第3章 辨识信息实验设计

3.1 引言

辨识信息实验设计的重要性不可小觑,它可以帮助确定不同实验条件对辨识的影响,可以帮助评估不同策略或技术对辨识的有效性,有助于积累关于辨识信息的知识,为实际辨识应用提供指导,或为后续研究提供参考。但是,由于很难确定清晰、明确的辨识信息实验标准,特别是当辨识实验信息具有模糊性或多种解释时,也很难创造与实际情境相似的辨识信息实验条件,现实情况往往更加复杂和多样化,对辨识信息实验中可能出现从未遇到过的新信息,难以及时应对处理,因此这些综合目标实际上不容易达成。然而有一点必须做到——也就是必须使辨识实验数据尽可能多地包含系统特性的行为信息,或者说使辨识实验数据尽可能提供充分的信息。

辨识信息实验设计涉及的问题很多,包括了解辨识信息实验对象的特征与性质;明确辨识信息实验的目标,比如不同条件下特定类型的辨识信息实验效果;定义具体的辨识信息实验任务,比如判断辨识实验信息的真实性,以及信息分类和记忆等;设置不同的辨识信息实验条件,比如变量选择、信息特征等;确定评估辨识信息实验的指标,比如准确率、反应时间、错误率等;制定详细的辨识信息实验步骤,比如辨识信息输入顺序、辨识对象的操作要求和时间限制等;确定收集数据的方法,比如记录或使用专门设备进行测量等;选择适当的数据分析方法,用于分析数据性质和可用性。

辨识信息实验设计的内容包括:①确定系统辨识涉及的变量,包括输出变量、可测输入变量、不可测输入变量、可测干扰变量、不可测干扰变量、噪声变量等;②设计辨识输入信号,通常需要考虑辨识输入信号的二阶矩统计性质和信号的“形态”等;③选择采样时间,除了满足香农采样定理外,还要兼顾辨识模型的使用要求;④确定辨识所用的数据长度,为了保证数据的信息含量,需要有足够长的实验数据;⑤辨识实验数据的预处理,包括零值化、滤波、去野值等。

本章主要讨论辨识信息实验、辨识输入信号设计、采样时间和数据长度的选择等问题。至于应该如何确定系统辨识所涉及的变量,一般与具体的辨识问题有关,而且与系统的工艺相关,本章不做深入讨论,实验数据的预处理也不是本章讨论的重点。

3.2 辨识信息实验

以辨识为目的设计的实验称为辨识信息实验。如果辨识信息实验所产生的数据集是“信息充足”的,则称该实验是“信息充足”的。

3.2.1 开环辨识信息实验

开环辨识信息实验所生成的数据集合$\{\boldsymbol{D}(k)=[u(k),z(k)]^{\mathrm{T}}\}$必须是“信息充足”或“提供信息”的,或者说同一模型类中任意两个模型作用于实验数据集合的偏差为零,否则开环系统是不可辨识的。

根据第2章式(2.2.13)时域描述模型,单输入单输出线性模型可以写成

$$z(k)=G(z^{-1},\boldsymbol{\theta})u(k)+H(z^{-1},\boldsymbol{\theta})v(k) \tag{3.2.1}$$

其中,$u(k)$、$z(k)$为模型输入和输出变量;$v(k)$是均值为零、方差为1的白噪声;$G(z^{-1},\boldsymbol{\theta})$为系统模型,$H(z^{-1},\boldsymbol{\theta})$为噪声模型,$\boldsymbol{\theta}$为模型参数。

定义残差$\varepsilon_i(k)=\varepsilon(k,\boldsymbol{\theta}_i)$,其中$\boldsymbol{\theta}_i$,$i=1,2$是模型$G_1(z^{-1})=G(z^{-1},\boldsymbol{\theta}_1)$和$H_1(z^{-1})=H(z^{-1},\boldsymbol{\theta}_1)$及$G_2(z^{-1})=G(z^{-1},\boldsymbol{\theta}_2)$和$H_2(z^{-1})=H(z^{-1},\boldsymbol{\theta}_2)$的参数,又定义模型偏差$\Delta G(z^{-1})=G_1(z^{-1})-G_2(z^{-1})$和$\Delta H(z^{-1})=H_1(z^{-1})-H_2(z^{-1})$,则两个模型残差之差可写成

