ 是周期函数, 周期为 2π . $y = \tan x$ 是周期函数, 周期为 π .

3. 几种常见函数简介

(1) 分段函数

有些函数在定义域不同的范围内有不同的表达式, 这样的函数叫作分段函数. 例如:

$$\text{狄利克雷函数} \quad D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 为有理数,} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

$$\text{克朗涅克函数(符号函数)} \quad \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

(2) 反函数

设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M , 如果任给 $y \in M$, 在 D 中都有唯一的 x 值, 使 $y = f(x)$ 成立, 则确定一个 y 到 x 的函数(图 1-2), 这个函数称为函数 $y = f(x)$ 的反函数. 记 $x = f^{-1}(y)$. 其定义域为 M , 值域为 D .

我们习惯用 x 表示自变量, y 表示自变量的函数, $y = f(x)$ 的反函数常表示为 $y = f^{-1}(x)$.

设 $y_0 = f(x_0)$, 所以 $x_0 = f^{-1}(y_0)$, 即如果点 (x_0, y_0) 是函数 $y = f(x)$ 图像上的点, 则

点 (y_0, x_0) 是反函数 $y=f^{-1}(x)$ 图像上的点(图 1-3). 可见函数的图像与反函数的图像关于直线 $y=x$ 对称.

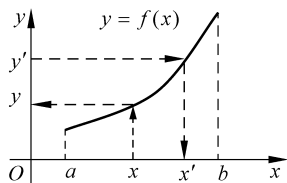


图 1-2

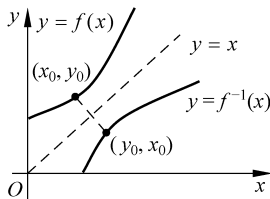


图 1-3

例如, $y=x^3$ 的反函数表示为 $y=\sqrt[3]{x}$. $y=x^2$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内没有反函数.

注 单调函数一定有反函数.

二、初等函数

高等数学所研究的函数以初等函数为主, 这样的函数是由基本初等函数构成的.

先介绍常值函数: $y=C$, 其中 C 是已知常数, 定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 函数图像是过 y 轴上点 C 且平行于 x 轴的直线(图 1-4).

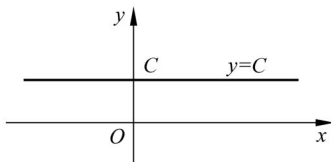


图 1-4

1. 基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数. 这些函数中的大部分都在中学数学中深入探讨过, 此处只作简要复习.

(1) 幂函数 $y=x^\mu$, μ 为任意实数

定义域与 μ 的值有关, 但无论 μ 取什么值, 它在 $(0, +\infty)$ 内总有定义. 当 $\mu > 0$ 时, $y=x^\mu$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调增加; 当 $\mu < 0$ 时, $y=x^\mu$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调减少. 而当 $\mu \neq 0$ 时, $y=x^\mu$ 和 $y=x^{\frac{1}{\mu}}$ 互为反函数.

$\mu = -1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3$ 分别对应于常用的函数 $y=\frac{1}{x}$ (图 1-5), $y=\sqrt{x}$, $y=x$, $y=x^2$ (图 1-6), $y=x^3$ (图 1-7).

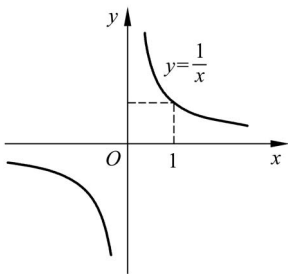


图 1-5

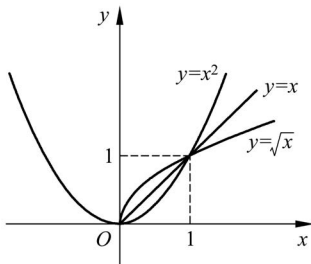


图 1-6

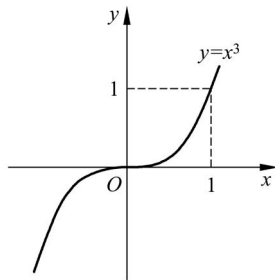


图 1-7

(2) 指数函数 $y=a^x$, 常数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$

其定义域是 $(-\infty, +\infty)$. 当 $a > 1$ 时, 函数单调增加; 当 $0 < a < 1$ 时函数单调减少

(图 1-8). 在科学技术中,常用的指数函数为 $y=e^x$, 它的底是著名的欧拉(Euler, 1707—1783) 数 $e, e=2.718\ 281\ 828\cdots$.

