第一章　函数、极限与连续

第一节　函数

一、区间与邻域

现代数学建立在集合论的基础之上.本节重点介绍高等数学中常用的两类实数集——区间与邻域.

1. 区间

设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$,称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**,记为 (a,b). 数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a,b]$.

数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 和 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 分别称为**左闭右开区间**和**左开右闭区间**,分别记为 $[a,b)$ 和 $(a,b]$,统称为**半开半闭区间**.

实数 a,b 称为区间的**端点**. 需要注意的是,开区间不包含端点,闭区间则包含端点;由于 a,b 是两个确定的实数,故以上区间称为**有限区间**,其区间长度为 $b-a$.

除上述有限区间外,还有四种**无限区间**:

$$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\},\quad [a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\},$$

$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\},\quad (-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\},$$

其中 ∞ 表示无穷大. 实数集 $\mathbf{R}$ 可以写成无限区间 $(-\infty,+\infty)$.

从几何上看,开区间 (a,b) 表示数轴上以 a,b 为端点但不包括端点 a 和 b 的线段上点的全体;闭区间 $[a,b]$ 表示数轴上以 a,b 为端点且包括端点 a 和 b 的线段上点的全体. 其他区间也有类似的几何解释,如图 1-1 所示. 上述各种区间统称为**区间**,常用大写字母 I 表示.

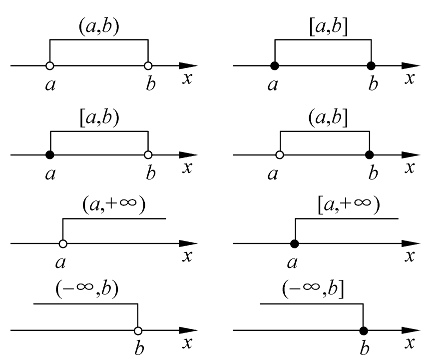

图 1-1

2. 邻域

设 $x_0\in\mathbf{R},\delta>0$,满足不等式 $|x-x_0|<\delta$ 的实

数 x 的全体称为点 x_0 的 δ **邻域**，记作 $U(x_0,\delta)$. 点 x_0 称为该**邻域的中心**，δ 称为该**邻域的半径**. $U(x_0,\delta)$表示关于点 x_0 对称的开区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，即

$$U(x_0,\delta)=\{x \mid x_0-\delta<x<x_0+\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta),$$

如图 1-2 所示. 将点 x_0 的 δ 邻域去掉中心点 x_0 所得的实数 x 的全体称为点 x_0 的**去心** δ **邻域**，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即

$$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta),$$

如图 1-3 所示.

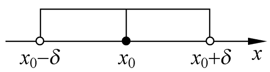

图 1-2

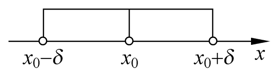

图 1-3

另外，开区间$(x_0-\delta,x_0)$称为点 x_0 的 δ **左邻域**，记为 $U_-(x_0,\delta)$；开区间$(x_0,x_0+\delta)$称为点 x_0 的 δ **右邻域**，记为 $U_+(x_0,\delta)$. 今后若不必指明邻域半径，点 x_0 的邻域和去心邻域可分别简记为 $U(x_0)$和 $\mathring{U}(x_0)$.

二、函数

在初等数学中，我们曾学习过函数的相关知识. 这里，我们系统地总结了函数的基本概念、表示方法、基本性质、基本运算和一些常用函数.

1. 函数的概念

定义 1.1 设 $D\subset\mathbf{R}$ 是一个给定的非空数集. 如果存在一个对应法则 f，使得对每个 $x\in D$ 都有唯一确定的实数 y 与之对应，则称该对应法则 f 为定义在数集 D 上的**函数**，记作

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**. 数集 D 称为该函数的**定义域**，通常记作 D_f. 对于每个 $x\in D$，由法则 f 所确定的实数 y 称为 f 在 x 处的函数值，记作 $y=f(x)$；函数值全体构成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=\{y \mid y=f(x),x\in D\}.$$

函数的记号常用任意英文字母或希腊字母表示，如 $f(x)$，$g(x)$，$F(x)$，$G(x)$，$\varphi(x)$等. 一般而言，不同字母表示不同的函数. 由定义可知，定义域和对应法则是构成函数的两个要素. 若两个函数的定义域相同，对应法则相同，那么这两个函数也相同.

