

应用型高校产教融合系列教材

数 理 与 统 计 系 列

高等数学

(下册)

李路 方涛 殷志祥 王国强 吴隋超 © 主编



清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本书专为应用型普通本科高校各专业一学年高等数学课程设计,精准契合应用型普通本科学生的能力结构与学习需求,强调数学知识的实际运用与“产教融合”理念的深度融合.在内容的确定和表述上充分考虑到应用型普通高校本科学生的能力水平、专业需要等实际状况,注重利用数学软件求解高等数学问题的思想,在每章增加利用 Python 求解高等数学问题,符合培养应用型人才的教学实际;在传授数学知识的同时,基于“产教融合”理念融入相关专业的背景知识和应用案例,是一本特色鲜明、使用面广的高等数学教材.

本书分为上、下两册,上册介绍函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程;下册介绍空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数.

本书可作为普通本科高校理工科各专业的高等数学课程教材,也可作为相关人员的参考书.

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。举报:010-62782989, beiqinquan@tup.tsinghua.edu.cn。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/李路等主编.--北京:清华大学出版社,2024.12.--(应用型高校产教融合系列教材).

ISBN 978-7-302-67609-6

I. O13

中国国家版本馆 CIP 数据核字第 2024FG7221 号

责任编辑:冯 昕 赵从棉

封面设计:何凤霞

责任校对:欧 洋

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <https://www.tup.com.cn>, <https://www.wqxuetang.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座 邮 编:100084

社 总 机:010-83470000

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:小森印刷霸州有限公司

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm 印 张:17.5

字 数:424 千字

版 次:2024 年 12 月第 1 版

印 次:2024 年 12 月第 1 次印刷

定 价:56.00 元

产品编号:107141-01



应用型高校产教融合系列教材

总 编 委 会

主 任：李 江

副 主 任：夏春明

秘 书 长：饶品华

学校委员（按姓氏笔画排序）：

王 迪 王国强 王金果 方 宇 刘志钢 李媛媛

何法江 辛斌杰 陈 浩 金晓怡 胡 斌 顾 艺

高 瞩

企业委员（按姓氏笔画排序）：

马文臣 勾 天 冯建光 刘 郴 李长乐 张 鑫

张红兵 张凌翔 范海翔 尚存良 姜小峰 洪立春

高艳辉 黄 敏 普丽娜



应用型高校产教融合系列教材·数理与统计系列

编 委 会

主 任：王国强

学校委员（按姓氏笔画排序）：

王慧琴 平云霞 伍 歆 苏淑华 李 路

李宜阳 张修丽 陈光龙 殷志祥

企业委员（按姓氏笔画排序）：

丁古巧 李 军 张良均 张治国 董永军

教材是知识传播的主要载体、教学的根本依据、人才培养的重要基石。《国务院办公厅关于深化产教融合的若干意见》明确提出,要深化“引企入教”改革,支持引导企业深度参与职业学校、高等学校教育教学改革,多种方式参与学校专业规划、教材开发、教学设计、课程设置、实习实训,促进企业需求融入人才培养环节。随着科技的飞速发展和产业结构的不断升级,高等教育与产业界的紧密结合已成为培养创新型人才、推动社会进步的重要途径。产教融合不仅是教育与产业协同发展的必然趋势,更是提高教育质量、促进学生就业、服务经济社会发展的有效手段。

上海工程技术大学是教育部“卓越工程师教育培养计划”首批试点高校、全国地方高校新工科建设牵头单位、上海市“高水平地方应用型高校”试点建设单位,具有 40 多年的产学合作教育经验。学校坚持依托现代产业办学、服务经济社会发展的办学宗旨,以现代产业发展需求为导向,学科群、专业群对接产业链和技术链,以产学研战略联盟为平台,与行业、企业共同构建了协同办学、协同育人、协同创新的“三协同”模式。

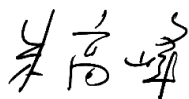
在实施“卓越工程师教育培养计划”期间,学校自 2010 年开始陆续出版了一系列卓越工程师教育培养计划配套教材,为培养出具备卓越能力的工程师作出了贡献。时隔 10 多年,为贯彻国家有关战略要求,落实《国务院办公厅关于深化产教融合的若干意见》,结合《现代产业学院建设指南(试行)》《上海工程技术大学合作教育新方案实施意见》文件精神,进一步编写了这套强调科学性、先进性、原创性、适用性的高质量应用型高校产教融合系列教材,深入推动产教融合实践与探索,加强校企合作,引导行业企业深度参与教材编写,提升人才培养的适应性,旨在培养学生的创新思维和实践能力,为学生提供更加贴近实际、更具前瞻性的学习材料,使他们在 学习过程中能够更好地适应未来职业发展的需要。

在教材编写过程中,始终坚持以习近平新时代中国特色社会主义思想为指导,全面贯彻党的教育方针,落实立德树人根本任务,质量为先,立足于合作教育的传承与创新,突出产教融合、校企合作特色,校企二元开发,注重理论与实践、案例等相结合,以真实生产项目、典型工作任务、案例等为载体,构建项目化、任务式、模块化、基于实际生产工作过程的教材体系,力求通过与企业的紧密合作,紧跟产业发展趋势和行业人才需求,将行业、产业、企业发展的新技术、新工艺、新规范纳入教材,使教材既具有理论深度,能够反映未来技术发展,又具有实践指导意义,使学生能够在 学习过程中与行业需求保持同步。

系列教材注重培养学生的创新能力和实践能力。通过设置丰富的实践案例和实验项目,引导学生将所学知识应用于实际问题的解决中。相信通过这样的学习方式,学生将更加具备

竞争力,成为推动经济社会发展的有生力量.

本套应用型高校产教融合系列教材的出版,既是学校教育教学改革成果的集中展示,也是对未来产教融合教育发展的积极探索.教材的特色和价值不仅体现在内容的全面性和前沿性上,更体现在其对于产教融合教育模式的深入探索和实践上.期待系列教材能够为高等教育改革和创新人才培养贡献力量,为广大学生和教育工作者提供一个全新的教学平台,共同推动产教融合教育的发展和创新,更好地赋能新质生产力发展.



中国工程院院士、中国工程院原常务副院长

2024年5月

编者所在学校以工学见长,管理学和艺术学特色鲜明,是一所工学、管理学、艺术学、法学、理学、医学、经济学、文学等多学科互相渗透、协调发展的全日制普通高等学校,是教育部“卓越工程师教育培养计划”首批试点高校、全国地方高校新工科建设牵头单位、上海市“高水平地方应用型高校”试点建设单位。学校致力于深化教育教学改革,提高人才培养质量,坚持依托现代产业办学、服务经济社会发展的办学宗旨,以现代产业发展需求为导向,学科群、专业群对接产业链和技术链,以产学研战略联盟为平台,与行业、企业共同构建了协同办学、协同育人、协同创新的“三协同”模式,“一年三学期,工学交替”的产学合作教育模式,助力学校成为培养优秀工程师和工程服务人才的摇篮。

为更好地发挥高等数学课程的基础、支撑作用,我们在学校的支持下编写了这套《高等数学》教材。该教材面向“产教融合”各本科专业选修一学年高等数学课程的学生,内容界定为教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会新近修订的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”。教材编写的指导思想是:贯彻“以学生为本”的教育理念;在传授数学知识的同时,基于“产教融合”理念融入相关专业的背景知识和应用案例;增强学生分析问题和解决问题的能力。

将相关专业的背景知识和应用案例适当融入数学基础课程,目的是让学生知道怎样将学过的数学知识用于解决专业问题,以此来培养学生的应用意识。我们注意到,用数学手段解决专业问题往往需要专业背景,而学习高等数学的学生是刚刚跨进校门的新生,许多专业基础课程尚未接触,专业背景的建立尚需时日;此外,专业问题的解决往往需要综合运用多方面的数学知识。因此,在选择具有专业背景的材料方面,确定了几条原则:一是难度适当,学生在现有基础上能够接受和理解;二是与当前学生的数学水平基本适应或稍有超越;三是在引进数学概念、数学理论时尽可能多地结合专业背景,对学生有启发、有引导。

为了缩短教学内容与学生现状的距离,使得本教材较好地适应学生的能力水平,充分调动学生的学习积极性,着力提高学生的数学素养,编者作了一定的探索。主要有:

强化说理。对于有一定难度的教学内容,教材的陈述不再仅仅是直述和推理,转而采取深度说理的方式,旨在讲清楚问题的来源、处理问题的思路和方法,体现数学的亲和力,激发学生的内在学习动机。

通俗易懂。尽量以直观和通俗易懂的方式来表述;在教学基本要求的框架内,淡化理论推导和运算技巧;尽可能多地借助几何图形来消除初学者在理解上的障碍。

素质培养。数学素质是在感悟、运用和发掘数学的概念、定理、证明、求解中所蕴含的数

学思想、数学方法和数学文化基础上形成的.教材采用多种方式,从不同角度通过对数学的思想性、方法性、应用性的展示来培养学生的数学素质.

联系实际.在篇、章、节的导学部分或引入新内容时,联系专业背景和现实生活中的实例,让读者感受到高等数学的概念和理论来自实践,存在于我们的生活、生产之中,用途广泛.

能力拓展.在每章附录中,选取典型例题,基于 Python 语言实现程序设计和计算,以适应软件零基础的低年级本科读者接触、学习和应用 Python 语言编程.读者也可在自我检验的基础上自主学习和实践,从而降低学习难度.

本套教材分为上、下两册,上册介绍函数、极限与连续,一元函数微分学,一元函数积分学,常微分方程等;下册介绍空间解析几何与向量代数,多元函数微分学,多元函数积分学,无穷级数等.

全书由王国强策划并组织编写,其中上册由吴隋超统稿,王国强定稿;下册由方涛统稿,李路定稿.全书共八篇十一章,参加编写的人员及分工:第一篇殷志祥(第一章);第二篇吴隋超(第二章),王国强(第三章);第三篇李铭明(第四章),周雷(第五章);第四篇李娜(第六章);第五篇滕晓燕(第七章);第六篇方涛(第八章);第七篇李路(第九章),江开忠(第十章);第八篇赵寿为(第十一章).江开忠制作了书中的插图.

本书作为应用型高校产教融合系列教材中的数理与统计系列教材,在编写过程中得到了上海金仕达软件科技股份有限公司总经理张治国先生,以及广东泰迪智能科技股份有限公司董事长张良均先生的大力支持和帮助,他们不仅提供了宝贵的指导,还对部分应用案例提出了修改建议,对此我们深表感谢.

上海工程技术大学教务处和数理与统计学院的领导,以及数学各系部全体教师对本书的编写与出版始终给予关注与支持,编者特表衷心的感谢.

将工科专业的案例恰当地融入数学课程,对我们来说既是机遇,也是挑战.本书虽然作了一些尝试,但限于作者的水平,不妥或错误之处必定难免,敬请专家、广大教师和读者批评指正.

编 者

2024 年 6 月

目 录

CONTENTS

第五篇 空间解析几何

第七章 空间解析几何与向量代数 / 3

第一节 向量及其线性运算 / 3

一、向量的概念 / 3

二、向量的线性运算 / 3

习题 7-1 / 6

第二节 空间直角坐标系 向量的坐标 / 6

一、空间直角坐标系及向量的坐标表示 / 7

二、向量的模、方向余弦、投影 / 10

习题 7-2 / 12

第三节 向量的乘法运算 / 13

一、两个向量的数量积 / 13

二、两个向量的向量积 / 15

三、三个向量的混合积 / 17

习题 7-3 / 18

第四节 曲面及其方程 / 19

一、曲面的方程 / 19

二、柱面 / 20

三、旋转曲面 / 21

四、常见的二次曲面 / 23

习题 7-4 / 25

第五节 空间曲线及其方程 / 26

一、空间曲线的方程 / 26

二、空间曲线在坐标面上的投影 / 28

习题 7-5 / 30

第六节 平面及其方程 / 31

一、平面的方程 / 31

二、两平面的位置关系 / 33

三、点到平面的距离 / 34

习题 7-6 / 35

第七节 空间直线及其方程 / 36

一、直线的方程 / 36

二、直线与直线、直线与平面的位置关系 / 38

三、平面束 / 41

习题 7-7 / 42

附录 7 基于 Python 的向量运算与三维图形的绘制 / 43

第五篇综合练习 / 51

第六篇 多元函数微分学

第八章 多元函数微分学 / 55

第一节 多元函数、极限与连续 / 55

一、预备知识 / 55

二、多元函数的基本概念 / 57

三、多元函数的极限 / 59

四、多元函数的连续性 / 61

习题 8-1 / 63

第二节 偏导数 / 64

一、偏导数的概念与计算 / 64

二、高阶偏导数 / 66

习题 8-2 / 68

第三节 全微分及其应用 / 68

一、全微分 / 69

二、二元函数的线性化 / 71

习题 8-3 / 73

第四节 多元复合函数的求导法则 / 73

一、多元复合函数求偏导的链式法则 / 73

二、抽象复合函数求偏导 / 76

三、全微分形式不变性 / 77

习题 8-4 / 78

第五节 隐函数的求导法则 / 78

一、一元隐函数存在定理和隐函数的求导公式 / 78



二、二元隐函数存在定理和隐函数的求导公式 / 79
习题 8-5 / 81
第六节 多元函数微分学的几何应用 / 82
一、空间曲线的切线与法平面 / 82
二、空间曲面的切平面与法线 / 83
习题 8-6 / 86
第七节 方向导数与梯度 / 86
一、方向导数 / 86
二、梯度 / 88
三、场的概念 / 90
习题 8-7 / 91
第八节 多元函数的极值及其求法 / 92
一、极值、最大值和最小值 / 92
二、条件极值 拉格朗日乘数法 / 95
习题 8-8 / 98
附录 8 基于 Python 的多元函数偏导数与极值的计算 / 98
第六篇综合练习 / 104

第七篇 多元函数积分学

第九章 重积分 / 109

第一节 二重积分的概念与性质 / 109
一、二重积分的概念 / 109
二、二重积分的性质 / 112
习题 9-1 / 115
第二节 二重积分的计算 / 115
一、利用直角坐标计算二重积分 / 115
二、利用极坐标计算二重积分 / 121
三、二重积分换元法 / 124
习题 9-2 / 125
第三节 三重积分 / 126
一、三重积分的概念 / 126
二、利用直角坐标计算三重积分 / 127
三、利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 / 130
习题 9-3 / 133
第四节 重积分的应用 / 134
一、几何应用 / 134
二、质量、力矩、质心与形心 / 136

三、转动惯量 / 140

四、汽车盘式制动器的有效制动半径 / 142

习题 9-4 / 143

附录 9 基于 Python 的二重积分的计算 / 144

第十章 曲线积分与曲面积分 / 146

第一节 对弧长的曲线积分 / 146

一、对弧长的曲线积分的概念与性质 / 146

二、对弧长的曲线积分的计算及其应用 / 147

习题 10-1 / 152

第二节 对坐标的曲线积分 / 152

一、对坐标的曲线积分的概念 / 152

二、对坐标的曲线积分的计算 / 154

三、两类曲线积分的联系 / 157

习题 10-2 / 158

第三节 格林公式及其应用 / 159

一、格林公式 / 159

二、曲线积分与路径无关 / 163

习题 10-3 / 167

第四节 对面积的曲面积分 / 168

一、对面积的曲面积分的概念 / 168

二、对面积的曲面积分的计算及其应用 / 169

习题 10-4 / 174

第五节 对坐标的曲面积分 / 175

一、对坐标的曲面积分的概念 / 175

二、对坐标的曲面积分的计算 / 178

习题 10-5 / 182

第六节 高斯公式 通量与散度 / 183

一、高斯公式 / 183

二、沿任意闭曲面积分为零的条件 / 186

三、通量与散度 / 187

习题 10-6 / 188

第七节 斯托克斯公式 环流量与旋度 / 189

一、斯托克斯公式 / 189

二、空间曲线积分与路径无关的条件 / 192

三、环流量与旋度 / 194

习题 10-7 / 195

附录 10 基于 Python 的线面积分的计算 / 196

第七篇综合练习 / 199



第八篇 无穷级数

第十一章 无穷级数 / 205

第一节 常数项级数的概念与性质 / 205

一、常数项级数的概念 / 205

二、无穷级数的基本性质 / 209

习题 11-1 / 213

第二节 正项级数审敛法 / 214

一、正项级数基本定理 / 214

二、正项级数的审敛法则 / 215

习题 11-2 / 222

第三节 一般常数项级数 / 223

一、交错级数及其审敛法 / 223

二、一般常数项级数的收敛性 绝对收敛与条件收敛 / 225

习题 11-3 / 227

第四节 幂级数 / 228

一、函数项级数的一般概念 / 228

二、幂级数及其收敛性 / 229

三、幂级数的四则运算 / 234

四、幂级数的导数和积分 / 235

习题 11-4 / 237

第五节 函数展开成幂级数 / 238

一、泰勒级数 / 238

二、函数展开成幂级数的方法 / 240

三、幂级数的应用 / 244

习题 11-5 / 247

第六节 傅里叶级数 / 247

一、三角级数和三角函数系的正交性 / 247

二、周期为 2π 的函数展开成傅里叶级数 / 249

三、正弦级数与余弦级数 / 252

习题 11-6 / 255

第七节 一般周期函数的傅里叶级数 / 255

习题 11-7 / 259

附录 11 基于 Python 的无穷级数的计算 / 259

第八篇综合练习 / 262

参考文献 / 264

第五篇

空间解析几何

正如平面解析几何是学习一元函数微积分的基础一样,空间解析几何是学习多元函数微积分的基础.本篇以向量代数和空间解析几何作为基本工具,通过空间直角坐标系建立起有序数组和空间点的一一对应关系,把数学研究的两个基本对象——数和形结合起来,从而通过代数方法来研究和解决几何问题.这也是解析几何的基本思想.