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon(k)&=\varepsilon_2(k)-\varepsilon_1(k)\\&=\frac{1}{H_1(z^{-1})}[\Delta G(z^{-1})u(k)+\Delta H(z^{-1})\varepsilon_2(k)]\end{aligned} \tag{3.2.2}$$

其中,模型残差分别为

$$\begin{cases}\varepsilon_1(k)=\dfrac{1}{H_1(z^{-1})}[(G_0(z^{-1})-G_1(z^{-1}))u(k)+H_0(z^{-1})v(k)]\\\varepsilon_2(k)=\dfrac{1}{H_2(z^{-1})}[(G_0(z^{-1})-G_2(z^{-1}))u(k)+H_0(z^{-1})v(k)]\end{cases} \tag{3.2.3}$$

式中,$G_0(z^{-1})$和$H_0(z^{-1})$为系统真实模型。利用公式$\bar{\mathrm{E}}\{x^2(k)\}=R_x(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_x(\omega)\mathrm{d}\omega$,其中$R_x(0)$、$S_x(\omega)$为信号$x(k)$的相关函数和谱密度函数,由式(3.2.2)可得

$$\begin{aligned}\bar{\mathrm{E}}\{\Delta\varepsilon^2(k)\}&=R_{\Delta\varepsilon}(0)\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\|H_1(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2}\Bigg[\Bigg\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})+\\&\qquad\frac{G_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})-G_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{H_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}\Delta H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\Bigg\|^2S_u(\omega)+\\&\qquad\|\Delta H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2\Bigg\|\frac{H_0(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}{H_2(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})}\Bigg\|^2\Bigg]\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

由上式知,为使$\bar{\mathrm{E}}\{\Delta\varepsilon^2(k)\}=0$,必须$\Delta H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$及$\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$。可见,$\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$是辨识输入信号必须满足的条件。该条件说明,辨识输入信号的谱密度函数$S_u(\omega)$不能为零,否则$\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$就可不为零。根据第1章数据集"信息充足"定义式(1.5.4),谱密度函数$S_u(\omega)$为零的辨识信息实验,由于必须$\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\neq0$,所以数据集不可能是"信息充足"的。换句话说,当$\Delta H(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$及$\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$时,辨识信息实验的数据集是"信息充足"的。以上分析表明,$\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$是开环辨识信息实验"信息充足"的必要条件。

3.2.2 持续激励信号

定义 3.1 设信号$u(k)$是拟平稳的随机信号,如果它的谱密度函数$S_u(\omega)>0$,$\forall\omega$,则称$u(k)$是持续激励信号(persistently exciting signal)①。

从频谱分析的角度看,$u(k)$的谱密度函数可写成

$$S_u(\omega)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}R_u(l)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l}=R_u(0)+2\sum_{l=1}^{\infty}R_u(l)\cos\omega l \tag{3.2.5}$$

① 信息充足、持续激励的概念及定义3.1~3.2和定理3.1~3.3也可参见文献[63]。

对白噪声来说，因为 $R_u(0)>0, R_u(1)=R_u(2)=\cdots=R_u(l)\cdots=0$，所以 $S_u(\omega)>0, \forall\omega$，因此白噪声是一种任意阶的持续激励信号。如果只有某些频率使 $S_u(\omega)>0$，这种信号称有限阶的持续激励信号。

定义 3.2　一个具有谱密度函数为 $S_u(\omega)$ 的拟平稳信号 $u(k)$ 称作 n 阶持续激励信号，若对一切形如 $F_n(z^{-1})=f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+\cdots+f_nz^{-n}$ 的滤波器，关系式 $\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)\equiv 0$ 成立，意味着 $F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\equiv 0$。

定义 3.2 表达了这么一层意思：$\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)\equiv 0$，意味着 $F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\equiv 0$。也就是说，要让 $\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$，必须是 $F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$，而不能让 $S_u(\omega)=0$。