这里给出的定义是单值函数的定义. 若存在对应法则 f，使得对每个 $x\in D$ 都至少有一个实数 y 与之对应，则称该对应法则 f 为多值函数，如抛物线 $y^2=2x$，圆周曲线 $x^2+y^2=1$. 今后，若无特别说明，我们所说的函数都是单值函数.

2. 函数的表示方法

表示函数的方法主要有三种，即**列表法**、**图像法**和**解析法**.

在许多实际问题中，常常把自变量的值与对应的函数值列成表格，用以表示自变量与因变量之间的函数关系. 函数的这种表示方法称为**列表法**.

例 1 下表是某家庭 2023 年每月的用水量：

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
用水量/m^3	5	6	5	4	7	8	10	12	7	6	5	4

从上表可以看出，该家庭的月用水量 y 和月份 t 之间有明确的对应关系，即确定了一个函数 $y=f(t)$，其定义域为数集 $\{t\mid 1\leqslant t\leqslant 12, t\in\mathbf{Z}\}$.

列表法的优点是直观，使用方便，因此在实际生活中经常使用.

将两个变量之间的对应关系在平面直角坐标系中用图形表示出来，这种表示函数的方法称为**图像法**. 图像法生动形象，函数的变化一目了然，且便于研究函数的几何性质.

将两个变量之间的对应关系用一定的数学运算式——解析表达式表示出来，这种表示函数的方法称为**解析法**. 解析法便于对函数进行理论分析和计算. 例如，圆的面积 S 与半径 r 之间的函数关系为 $S=\pi r^2$.

以上三种表示函数的方法各有其特点. 在实际应用中，三种方法常结合使用.

例 2 绝对值函数 $f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 其图像如图 1-4 所示.

例 3 符号函数 $f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 其图像如图 1-5 所示.

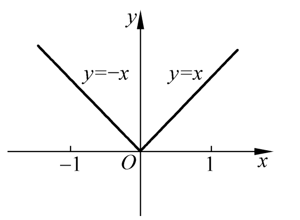

图 1-4

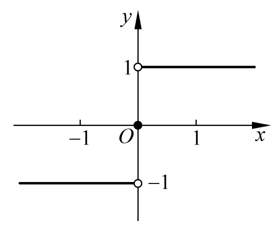

图 1-5

上述两个函数的自变量在定义域内的不同区间取值时用不同的表达式表示，这样的函数称为**分段函数**.

一般地，表示一个函数不仅要给出自变量与因变量之间的对应关系，同时还要标明函数的定义域. 在利用解析法表示函数时，函数的定义域是使解析表达式有意义的自变量全体构成的集合，这种定义域也称为**自然定义域**或**存在域**.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　　(2) $y=\ln(2-x)$.

解 (1) 要使函数有意义，需满足 $1-x^2>0$，即 $-1<x<1$. 故函数的定义域为 $(-1,1)$.

(2) 要使函数有意义，需满足 $2-x>0$，即 $x<2$. 所以函数的定义域为 $(-\infty,2)$.

对于由实际应用问题所确定的函数，它的定义域不仅要保证函数的表达式有意义，还要使得实际问题有意义.

例 5 物体在 $t=0$ 时从高度为 h 的位置自由落下，假设时间 t 时落下的距离为 s，则 s 为 t 的函数，函数表达式为 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$，其中 g 为重力加速度，定义域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$. 若不考虑

变量 s 与 t 的实际意义，函数 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 的自然定义域为$(-\infty,+\infty)$.

3. 函数的基本性质

1）函数的有界性

定义 1.2 设函数 $f(x)$在 I 上有定义. 若存在数 M(或 L)，使得对任意 $x\in I$ 都有 $f(x)\leqslant M$(或 $f(x)\geqslant L$)，则称 $f(x)$在 I 上**有上**(或**下**)**界**，M(或 L)称为 $f(x)$的一个**上**(或**下**)**界**.

定义 1.3 设函数 $f(x)$在 I 上有定义. 若存在正数 M，使得对任意 $x\in I$ 都有$|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$在 I 上**有界**. 若 $f(x)$在 I 上无上界或无下界，则称 $f(x)$在 I 上**无界**.

由定义可知，函数 $f(x)$在 I 上有界当且仅当 $f(x)$在 I 上既有上界又有下界. 从函数图像上来看，$f(x)$在 I 上有界，其函数图像处于直线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

例如，对于任意的 x，都有$|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$内有界，-1 是 $y=\sin x$ 的一个下界，1 是它的一个上界. 又如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$(1,2)$内是有界的；在$(0,+\infty)$内只有下界，没有上界，是无界函数.