第七章 空间解析几何与向量代数

向量是重要的数学工具之一,我们在中学已经学习了如何利用向量来解决一些简单的几何问题.本章将以向量为工具,研究空间的平面和直线,以及空间曲线和曲面.

第一节 向量及其线性运算

向量可以用有向线段表示,本节借助于向量的这种几何表示,介绍向量的基本概念和基本运算.

一、向量的概念

在力学、物理学等问题中所遇到的量可以分为两大类:一类完全由数值决定,如时间、密度、温度、质量等,称为数量(或标量);另一类是既有大小又有方向的量,如力、速度、位移、电场强度等,称为向量(或矢量),通常记作 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\boldsymbol{a}$ (图 7-1).

向量的大小称为向量的模,向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\overrightarrow{AB}$ 的模分别记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$. 模为 1 的向量称为单位向量. 模为 0 的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$,零向量的方向可看作是任意的.

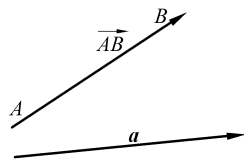


图 7-1

由定义知,一个向量由它的模和方向完全确定,通常称与起点位置无关的向量为自由向量.如无特别说明,今后所讨论的向量都是自由向量.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,方向相同,则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,如果它们同向或反向,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行或共线,记作 $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向互相垂直,则称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直或正交,记作 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$.

二、向量的线性运算

1. 向量的加法

在工程技术领域中,经常遇到求位移或力的合成等问题.例如,飞机在飞行过程中由于气流对机翼上下翼面存在压力差,所以产生了升力 $\boldsymbol{L}$,而气流对飞机又存在阻力 $\boldsymbol{D}$. 因此,飞机在空中飞行时会有一个作用于飞机的空气总动力 $\boldsymbol{R}$. 通常情况下,飞机的空气总动力是向

上并向后倾斜的,如图 7-2 所示. 如何确定总动力 R ?

为解决这类问题,以下给出向量加法的定义.

定义 7.1(向量加法的平行四边形法则) 设有两个不平行的向量 a 与 b ,任取一点 A 作 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{AD}=b$,以 AB, AD 为邻边作一平行四边形 $ABCD$,连接对角线 AC ,如图 7-3 所示,则称向量 $\overrightarrow{AC}$ 为向量 a 与 b 的和,记作 $a+b$.

定义 7.2(向量加法的三角形法则) 设有向量 a 与 b ,任取一点 A ,作 $\overrightarrow{AB}=a$,再以 B 为起点,作 $\overrightarrow{BC}=b$,连接 AC ,如图 7-4 所示,则向量 $\overrightarrow{AC}=c$ 称为向量 a 与 b 的和,记作 $a+b$,即

$$c = a + b.$$

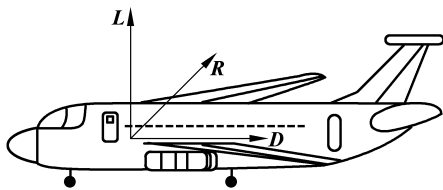


图 7-2

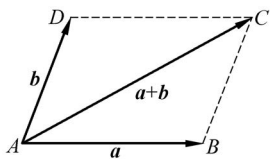


图 7-3

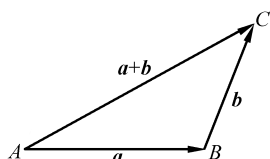


图 7-4

容易验证,上述两种定义是等价的. 此外,向量的加法符合下列运算规律:

(1) 交换律 $a+b=b+a$;

(2) 结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

向量加法的三角形法则可以推广到任意有限多个向量之和. 如图 7-5 所示,作向量 $a_1, a_2, \dots, a_5$,并以前一向量的终点作为下一向量的起点,再以第一个向量的起点为起点、最后一个向量的终点为终点作一个向量 s ,则

$$s = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5.$$

2. 向量的数乘运算

定义 7.3 设 λ 为实数, a 为向量,定义 λ 与 a 的数乘为一个向量,记作 λa ,规定如下:

(1) λa 的模: $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$.

(2) λa 的方向: 当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 同方向; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 反方向.

特别地, $\lambda = 0$ 时, $\lambda a = 0$; $\lambda = -1$ 时, $(-1)a$ 是大小与 $|a|$ 相等、方向与 a 相反的向量,称这个向量为 a 的负向量,用记号 $-a$ 表示,如图 7-6 所示.

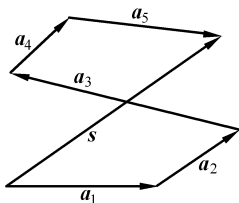


图 7-5

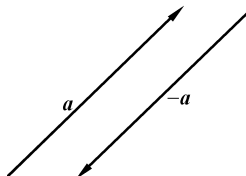


图 7-6

从几何上看,当 $\lambda > 0$ 时, λa 的模是 a 的模的 λ 倍,二者方向相同; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 的模是 a 的模的 $-\lambda$ 倍,二者方向相反.

通常把与 a 同方向的单位向量称为 a 的单位向量,记作 a° . 由定义 7.3 知



$$a = |a| a^\circ,$$

从而

$$a^\circ = \frac{a}{|a|}.$$

上式表明,一个非零向量与它的模的倒数相乘的结果是一个与原向量同方向的单位向量. 这个过程又称为将非零向量 a 的单位化.

下面给出两个向量的差的定义.

定义 7.4 设有两个向量 a 与 b , 则 b 与 a 的负向量的和称为向量 b 与 a 的差, 如图 7-7(a) 所示, 记作 $b-a$, 即 $b-a = b + (-a)$.

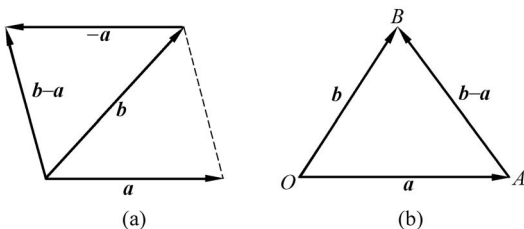


图 7-7

由图 7-7(a) 可见, 如果将向量 a 与 b 移至同一起点, 将 $b-a$ (向右) 平移, 则 $b-a$ 是由 a 的终点向 b 的终点所引的向量, 如图 7-7(b) 所示.

容易验证, 向量的数乘运算具有下列运算规律:

(1) **结合律** $\lambda(\mu a) = \mu(\lambda a) = (\lambda\mu)a$;

(2) **分配律** $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

如图 7-8 所示, 因为三角形两边之和大于第三边, 所以有

$$|a + b| \leq |a| + |b|, \quad |a - b| \leq |a| + |b|;$$

又因为三角形两边之差小于第三边, 所以有

$$|a + b| \geq ||a| - |b||, \quad |a - b| \geq ||a| - |b||.$$

例 1 在 $\triangle ABC$ 中, 设 $\overrightarrow{BC} = a$, $\overrightarrow{CA} = b$, $\overrightarrow{AB} = c$, 如图 7-9 所示, 三角形的三边中点分别为 D, E, F , 求证: $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$.

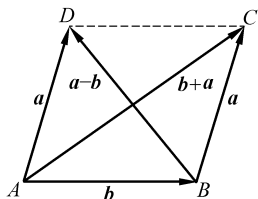


图 7-8

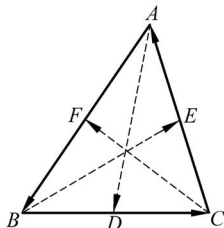


图 7-9

证 由题意知

$$\overrightarrow{AD} = c + \frac{1}{2}a, \quad \overrightarrow{BE} = a + \frac{1}{2}b, \quad \overrightarrow{CF} = b + \frac{1}{2}c,$$

即

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$

又因为

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \mathbf{0},$$

所以 $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \mathbf{0}$.

例 2 用向量法证明: 对角线互相平分的四边形是平行四边形.

证 设四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 互相平分且交于点 O , 如图 7-10 所示, 则

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{DC},$$

因此, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ 且 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}|$, 即四边形 $ABCD$ 为平行四边形.

根据向量数乘的定义, 可得两个向量平行(或共线)的充要条件.

定理 7.1 设有非零向量 $\mathbf{a}$, 则向量 $\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{a}$ 的充要条件是: 存在唯一的实数 λ , 使得 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

证 由向量的数乘定义, 条件的充分性是显然的. 下面证明必要性.

设 $\mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$. 如果 $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, 则取 $\lambda = 0$, 于是 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$; 如果 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 同向时, 取 $\lambda = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 当 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 反向时, 取 $\lambda = -\frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$, 则 $\lambda\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 同向, 且

$$|\lambda\mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|} \cdot |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|,$$

所以 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

再证 λ 的唯一性. 设另有实数 μ , 使得 $\mathbf{b} = \mu\mathbf{a}$, 由于 $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, 两式相减, 得

$$(\lambda - \mu)\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

从而 $|\lambda - \mu| |\mathbf{a}| = 0$. 因为 $|\mathbf{a}| \neq 0$, 所以 $|\lambda - \mu| = 0$, 即 $\lambda = \mu$. 故 λ 是唯一的. 定理证毕.

习题 7-1

1. 设 $\mathbf{u} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = 5\mathbf{a} - \mathbf{b} + 2\mathbf{c}$, 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 表示 $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v}$.
2. 在平行四边形 $ABCD$ 中, 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ 和 $\overrightarrow{MD}$, 其中 M 是平行四边形对角线的交点.
3. 设 $\triangle ABC$ 的重心为 G , 任一点 O 到三角形三顶点的向量为 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_3$, 求证: $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)$.

4. 一架波音飞机以 200m/s 的速率向东飞行, 遇到以 30m/s 速率朝向东北方向 60° 的气流, 利用向量加法求出飞机的实际飞行速率和飞行方向.

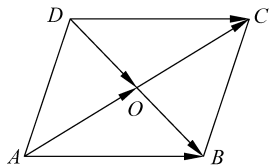


图 7-10

第二节 空间直角坐标系 向量的坐标

在中学数学中, 通过平面直角坐标系, 建立了平面上的点与二维有序数组之间的一一对应关系, 从而可以用代数方法研究平面上的几何问题. 为了用代数方法研究空间的几何



问题,自然想到构建空间直角坐标系,建立空间中的点与三元有序数组之间的一一对应关系,从而使得空间图形的数量化得以实现.

一、空间直角坐标系及向量的坐标表示

1. 空间直角坐标系

所谓空间直角坐标系是指: 给定一点 O , 从该点引出过这三点的三条互相垂直的数轴 Ox, Oy, Oz (它们通常具有相同的长度单位). 它们构成一个空间直角坐标系, 称为 $Oxyz$ 直角坐标系; 其中 O 称为坐标系的原点; Ox, Oy, Oz 分别称为 x 轴(横轴)、 y 轴(纵轴)、 z 轴(竖轴).

空间直角坐标系有右手系和左手系两种. 通常采用右手系, 即以右手握住 z 轴, 当右手的四个手指从 x 轴的正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 的角度到 y 轴的正向时, 大拇指的指向就是 z 轴的正向 (图 7-11).

三个坐标轴中的每两个可以确定一平面, 这样的平面称为坐标面. 由 x 轴和 y 轴确定的坐标面称为 xOy 面, 另外两个坐标面依次为 yOz 面和 zOx 面. 如图 7-12 所示, 三个坐标面将空间划分为八个部分, 每个部分称为一个卦限, 分别用罗马数字 I, II, III, IV, V, VI, VII, VIII 表示.

建立了空间直角坐标系后, 对于空间任一点可以用三元有序数组来对应. 设 M 为空间任意一点, 过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴, 三个平面与坐标轴分别交于点 P, Q, R , 如图 7-13 所示. 设点 P, Q, R 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上的坐标依次为 x, y, z , 则点 M 就唯一确定了一个有序数组 (x, y, z) ; 反之, 任意给定一个有序数组 (x, y, z) , 在 x 轴、 y 轴、 z 轴上分别取坐标为 x, y, z 的三个点 P, Q, R , 然后过 P, Q, R 三点分别作垂直于 x 轴、 y 轴和 z 轴的三个平面, 这三个平面必然交于空间一点. 由此可见, 空间一点 M 与有序数组 x, y, z 之间存在着一一对应关系, 称有序数组 (x, y, z) 为点 M 的坐标, 并依次称 x, y 和 z 为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

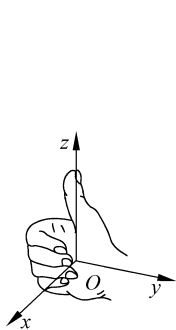


图 7-11

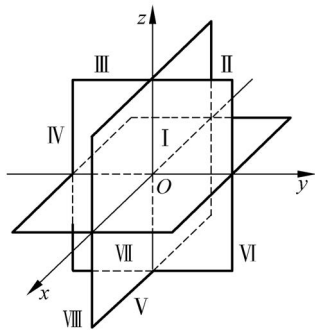


图 7-12

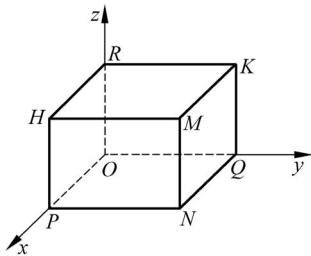


图 7-13

2. 向量的坐标表示

利用空间直角坐标系, 不仅能用三元有序数组表示空间中的点, 而且可以用三元数组表示空间向量, 进而可以用代数运算来研究向量的运算. 下面先用三元数组表示一类特殊的空间向量——向径.

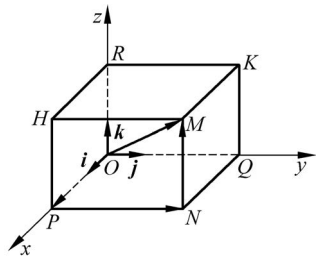


图 7-14

任意给定向量 $\boldsymbol{r}$, 通过平移使其起点位于坐标原点 O , 终点记为 M . 向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 关于原点 O 的向径(也称为点 M 的位置向量). 过点 M 分别作垂直于 x 轴、 y 轴、 z 轴的三个平面, 与三坐标轴的交点分别记作 P, Q, R , 如图 7-14 所示, 由向量加法的三角形法则, 有

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}.$$

在空间直角坐标系中, 分别取 x 轴、 y 轴、 z 轴正向上的单位向量 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$, 由向量和数的乘法运算可知 $\overrightarrow{OP} = x\boldsymbol{i}$, $\overrightarrow{OQ} = y\boldsymbol{j}$, $\overrightarrow{OR} = z\boldsymbol{k}$,

所以

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}. \quad (7.1)$$

式(7.1)称为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标分解式, $x\boldsymbol{i}, y\boldsymbol{j}, z\boldsymbol{k}$ 分别称为向量 $\boldsymbol{r}$ 沿 x 轴、 y 轴、 z 轴方向的分向量. 显然, 向量 $\boldsymbol{r}$ 与点 M 以及有序数组 (x, y, z) 是一一对应的, 称这样的三元有序数组为向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标, 记作

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}.$$

值得注意的是, 向量 $\boldsymbol{r}$ 的坐标有时也记作 (x, y, z) , 这样点 M 和向量 $\overrightarrow{OM}$ 就有相同的记号, 在几何中点与向量是两个不同的概念, 不可混淆. 因此, 在看到记号 (x, y, z) 时, 须根据上下文认清它表示的含义. 当 (x, y, z) 表示向量时, 可以对它进行运算; 当 (x, y, z) 表示点时, 就不能进行运算.

利用向量的坐标表达式, 可以很方便地进行向量的线性运算.

设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z), \boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 即

$$\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j} + b_z\boldsymbol{k},$$

设 λ 为实数, 利用向量加法运算的交换律和结合律、向量数乘运算的结合律和分配律, 容易得到

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x)\boldsymbol{i} + (a_y + b_y)\boldsymbol{j} + (a_z + b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x)\boldsymbol{i} + (a_y - b_y)\boldsymbol{j} + (a_z - b_z)\boldsymbol{k},$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x)\boldsymbol{i} + (\lambda a_y)\boldsymbol{j} + (\lambda a_z)\boldsymbol{k},$$

或

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z),$$

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z),$$

$$\lambda\boldsymbol{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

若向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的起点为 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, 终点为 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 如图 7-15 所示, 则有

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_1M_2} &= \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} \\ &= (x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}) - (x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}) \\ &= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}, \end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1). \quad (7.2)$$

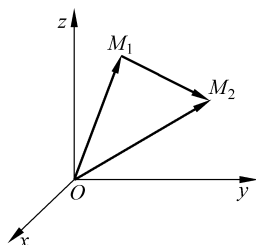


图 7-15



也就是说, 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标等于终点 M_2 的坐标减去起点 M_1 的对应坐标.

如前所述, 当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, 向量 $\mathbf{b}$ 平行于 $\mathbf{a}$ 的充要条件是 $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, 利用向量的坐标表达式即

$$(b_x, b_y, b_z) = \lambda(a_x, a_y, a_z),$$

得

$$b_x = \lambda a_x, \quad b_y = \lambda a_y, \quad b_z = \lambda a_z,$$

亦即

$$\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda.$$

这表明, 向量 $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 平行(共线)的充要条件是这两个向量的对应坐标成比例.