(3) 对数函数 $y=\log_a x$, 常数 $a>0$ 且 $a\neq 1$

其定义域是 $(0, +\infty)$. 当 $a>1$ 时, 函数单调增加; 当 $0<a<1$ 时, 函数单调减少(图 1-9).

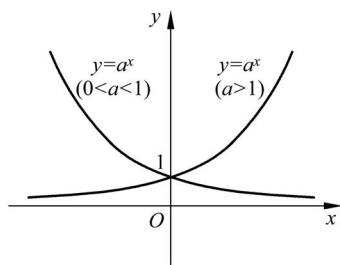


图 1-8

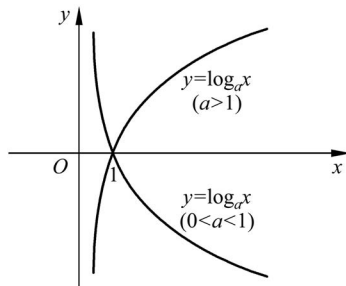


图 1-9

常用的是以 e 为底的对数函数, 称为自然对数函数, 记为 $y=\ln x$.

在数学计算中, 我们常把以 a 为底的对数函数通过换底公式 $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ 转化为自然对数函数后再进行运算.

指数函数 $y=a^x$ 和对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数, 以 a 为底的指数函数 $y=a^x$ 可转化为 $y=e^{x \ln a}$.

(4) 三角函数

① 正弦函数 $y=\sin x$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 奇函数, 是周期为 2π 的周期函数(图 1-10);

$y=\sin x$ 在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调增加, 因此在区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上存在单值单调的反函数.

② 余弦函数 $y=\cos x$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $[-1, 1]$, 偶函数, 是周期为 2π 的周期函数(图 1-11);

$y=\cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上单调减少, 因此在区间 $[0, \pi]$ 上存在单值单调的反函数.

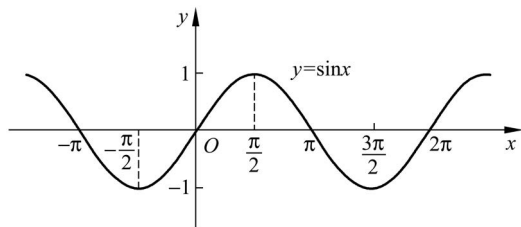


图 1-10

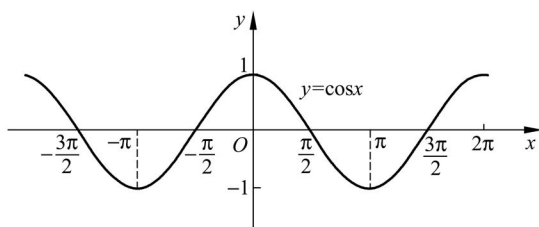


图 1-11

③ 正切函数 $y=\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

其定义域为 $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 奇函数, 是周期为 π

的周期函数(图 1-12); $y = \tan x$ 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调增加, 故在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上存在单值单调的反函数.

④ 余切函数 $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

其定义域为 $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, +\infty)$, 奇函数, 是周期为 π 的周期函数(图 1-13); $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 内单调减少, 故在区间 $(0, \pi)$ 内存在单值单调的反函数.