2）函数的单调性

定义 1.4 设函数 $f(x)$在 I 上有定义. 如果对 I 内的任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

(1) $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上是**单调递增**的；

(2) $f(x_1)>f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在 I 上是**单调递减**的.

单调递增函数和单调递减函数统称为**单调函数**. 若 $f(x)$在 I 上是单调函数，则称区间 I 为函数 $f(x)$的**单调区间**.

从函数图像上看，单调递增函数的图像是一条上升的曲线，其函数值随着自变量的增加而增加；单调递减函数的图像是一条下降的曲线，其函数值随着自变量的增加反而减小，如图 1-6 所示.

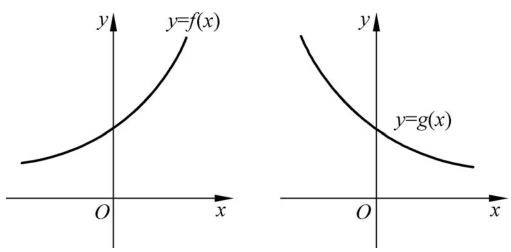

图 1-6

在讨论函数的单调性时，必须指明自变量的所在区间. 例如，函数 $y=x^2$ 在$(0,+\infty)$内是单调递增的，在$(-\infty,0)$内是单调递减的. 对于较复杂的函数，我们将在第三章中介绍判断函数单调性的一般方法.

3）函数的奇偶性

定义 1.5 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任意的 $x\in D$，都有

(1) $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$为 D 上的**奇函数**；

(2) $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$为 D 上的**偶函数**.

从几何上看，奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称，如图 1-7 所示.

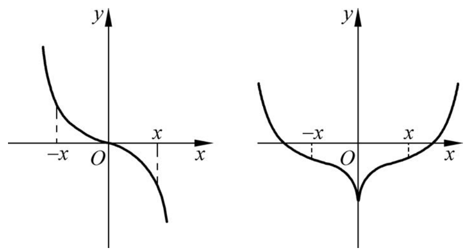

图 1-7

例如，函数 $y=\frac{1}{x}$ 关于原点对称，当自变量取一对相反数时，其对应的函数值也互为相反数. 函数 $y=x^2$ 的图像关于 y 轴对称，当自变量取一对相反数时，其对应的函数值相等. 特别地，函数 $y=0$ 既是奇函数，又是偶函数.

4）函数的周期性

定义 1.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D. 如果存在一个非零实数 T，使得对于任意的 $x\in D$，都有 $(x\pm T)\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，称 T 为 $f(x)$ 的**周期**.

如果 T 是函数 $f(x)$ 的周期，那么 $\pm 2T$，$\pm 3T$ 等也是它的周期. 周期中最小的正周期称为**最小正周期**. 通常，我们所说的函数的周期指的是最小正周期. 如 $y=\sin x$ 的周期是 2π，$y=\tan x$ 的周期是 π.

4. 函数的基本运算

1）四则运算

设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的定义域分别为 D_f 和 D_g，$D=D_f\cap D_g\neq\varnothing$. 对于 $x\in D$，定义四则运算如下：

$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x),$$
$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)},\quad g(x)\neq 0.$$

例如，设函数

$$f(x)=\ln(1-x),\quad x\in(-\infty,1);$$
$$g(x)=\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1,1].$$

而 $(-\infty,1)\cap[-1,1]=[-1,1)$，则有

$$(f+g)(x)=\ln(1-x)+\sqrt{1-x^2},\quad x\in[-1,1).$$

2）复合运算

定义 1.7 设函数 $f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varnothing$，则 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 构成的**复合函数**. 其中 $f(u)$ 为外层函数，$\varphi(x)$ 为内层函数，u 为中间变量.

例如，函数 $y=\ln u$，$u=x^2+1$，因为 $u=x^2+1$ 的值域 $[1,+\infty)$ 包含在 $y=\ln u$ 的定义

域$(0,+\infty)$内，所以$y=\ln u$与$u=x^2+1$可构成复合函数$y=\ln(x^2+1)$.

需要指出的是，并不是任何两个函数都可以复合. 例如，函数$y=\ln u$和$u=-x^2-1$，由于$y=\ln u$的定义域$(0,+\infty)$与$u=-x^2-1$的值域$(-\infty,-1]$无公共部分，故$y=\ln u$和$u=-x^2-1$不能构成复合函数.

上述定义可推广到三个及以上函数的有限次复合. 如函数$y=e^u$，$u=\sin v$和$v=\sqrt{x}$可复合成$y=e^{\sin\sqrt{x}}$.