定义 3.2 也可以理解为：如果 $S_u(\omega)$ 具有 n 个非零点，则当且仅当 $\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)\equiv 0$，必须是 $F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$。或者说，只要 $S_u(\omega)$ 具有 n 个非零点，且 $F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\neq 0$，那是不可能使 $\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$ 的。若将 $\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)$ 写成

$$\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})F_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})S_u(\omega)=X_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})X_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})S_u(\omega) \tag{3.2.6}$$

其中

$$X_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=x_1+x_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}+\cdots+x_n\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n-1)} \tag{3.2.7}$$

这表明 $X_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$ 最多只有 $(n-1)$ 个零点，所以当 $S_u(\omega)$ 具有 n 个非零点时，$\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$ 是不可能的。

定义 3.2 也可直观解释成：若 $u(k)$ 是 n 阶持续激励信号，意味着其谱密度函数 $S_u(\omega)$ 至少有 n 个非零点。比如，频率不为整数倍的 n 个正弦信号组合 $u(k)=\sum_{i=1}^{n}a\sin(\omega_i k)$ 就是一种 $2n$ 阶持续激励信号，因为其双边谱密度函数具有 $2n$ 个非零点。不过，这种正弦组合信号通常只能用于激励具有 n 个实模态的系统。

对多变量系统来说，若对一切形如

$$\boldsymbol{F}_n(z^{-1})=\boldsymbol{F}_1z^{-1}+\boldsymbol{F}_2z^{-2}+\cdots+\boldsymbol{F}_nz^{-n},\quad \boldsymbol{F}_i\in\mathbf{R}^{m\times m},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.2.8}$$

的多项式矩阵，关系式 $\boldsymbol{F}_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\boldsymbol{S}_u(\omega)\boldsymbol{F}_n^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\equiv 0$ 成立，意味着 $\boldsymbol{F}_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\equiv 0$，其中 $\boldsymbol{S}_u(\omega)$ 为信号 $\boldsymbol{u}(k)$ 的谱矩阵，则称信号 $\boldsymbol{u}(k)$ 是 n 阶持续激励信号。

定理 3.1　设信号 $u(k)$ 是拟平稳随机信号，如果自相关函数矩阵

$$\boldsymbol{R}_u^n=\begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \cdots & R_u(n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \cdots & R_u(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(n-1) & R_u(n-2) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

是非奇异的，则信号 $u(k)$ 是 n 阶持续激励信号。

证明　利用自相关函数与自谱密度函数的关系 $R(l)=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega l}\mathrm{d}\omega$，将信号 $u(k)$ 的自相关函数矩阵写成

$$\boldsymbol{R}_u^n=\begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(0)}\mathrm{d}\omega & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(1)}\mathrm{d}\omega & \cdots & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n-1)}\mathrm{d}\omega \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(-1)}\mathrm{d}\omega & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(0)}\mathrm{d}\omega & \cdots & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n-2)}\mathrm{d}\omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(1-n)}\mathrm{d}\omega & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(2-n)}\mathrm{d}\omega & \cdots & \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_u(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(0)}\mathrm{d}\omega \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix}1\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\\ \vdots\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(n-1)}\end{bmatrix}\left[1\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\quad\cdots\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-1)}\right]S_u(\omega)\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})S_u(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{3.2.10}$$

其中,$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=[1,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega},\quad\cdots,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n-1)}]^{\mathrm{T}}$,$X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$共轭函数。又设

$$\begin{cases}\boldsymbol{f}=[f_1,f_2,\cdots,f_n]^{\mathrm{T}}\\ F_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=f_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(1)}+f_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(2)}+\cdots+f_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega(n)}\end{cases} \tag{3.2.11}$$

则有 $X^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\boldsymbol{f}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$,那么

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_u^n\boldsymbol{f}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}X^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})X^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\boldsymbol{f}S_u(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}F_n^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})]\,[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}F_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]\,S_u(\omega)\mathrm{d}\omega\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