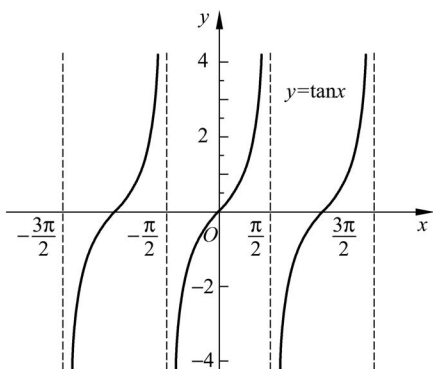


图 1-12

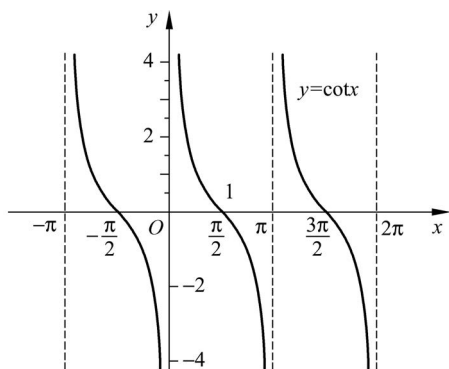


图 1-13

⑤ 正割函数 $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$

其定义域为 $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 偶函数, 是周期为 2π 的周期函数(图 1-14); $y = \sec x$ 在区间 $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$, $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi)$ 上单调增加, 在区间 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$, $(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi)$ 上单调减少, 其中 k 为整数.

⑥ 余割函数 $y = \csc x = \frac{1}{\sin x}$

其定义域为 $\{x | x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, 值域为 $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, 奇函数, 是周期为 2π 的周期函数(图 1-15); $y = \csc x$ 在区间 $(2k\pi, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$, $(2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \pi)$ 上单调减少, 在区间 $(2k\pi + \pi, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$, $(2k\pi + \frac{3\pi}{2}, 2k\pi + 2\pi)$ 上单调增加, 其中 k 为整数.

(5) 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数. 因为三角函数是周期函数, 它们在各自的定义域上不是单调函数, 为了得到它们的反函数, 将这些函数限定在某个单调区间上来讨论. 例如, 为了得到正弦函数 $y = \sin x$ 的反函数, 将它限制在 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上, 就可以得到 $y = \sin x$ 的单值单调的反函数.

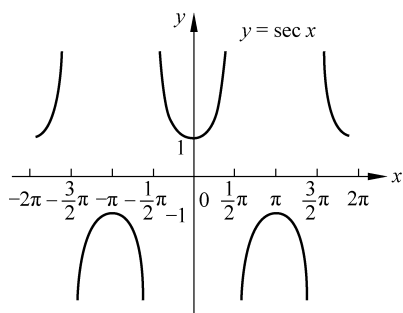


图 1-14

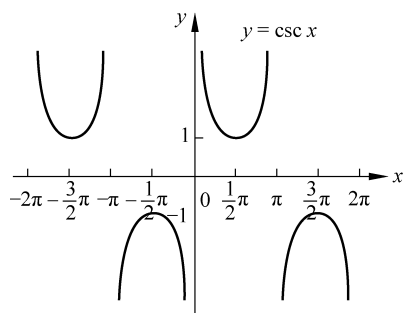


图 1-15

① 反正弦函数 $y = \arcsin x$

其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 是单调增加函数(图 1-16); $y = \arcsin x$ 是正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数, $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 称为 $y = \arcsin x$ 的主值区间.

② 反余弦函数 $y = \arccos x$

其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$, 是单调减少函数(图 1-17); $y = \arccos x$ 是余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $[0, \pi]$ 上的反函数, $[0, \pi]$ 称为 $y = \arccos x$ 的主值区间.

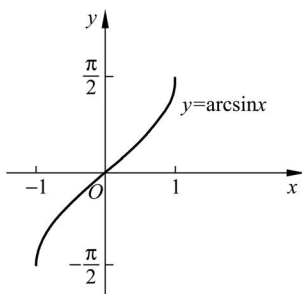


图 1-16

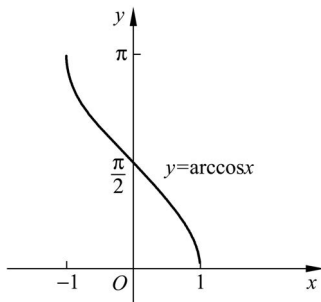


图 1-17

③ 反正切函数 $y = \arctan x$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, 是单调增加函数(图 1-18); $y = \arctan x$ 是正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的反函数, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 称为 $y = \arctan x$ 的主值区间.

④ 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$

其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $(0, \pi)$, 是单调减少函数(图 1-19); $y = \operatorname{arccot} x$ 是余切函数 $y = \cot x$ 在区间 $(0, \pi)$ 内的反函数, $(0, \pi)$ 称为 $y = \operatorname{arccot} x$ 的主值区间.

如果函数 $y = f(x)$ 存在反函数, 则 $y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数. 因此

$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad f^{-1}(f(x)) = x.$$