例 6 指出下列函数是由哪些函数复合而成的：

(1) $y=\cos x^4$； (2) $y=\cos^4 x$.

解 (1) $y=\cos x^4$是由$y=\cos u$和$u=x^4$复合而成的；

(2) $y=\cos^4 x$是由$y=u^4$和$u=\cos x$复合而成的.

3) 求逆运算

定义 1.8 设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为W. 如果对任意的$y\in W$，都有唯一确定的$x\in D$使得$f(x)=y$，那么这样就得到一个以y为自变量、以x为因变量，定义在W上的函数，称为$y=f(x)$的**反函数**，记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in W.$$

由于习惯上用x表示自变量，y表示因变量，因此$y=f(x)$的反函数也记作

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in W.$$

实际上，并不是所有的函数都存在反函数. 由反函数的定义可知，如果函数$y=f(x)$的定义域与值域之间按照对应法则f建立了一一对应的关系，那么$y=f(x)$有反函数. 显然，单调函数一定有反函数.

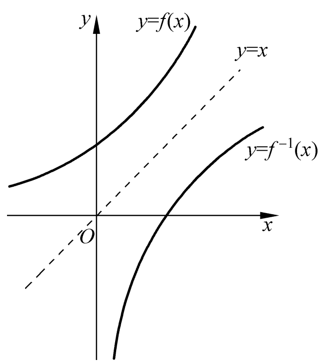

图 1-8

注意到，函数$y=f(x)$的定义域D为其反函数$y=f^{-1}(x)$的值域，$y=f(x)$的值域W为其反函数$y=f^{-1}(x)$的定义域. 从图像上看，在同一直角坐标系中，$y=f(x)$与其反函数$y=f^{-1}(x)$的图像关于直线$y=x$对称(如图 1-8 所示).

例 7 求函数$y=2x-1$，$x\in(-\infty,+\infty)$的反函数.

解 由$y=2x-1$解出x，得到

$$x=\frac{1}{2}(y+1).$$

然后交换x与y的位置，即为所求反函数

$$y=\frac{1}{2}(x+1),\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

从上例可以总结出求反函数的步骤：

(1) 由原函数$y=f(x)$解出x；

(2) 将x，y互换.

5. 常用函数

1) 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数统称为**基本**

初等函数.

(1) **常数函数** $y=C$(**C 为常数**).

常数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\{C\}$.其函数图像为一条平行或重合于 x 轴的水平直线,如图 1-9 所示.

(2) **幂函数** $y=x^{a}$(**a 为实数**).

幂函数的定义域随 a 的取值不同而不同,但无论 a 取何值,它在区间$(0,+\infty)$内总是有定义的,且函数图像恒过点$(1,1)$.函数 $y=x$,$y=x^{2}$,$y=\dfrac{1}{x}$,$y=\sqrt{x}$ 的图像如图 1-10 所示.

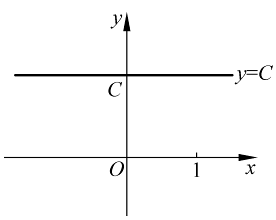

图 1-9

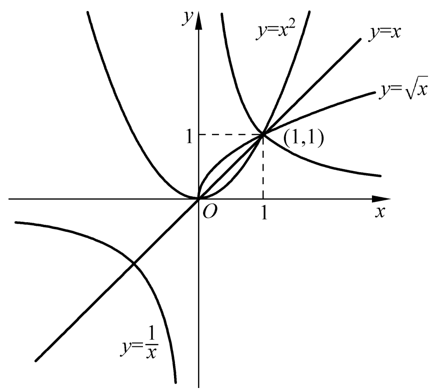

图 1-10

(3) **指数函数** $y=a^{x}(a>0,a\neq1)$.

指数函数的定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,+\infty)$,函数图像恒过点$(0,1)$.当 $a>1$ 时,$y=a^{x}$ 为单调递增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=a^{x}$ 为单调递减函数,如图 1-11 所示.

(4) **对数函数** $y=\log_{a}x(a>0,a\neq1)$.

对数函数和指数函数互为反函数,其定义域为$(0,+\infty)$,值域为$(-\infty,+\infty)$,函数图像恒过点$(1,0)$.当 $a>1$ 时,$y=\log_{a}x$ 为单调递增函数;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_{a}x$ 为单调递减函数,如图 1-12 所示.