式中,$F_n^*(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$是$F_n(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$的共轭函数。当且仅当$\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_u^n\boldsymbol{f}=0$,要使$\boldsymbol{f}=0$,$\boldsymbol{R}_u^n$必须是非奇异的。相当于当且仅当$\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$,为使$F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$,$\boldsymbol{R}_u^n$必须是非奇异的。 证毕。■

根据开环辨识信息实验"信息充足"的必要条件$\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2S_u(\omega)=0$和$n$阶持续激励信号的定义知,若$\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$的阶次为$n$,则辨识开环信息实验"信息充足"的条件是输入信号$u(k)$必须是$n$阶持续激励的。

如果输入信号$u(k)$是平稳各态遍历的,那么式(3.2.9)可近似写成

$$\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\begin{bmatrix}u(k)\\ u(k+1)\\ \vdots\\ u(k+n-1)\end{bmatrix}[u(k),u(k+1),\cdots,u(k+n+1)] \tag{3.2.13}$$

若上式矩阵行列式不为零,则工程上称$u(k)$为n阶持续激励信号。

如果输入信号$u(k)$对所有的k_1满足下式关系

$$\rho_1\boldsymbol{I}>\sum_{k=k_1}^{k_1+L}\begin{bmatrix}u(k)\\ u(k+1)\\ \vdots\\ u(k+n-1)\end{bmatrix}[u(k),u(k+1),\cdots,u(k+n+1)]>\rho_2\boldsymbol{I} \tag{3.2.14}$$

式中,$\rho_1>\rho_2>0$,则称$u(k)$为n阶强持续激励信号。

如果输入信号$u(k)$满足下式关系

$$\rho_1\boldsymbol{I}\geqslant\lim_{L\to\infty}\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}\begin{bmatrix}u(k)\\ u(k+1)\\ \vdots\\ u(k+n-1)\end{bmatrix}[u(k),u(k+1),\cdots,u(k+n+1)]\geqslant\rho_2\boldsymbol{I} \tag{3.2.15}$$

式中,$\rho_1>\rho_2>0$,则称$u(k)$为n阶弱持续激励信号。

定理3.2 当系统模型$G(z^{-1})$为有理函数时,即

$$G(z^{-1})=\frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}=\frac{z^{-d}(b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+\cdots+b_{n_b}z^{-n_b})}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\cdots+a_{n_a}z^{-n_a}} \tag{3.2.16}$$

则输入信号 $u(k)$为(n_a+n_b+1)阶持续激励信号，辨识开环信息实验是“信息充足”的。

证明　对两个不同的模型，有

$$\Delta G(z^{-1})=\frac{A_2(z^{-1})B_1(z^{-1})-A_1(z^{-1})B_2(z^{-1})}{A_2(z^{-1})A_1(z^{-1})} \tag{3.2.17}$$

根据 n 阶持续激励信号定义，意味着必须

$$\| A_2(z^{-1})B_1(z^{-1})-A_1(z^{-1})B_2(z^{-1}) \|^2 S_u(\omega)=0 \tag{3.2.18}$$

定义

$$\begin{cases} A_2(z^{-1})B_1(z^{-1})-A_1(z^{-1})B_2(z^{-1}) \triangleq z^{-(d-1)}F_{n_a+n_b+1}(z^{-1}) \\ F_{n_a+n_b+1}(z^{-1})=f_1z^{-1}+f_2z^{-2}+\cdots+f_{n_a+n_b+1}z^{-(n_a+n_b+1)} \end{cases} \tag{3.2.19}$$

也就是$\| F_{n_a+n_b+1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \|^2 S_u(\omega)=0$，意味着 $F_{n_a+n_b+1}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$，即 $\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$。因为多项式 $F_{n_a+n_b+1}(z^{-1})$是(n_a+n_b+1)阶的，故输入信号 $u(k)$必须是(n_a+n_b+1)阶持续激励信号，辨识开环信息实验才是“信息充足”的。　证毕。■