特别地, 运算过程中, 如果 a_x, a_y, a_z 中有一个为零, 例如 $a_x = 0$, 而 $a_y, a_z \neq 0$, 则上式应写成

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}. \end{cases}$$

如果 a_x, a_y, a_z 中有两个为零, 例如 $a_x = a_y = 0, a_z \neq 0$, 则应写成

$$\begin{cases} b_x = 0, \\ b_y = 0. \end{cases}$$

例 1 已知两点 $A(2, 2, 6)$ 和 $B(-1, 8, 3)$, 在直线 AB 上求一点 M , 使得 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

解 如图 7-16 所示, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}$, 由于 $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$, 因此

$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}),$$

移项得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \\ &= \frac{1}{3}(2(2, 2, 6) + (-1, 8, 3)) = (1, 4, 5), \end{aligned}$$

因此, 所求点为 $M(1, 4, 5)$.

如果已知两点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ 及实数 $\lambda (\lambda \neq -1)$, 那么在直线 AB 上可以找到一点 M , 使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$, 这样的点 M 称为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 的定比分点. 利用与例 1 中类似的方法, 可以得到 $M\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right)$. 特别地, 当 $\lambda = 1$ 时, 可以得到线段 AB 的中点为 $M\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

3. 向量函数的导数及其物理意义

由一元微积分, 如果质点作直线运动, 其运动方程为 $s = s(t)$, 则在时刻 t , 质点的速度

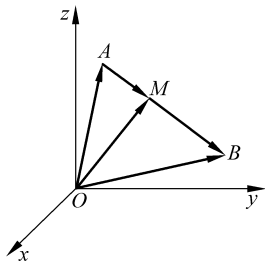


图 7-16

为 $v(t) = \frac{ds}{dt}$. 如果质点在平面上运动, 它在 t 时刻的位置向量为 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, 其中 $x(t), y(t)$ 是可导函数, 通常称 $\mathbf{r}(t)$ 为向量函数. 根据物理学, 有以下结论:

- (1) $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt}\mathbf{j}$ 是质点的速度向量, 并且与曲线相切;
- (2) $|\mathbf{v}(t)|$ 表示质点的速率, $\frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|}$ 表示 t 时刻质点运动方向上的单位向量;
- (3) $\mathbf{a}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\mathbf{j}$ 是质点的加速度向量.

例 2 一质点在平面上运动, 它的速度向量为(单位: m/s)

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{t+1}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}, \quad t \geq 0.$$

若 $t=1$ 时, $\mathbf{r} = (\ln 2)\mathbf{i}$, 求质点的位置向量.

解 $\mathbf{r}(t) = \left(\int \frac{dt}{t+1}\right)\mathbf{i} + \left(\int 2t dt\right)\mathbf{j} = (\ln(t+1))\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \mathbf{c},$

将 $t=1, \mathbf{r} = (\ln 2)\mathbf{i}$ 代入上式, 得 $\mathbf{c} = -\mathbf{j}$, 所以表示质点位置的向量函数为

$$\mathbf{r}(t) = (\ln(t+1))\mathbf{i} + (t^2 - 1)\mathbf{j}.$$

二、向量的模、方向余弦、投影

在向量用坐标表示以后, 向量的模和方向就可以用向量的坐标来表达.

1. 向量的模

设向量 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 如图 7-17 所示, 作 $\overrightarrow{OM} = \mathbf{r}$, 则 $\overrightarrow{OP} = x\mathbf{i}, \overrightarrow{OQ} = y\mathbf{j}, \overrightarrow{OR} = z\mathbf{k}$. 由勾股定理可得

$$|\mathbf{r}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 + |\overrightarrow{OR}|^2},$$

由此得到向量 $\mathbf{r}$ 的模的坐标表达式

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (7.3)$$

由于空间两点之间的距离等于以这两点分别为起点和终点的向量的模, 因此利用式(7.2)和式(7.3)可得空间两点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 的距离公式

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7.4)$$

例 3 求证以 $A(1, 1, 1), B(-1, 2, 3), C(0, 0, 5)$ 三点为顶点的三角形是等腰直角三角形.

解 由式(7.4)计算可得

$$|AB|^2 = (-1-1)^2 + (2-1)^2 + (3-1)^2 = 9,$$

$$|AC|^2 = (0-1)^2 + (0-1)^2 + (5-1)^2 = 18,$$

$$|BC|^2 = [0 - (-1)]^2 + (0-2)^2 + (5-3)^2 = 9.$$

由于 $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ 且 $|AB| = |BC|$, 所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

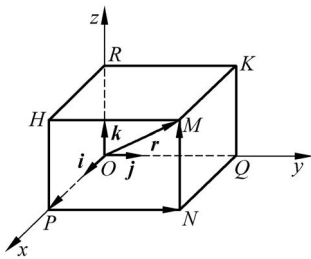


图 7-17

2. 方向角与方向余弦

设有两个非零向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, 任取空间一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, 在两向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所决定的平面内, 规定大于等于 0 且不超过 π 的角 $\angle AOB$ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 如图 7-18 所示, 记作 $(\widehat{\mathbf{a}}, \widehat{\mathbf{b}})$ 或 $(\widehat{\mathbf{b}}, \widehat{\mathbf{a}})$. 如果向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 中有一个是零向量, 则规定它们的夹角可在 $[0, \pi]$ 任意取值.

非零向量 $\mathbf{a}$ 与三个坐标轴正向之间的夹角 α, β, γ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的方向角, 方向角的余弦 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 的方向余弦, 如图 7-19 所示. 设 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$, 在 $\triangle OPM$ 中, $MP \perp OP$, 故

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\mathbf{a}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

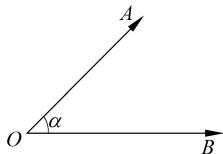


图 7-18

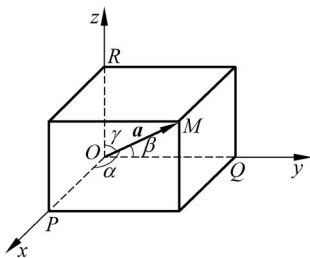


图 7-19

同理得

$$\cos\beta = \frac{y}{|\mathbf{a}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\mathbf{a}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

显然有

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

且

$$\mathbf{a}^\circ = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma).$$

上式表明: 与向量 $\mathbf{a}$ 同方向的单位向量就是以 $\mathbf{a}$ 的方向余弦为坐标的向量.

3. 向量在轴上的投影

设 u 为一数轴, M 为一已知点, 如图 7-20 所示, 过点 M 作垂直于 u 轴的平面交 u 轴于点 M' (点 M' 称为点 M 在 u 轴上的投影点), 称向量 $\overrightarrow{OM'}$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的分向量. 设 $\overrightarrow{OM'} = \lambda \mathbf{e}$ (其中 $\mathbf{e}$ 为单位向量), 则称数 λ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 在 u 轴上的投影, 记作 $\text{Prj}_u \overrightarrow{OM}$.

由上述定义, 向量 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$a_x = \text{Prj}_x \mathbf{a}, \quad a_y = \text{Prj}_y \mathbf{a}, \quad a_z = \text{Prj}_z \mathbf{a},$$

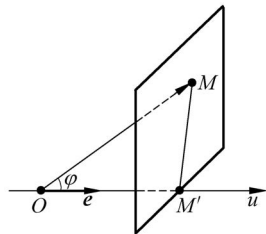


图 7-20

值得注意的是,向量在坐标轴上的投影与向量在坐标轴上的分向量有本质的区别,如向量 $\mathbf{a}=(a_x, a_y, a_z)$ 在坐标轴上的投影是三个数 a_x, a_y 和 a_z , 而向量在坐标轴上的分向量是三个向量 $a_x \mathbf{i}, a_y \mathbf{j}$ 和 $a_z \mathbf{k}$.

设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为两个向量, 且 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, 则称 $\mathbf{a}$ 在与 $\mathbf{b}$ 同向的数轴上的投影为向量 $\mathbf{a}$ 在向量 $\mathbf{b}$ 上的投影, 记作 $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$.

向量的投影具有下列性质:

性质 1 (投影定理) $\text{Prj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \varphi$, 其中 φ 为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{u}$ 轴正向的夹角;

性质 2 $\text{Prj}_{\mathbf{u}} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \text{Prj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a} + \text{Prj}_{\mathbf{u}} \mathbf{b}$;

性质 3 $\text{Prj}_{\mathbf{u}} (\lambda \mathbf{a}) = \lambda \text{Prj}_{\mathbf{u}} \mathbf{a}$.

例 4 已知两点 $M_1(2, 2, 0)$ 和 $M_2(1, 3, \sqrt{2})$, 计算

(1) $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在 x 轴上的投影, 以及在 z 轴上的分向量; (2) $|\overrightarrow{M_1 M_2}|$;

(3) $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 的方向余弦和方向角; (4) 与 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 同方向的单位向量 $\mathbf{e}$.

解 (1) 因为 $\overrightarrow{M_1 M_2} = (1-2, 3-2, \sqrt{2}-0) = (-1, 1, \sqrt{2})$, 所以 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 在 x 轴上的投影为 -1 , 在 z 轴上的分向量为 $\sqrt{2} \mathbf{k}$;

(2) $|\overrightarrow{M_1 M_2}| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$;

(3) 它的方向余弦为 $\cos \alpha = -\frac{1}{2}, \cos \beta = \frac{1}{2}, \cos \gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 方向角为

$$\alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad \beta = \frac{\pi}{3}, \quad \gamma = \frac{\pi}{4};$$

(4) 与 $\overrightarrow{M_1 M_2}$ 同方向的单位向量

$$\mathbf{e} = \frac{1}{|\overrightarrow{M_1 M_2}|} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{1}{2}(-1, 1, \sqrt{2}) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

习题 7-2

1. 说明下列各点所在的位置:

$$A(0, -2, 1); B(5, -1, -8); C(3, 0, 0); D(2, 1, -3).$$

2. 求点 $(1, -2, 3)$ 关于各坐标面、各坐标轴以及坐标原点的对称点的坐标.

3. 设 $\mathbf{a} = (3, -2, 2)$, 求 $\mathbf{a}$ 的模及与 $\mathbf{a}$ 平行的单位向量.

4. 求与点 $A(0, -2, 3)$ 、点 $B(4, 1, 0)$ 等距离的点的轨迹方程.

5. 求到点 $(3, 1, -4)$ 的距离等于到 yOz 面的距离的动点的轨迹方程.

6. 设点 $A(7, 1, -4)$, $B(-2, 5, 3)$, 点 M 在 Ox 轴上, 且 $|AM| = |BM|$, 求点 M 的坐标.

7. 设向量 $\mathbf{b}$ 与向量 $\mathbf{a} = (16, -15, 12)$ 平行, 且方向相反, $\mathbf{b}$ 的模为 75, 求向量 $\mathbf{b}$ 的坐标.

8. 设向量 $\mathbf{a} = (1, 3, 2)$, $\mathbf{b} = \lambda(2, y, 4)$, 且 $\lambda \neq 0$, 若 $\mathbf{a}$ 平行于 $\mathbf{b}$, $|\mathbf{b}| = 28$, 求向量 $\mathbf{b}$.

9. 一向量的起点为 $A(2, -1, 7)$, 该向量在三个坐标轴上的投影依次为 4, 2, -2, 求此向量的终点坐标.

10. 设已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算:



- (1) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模; (2) 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的方向余弦和方向角;
 (3) $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 x 轴上的投影; (4) $\overrightarrow{M_1M_2}$ 在 y 轴上的分向量.

11. 设 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(1,2,0)$, 求 M_1M_2 连线上一点 M , 使得 $M_1M : MM_2 = 2 : 1$.

12. 已知向量 $\overrightarrow{OM}$ 与 Ox 轴的夹角为 45° , 与 Oy 轴的夹角为 60° , 向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模为 6, 且在 Oz 轴坐标为负值, 求 M 点的坐标.

13. 一个质点的位置向量函数为

$$\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k},$$

- (1) 求质点的速度向量和加速度向量; (2) $t(0 \leq t \leq 2\pi)$ 取何值时, $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$?

第三节 向量的乘法运算

向量的代数运算除了线性运算外, 还包括乘法运算. 向量的乘法运算应用广泛, 我们将通过几个典型的几何和物理问题引入这种运算.

一、两个向量的数量积

1. 数量积的概念与性质

设一物体在常力 $\mathbf{F}$ 的作用下沿直线运动, s 表示位移, 那么力 $\mathbf{F}$ 所做的功为

$$W = |\mathbf{F}| |s| \cos \theta,$$

其中 θ 是 $\mathbf{F}$ 与 s 的夹角, 如图 7-21 所示.

从研究这类实际问题的需要出发, 数学上引入了向量的一种乘法运算.

定义 7.5 设有两个向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$, 它们之间的夹角为 θ , 乘积 $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta$ 称为向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的数量积, 记作 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, 即

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta. \quad (7.5)$$

向量的数量积也称为内积或点积.

由定义 7.5, 上述例子中力 $\mathbf{F}$ 所做的功就等于力 $\mathbf{F}$ 与位移 s 的数量积, 即 $W = \mathbf{F} \cdot s$.

根据数量积的定义, 容易证明如下结论:

- (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, 且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0}$;
 (2) 设 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为两非零向量, 则 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$;

由于零向量的方向可以看作是任意的, 故可认为零向量与任何向量都垂直, 因此, 上述结论可叙述为: 向量 $\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

- (3) 当 $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ 时, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{Prj}_a \mathbf{b}$; 当 $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ 时,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{Prj}_b \mathbf{a}. \quad (7.6)$$

即两个向量的数量积等于其中一个向量的模和另一个向量在此向量上投影的乘积. 此外

$$\text{Prj}_a \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}, \quad \text{Prj}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}.$$

数量积具有下列运算规律:

- (1) 交换律 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;

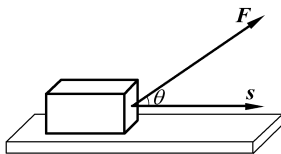


图 7-21

(2) (数乘)结合律 $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b)$ (λ 为实数);

(3) 分配律 $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

以上三个运算规律都可由向量数量积的定义以及式(7.6)导出,我们仅对(3)加以证明.

如果 $c=0$,显然成立; 如果 $c \neq 0$,则有

$$\begin{aligned}(a+b) \cdot c &= |c| \operatorname{Prj}_c(a+b) = |c| (\operatorname{Prj}_c a + \operatorname{Prj}_c b) \\ &= |c| \operatorname{Prj}_c a + |c| \operatorname{Prj}_c b = a \cdot c + b \cdot c.\end{aligned}$$

2. 数量积的坐标表示

设 $a=(a_x, a_y, a_z)$, $b=(b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\begin{aligned}a \cdot b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \cdot (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= a_x b_x (i \cdot i) + a_x b_y (i \cdot j) + a_x b_z (i \cdot k) + \\ &\quad a_y b_x (j \cdot i) + a_y b_y (j \cdot j) + a_y b_z (j \cdot k) + \\ &\quad a_z b_x (k \cdot i) + a_z b_y (k \cdot j) + a_z b_z (k \cdot k),\end{aligned}$$

因为 i, j, k 互相垂直, 且为单位向量, 故由数量积的定义得

$$i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0, \quad i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1,$$

因此得到两向量数量积的坐标表达式

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

即两个向量的数量积等于这两个向量对应坐标的乘积之和.

由于 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$, 故两非零向量 a 和 b 夹角余弦的坐标表达式为

$$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

例 1 一质点在恒力 $F=i-2j+3k$ (单位: N) 的作用下沿直线从点 $A(-1, 2, -1)$ 移动到点 $B(3, 2, 1)$ (单位: m), 求力 F 所做的功.

解 质点的位移向量 $s=\overrightarrow{AB}=(3+1, 2-2, 1+1)=(4, 0, 2)$, 故力 F 所做的功为

$$W=F \cdot s=(1, -2, 3) \cdot (4, 0, 2)=10J.$$

例 2 设 $|a|=2$, $|b|=3\sqrt{2}$, $(\widehat{a, b})=\frac{\pi}{4}$, 计算:

(1) $a \cdot b$; (2) $(a+b)^2$; (3) $(a+b) \cdot (a-b)$; (4) $\operatorname{Prj}_b a$.

解 (1) $a \cdot b = |a| |b| \cos \frac{\pi}{4} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$;

(2) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$
 $= |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2 = |a|^2 + 2|a| |b| \cos(\widehat{a, b}) + |b|^2$
 $= 4 + 2 \times 2 \times 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 18 = 34$;

(3) $(a+b) \cdot (a-b) = a \cdot a - a \cdot b + b \cdot a - b \cdot b$
 $= |a|^2 - |b|^2 = 2^2 - (3\sqrt{2})^2 = -14$;

(4) $\operatorname{Prj}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = \frac{|a| |b| \cos \frac{\pi}{4}}{|b|} = |a| \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$.



例 3 已知三点 $A(1,1,1), B(2,2,1)$ 和 $C(3,2,2)$, 求: (1) $\angle ABC$; (2) $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 上的投影.

解 (1) 因为 $\overrightarrow{BA}=(-1,-1,0), \overrightarrow{BC}=(1,0,1)$, 则有

$$\cos \angle ABC = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-1 \times 1 - 1 \times 0 + 0 \times 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = -\frac{1}{2},$$

所以 $\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$;

(2) 因为 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BC}| \text{Prj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA}$, 所以

$$\text{Prj}_{\overrightarrow{BC}} \overrightarrow{BA} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例 4 设液体流过平面 S 上面积为 A 的一个区域, 流体在这区域上各点处的流速均为 (常向量) $\boldsymbol{v}$, 设 $\boldsymbol{n}$ 为垂直于 S 的单位向量 (如图 7-22(a) 所示). 计算单位时间内经过此区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流体的质量 M (流体的密度为 ρ).^[1]

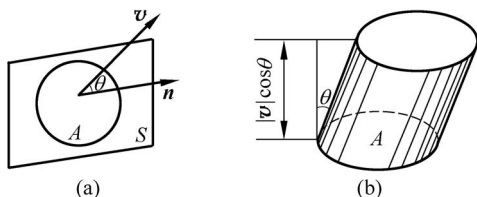


图 7-22

解 单位时间内流过此区域的液体组成一个底面积为 A 、斜高为 $|\boldsymbol{v}|$ 的斜柱体 (如图 7-22(b) 所示), 该柱体的斜高与底面垂线的夹角就是流速 $\boldsymbol{v}$ 与向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角 θ , 所以该柱体的高为 $|\boldsymbol{v}| \cos \theta$, 体积为

$$A |\boldsymbol{v}| \cos \theta = A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n},$$

因此, 单位时间内经过此区域流向 $\boldsymbol{n}$ 所指一侧的流体的质量为 $M = \rho A \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n}$.