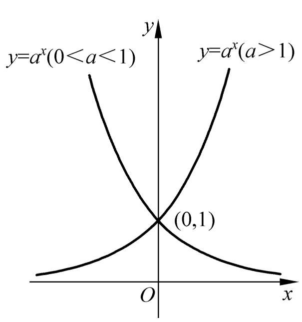

图 1-11

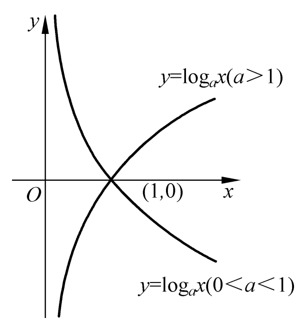

图 1-12

(5) **三角函数**.

三角函数包括以下六种:

- **正弦函数** $y=\sin x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$. 正弦函数是有界函数、奇函数、以 2π 为最小正周期的周期函数(如图 1-13 所示).

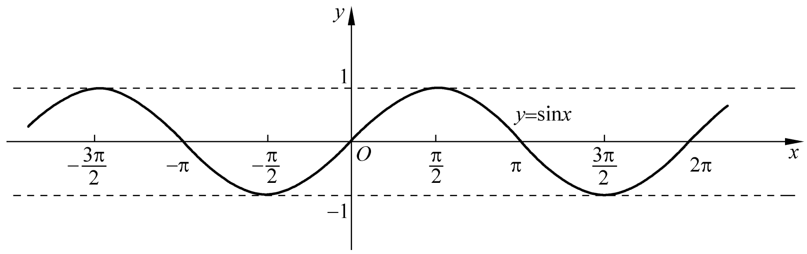

图 1-13

- **余弦函数** $y=\cos x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$[-1,1]$. 余弦函数是有界函数、偶函数、以 2π 为最小正周期的周期函数(如图 1-14 所示).

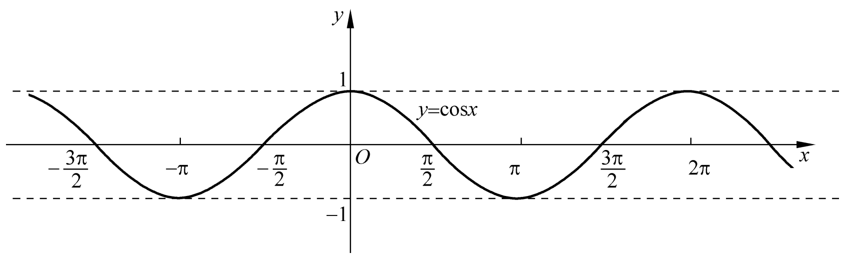

图 1-14

- **正切函数** $y=\tan x$，其定义域为$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 正切函数是奇函数，最小正周期为 π(如图 1-15 所示).
- **余切函数** $y=\cot x$，其定义域为$\{x \mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,+\infty)$. 余切函数是奇函数，最小正周期为 π(如图 1-16 所示).

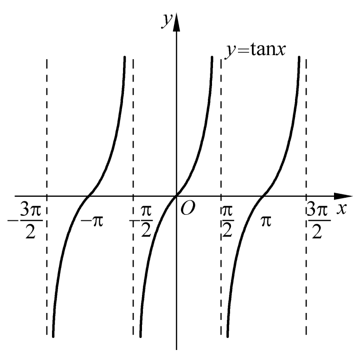

图 1-15

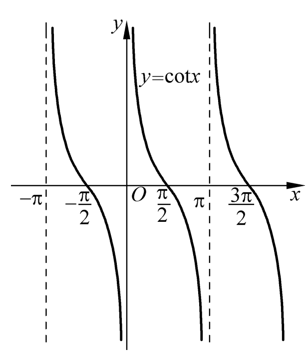

图 1-16

- **正割函数** $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$，其定义域为$\left\{x \mid x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$，值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 正割函数是偶函数，最小正周期为 2π.

- **余割函数** $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，其定义域为$\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，值域为$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$. 余割函数是奇函数，最小正周期为 2π.

（6）反三角函数.

反三角函数是三角函数的反函数. 由于三角函数都是周期函数，所以在三角函数的定义域上其反函数不存在，必须限制在三角函数的单调区间上才能建立反三角函数. 常用的反三角函数包括以下四种：

- **反正弦函数** $y=\arcsin x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. 反正弦函数是奇函数，且单调递增(如图 1-17 所示).
- **反余弦函数** $y=\arccos x$，其定义域为$[-1,1]$，值域为$[0,\pi]$. 反余弦函数是单调递减函数(如图 1-18 所示).