如果系统模型 $G(z^{-1})$中 $b_0=1$，则滤波器是(n_a+n_b)阶迟延多项式，这时输入信号 $u(k)$为(n_a+n_b)阶持续激励信号，辨识开环信息实验就是“信息充足”的。如果系统模型阶次 $n_a=n_b=n$，则辨识输入信号必须是 $2n$ 阶持续激励信号。

对最小二乘辨识算法(见第 5 章)来说，为保证数据矩阵$\boldsymbol{H}_L^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Lambda}_L\boldsymbol{H}_L$ 是非奇异的，或者说最小二乘估计是开环可辨识的，其充分必要条件是输入信号 $u(k)$必须为 $2n$ 阶($n=\max(n_a,n_b)$)持续激励信号。

第 5 章给出的最小二乘辨识算法可辨识性条件是

$$\det(\bar{\boldsymbol{U}}_L^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}_L)\neq 0 \tag{3.2.20}$$

式中，

$$\begin{cases} \bar{\boldsymbol{U}}_L=[z^{-1}\boldsymbol{u}_L \quad z^{-2}\boldsymbol{u}_L \quad \cdots \quad z^{-2n}\boldsymbol{u}_L] \\ \boldsymbol{u}_L=[u(1) \quad u(2) \quad \cdots \quad u(L)]^{\mathrm{T}} \\ n=\max(n_a,n_b) \end{cases} \tag{3.2.21}$$

其元素构成见第 5 章式(5.2.27)说明。当数据长度 $L\to\infty$时，式(3.2.20)的非奇异性可表示成下式的非奇异性

$$\lim_{L\to\infty}\left(\frac{1}{L}\bar{\boldsymbol{U}}_L^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}_L\right)=\begin{bmatrix} R_u(0) & R_u(1) & \cdots & R_u(2n-1) \\ R_u(1) & R_u(0) & \cdots & R_u(2n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_u(2n-1) & R_u(2n-2) & \cdots & R_u(0) \end{bmatrix}=\boldsymbol{R}_u^{2n} \tag{3.2.22}$$

式中，$\boldsymbol{R}_u^{2n}$ 为输入信号 $u(k)$的自相关函数矩阵。由定理 3.1 知，使$\boldsymbol{R}_u^{2n}$ 非奇异的信号就是 $2n$ 阶持续激励信号。

推论 3.1　开环辨识信息实验是“提供信息”[①]的，如果输入信号是持续激励的。

① “提供信息”见第 1 章 1.5.1 节定义 1.2。

3.2.3 闭环辨识信息实验

闭环辨识信息实验所生成的数据集合$\{\boldsymbol{D}(k)=[u(k),z(k)]^{\mathrm{T}}\}$必须是“信息充足”或“提供信息”的,或者说实验数据集的谱密度矩阵对所有的频率ω是严格正定的,否则闭环系统是不可辨识的。

考虑如图3.1所示的闭环系统。

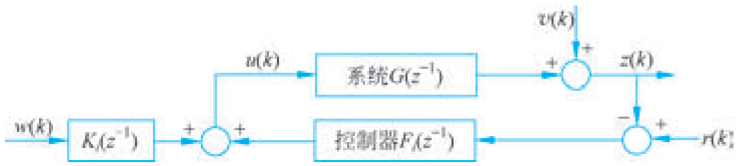

图3.1 闭环系统

定理3.3 考虑图3.1所示的闭环系统,设前向通道模型为

$$z(k)=G(z^{-1})u(k)+v(k) \tag{3.2.23}$$

当设定值$r(k)=0$时,反馈通道模型(多控制器模型切换)为

$$u(k)=-F_i(z^{-1})z(k)+K_i(z^{-1})w(k),\quad i=1,2,\cdots,m \tag{3.2.24}$$

记$\boldsymbol{\eta}(k)=\begin{bmatrix}v(k)\\w(k)\end{bmatrix}$,若$\boldsymbol{\eta}(k)$的谱密度矩阵对所有频率是正定的,且由不同控制器构成的闭环系统都是稳定的,那么闭环辨识信息实验是“提供信息”的,当且仅当

$$m\sum_{i=1}^{m}[\|K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2+\|F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2]-\left\|\sum_{i=1}^{m}F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\right\|^2>0,\quad\forall\omega \tag{3.2.25}$$