二、两个向量的向量积

1. 向量积的概念与性质

在研究物体的转动问题时, 要考虑作用在物体上的力所产生的力矩. 设 O 是一杠杆的支点, 力 $\boldsymbol{F}$ 作用于杠杆上的 P 点处, $\boldsymbol{F}$ 与 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ (图 7-23). 力学中规定, 力 $\boldsymbol{F}$ 对支点 O 的力矩 $\boldsymbol{M}$ 是一个向量, 它的大小为

$$|\boldsymbol{M}| = |\boldsymbol{F}| |\overrightarrow{OP}| \sin \theta = |\boldsymbol{F}| |\overrightarrow{OP}| \sin \theta$$

它的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\boldsymbol{F}$ 确定的平面, 并且 $\overrightarrow{OP}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{M}$ 三者的方向符合右手法则 (有序向量组 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 符合右手法则是当右手的四指从 $\boldsymbol{a}$ 以不超过 π 的转角转向 $\boldsymbol{b}$ 时, 竖起的大拇指的指向为 $\boldsymbol{c}$ 的方向 (见图 7-24)). 由此实际背景出发, 可以抽象出两个向量的向量积概念.

定义 7.6 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 是两个向量, 若向量 $\boldsymbol{c}$ 满足

(1) $\boldsymbol{c}$ 的模 $|\boldsymbol{c}| = |\boldsymbol{a}| |\boldsymbol{b}| \sin \theta$, 其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角;

(2) $\boldsymbol{c}$ 的方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 所决定的平面, $\boldsymbol{c}$ 的指向按右手法则从 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$ 来确定 (图 7-24), 则称向量 $\boldsymbol{c}$ 为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的向量积, 也称为外积, 记作 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

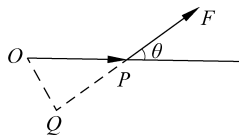


图 7-23

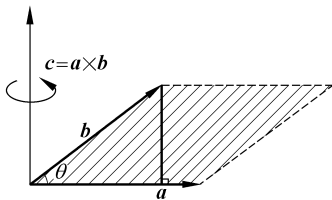


图 7-24

因此,上面提到的力矩 M 可以表示为 $M = \overrightarrow{OP} \times F$.

向量积的模的几何意义: 因为 $|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$, 所以向量积的模 $|a \times b|$ 等于以 a , b 为邻边的平行四边形的面积.

根据向量积的定义,容易证明如下结论:

- (1) $a \times a = 0$;
- (2) a 与 b 平行(或共线)的充要条件是 $a \times b = 0$.

向量积具有下列运算规律:

- (1) **反交换律** $a \times b = -b \times a$;
- (2) **(数乘)结合律** $(\lambda a) \times b = a \times (\lambda b) = \lambda(a \times b)$ (λ 为实数);
- (3) **(关于加法的)分配律** $(a+b) \times c = a \times c + b \times c$, $c \times (a+b) = c \times a + c \times b$.

2. 向量积的坐标表示

设 $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$, 由于 i, j, k 互相垂直, 且为单位向量, 所以

$$\begin{aligned} i \times i &= j \times j = k \times k = 0, \\ i \times j &= k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \\ j \times i &= -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j. \end{aligned}$$

于是得到两向量的向量积的坐标表达式

$$\begin{aligned} a \times b &= (a_x i + a_y j + a_z k) \times (b_x i + b_y j + b_z k) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) i + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_x b_y - a_y b_x) k. \end{aligned}$$

为便于记忆,利用三阶行列式按第一行展开的公式,将 a 与 b 的向量积写成如下形式:

$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k.$$

例 5 求与向量 $a = (1, 0, 2)$ 和 $b = (-1, 1, 0)$ 同时垂直的单位向量.

$$\text{解 } a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} k = -2i - 2j + k, |a \times b| =$$

$$\sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \text{ 所以同时垂直于 } a \text{ 与 } b \text{ 的单位向量为 } \pm \frac{1}{3}(-2, -2, 1).$$

例 6 已知三角形 ABC 的顶点分别为 $A(2, 1, -1)$, $B(1, 0, -1)$, $C(1, 2, 3)$, 求三角形 ABC 的面积.

解 由于 $\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 1, 4)$, 因此



$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 2\mathbf{k},$$

根据向量积的模的几何意义, 三角形 ABC 的面积为

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-2)^2} = 3.$$

例 7 设刚体以等角速度 ω 绕 l 轴旋转, 计算刚体上一点 M 的线速度.

解 刚体绕 l 轴旋转, 可以用一个向量 ω 表示旋转角速度, 该向量的大小表示角速度的大小, 它的方向由右手法则定出: 用右手握住 l 轴, 当右手的四个手指的弯曲方向与刚体的旋转方向一致时, 大拇指的指向就是 ω 的方向(图 7-25).

设点 M 到旋转轴 l 的距离为 a , 在 l 上任取一点 O 作向量 $r = \overrightarrow{OM}$, 以 θ 表示 ω 与 r 的夹角, 那么 $a = |r| \sin \theta$.

设线速度为 v , 由线速度与角速度的关系可知, 线速度 v 的大小为

$$|v| = |\omega| a = |\omega| |r| \sin \theta,$$

方向垂直于过点 M 与 l 轴组成的平面, 即 v 垂直于 ω 与 r , 又 v 的指向按 ω, r, v 的顺序符合右手法则, 因此 $v = \omega \times r$.

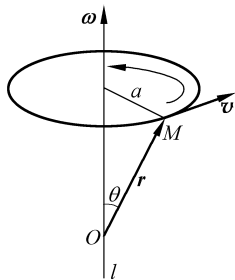


图 7-25

三、三个向量的混合积

向量如图 7-26 所示, 由于平行六面体的底面积为 $S = |a \times b|$, 高为

$$h = |c| |\cos(\widehat{a \times b, c})|,$$

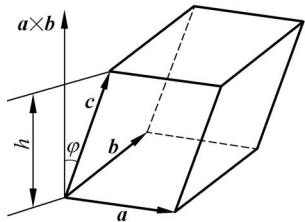


图 7-26

所以

$$V = Sh = |a \times b| |c| |\cos(\widehat{a \times b, c})| = |(a \times b) \cdot c|.$$

上式中, 既有向量的数量积又有向量积, 这样的运算就是向量的混合积.

1. 混合积的概念

已知三个向量 a, b, c , 先作两向量 a 和 b 的向量积 $a \times b$, 把所得到的向量与第三个向量 c 再作数量积, 所得的数量 $(a \times b) \cdot c$ 称为有序向量组 a, b, c 的混合积, 记作 $[a b c]$, 即

$$[a b c] = (a \times b) \cdot c.$$

混合积的几何意义: 如图 7-26 所示, $|(a \times b) \cdot c|$ 表示以 a, b, c 为棱的平行六面体的体积, 混合积的符号取决于 $(\widehat{a \times b, c})$ 是锐角还是钝角, 即若设向量 $a \times b$ 与 c 的夹角为 φ , 当 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ 时, $h = |c| \cos \varphi$ 为平行六面体的高, 则平行六面体的体积为

$$V = |a \times b| h = |a \times b| |c| \cos \varphi = (a \times b) \cdot c,$$

当 $\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \pi$ 时, $-|c| \cos \varphi$ 为平行六面体的高, 体积 $V = -(a \times b) \cdot c$.

所以, 混合积 $[a b c]$ 的绝对值表示以向量 a, b, c 为棱的平行六面体的体积. 即 $V =$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| |\mathbf{c}| |\cos \varphi| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]|.$$

特别地,当 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = 0$ 时,平行六面体的体积为零,即向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 共面.

2. 混合积的坐标表示

设 $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z), \mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z), \mathbf{c} = (c_x, c_y, c_z)$, 因为

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \mathbf{k}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = c_x \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

利用混合积的坐标表达式可以证明以下结论:

$$(1) [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}];$$

$$(2) \text{ 三个向量 } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ 共面的充要条件是 } \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

例 8 证明四点 $A(1, 1, 1), B(4, 5, 6), C(2, 3, 3), D(10, 15, 17)$ 共面.

证 因为 $\overrightarrow{AB} = (3, 4, 5), \overrightarrow{BC} = (-2, -2, -3), \overrightarrow{CD} = (8, 12, 14)$, 所以

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}] = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -3 \\ 8 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 0.$$

因此 A, B, C, D 四点共面.

习题 7-3

1. 设 $\mathbf{a} = (2, 1, 1), \mathbf{b} = (3, -1, 2)$, 求:

(1) $(2\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - 2\mathbf{b})$; (2) $(\mathbf{b} - 3\mathbf{a}) \times (2\mathbf{a})$; (3) $\text{Prj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$; (4) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$.

2. 设向量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{a} = (2, -1, 2)$ 平行, 并且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 18$, 求向量 $\mathbf{b}$.

3. 将质量为 100kg 的物体从点 $M_1(3, 1, 8)$ 沿直线移动到点 $M_2(1, 4, 2)$, 求重力所做的功(长度单位为 m).

4. 判断以 $A(1, 2, 3), B(3, 1, 5)$ 和 $C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是否为直角三角形.

5. 已知 $|\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = \sqrt{3}, \mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, 求 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 的夹角.

6. 已知 $|\mathbf{a}| = 2, |\mathbf{b}| = 5, (\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \frac{2\pi}{3}$, 且向量 $\alpha = \lambda \mathbf{a} + 17\mathbf{b}$ 与 $\beta = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 垂直, 求常数 λ .

7. 设 $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \lambda(x, 4, 1)$ 为单位向量且 $\lambda \neq 0$, 问 λ, x 为何值时,

(1) $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 垂直; (2) $\mathbf{b}$ 与 $\mathbf{a}$ 平行?

8. 判断向量 $\mathbf{a} = (-4, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 6, -3)$, $\mathbf{c} = (1, -4, 1)$ 是否共面.

9. 已知三点 $A(1, 0, 2)$, $B(3, 2, 2)$ 和 $C(1, 4, -1)$, 求:

(1) 同时与 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 垂直的单位向量; (2) $\triangle ABC$ 的面积; (3) 点 B 到边 AC 的距离.

10. 设 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ 与 $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ 垂直, 求 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角, 并求以 $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ 和 $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ 为边的平行四边形的面积.

第四节 曲面及其方程

日常生活中经常会遇到各种各样的曲面, 例如, 汽车前灯的反光镜面、建筑物的外表面等. 本节建立几类常见曲面的方程.

一、曲面的方程

与平面解析几何中把平面曲线看作动点的轨迹一样, 在空间解析几何中, 空间曲面也可以看作空间中的动点按一定规律运动的轨迹.

定义 7.7 在空间直角坐标系中, 如果曲面 S 与三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

(1) 曲面 S 上任一点的坐标都满足方程 $F(x, y, z) = 0$;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标都不满足方程 $F(x, y, z) = 0$,

则称方程 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 S 的方程, 称曲面 S 为方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形(图 7-27).

建立了空间曲面与方程的联系之后, 就可以利用方程的解析性质来研究空间曲面的几何特征. 空间曲面主要有以下两个基本问题:

(1) 已知曲面上点的几何特征, 求曲面方程;

(2) 已知曲面方程, 研究曲面的几何特征.

例 1 求球心在点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面的方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点, 如图 7-28 所示, 由题意得 $|M_0M| = R$, 所以

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R,$$

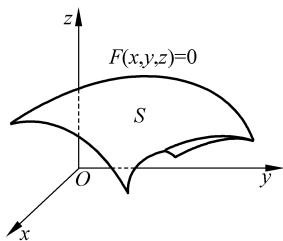


图 7-27

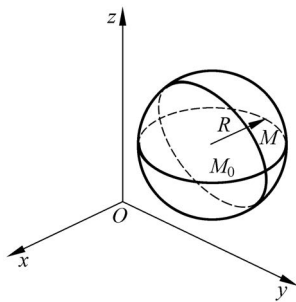


图 7-28

即

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \quad (7.7)$$

显然,球面上点的坐标都满足方程(7.7),不在球面上的点的坐标不满足方程(7.7),所以方程(7.7)就是球心在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 、半径为 R 的球面方程.

特别地,如果球心在原点,那么球面方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

例 2 确定方程 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2 = 0$ 所表示的曲面.

解 将方程配方并整理,得

$$(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 4,$$

所以方程表示以 $(-1, 1, 0)$ 为球心、2 为半径的球面.

一般地,设有三元二次方程

$$Ax^2 + Ay^2 + Az^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0 (A \neq 0),$$

这个方程的特点是缺 xy, yz, zx 项,而且平方项系数相同,显然方程经过配方可以化成方程(7.7)的形式,所以此方程一般表示一个球面.

例 3 已知动点满足如下轨迹方程: $x^2 + y^2 = a^2$. 试问在空间中它表示什么图形?

解 显然在 xOy 平面上,它表示一个圆.注意到方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 不显含 z ,换句话说就是方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 不依赖于 z 的变化,因而,凡是与 z 轴平行的直线,只要它在 xOy 面上的投影落在圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 上,就满足方程 $x^2 + y^2 = a^2$,即这一曲面可以看作与 z 轴平行的直线沿 $x^2 + y^2 = a^2$ 旋转而成的曲面.

二、柱面

定义 7.8 平行于定直线 L ,沿定曲线 C 移动的动直线所形成的曲面称为柱面,如图 7-29 所示,定曲线 C 称为柱面的准线,动直线称为柱面的母线.

上述例 3 中方程 $x^2 + y^2 = a^2$ 所表示的曲面,可以看作由平行于 z 轴的直线 L 沿 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 移动而形成,所以此方程表示以 xOy 面上的圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面,我们称该柱面为圆柱面.

一般地,不含变量 z 的方程 $F(x, y) = 0$ 在空间直角坐标系中表示以 xOy 面上的曲线 $C: F(x, y) = 0$ 为准线,母线平行于 z 轴的柱面.它由平行于 z 轴的直线沿曲线 C 移动而形成,如图 7-30 所示.

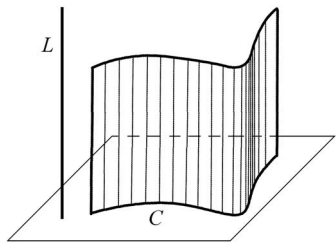


图 7-29

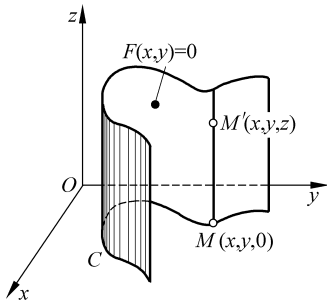


图 7-30



类似地,不含变量 x 的方程 $G(y, z)=0$ 表示以 yOz 面上的曲线 $G(y, z)=0$ 为准线,母线平行于 x 轴的柱面;不含变量 y 的方程 $H(x, z)=0$ 表示以 zOx 面上的曲线 $H(x, z)=0$ 为准线,母线平行于 y 轴的柱面.

例如,方程 $y^2=2x$ 表示以 xOy 面上的抛物线 $y^2=2x$ 为准线,母线平行于 z 轴的抛物柱面,如图 7-31 所示.

方程 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 表示以 zOx 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 为准线,母线平行于 y 轴的椭圆柱面,如图 7-32 所示.

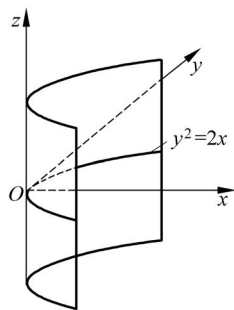


图 7-31

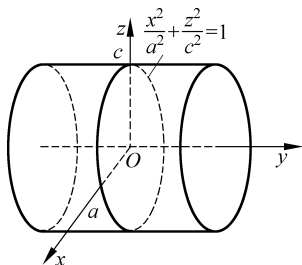


图 7-32

方程 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 表示以 xOy 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ 为准线,母线平行于 z 轴的双曲柱面,如图 7-33 所示.

方程 $y+z=1$ 表示以 yOz 面上的直线 $y+z=1$ 为准线,母线平行于 x 轴的柱面,这个柱面是一个平面,如图 7-34 所示.

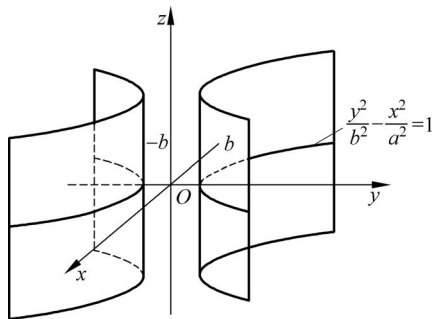


图 7-33

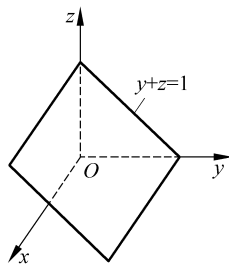


图 7-34

三、旋转曲面

定义 7.9 一条平面曲线绕其所在平面上的一条定直线旋转一周所形成的曲面称为旋转曲面,旋转曲线和定直线分别称为旋转曲面的母线和轴.