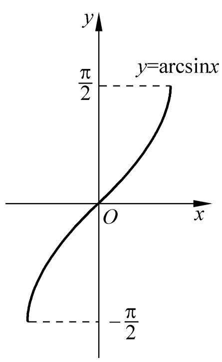

图 1-17

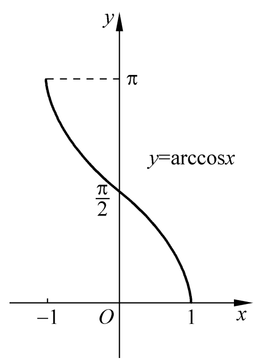

图 1-18

- **反正切函数** $y=\arctan x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. 反正切函数是奇函数，且单调递增(如图 1-19 所示).
- **反余切函数** $y=\operatorname{arccot} x$，其定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$. 反余切函数是单调递减函数(如图 1-20 所示).

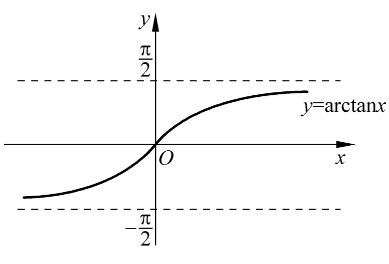

图 1-19

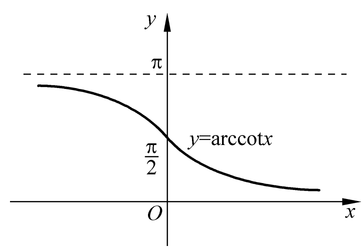

图 1-20

2）初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的、能用一个解析式表示的函数称为**初等函数**. 例如，$y=\sin\sqrt{e^x+1}$ 和 $y=\arctan\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$都是初等函数. 而分段函数

$$y=\begin{cases}1-x, & x\leqslant -2,\\ \sin x, & -2<x<2,\\ 1+x, & x\geqslant 2\end{cases}$$

不是初等函数. 初等函数是微积分学的主要研究对象.

例 8 指出下列函数的复合关系：

（1）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；（2）$y=\left(x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$.

解 （1）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$由下列函数复合而成：$y=\ln u, u=x+\sqrt{v}, v=1+x^2$.

（2）$y=\left(x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)^{-1}$ 由下列函数复合而成：$y=u^{-1}, u=x^2\cos v, v=\dfrac{1}{x}$.

6. 经济学中几种常见的函数

1）需求函数

需求是社会经济活动中的一种现象，它的含义是指消费者同时具备两个条件，即既有购买商品的愿望，又有购买商品的能力. 需求和许多因素有关，如收入、人口、消费的时间和商品价格，等等. 如果我们只考虑价格变化的因素，其他诸多因素都认为不变，则需求量（记为 D）可视为价格（记为 p）的函数，称为**需求函数**，记为

$$D=f(p).$$

需求函数一般是价格的单减函数，即当价格增加（上涨）时，需求量减少. 最简单的需求函数为线性函数

$$D=a-bp \quad (a>0, b>0, \text{皆为常数}).$$

当 $p=0$ 时，$D=a$，表示当价格为零时，消费者对该商品的需求量为 a（称为该商品的**市场饱和需求量**）；当 $p=\dfrac{a}{b}$时，$D=0$，表示当价格上涨到$\dfrac{a}{b}$时，无人购买该商品.

例 9 某商品定价 20 元，预测每月可卖出 300 件；若降价 25%，每月可卖出 500 件. 求需求函数（假设为线性函数）.

解 设所求线性需求函数为 $D=a-bp$. 由题可得

$$\begin{cases}300=a-20b,\\ 500=a-20(1-25\%)b.\end{cases}$$

解得 $a=1000, b=40$. 故所求函数为

$$D=1100-40p, \quad p\in[0,27.5].$$

2）供给函数

供给是与需求相对的概念，它是指生产者在某时间内相对于价格水平等诸多因素，对某商品愿意并且能够提供出售的数量. 如果只考虑价格因素，供给量（记为 Q）可视为价格的函数，称为**供给函数**，记为

$$Q=g(p).$$

供给函数一般是价格的单增函数，即当价格增加（上涨）时，供给量增加. 最简单的供给函数为线性函数

$$Q=dp-c \quad (d>0, c>0, \text{皆为常数}).$$

由上式可知，$\dfrac{c}{d}$为价格的最低限，只有当价格大于$\dfrac{c}{d}$时，生产者才会提供该商品于市场.