证明 对闭环系统来说,系统的输入和输出不再存在因果关系,当系统设定值$r(k)=0$时,图3.1所示的系统可写成

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}z(k)\\u(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\-F_i(z^{-1}) & K_i(z^{-1})\end{bmatrix}\boldsymbol{x}_i(k)\\ \boldsymbol{x}_i(k)=\dfrac{1}{1+G(z^{-1})F_i(z^{-1})}\begin{bmatrix}1 & G(z^{-1})K_i(z^{-1})\\0 & 1+G(z^{-1})F_i(z^{-1})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v(k)\\w(k)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{3.2.26}$$

那么闭环系统就可视作以$\begin{bmatrix}v(k)\\w(k)\end{bmatrix}$为输入,以$\begin{bmatrix}z(k)\\u(k)\end{bmatrix}$为输出的开环系统。

因为模型$\dfrac{1}{1+G(z^{-1})F_i(z^{-1})}\begin{bmatrix}1 & G(z^{-1})K_i(z^{-1})\\0 & 1+G(z^{-1})F_i(z^{-1})\end{bmatrix}$是稳定的,矩阵$\begin{bmatrix}1 & G(z^{-1})K_i(z^{-1})\\0 & 1+G(z^{-1})F_i(z^{-1})\end{bmatrix}$又是非奇异的,且$\boldsymbol{\eta}(k)$的谱密度矩阵对所有频率是正定的,所以$\boldsymbol{x}_i(k)$的谱密度矩阵满足

$$\boldsymbol{S}_{x_i}(\omega)\geqslant\delta_i\boldsymbol{I},\delta_i>0,\forall\omega,i=1,2,\cdots,m \tag{3.2.27}$$

设第i个控制器作用时间为T_i,与系统控制总时间T的比值为α_i,即$\alpha_i=\dfrac{T_i}{T}$,那么系统输入输出的谱密度矩阵可写成

$$\det\begin{bmatrix}S_u(\omega) & S_{uz}(\mathrm{j}\omega)\\S_{zu}(\mathrm{j}\omega) & S_z(\omega)\end{bmatrix}$$

$$=\det\sum_{i=1}^{m}\left\{\alpha_i\begin{bmatrix}1 & 0\\-F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) & K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\end{bmatrix}S_{x_i}(\omega)\begin{bmatrix}1 & 0\\-F_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) & K_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right\} \tag{3.2.28}$$

利用不等式：$\boldsymbol{BSB}^{*\mathrm{T}} \geqslant \delta \boldsymbol{BB}^{*\mathrm{T}}$，当 $\boldsymbol{S} \geqslant \delta \boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{B}^{*}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的共轭矩阵），可将式(3.2.28)写成

$$\det\begin{bmatrix} S_u(\omega) & S_{uz}(\mathrm{j}\omega) \\ S_{zu}(\mathrm{j}\omega) & S_z(\omega) \end{bmatrix} \geqslant \det\sum_{i=1}^{m}\left\{\alpha_i\delta_i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) & K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) & K_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right\} \tag{3.2.29}$$

令 $\delta_0=\min(\alpha_i\delta_i)$，且利用不等式 $\det\boldsymbol{A}\geqslant\det\boldsymbol{B}$，当 $\boldsymbol{A}\geqslant\boldsymbol{B}$，并考虑到反馈通道模型 $F_i(z^{-1})$，$i=1,2,\cdots,m$ 不会同时处于工作状态，则式(3.2.29)又可写成

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix} S_u(\omega) & S_{uz}(\mathrm{j}\omega) \\ S_{zu}(\mathrm{j}\omega) & S_z(\omega) \end{bmatrix} &\geqslant \delta_0\det\sum_{i=1}^{m}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) & K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -F_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) & K_i(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\right\} \\ &= \delta_0\left\{m\sum_{i=1}^{m}\left[\|F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2+\|K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2\right]-\left\|\sum_{i=1}^{m}F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\right\|^2\right\}\end{aligned} \tag{3.2.30}$$