假设 yOz 面上有一已知曲线 $C: f(y, z)=0$,将该曲线绕 z 轴旋转一周,就得到一个以 z 轴为轴的旋转曲面,如图 7-35 所示,它的方程可以用如下的方法求得.

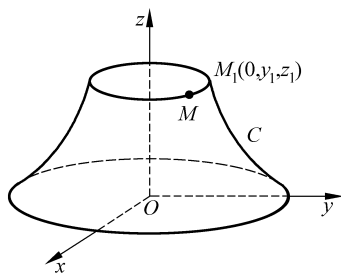


图 7-35

设 $M(x, y, z)$ 是旋转曲面上任意一点, 则点 M 应当是曲线 C 上一点 $M_1(0, y_1, z_1)$ 绕 z 轴旋转所得, 因此 $z = z_1$, 且 M 与 M_1 到 z 轴的距离相同, 即 $\sqrt{x^2 + y^2} = |y_1|$. 因为 $M_1(0, y_1, z_1)$ 是曲线 C 上的点, 所以

$$f(y_1, z_1) = 0,$$

将 $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$, $z_1 = z$ 代入上式, 得

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

可以验证, 此即旋转曲面的方程.

一般地, yOz 坐标面上的曲线 $C: f(y, z) = 0$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面为

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

绕 y 轴旋转而成的旋转曲面为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

例如, yOz 面上的椭圆 $\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$ 绕 y 轴旋转而成的旋转曲面的方程为

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1,$$

这个曲面称为**旋转椭球面**, 如图 7-36 所示.

zOx 面上的抛物线 $x^2 = 2pz$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面的方程为

$$x^2 + y^2 = 2pz,$$

这个曲面称为**旋转抛物面**, 如图 7-37 所示. 常用的旋转抛物面是 $z = x^2 + y^2$.

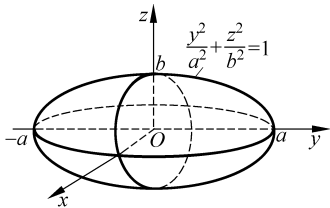


图 7-36

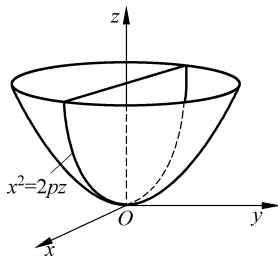


图 7-37

zOx 面上的双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 分别绕 z 轴和 x 轴旋转而成的旋转曲面的方程分别为

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{c^2} = 1,$$

这两个曲面分别称为**单叶旋转双曲面**(图 7-38)和**双叶旋转双曲面**(图 7-39).

特别地, 由一直线绕另一与之相交的直线旋转一周所得到的旋转面为**圆锥面**, 如图 7-40 所示. 两直线的交点称为该圆锥面的**顶点**, 两直线间的夹角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) 称为圆锥面的**半顶角**.

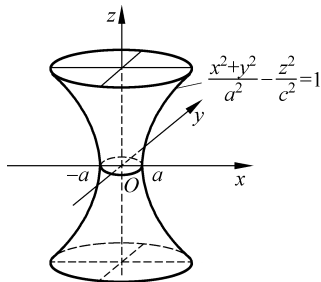


图 7-38

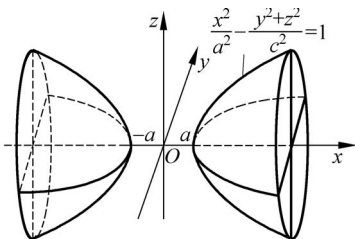


图 7-39

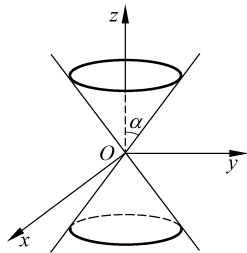


图 7-40

例如,由 xOz 面上的直线 $z=2x$ 绕 z 轴旋转一周所得到的圆锥面方程为

$$z^2 = 4(x^2 + y^2).$$

显然,此圆锥面是以原点为顶点、以 z 轴为对称轴的圆锥面.

例 4 说明下列方程表示什么曲面.若是旋转曲面,指出它们是如何旋转产生的.

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0$; (2) $y^2 + z^2 - x = 0$.

解 (1) 整理,得 $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1$,此方程表示球心在 $(0,0,-1)$,半径为 1 的球面,可以看作 xOz 面上的圆 $x^2 + (z+1)^2 = 1$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面;或者看作 yOz 面上的圆 $y^2 + (z+1)^2 = 1$ 绕 z 轴旋转而成的旋转曲面.

(2) 方程表示旋转抛物面,可以看作 xOy 面上的抛物线 $x=y^2$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面;或者看作 xOz 面上的抛物线 $x=z^2$ 绕 x 轴旋转而成的旋转曲面.

四、常见的二次曲面

由三元二次方程所表示的曲面称为二次曲面.例如,上面介绍的球面、准线为平面二次曲线的柱面、母线为平面二次曲线的旋转面等都是二次曲面.对于一般二次曲面的讨论是很复杂的,我们将利用截痕法讨论几类典型的二次曲面的几何形状.所谓截痕法,就是利用坐标面或平行于坐标面的平面去截割曲面,考察其交线的形状,然后加以综合,从而了解曲面全貌的分析方法.

1. 椭球面

其方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0),$$

其中 a, b, c 称为椭球面的半轴.

下面研究椭球面的形状.用平面 $z=t$ ($|t| < c$) 去截割椭球面,所得截痕是平面 $z=t$ 上的椭圆

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - t^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - t^2)} = 1,$$

它的两个半轴分别为 $\frac{a}{c}\sqrt{c^2 - t^2}$ 与 $\frac{b}{c}\sqrt{c^2 - t^2}$.显然,当 t 变动时,该椭圆的中心都在 z 轴上,

当 $|t|$ 由 0 逐渐增大到 c 时,椭圆的截痕由大到小,最后缩成一点.

用平面 $x=m$ ($|m| < a$) 或平面 $y=n$ ($|n| < b$) 去截割椭球面,分别可得到与上述类似的结果.

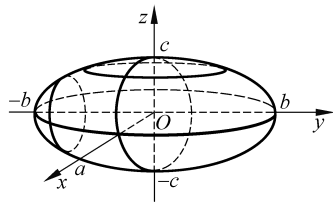


图 7-41

综上所述,可得椭球面的图形如图 7-41 所示.

另外,还可以用伸缩变形法得到椭球面的形状.

首先说明 xOy 面上的图形伸缩变形的方法. 在 xOy 面上,把点 $M(x, y)$ 变为点 $M'(x, \lambda y)$,从而把点 M 的轨迹 C 变为点 M' 的轨迹 C' ,称为把图形 C 沿 y 轴方向伸缩 λ 倍变成图形 C' . 假如 C 为曲线 $F(x, y) = 0$,点 $M(x_1, y_1) \in C$,点 M 变为点 $M'(x_2, y_2)$,其中 $x_2 = x_1, y_2 = \lambda y_1$,即 $x_1 = x_2, y_1 = \frac{1}{\lambda} y_2$. 因点 $M \in C$,有 $F(x_1, y_1) = 0$,故 $F(x_2, \frac{1}{\lambda} y_2) = 0$,因此点 $M'(x_2, y_2)$ 的轨迹 C' 的方程为 $F(x, \frac{1}{\lambda} y) = 0$. 例如把圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍,就变为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

类似地,把 xOz 面上的椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 z 轴旋转,得到旋转椭球面 $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$,然后利用伸缩变形法将旋转椭球面沿 y 轴方向伸缩 $\frac{b}{a}$ 倍,便得到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的形状.

伸缩变形法是研究曲面形状的一种较简便的方法.

2. 椭圆锥面

其方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

椭圆锥面的形状可由圆锥面的图形通过伸缩变形法得到,其图形如图 7-42 所示.

3. 抛物面

1) 椭圆抛物面

其方程为

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (pq > 0).$$

其图形可由旋转抛物面通过伸缩变形法得到,如图 7-43 所示.

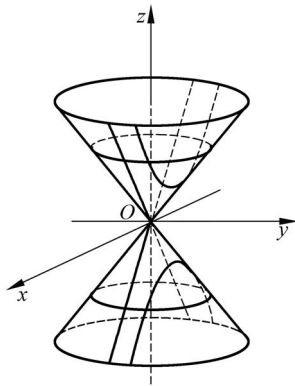


图 7-42

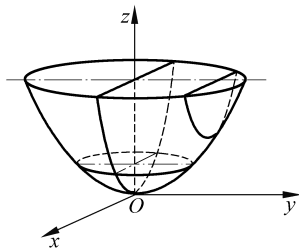


图 7-43

2) 双曲抛物面

其方程为

$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z \quad (pq > 0).$$

此曲面又称为**马鞍面**. 我们用截痕法讨论它的形状.

用平面 $y=t$ 截此曲面, 所得截痕 l 为平面 $y=t$ 上的抛物线 $z = -\frac{x^2}{2p} + \frac{t^2}{2q}$, 此抛物线开口向下, 其顶点坐标为 $x=0, y=t, z = \frac{t^2}{2q}$. 当 t 变化时, l 的形状不变, 位置只作平移, 而 l 的顶点轨迹 L 为平面 $x=0$ 上的抛物线 $z = \frac{y^2}{2q}$. 因此以 l 为母线、 L 为准线, 母线 l 的顶点在准线 L 上滑动, 且母线作平行移动, 这样得到的曲面就是双曲抛物面, 如图 7-44 所示.

4. 双曲面

1) 单叶双曲面

其方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

利用伸缩变形法可得其图形如图 7-45 所示.

2) 双叶双曲面

其方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad (a > 0, b > 0, c > 0).$$

利用伸缩变形法可得其图形如图 7-46 所示.

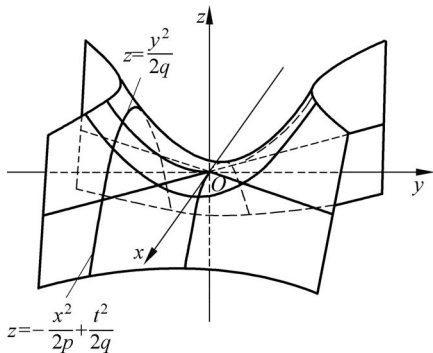


图 7-44

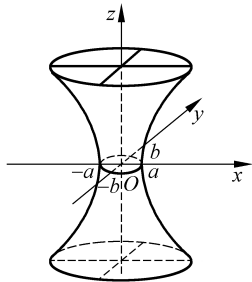


图 7-45

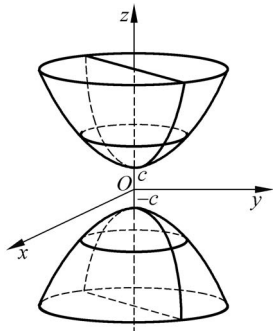


图 7-46

习题 7-4

1. 建立以 $(-1, -3, 2)$ 为球心, 且通过点 $(1, -1, 1)$ 的球面方程.

2. 求下列平面曲线绕指定坐标轴旋转所得的旋转面方程:

(1) xOy 面上的椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 绕 y 轴; (2) xOz 面上的抛物线 $z^2 = 5x$ 绕 x 轴;

(3) yOz 面上的直线 $2y-3z+1=0$ 绕 z 轴; (4) yOz 面上的双曲线 $\frac{z^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 绕 z 轴.

3. 说明下列旋转曲面是怎样形成的:

(1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$;

(2) $x^2-\frac{y^2}{4}+z^2=1$;

(3) $x^2-3y^2-3z^2=1$;

(4) $(z-a)^2=x^2+y^2$.

4. 写出满足下列条件的动点的轨迹方程. 它们分别表示什么曲面?

(1) 动点到点 $(5,0,0)$ 的距离与到点 $(-5,0,0)$ 的距离之和为 20;

(2) 动点到坐标原点的距离等于到 $z=4$ 平面的距离;

(3) 动点到 z 轴的距离等于到 yOz 平面距离的 2 倍.

5. 画出下列各方程所表示的曲面的图形:

(1) $x^2+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{4}=1$;

(2) $x^2-y^2+z^2=1$;

(3) $z=2-x^2$;

(4) $x^2+\frac{y^2}{4}=z$;

(5) $x^2-y^2=2z$;

(6) $z^2=4(x^2+y^2)$.

第五节 空间曲线及其方程

本节研究空间曲线的一般方程和参数方程及空间曲线在坐标面上的投影.

一、空间曲线的方程

1. 空间曲线的一般方程

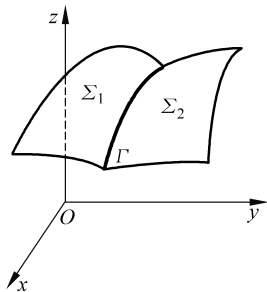


图 7-47

空间曲线可以看作两个曲面的交线. 设

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

是两个曲面的方程, 它们的交线为 Γ , 如图 7-47 所示. 因为曲线 Γ 上任何点 (x, y, z) 的坐标应同时满足这两个曲面的方程, 即

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7.8)$$

且如果点不在曲线 Γ 上, 那么它不可能同时在两个曲面上, 所以它的坐标不满足式 (7.8). 因此, 曲线 Γ 可以用方程组 (7.8) 来表示.

方程组 (7.8) 称为空间曲线 Γ 的一般方程.

例 1 方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ 3x+4z=12 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 第一个方程表示母线平行于 z 轴的圆柱面, 其准线为 xOy 上的圆; 第二个方程表示母线平行于 y 轴的柱面(平面), 其准线是 zOx 面上的直线. 所以方程组表示圆柱面与平面的交线(图 7-48).

例 2 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{4a^2-x^2-y^2}, \\ (x-a)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

解 第一个方程表示球心在坐标原点、半径为 $2a$ 的上半球面. 第二个方程表示母线平行 z 轴的圆柱面, 其准线是 xOy 面上的圆, 该圆的圆心在点 $(a, 0)$, 半径为 a . 因此方程组表示上述半球面与圆柱面的交线, 如图 7-49 所示.

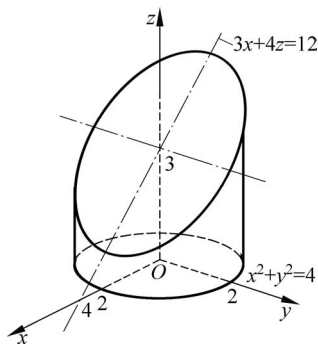


图 7-48

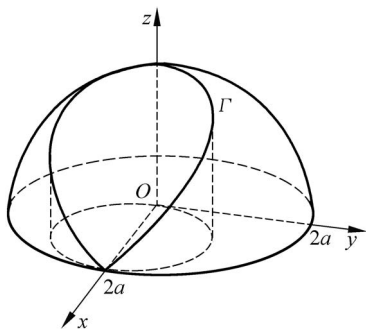


图 7-49

2. 空间曲线的参数方程

空间曲线除了用一般方程表示外, 还可以用参数方程来表示. 例如, 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 与 xOy 面相交所得的圆的一般方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

这个圆的参数方程可以表示为

$$\begin{cases} x = R \cos \varphi, \\ y = R \sin \varphi, \\ z = 0, \end{cases} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

一般地, 空间曲线 Γ 的参数方程是含有一个参数的方程组:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (7.9)$$

对于 t 的每个值, 由式(7.9)所确定的点 (x, y, z) 在此曲线上, 而此曲线上任一点的坐标都可由 t 的某个值通过式(7.9)表示. 方程组(7.9)称为空间曲线 Γ 的参数方程.

例 3 平头螺丝钉的外缘曲线是螺旋形曲线. 在拧紧螺丝钉时, 它的外缘曲线上的任一点 M 一方面绕螺丝钉的轴旋转, 另一方面又沿平行于轴线的方向前进. 这可抽象为: 空间点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以等角速度 ω 绕 z 轴旋转, 同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升 (其中 ω, v 都是常数). 这样的曲线称为螺旋线. 下面建立该曲线的参数方程.

解 取时间 t 为参数. 如图 7-50 所示, 设 $t=0$ 时, 动点位于点 $A(a, 0, 0)$ 处, 经过时间 t 后, 动点运动到点 $M(x, y, z)$. 记点 M 在 xOy 面上的投影为 M' , 则 M' 的坐标为 $(x, y, 0)$. 因为动点在圆柱面上以角速度 ω 绕 z 轴旋转, 所以经过时间

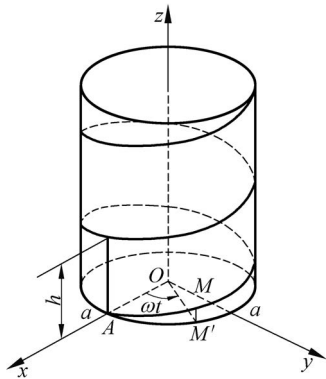


图 7-50

t 后, $\angle AOM' = \omega t$, 由此得

$$x = |OM'| \cos \omega t = a \cos \omega t, \quad y = |OM'| \sin \omega t = a \sin \omega t.$$

因为动点同时以线速度 v 沿平行于 z 轴的正向上升, 所以 $z = |MM'| = vt$. 这样, 动点的运动轨迹即螺旋线的参数方程为

$$\begin{cases} x = a \cos \omega t, \\ y = a \sin \omega t, \\ z = vt. \end{cases}$$

若记 $\theta = \omega t$, 则螺旋线的参数方程可写为

$$\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = a \sin \theta, \\ z = b\theta. \end{cases}$$

其中 $b = \frac{v}{\omega}$ 为常数, θ 为参数.

螺旋线有一个重要的性质: 当 θ 从 θ_0 变到 $\theta_0 + \alpha$ 时, z 从 $b\theta_0$ 变到 $b\theta_0 + b\alpha$. 这说明当 OM' 转过角 α 时, M 点沿螺旋线上升了高度 $b\alpha$, 即上升的高度与 OM' 转过的角度成正比. 特别是当 OM' 转过一周, 即 $\alpha = 2\pi$ 时, M 点就上升固定的高度 $h = 2\pi b$. 这个高度 $h = 2\pi b$ 在工程技术上叫作螺距.

质点在空间运动时, 它的坐标随时间而变化, 即 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. 质点在 t 时刻的位置向量就是一个向量值函数

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}.$$

例 4 一个人在悬挂式滑翔机上由于快速上升的气流而沿空间曲线

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + (t^2)\mathbf{k}$$

螺旋向上(此路径类似于例 3 中的螺旋线, 但并非螺旋线). 求:

(1) 速度向量和加速度向量; (2) 滑翔机在 t 时刻的速率.

解 (1)

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos t)\mathbf{i} + (3\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k},$$

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-3\cos t)\mathbf{i} + (-3\sin t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k};$$

(2) 因为 t 时刻的速度向量为 $\mathbf{v} = (-3\sin t)\mathbf{i} + (3\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$, 所以速率为

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{9 + 4t^2},$$

由此可见, 滑翔机沿其路径升高时运动得越来越快.

二、空间曲线在坐标面上的投影

设空间曲线 Γ 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (7.10)$$

从该方程组中消去变量 z 得到方程

$$H(x, y) = 0. \quad (7.11)$$

由于方程(7.11)是由方程组(7.10)消去 z 后所得的结果,因此曲线 Γ 上的点 $M(x, y, z)$ 既满足方程组(7.10),也满足方程(7.11),这说明曲线 Γ 上的所有点都在方程(7.11)所表示的曲面上.

因为方程(7.11)不含变量 z ,所以表示的是母线平行于 z 轴的柱面,这个柱面必定包含曲线 Γ ,称以曲线 Γ 为准线、母线平行于 z 轴的柱面为曲线 Γ 关于 xOy 面的投影柱面,投影柱面与 xOy 面的交线 C 称为曲线 Γ 在 xOy 面上的投影(曲线).

因此方程(7.11)为 Γ 关于 xOy 面的投影柱面, Γ 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} H(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

同理,消去方程组(7.10)中的变量 x 或变量 y ,分别得到曲线 Γ 关于 yOz 面的投影柱面 $R(y, z) = 0$ 或曲线 Γ 关于 zOx 面的投影柱面 $T(x, z) = 0$,因此可得曲线 Γ 在 yOz 面或 zOx 面上的投影曲线分别为

$$\begin{cases} R(y, z) = 0, \\ x = 0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} T(x, z) = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

例 5 求曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影柱面和投影曲线.

解 将两方程相减,得

$$2az - a^2 = 0,$$

解得 $z = \frac{a}{2}$,代入第一个方程中,得 $x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2$,此即 Γ 在 xOy 面上的投影柱面,它

是一个圆柱面,底面圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2, \\ z = 0. \end{cases}$$

例 6 设一立体由上半球面 $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ 和锥面 $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ 所围成,如图 7-51 所示,求它在 xOy 面上的投影.

解 上半球面和锥面的交线 Γ 为 $\begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}, \end{cases}$ 从

方程组中消去 z ,得投影柱面的方程

$$x^2 + y^2 = 1,$$

因此,交线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

这是 xOy 面上的单位圆,故所求立体在 xOy 面上的投影区

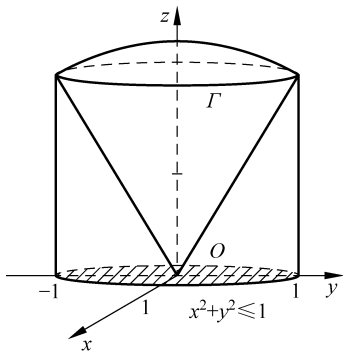


图 7-51

域即为该圆在 xOy 面上所围部分 $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1, \\ z = 0. \end{cases}$

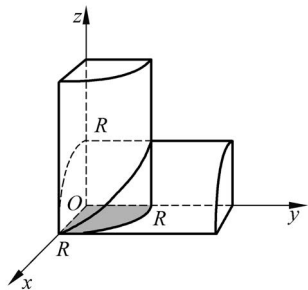


图 7-52

例 7 求两个圆柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 和 $x^2 + z^2 = R^2$ ($x > 0, y > 0, z > 0$) 的交线在 xOy 面的投影区域, 如图 7-52 所示.

解 两圆柱面的交线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2. \end{cases}$$

显然交线在 xOy 面的投影曲线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ z = 0, \end{cases} \quad \text{其中 } x > 0, y > 0,$$

因此投影区域为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq R^2, \\ z = 0, \end{cases} \quad (x > 0, y > 0).$$

习题 7-5

1. 画出下列曲线在第一卦限内的图形:

$$(1) \begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ x - y = 0; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + z^2 = 1. \end{cases}$$

2. 指出下列方程所表示的曲线:

$$(1) \begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0, \\ y = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x^2 - y^2 - \frac{z^2}{4} = 1, \\ z = -2. \end{cases}$$

3. 分别求母线平行于 x 轴及 y 轴, 而且通过曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 16, \\ x^2 + z^2 - y^2 = 0 \end{cases}$ 的柱面方程.

4. 求下列曲线在各坐标面上的投影曲线方程:

$$(1) \begin{cases} y^2 + z^2 - 3x = 0, \\ y + z = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = 2 - x^2 - y^2, \\ z = x^2 + y^2. \end{cases}$$

5. 将下列曲线的一般式方程化为参数方程:

$$(1) \begin{cases} 2x^2 + y^2 = z^2, \\ x + z = 1; \end{cases} \quad (2) \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \\ (x - 1)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

6. 画出下列各曲面所围成的立体的图形:

$$\begin{aligned} (1) \quad & z = -1, z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}; & (2) \quad & z = x^2 + y^2, z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}; \\ (3) \quad & z = 6 - x^2 - y^2, z = \sqrt{x^2 + y^2}; & (4) \quad & z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

第六节 平面及其方程

在本节和下一节中,我们将以向量为工具,在空间直角坐标系中讨论最简单的一类曲面和曲线——平面和直线.

一、平面的方程

平面可以由不同的几何条件确定. 以下我们将利用不同的几何条件建立几类常用的平面方程.

1. 平面的点法式方程

如果一个非零向量垂直于平面 Π , 则称此向量为平面 Π 的**法向量**. 显然, 具有给定法向量的平面有无穷多个, 若要求平面再过一定点, 则该平面就可以唯一确定. 以下我们就根据这两个条件来建立平面的方程.

如图 7-53 所示, 设 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 为平面 Π 上一点, $\mathbf{n}=(A, B, C)$ 为平面的一个法向量. 在平面 Π 上任取一点 $M(x, y, z)$, 因为 $\mathbf{n} \perp \Pi$, 所以 $\overrightarrow{M_0M} \perp \mathbf{n}$, 即 $\overrightarrow{M_0M} \cdot \mathbf{n} = 0$. 由 $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$, 得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (7.12)$$

显然, 平面 Π 上任意一点的坐标都满足这个方程. 反之, 如果点 M 不在平面 Π 上, 则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 不可能垂直于 $\mathbf{n}$, 故点 M 的坐标就不会满足方程 (7.12). 因此方程 (7.12) 就是过点 M_0 且以 $\mathbf{n}$ 为法向量的平面 Π 的方程, 称为**平面的点法式方程**.

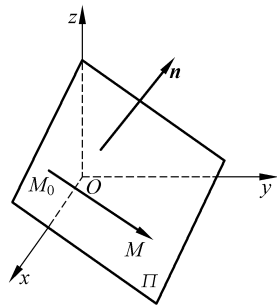


图 7-53

例 1 求过点 $M_0(-1, 2, 3)$ 且法向量与 x 轴平行的平面方程.

解 由题意, 设法向量 $\mathbf{n}=(A, 0, 0) (A \neq 0)$, 则所求的平面方程为

$$A \cdot (x + 1) + 0 \cdot (y - 2) + 0 \cdot (z - 3) = 0,$$

即 $x + 1 = 0$.

例 2 求过三点 $A(1, 1, 1), B(2, 0, 1)$ 和 $C(1, 2, 3)$ 的平面方程.

解 先求出平面的法向量 $\mathbf{n}$. 由于 $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB}, \mathbf{n} \perp \overrightarrow{AC}$, 因此可取 $\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$, 而 $\overrightarrow{AB} = (1, -1, 0), \overrightarrow{AC} = (0, 1, 2)$, 所以

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

于是, 所求平面方程为

$$-2(x - 2) - 2(y - 0) + (z - 1) = 0,$$

即

$$2x + 2y - z - 3 = 0.$$

假设三点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2), C(x_3, y_3, z_3)$ 不共线, 则它们可以确定一个平面. 设 $M(x, y, z)$ 为该平面上任一点, 则向量 $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面, 于是它们的混合积等于零, 即 $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0$, 因此得

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (7.13)$$

式(7.13)称为平面的三点式方程.

例2也可利用上述三点式方程来计算.

2. 平面的一般方程

平面的点法式方程(7.12)可改写为

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0,$$

令 $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, 则平面的点法式方程就化为三元一次方程

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (7.14)$$

反之, 给定三元一次方程(7.14), 任取满足该方程的一组数 x_0, y_0, z_0 , 即

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \quad (7.15)$$

两式相减, 得

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (7.16)$$

方程(7.16)正是过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 以 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 为法向量的平面方程. 而方程(7.14)与方程(7.16)同解, 所以任一三元一次方程(7.14)的图形总是一个平面. 我们称方程(7.14)为平面的一般方程, 其中 A, B, C 就是平面的一个法向量 $\mathbf{n}$ 的坐标, 即 $\mathbf{n} = (A, B, C)$.

从平面的一般方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 入手, 我们考察一些特殊位置的平面.

(1) 过原点的平面: $D = 0$, 即 $Ax + By + Cz = 0$.

(2) 平行于 x 轴的平面: $A = 0, D \neq 0$, 即 $By + Cz + D = 0$.

事实上, 该平面的法向量为 $\mathbf{n} = (0, B, C)$, 而 x 轴对应的向量为 $\mathbf{n}_1 = (1, 0, 0)$, 因此, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = 0$, 即平面平行于 x 轴.

同理, 方程 $Ax + Cz + D = 0$ 和 $Ax + By + D = 0$ 分别表示平行于 y 轴和平行于 z 轴的平面.

(3) 过 x 轴的平面: $A = D = 0$, 即 $By + Cz = 0$.

(4) 平行于 xOy 面的平面: $A = B = 0, D \neq 0$, 即 $Cz + D = 0$.

事实上, 该平面的法向量为 $\mathbf{n} = (0, 0, C)$, 与 x 轴和 y 轴都垂直, 即 $\mathbf{n}$ 垂直于 xOy 面, 所以该平面平行于 xOy 面.

同理, 方程 $Ax + D = 0$ 和 $By + D = 0$ 分别表示平行 yOz 面和平行 zOx 面的平面.

(5) xOy 面: $A = B = D = 0$, 即 $z = 0$.

同理, 方程 $y = 0$ 和 $x = 0$ 分别表示 zOx 面和 yOz 面.

例3 已知一个平面过 x 轴和点 $(4, 2, -1)$, 求该平面方程.

解 由于平面过 x 轴, 故 $A = D = 0$. 于是设所求平面方程为

$$By + Cz = 0.$$

又因为平面过点 $(4, 2, -1)$, 所以 $2B - C = 0$, 即 $C = 2B$, 将上式代入所设方程, 得 $By + 2Bz = 0$, 因为 $B \neq 0$, 故所求的平面方程为

$$y + 2z = 0.$$

3. 平面的截距式方程

设平面 Π 的方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

当 $D \neq 0$ 时, 上述方程化为

$$-\frac{x}{\frac{D}{A}} + -\frac{y}{\frac{D}{B}} + -\frac{z}{\frac{D}{C}} = 1,$$

令 $a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$, 则有

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (7.17)$$

如图 7-54 所示, 平面 Π 过三点 $(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$, 称式 (7.17) 为平面的截距式方程, 其中 a, b, c 分别称为平面在 x, y, z 轴上的截距.

例 4 求平面 $x - 2y + 3z - 12 = 0$ 与三坐标面所围成的四面体的体积.

解 将平面化为截距式:

$$\frac{x}{12} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{4} = 1,$$

则四面体的体积为 $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 12 \times 6\right) \times 4 = 48$.

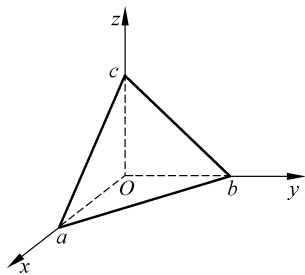


图 7-54

二、两平面的位置关系

两平面的位置关系有三种可能的情形: (1) 平行; (2) 重合; (3) 相交.

设有两个平面

$$\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

它们的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \mathbf{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$, 称两平面法向量所成的锐角或直角为两平面的夹角, 如图 7-55 所示. 设两平面的夹角为 θ , 则

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

结合两向量平行、垂直的条件, 可以得到以下结论:

$$(1) \text{ 平面 } \Pi_1 \text{ 和 } \Pi_2 \text{ 互相平行} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2};$$

$$(2) \text{ 平面 } \Pi_1 \text{ 和 } \Pi_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2};$$

$$(3) \text{ 平面 } \Pi_1 \text{ 和 } \Pi_2 \text{ 互相垂直} \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

例 5 说明下列各组中的两个平面的位置关系.

$$(1) \Pi_1: x - 2y + 3z - 1 = 0, \Pi_2: 2x - 4y + 6z + 1 = 0;$$

$$(2) \Pi_1: x + y = 0, \Pi_2: x + z = 0;$$

$$(3) \Pi_1: 2x + 4y - 3z - 6 = 0, \Pi_2: 8x + 5y + 12z + 1 = 0;$$

$$(4) \Pi_1: x - 2y + 2z + 1 = 0, \Pi_2: 3x - 6y + 6z + 3 = 0.$$

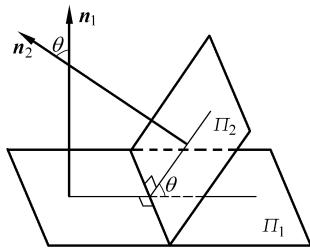


图 7-55

解 (1) 因为两平面的法向量有比例关系 $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \neq \frac{-1}{1}$, 所以 Π_1 与 Π_2 平行;

(2) 两平面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (1, 1, 0)$, $\mathbf{n}_2 = (1, 0, 1)$, 因为

$$\cos\theta = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{|1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2},$$

所以 Π_1 与 Π_2 相交, 并且夹角为 $\frac{\pi}{3}$;

(3) 两平面的法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (2, 4, -3)$, $\mathbf{n}_2 = (8, 5, 12)$, 因为 $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$, 所以 Π_1 与 Π_2 垂直;

(4) 因为两平面的法向量有比例关系 $\frac{1}{3} = \frac{-2}{-6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, 所以 Π_1 与 Π_2 重合.

例 6 求过两点 $M_1(1, 1, 1)$ 和 $M_2(0, 1, -1)$ 且与平面 $x + y + z = 0$ 垂直的平面的方程.

解一 设所求平面的一个法向量为 $\mathbf{n} = (A, B, C)$. 由于 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$ 在所求的平面上, 所以 $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \mathbf{n}$, 故有 $\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \mathbf{n} = 0$, 即

$$-A - 2C = 0.$$

又因为所求平面与已知平面 $x + y + z = 0$ 垂直, 所以 $\mathbf{n} \cdot (1, 1, 1) = 0$, 因此有 $A + B + C = 0$.

从上述两个方程中解得 $A = -2C$, $B = C$. 由点法式方程, 所求平面为

$$A(x - 0) + B(y - 1) + C(z + 1) = 0,$$

将 $A = -2C$, $B = C$ 代入, 并约去 C ($C \neq 0$), 整理得所求的平面方程为 $2x - y - z = 0$.

解二 由于所求平面的法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 与 $\overrightarrow{M_1M_2} = (-1, 0, -2)$ 垂直, 并且又与平面 $x + y + z = 0$ 垂直, 即与该平面的法向量 $(1, 1, 1)$ 垂直, 因此 $\mathbf{n}$ 可取 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 与向量 $(1, 1, 1)$ 的向量积, 即

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k},$$

因此所求平面为 $2x - y - z = 0$.

三、点到平面的距离

如图 7-56 所示, 设平面 Π 的方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$, $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面外一点, 如何求点 P_0 到平面 Π 的距离 d ?

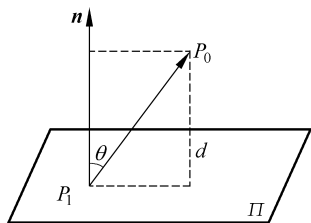


图 7-56

在平面 Π 上任取一点 $P_1(x_1, y_1, z_1)$, 则点 P_0 与已知平面的距离 d 就是向量 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 在平面法向量 $\mathbf{n} = (A, B, C)$ 上的投影的绝对值(因为 $\overrightarrow{P_1P_0}$ 与 $\mathbf{n}$ 的夹角有可能为钝角), 即

$$d = |\text{Prj}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{P_1P_0}| = |\overrightarrow{P_1P_0}| |\cos\theta| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P_0}|}{|\mathbf{n}|},$$

由于



$$\begin{aligned}\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1 P_0} &= A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1) \\ &= Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1),\end{aligned}$$

由 $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 在平面上, 得 $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, 所以

$$D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1),$$

因此, 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离公式为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (7.18)$$

例如, 求点 $M(1, -3, 3)$ 到平面 $\Pi: x + 2\sqrt{2}z - 1 = 0$ 的距离, 可利用式(7.18), 得

$$d = \frac{|1 \times 1 + 0 \times (-3) + 2\sqrt{2} \times 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{6\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}.$$

进一步, 可得两平行平面 $\Pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$ 和 $\Pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ 之间的距离为

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

习题 7-6

1. 求过点 $M(2, -1, -1)$ 且与平面 $x - 3y + 4z + 1 = 0$ 平行的平面方程.

2. 求过点 $M(2, 9, -6)$ 且与 OM (其中 O 为坐标原点) 垂直的平面方程.

3. 求下列特殊位置的平面方程:

(1) 通过 z 轴和点 $(2, -4, 1)$;

(2) 平行于 yOz 面且过点 $(2, -5, 3)$;

(3) 平行于 x 轴且过点 $(4, 0, -2)$ 和 $(5, 1, 7)$;

(4) 通过 z 轴且与平面 $2x + y - 3z - 1 = 0$ 垂直.

4. 平面 Π 过 y 轴, 且与平面 $\Pi_0: y - z = 0$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 求平面 Π 的方程.

5. 求过点 $(3, -2, 9)$ 和 $(-6, 0, -4)$ 且垂直于平面 $2x - y - 4z - 8 = 0$ 的平面方程.

6. 一平面平行于向量 $\mathbf{a} = (2, 3, -4)$, $\mathbf{b} = (1, -2, 0)$ 且经过点 $(1, 0, -1)$, 求该平面方程.

7. 求与平面 $\Pi: 2x - 6y + 3z - 2 = 0$ 平行且距离为 4 的平面方程.

8. 在 y 轴上求一点, 使它与两平面

$$\Pi_1: 2x + 3y + 6z - 6 = 0,$$

$$\Pi_2: 8x + 9y - 72z + 73 = 0$$

的距离相等.

9. 求平行于平面 $\Pi_0: x + 2y + 3z + 4 = 0$, 且与球面 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 相切的平面方程.

第七节 空间直线及其方程

一、直线的方程

1. 空间直线的对称式方程

设 L 是一给定的空间直线, 称与 L 平行的任意非零向量 (l, m, n) 为直线 L 的方向向量, 一般记为 s , 其中 l, m, n 称为直线 L 的一组方向数. 显然一条直线的方向向量不是唯一的. 由于通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且与一非零向量 $s = (l, m, n)$ 平行的直线是唯一的, 因此我们可以利用 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和 $s = (l, m, n)$ 确定直线 L 的方程.

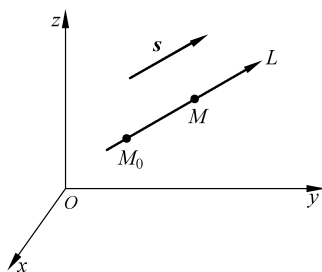


图 7-57

如图 7-57 所示, 设 $M(x, y, z)$ 为直线 L 上任意一点, 显然 $\overrightarrow{M_0M} \parallel s$, 因此

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \quad (7.19)$$

反之, 如果点 M 不在直线 L 上, 则向量 $\overrightarrow{M_0M}$ 与 s 不平行, 这两向量的对应坐标就不成比例. 所以方程组 (7.19) 就是直线 L 的方程, 称其为直线 L 的对称式方程或点向式方程.

设点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为直线 L 上的任意两个不同的点, 则直线 L 的方向向量为 $s = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, 因此根据直线 L 的对称式方程得到该方程的两点式方程

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (7.20)$$

2. 空间直线的参数方程

在方程 (7.19) 中, 如果令

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n} = t,$$

则有

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases} \quad (7.21)$$

方程组 (7.21) 称为直线 L 的参数方程.

如果用 $r(t)$ 表示点 $M(x, y, z)$ 在直线 L 上的位置向量, 用 r_0 表示点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 在直线 L 上的位置向量, 直线 L 的方向向量为 s , 那么上述直线方程有下列向量形式:

$$r(t) = r_0 + ts \quad (-\infty < t < +\infty).$$

3. 空间直线的一般方程

如果两个平面不平行, 则必相交于一直线. 因此空间中任一直线都可以看作两个相交平面的交线.

如图 7-58 所示, 设平面 Π_1 和平面 Π_2 的方程分别为



$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

它们的一次项系数不成比例,则方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

称为空间直线的一般式方程.

直线的上述几种形式的方程之间是可以互相转化的. 现在我们将直线 L 的对称式方程(7.19)转化为它的一般式方程.

对称式方程(7.19)中,直线的方向向量 $\mathbf{s}$ 是非零向量,若 $lmn \neq 0$,则方程(7.19)可写成

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}, \\ \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \end{cases} \quad (7.22)$$

方程组(7.22)就是直线 L 的一般方程,其中第一个方程表示平行于 z 轴的平面,第二个方程表示平行于 x 轴的平面.

例 1 已知直线过点 $M(2, -1, 3)$ 且与平面 $\Pi: 3x + 2y - z = 0$ 垂直,求直线 L 的对称式方程及参数式方程.

解 由题意知,直线 L 的方向向量为 $\mathbf{s} = (3, 2, -1)$,所以对称式方程为

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-3}{-1},$$

参数方程为

$$\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$$

例 2 将直线 L 的一般式方程

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

化为对称式方程.

解 先求出直线 L 的方向向量. 方程组中两个平面的法向量分别为

$$\mathbf{n}_1 = (1, -2, 3) \quad \text{和} \quad \mathbf{n}_2 = (1, -2, -1),$$

因为直线 L 平行于向量

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 4(2, 1, 0),$$

所以可以取向量 $\mathbf{s} = (2, 1, 0)$ 为直线 L 的方向向量.

再在直线上任取一点. 不妨取 $y=0$, 将其代入直线 L 的一般式方程,得

$$\begin{cases} x + 3z = 4, \\ x - z = 0, \end{cases}$$

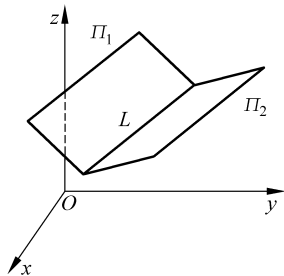


图 7-58

解得 $x=1, z=1$, 则点 $(1, 0, 1)$ 即为直线 L 上的一点, 所以直线的对称式方程为

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}.$$

以上方程又可以写成 $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1}, \\ z-1=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x-2y=1, \\ z=1. \end{cases}$ 则直线 L 可以看作平面 $x-2y=1$ 与平面 $z=1$ 的交线.

值得注意的是, 通过空间一直线 L 的平面有无限多个, 只要在这些无限多个平面中任意选取两个, 把它们的方程联立起来, 所得的方程组就表示空间曲线 L , 所以直线的一般式方程不唯一.

二、直线与直线、直线与平面的位置关系

1. 直线与直线的位置关系

直线与直线的位置关系如下:

$$\text{两直线的位置关系} \begin{cases} \left. \begin{array}{l} \text{共面(在同一平面上的直线)} \\ \text{异面(不在同一平面上的直线)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{相交} \\ \text{平行} \\ \text{重合} \end{array} \end{cases}$$

与研究平面间的位置关系类似, 可以利用给定直线的方向向量的夹角公式和平行、垂直的条件确定两直线的夹角公式和平行、垂直的条件.

设有两条直线 L_1 和 L_2 , 它们的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = (l_1, m_1, n_1), \quad \mathbf{s}_2 = (l_2, m_2, n_2).$$

称两直线方向向量的夹角(通常指锐角)为**两直线的夹角**.

若两直线的夹角为 φ , 则

$$\cos \varphi = |\cos(\widehat{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2})| = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

结合两向量垂直或平行的充要条件, 可得下面的结论:

(1) 直线 L_1 与 L_2 互相垂直的充要条件是

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

(2) 直线 L_1 与 L_2 互相平行或重合的充要条件是

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

例 3 求两条直线

$$L_1: \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{1}, \quad L_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{-1}$$

的交点及夹角余弦.

解 由题意知, 直线 L_1 的参数方程为

$$\begin{cases} x=t, \\ y=3-4t, \\ z=-1+t, \end{cases}$$



代入直线 L_2 的方程得 $t=1$, 所以交点为 $(1, -1, 0)$.

两直线的方向向量分别为 $s_1=(1, -4, 1)$, $s_2=(2, -2, -1)$, 所以两直线夹角的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{|1 \times 2 + (-4) \times (-2) + 1 \times (-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2. 直线与平面的位置关系

直线 L 和平面 Π 的位置关系有直线与平面平行、直线与平面相交和直线在平面上, 以下讨论直线与平面位置关系成立的条件.

设直线 $L: \frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$ 及平面 $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$, 记 $s=(l, m, n)$, $n=(A, B, C)$, 则直线 L 与平面 Π 平行或直线 L 在平面上的充要条件是 $s \perp n$; 直线 L 与平面 Π 垂直的充要条件是 $s // n$. 可得:

- (1) 直线 L 与平面 Π 平行的充要条件是 $Al+Bm+Cn=0$;
- (2) 直线 L 在平面 Π 上的充要条件是 $Al+Bm+Cn=0$ 且 $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$;
- (3) 直线 L 与平面 Π 垂直的充要条件是 $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

当直线 L 和平面 Π 垂直时, 规定直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{2}$. 当直线与平面 Π 平行, 且直线在平面上时, 规定直线与平面的夹角为 0. 当直线 L 和平面 Π 不垂直时, 直线和它在平面上的投影直线的夹角(通常指锐角)称为直线 L 与平面 Π 的夹角.

如图 7-59 所示, 设直线与平面的夹角为 φ , 则

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \sin \left| \frac{\pi}{2} - (\widehat{n, s}) \right| = |\cos(\widehat{n, s})| \\ &= \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \sqrt{l^2+m^2+n^2}}. \end{aligned}$$

例 4 求直线 $L: \begin{cases} x-2z-1=0, \\ y+2z+5=0 \end{cases}$ 与平面 $\Pi: x+z+5=0$

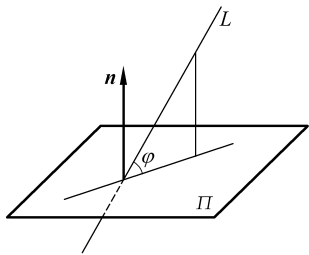


图 7-59

的夹角与交点.

解 由题意知, 平面的法向量 $n=(1, 0, 1)$, 直线的方向向量为

$$s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2i - 2j + k,$$

所以

$$\sin\varphi = \frac{|1 \times 2 + 0 \times (-2) + 1 \times 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

因此直线与平面的夹角为 $\frac{\pi}{4}$.

直线 L 中令 $z=0$, 得直线上一点 $(1, -5, 0)$, 所以直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+2t, \\ y=-5-2t, \\ z=t, \end{cases}$$

代入平面方程中得 $t = -2$, 因此直线与平面的交点为 $(-3, -1, -2)$.

例 5 求 $M_0(1, 3, -4)$ 关于平面 $\Pi: 3x + y - 2z = 0$ 的对称点.

解 过 $M_0(1, 3, -4)$ 且垂直于平面的直线方程为

$$L: \begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 3 + t, \\ z = -4 - 2t, \end{cases}$$

代入平面 Π 的方程中, 得

$$3(1 + 3t) + (3 + t) - 2(-4 - 2t) = 0,$$

解得 $t = -1$. 再代入直线的参数方程中, 求得 $x = -2, y = 2, z = -2$, 所以点 M_0 在平面 Π 上的投影点为 $M'_0(-2, 2, -2)$, 设所求点为 $M(x, y, z)$, 则

$$\frac{x+1}{2} = -2, \quad \frac{y+3}{2} = 2, \quad \frac{z-4}{2} = -2.$$

由此可得 M_0 关于平面 Π 的对称点为 $M(-5, 1, 0)$.

上一节中给出了点到平面的距离公式, 由例 5 可以发现: 求出了点在平面 Π 上的投影点之后, 也可以通过两点的距离公式得到点到平面的距离.

例 6(光线的镜像) 求光线 $L_0: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$ 照在镜面 $\Pi: x + y = 4$ 上所产生的反射光线 L 的直线方程.

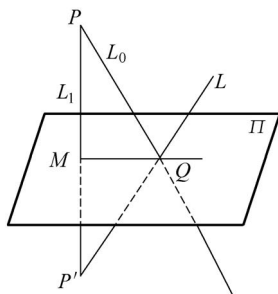


图 7-60

解 如图 7-60 所示, 显然点 $P(-1, 2, -1)$ 是直线 L_0 上一点, 将直线 L_0 的参数方程

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

代入平面 Π 的方程, 解得 $t = 1$, 因此直线 L_0 与平面 Π 的交点为 $Q(1, 3, 1)$. 过点 P 与平面 Π 垂直的直线为

$$L_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{0}.$$

可以求出直线 L_1 与平面 Π 的交点为 $M(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, -1)$. 设点 P 关于平面 Π 的对称点为 P' , 则点 M 为线段 PP' 的中点. 根据中点坐标公式可求出 $P'(2, 5, -1)$.

因此所求的反射光线即为过 $Q(1, 3, 1)$ 和 $P'(2, 5, -1)$ 两点的直线, 其方程为

$$L: \frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-1}{-2}.$$

例 7(交叉管道的距离) 在工程中有时要将两条交叉管道连通, 需求出连接管的最短长度和连接位置. 这在几何上归结为求两条异面直线的距离. 设交叉管道 AB 与 CD 所在直线方程分别为

$$L_1: \frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1},$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$



求 L_1 与 L_2 之间的距离.

解 过直线 L_2 作平行于直线 L_1 的平面 Π , 则平面的法向量为

$$\mathbf{n} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} \mathbf{i} + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \mathbf{k},$$

所以平面 Π 的方程为

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} (x - x_2) + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} (y - y_2) + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} (z - z_2) = 0,$$

即

$$\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} z - \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} x_2 - \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} y_2 - \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} z_2 = 0.$$

因为 $L_1 \parallel \Pi$, 所以直线 L_1 上任意一点到平面 Π 的距离即为两异面直线 L_1 与 L_2 之间的距离. 因此直线 L_1 上的点 (x_1, y_1, z_1) 到平面 Π 的距离为

$$\begin{aligned} d &= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \\ &= \frac{\left| (x_1 - x_2) \begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix} + (y_1 - y_2) \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix} + (z_1 - z_2) \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix} \right|}{\sqrt{\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2}}. \end{aligned}$$

这就是交叉管道 AB 与 CD 之间的距离.

三、平面束

如图 7-61 所示, 通过空间一条定直线可以作无穷多个平面. 过直线 L 的平面的全体称为直线 L 的平面束.

设直线 L 是以下两个平面的交线:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (7.23)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (7.24)$$

其中系数 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例, 则三元一次方程

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0 \quad (7.25)$$

称为过直线 L 的平面束方程, 其中 λ 为参数.

因为 A_1, B_1, C_1 与 A_2, B_2, C_2 不成比例, 所以对于任何一个 λ 值, 方程 (7.25) 的系数 $A_1 + \lambda A_2, B_1 + \lambda B_2, C_1 + \lambda C_2$ 不全为零, 从而方程 (7.25) 表示一个平面. 设 M 为直线 L 上任意一点, 则 M 的坐标必同时满足方程 (7.23) 和方程 (7.24), 因而满足方程 (7.25), 故方程 (7.25) 表示过直线 L 的平面, 且对于不同的 λ 值, 方程 (7.25) 表示通过直线 L 的不同平面. 反之, 通过直线 L 的任何平面 (方程 (7.24) 所表示的平面除外) 都包含在方程 (7.25) 所表示的一族平面内.

平面束在处理有关平面和直线的问题时是非常有用的.

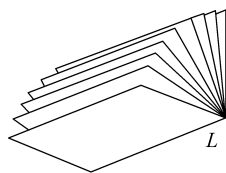


图 7-61

例 8 求过直线 $\begin{cases} 2x-y+z=0, \\ x-3y+2z+4=0 \end{cases}$ 且与 x 轴平行的平面方程.

解 过已知直线的平面束方程为

$$2x - y + z + \lambda(x - 3y + 2z + 4) = 0,$$

即

$$(2+\lambda)x + (-1-3\lambda)y + (1+2\lambda)z + 4\lambda = 0.$$

该平面的法向量为 $\mathbf{n} = (2+\lambda, -1-3\lambda, 1+2\lambda)$, 因所求平面与 x 轴平行, 所以

$$(2+\lambda) \times 1 + (-1-3\lambda) \times 0 + (1+2\lambda) \times 0 = 0.$$

解得 $\lambda = -2$, 因此所求平面为 $5y - 3z - 8 = 0$.

例 9 求直线 $L: \begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $\Pi: x+2y-z=0$ 上的投影直线的方程.

解 L 的平面束方程为

$$2x - y + z - 1 + \lambda(x + y - z + 1) = 0,$$

即

$$(2+\lambda)x + (-1+\lambda)y + (1-\lambda)z + \lambda - 1 = 0,$$

其中 λ 为待定常数. 下面求过直线 L 的这些平面中与已知平面 Π 垂直的平面.

因为过直线 L 的这些平面的法向量为 $(2+\lambda, -1+\lambda, 1-\lambda)$, 平面 Π 的法向量为 $(1, 2, -1)$, 所以有

$$(2+\lambda) \times 1 + (-1+\lambda) \times 2 + (1-\lambda) \times (-1) = 0,$$

解得 $\lambda = \frac{1}{4}$, 由此得到平面束中与已知平面 Π 垂直的平面 Π_1 :

$$3x - y + z - 1 = 0.$$

因此所求的投影直线为两平面 Π 和 Π_1 的交线, 其方程为

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 3x - y + z - 1 = 0. \end{cases}$$

习题 7-7

1. 求过点 $(-1, 2, 5)$ 且平行于直线 $\frac{x+1}{-4} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+2}{1}$ 的直线方程.

2. 求过点 $(1, 2, 1)$ 与平面 $2x + 2y - z + 23 = 0$ 垂直的直线方程.

3. 求过点 $(1, -2, 2)$ 与直线 $L: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ 垂直的平面方程.

4. 求过点 $P(1, 1, 1)$ 且与直线 $L: \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ 垂直相交的直线方程.

5. 求过直线 $L_1: x-1 = \frac{y-2}{0} = 3-z$ 且平行于直线 $L_2: \frac{x+2}{2} = y-1 = z$ 的平面方程.

6. 用对称式方程及参数式方程表示直线 $\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ 2x+y-2z+2=0. \end{cases}$



7. 求直线 $L_1: x-1=\frac{y-5}{2}=z+6$ 与 $L_2: \begin{cases} x+2y-z+1=0, \\ x-y+z+2=0 \end{cases}$ 的夹角.

8. 求直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{6}$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交点与夹角.

9. 求点 $M_0(2, -1, 1)$ 到直线 $L: \begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ x+2y-z+3=0 \end{cases}$ 的距离 d .

10. 判断下列各组中的直线和平面间的关系:

(1) $L: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{-7}=\frac{z-3}{3}$ 和 $\Pi: 4x-2y-2z=3$;

(2) $L: \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $\Pi: x+y+z=3$;

(3) $L: \frac{x}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{-4}$ 和 $\Pi: 3x+y-4z=3$.

11. 求过点 $(-1, 2, 3)$ 垂直于直线 $L: \frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$ 且平行于平面 $\Pi: 7x+8y+9z+10=0$ 的直线方程.

12. 求点 $(-1, 2, -3)$ 在直线 $\frac{x}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+6}{-1}$ 上的垂足.

13. 求过点 $(-1, 0, 4)$, 且平行于平面 $3x-4y+z-10=0$, 又与直线 $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$ 相交的直线方程.

14. 求直线 $\begin{cases} 2x-y+z-1=0, \\ x+y-z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+2y-z=0$ 上的投影直线方程.

15. 一直升机以 20m/s 的速度从位于坐标原点的停机坪朝点 $(200, 200, 100)$ 直飞, 则 10s 后直升机在什么位置(长度的单位为 m)?

附录 7 基于 Python 的向量运算与三维图形的绘制

一、基于 Python 的向量运算

在 Python 编程语言中, NumPy 库是处理空间向量运算的不二之选. 它是一个功能强大的库, 专为支持多维数组和矩阵运算而设计, 同时还提供了丰富的数学函数来操作这些数组. NumPy 的高效性使其成为科学计算的理想选择, 特别是在处理空间向量时.

使用 NumPy, 可以轻松执行以下向量运算:

向量的加法和减法: 通过简单的数组操作实现向量的线性组合.

数量积(点积): 计算两个向量的点积, 以衡量它们在空间中的投影关系.

向量积(叉积): 确定两个向量在三维空间中的垂直方向, 并计算它们构成的平行四边形的面积.

求向量模: 计算向量的长度, 也称为向量的欧几里得范数.

计算向量之间的夹角：通过向量的点积和模来确定两个向量之间的夹角大小。

NumPy 提供的这些功能不仅操作简便,而且执行效率高,非常适合进行复杂的科学和工程计算. 通过表 7-1,可以找到详细的调用格式和功能说明,帮助读者更好地利用 NumPy 进行空间向量的计算.

表 7-1 向量运算命令的调用格式和功能说明

调用格式	功能说明
<code>numpy.array([x,y,z])</code>	创建一个空间向量,其中 x, y, z 是向量的分量
<code>u+v</code>	计算两个向量 u 和 v 的加法
<code>u-v</code>	计算两个向量 u 和 v 的减法
<code>numpy.dot(u,v)</code>	计算两个向量 u 和 v 的点积(数量积)
<code>numpy.cross(u,v)</code>	计算两个向量 u 和 v 的叉积(向量积)
<code>numpy.linalg.norm(v)</code>	计算向量 v 的模(长度)
<code>numpy.arccos(numpy.dot(u,v)/(numpy.linalg.norm(u)*numpy.linalg.norm(v)))</code>	计算两个向量 u 和 v 之间的夹角(以 rad 为单位)

例 1 设 $a=3i+j-2k, b=2i-3j+4k$, 求 $a+b, a-b, a \cdot b, a \times b$.

```

from sympy.vector import CoordSys3D
# 定义坐标系
N = CoordSys3D('N')
# 定义向量
a = 3*N.i + N.j - 2*N.k
b = 2*N.i - 3*N.j + 4*N.k
c = N.i + 2*N.j + 3*N.k
# 向量的和、差、点乘积、叉乘积和混合乘积
ab_sum = a + b
ab_difference = a - b
ab_dot_product = a.dot(b)
ab_cross_product = a.cross(b)
ab_mixed_product = a.cross(b).dot(c)
print("ab_sum:", ab_sum)
print("ab_difference:", ab_difference)
print("ab_dot_product:", ab_dot_product)
print("ab_cross_product:", ab_cross_product)
print("ab_mixed_product:", ab_mixed_product)

```

结果为:

```

ab_sum: 5*N.i + (-2)*N.j + 2*N.k
ab_difference: N.i + 4*N.j + (-6)*N.k
ab_dot_product: -5
ab_cross_product: (-2)*N.i + (-16)*N.j + (-11)*N.k
ab_mixed_product: -67

```

例 2 已知两点 $M_1(2, 2, \sqrt{2})$ 和 $M_2(1, 3, 0)$, 计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模, 同方向的单位向量 $\overrightarrow{M_1M_2}^0$, 方向余弦和方向角.



```

from sympy import symbols, sqrt, acos
# 定义向量
OM1 = [2, 2, sqrt(2)]
OM2 = [1, 3, 0]
# 求向量
M1M2 = [OM2[i] - OM1[i] for i in range(3)]
# 求同方向的单位向量
M1M2_magnitude = sqrt(sum(x**2 for x in M1M2))
Unit_M1M2 = [x / M1M2_magnitude for x in M1M2]
# 求方向余弦
cos_abc = M1M2[0] / M1M2_magnitude
# 求方向角
abc = acos(cos_abc)
print("M1M2:", M1M2)
print("Unit_M1M2:", Unit_M1M2)
print("cos_abc:", cos_abc)
print("abc:", abc)

```

结果为:

```

M1M2: [-1, 1, -sqrt(2)]
Unit_M1M2: [-1/2, 1/2, -sqrt(2)/2]
cos_abc: -1/2
abc: 2 * pi/3

```

例 3 求过点 $A(2, -1, 4)$, $B(-1, 3, -2)$ 和 $C(0, 2, 3)$ 的平面方程.

```

import sympy as sp
# 定义符号变量
x, y, z = sp.symbols('x y z')
# 定义点和向量
D = sp.Matrix([x, y, z])
A = sp.Matrix([2, -1, 4])
B = sp.Matrix([-1, 3, -2])
C = sp.Matrix([0, 2, 3])
# 计算向量 E
E = (A - B).cross(A - C)
# 计算点积
dot_product = (E.dot(D - A)).expand()
# 打印结果方程
print(dot_product)

```

结果为:

```
14 * x + 9 * y - z - 15
```

例 4 求直线 $\frac{x+3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$ 与平面 $2x+2y+z-1=0$ 的夹角.

```

from sympy import symbols, acos, pi
from sympy.vector import CoordSys3D
N = CoordSys3D('N')

```

```

s = N.i + 2 * N.j - 2 * N.k          # 直线的方向向量
n = 2 * N.i + 2 * N.j + N.k          # 平面的法向量
# 计算点积
dot_product = s.dot(n)
# 计算向量的模
s_magnitude = s.magnitude()
n_magnitude = n.magnitude()
# 计算直线的方向向量和平面法向量的夹角的余弦值
cos_theta = dot_product / (s_magnitude * n_magnitude)
# 计算直线的方向向量和平面法向量的夹角
theta = acos(cos_theta)
# 计算直线和平面的夹角
alpha = pi/2 - theta
print(alpha)

```

结果为:

```
- acos(4/9) + pi/2
```

二、基于 Python 的三维图形的绘制

在 Python 编程中,如果需要绘制三维图形和空间曲线与曲面,matplotlib 库及其 mplot3d 模块是理想的选择. matplotlib 是一个功能全面、灵活的库,它支持创建静态图像、动态图形以及交互式可视化.

mplot3d 模块是 matplotlib 中专门用于三维图形绘制的部分,它提供了强大的工具来帮助用户在三维空间中可视化数据.使用 mplot3d,可以绘制各种三维图形,包括但不限于:

空间曲线:展示数据在三维空间中的路径和趋势.

曲面图:呈现三维空间中的数据分布,如等高线图或 3D 曲面.

散点图:在三维空间中显示数据点的分布情况.

这些图形不仅有助于更好地理解数据的三维特性,而且可以增强数据表现力,使得复杂的数据关系更加直观易懂.表 7-2 提供了 mplot3d 模块中常用的绘制三维图形命令的调用格式和功能说明,这将是读者在使用 matplotlib 进行三维数据可视化时的重要参考.无论是在科学研究、工程设计还是数据分析领域,通过这些详细的说明,读者可以更加高效和精确地实现可视化需求.

表 7-2 绘制三维图形命令的调用格式和功能说明

调用格式	功能说明
ax.plot3D(X, Y, Z)	绘制空间曲线,其中 X, Y, Z 是曲线上各点的坐标数组
ax.scatter3D(X, Y, Z)	绘制三维散点图,其中 X, Y, Z 是点的坐标数组
ax.plot_surface(X, Y, Z)	绘制三维曲面图,X, Y 是网格的坐标矩阵,Z 是曲面上每个点的高度
ax.contour3D(X, Y, Z, N)	绘制三维等高线图,X, Y, Z 是三维空间中的点坐标,N 是等高线层数



例 5 绘制螺旋线
$$\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \cos t, \\ z = t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 10\pi.$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# 生成时间数组
t = np.arange(0, 10 * np.pi, 0.001)
# 计算坐标
x = np.sin(t)
y = np.cos(t)
z = t
# 绘制图形
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(x, y, z)
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_title('x=sin(t), y=cos(t), z=t')
plt.show()
```

运行结果如图 7-62 所示.

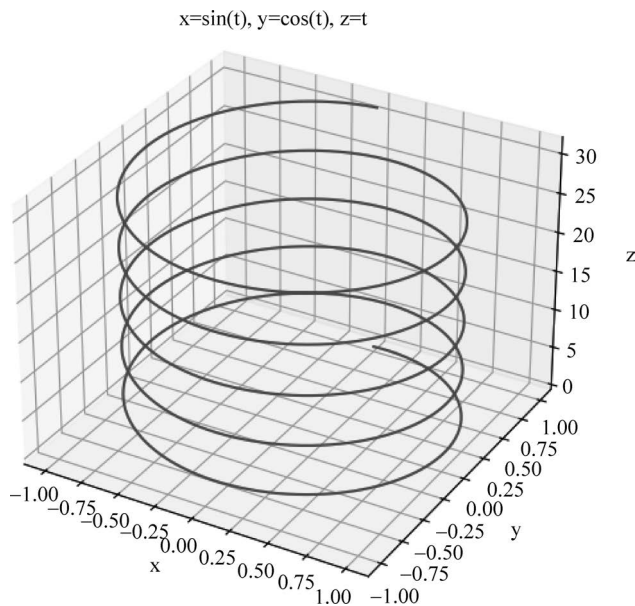


图 7-62

例 6 绘制平面 $z = 5 - 2x + 9y$, 其中 $0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2$.

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# 生成网格
```

```

x = np.arange(0, 3.1, 0.1)
y = np.arange(0, 2.1, 0.1)
x, y = np.meshgrid(x, y)
# 计算 z 值
z = 5 - 2 * x + 9 * y
# 绘制图形
fig = plt.figure(figsize=(12, 6))
# 第一个子图——网格图
ax1 = fig.add_subplot(121, projection='3d')
ax1.plot_wireframe(x, y, z, cmap='viridis')
ax1.set_xlabel('x')
ax1.set_ylabel('y')
ax1.set_zlabel('z')
ax1.set_title('z=5-2x+9y (Meshgrid)')
# 第二个子图——曲面图
ax2 = fig.add_subplot(122, projection='3d')
ax2.plot_surface(x, y, z, cmap='viridis')
ax2.set_xlabel('x')
ax2.set_ylabel('y')
ax2.set_zlabel('z')
ax2.set_title('z=5-2x+9y (Surface)')
plt.show()

```

运行结果如图 7-63 所示.

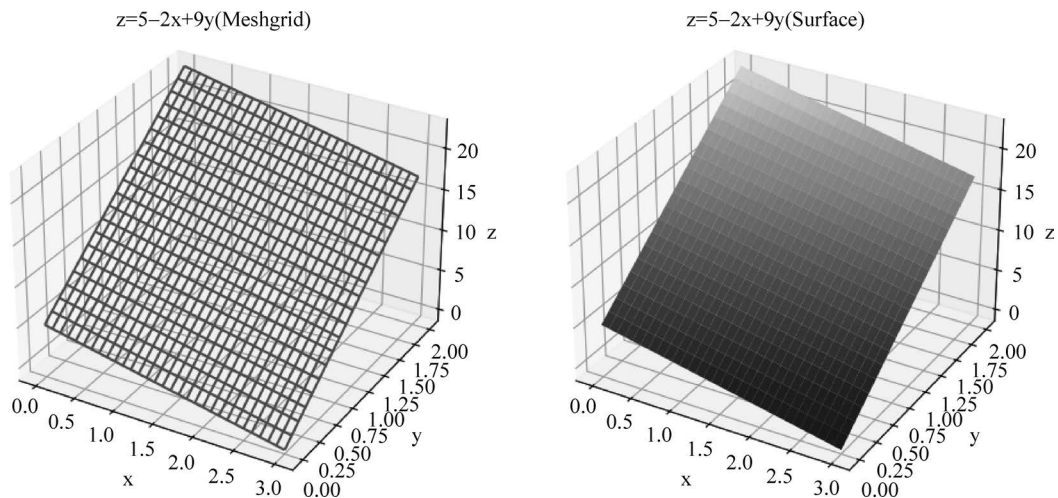


图 7-63

例 7 绘制函数 $z = x^2 + y^2$ 的图形.

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
# 生成网格
x = np.arange(-4, 4.5, 0.5)

```



```

y = np.arange(-4, 4.5, 0.5)
x, y = np.meshgrid(x, y)
# 计算 z 值
z = x**2 + y**2
# 绘制网格图
fig = plt.figure(figsize=(8, 6))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(x, y, z, cmap='viridis')
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.set_title('z=x^2+y^2')
plt.show()

```

运行结果如图 7-64 所示.

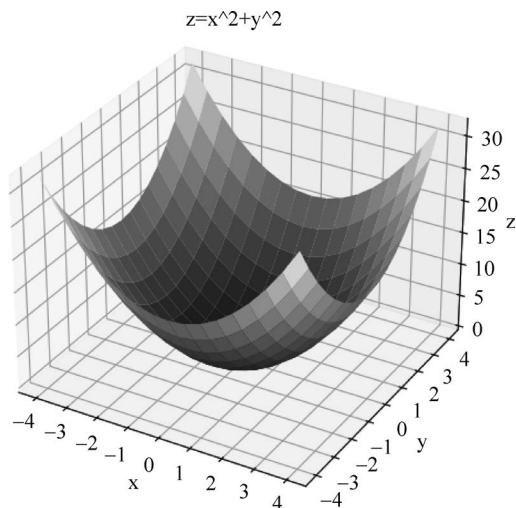


图 7-64

例 8 绘制椭球面 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{1} = 1$.

解 该曲线的参数方程为
$$\begin{cases} x = 5 \sin u \cos v, \\ y = 4 \sin u \sin v, \\ z = \cos u, \end{cases} \quad 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq 2\pi.$$

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
# 创建参数
u = np.arange(0, np.pi + 0.1 * np.pi, 0.1 * np.pi)
v = np.arange(0, 2 * np.pi + 0.1 * np.pi, 0.1 * np.pi)
u, v = np.meshgrid(u, v)
# 计算球面上的点
x = 5 * np.sin(u) * np.cos(v)

```

```
y = 4 * np.sin(u) * np.sin(v)
z = np.cos(u)
# 绘制三维图形
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot_surface(x, y, z, cmap='viridis')
# 显示图形
plt.show()
```

运行结果如图 7-65 所示.

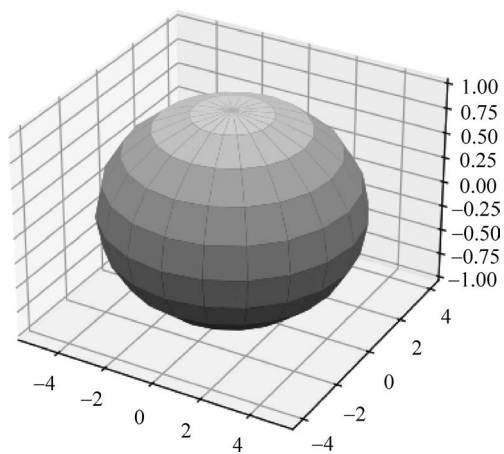


图 7-65