根据第 1 章定理 1.2，如果输入和输出数据集是“提供信息”的，数据集的谱密度矩阵必须是正定的，即式(3.2.30)左边谱密度矩阵必须是正定的，所以有

$$m\sum_{i=1}^{m}\left[\|F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2+\|K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2\right]-\left\|\sum_{i=1}^{m}F_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\right\|^2>0,\quad \forall\,\omega \tag{3.2.31}$$

证毕。■

事实上，根据 Schwarz 不等式 $n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2>\left\|\sum_{i=1}^{n}x_i\right\|^2>0$，当 $m\geqslant 2$ 时，无论 $K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})=0$ 或 $K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\neq 0$，式(3.2.25)一定成立。但当 $m=1$ 时，必须 $K_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\neq 0$，否则式(3.2.25)是不能成立的。这说明定理 3.3 所要表明的问题是：闭环辨识信息实验是“信息充足”或“提供信息”的，反馈通道必须有两个或两个以上的控制器在切换工作，或反馈通道存在噪声干扰，否则闭环辨识实验数据集将是信息不充足或不提供信息的，系统也就不可辨识。文献[115]对定理 3.3 给出的这个结论也做了类似的证明。

考虑多变量闭环系统，闭环辨识信息实验“提供信息”的条件为

$$m\sum_{i=1}^{m}[\boldsymbol{K}_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\boldsymbol{K}_i^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+\boldsymbol{F}_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]-\left[\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\right]\left[\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{T}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\right]>0,\forall\,\omega \tag{3.2.32}$$

文献[116]对该条件给出了严格的证明。

3.3　辨识输入信号设计

辨识输入信号设计的目的是为了获得尽可能多的系统行为信息，设计的辨识输入信号至少必须是持续激励的，信号的谱密度函数能覆盖系统的所有模态，信号的功率或幅度要加以限制，对系统造成的“净扰动”要小，工程上容易实现。

上节讨论的辨识开环信息实验和闭环信息实验条件主要是保证系统可辨识性的。本节将讨论辨识输入信号的最优设计，所谓最优输入信号就是使 Fisher 信息矩阵逆的某标量函数达到最小，如 1.5 节中提到的 D-最优准则 $J_{\mathrm{D}}=\det(\boldsymbol{M}^{-1})$。D-最优准则也可以写成

$$J_{\mathrm{D}}=-\log\det\boldsymbol{M} \tag{3.3.1}$$

其中，$\boldsymbol{M}$ 为 Fisher 信息矩阵

$$\boldsymbol{M}=\mathrm{E}\left\{\left(\frac{\partial\log p(\boldsymbol{z}_L\mid\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\log p(\boldsymbol{z}_L\mid\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)\right\} \tag{3.3.2}$$

如果模型结构正确,且模型参数估计$\hat{\theta}$是最小方差估计,那么参数估计值$\hat{\theta}$的精度将通过 Fisher 信息矩阵 $\boldsymbol{M}$ 依赖于输入信号。如果系统的输出是独立同分布的高斯随机序列,文献[39]给出了输入信号的功率应满足如下约束

$$\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u^2(k-i)=1,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{3.3.3}$$

其中,n 为模型阶次,L 为数据长度,那么使 D-最优准则 $J_{\mathrm{D}}=\min$ 的输入信号称D-最优输入信号,它的自相关函数具有脉冲响应特性

$$\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-i)u(k-j)=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{3.3.4}$$

当数据长度 L 很大时,白噪声和 M 序列可近似满足这一要求。当数据长度 L 不大时,并非对所有的 L 都可以找到这种输入信号。

为说明问题起见,下面以一个简单的例子,论证使 $J_{\mathrm{D}}=\min$ 的最优输入信号确实需要具备式(3.3.4)特性。

考虑如下模型

$$z(k)=b_1u(k-1)+b_2u(k-2)+\cdots+b_nu(k-n)+v(k) \tag{3.3.5}$$

其中,$v(k)$是独立同分布、均值为零、方差为 σ_v^2 的高斯白噪声;输入信号 $u(k)$受式(3.3.3)约束。当数据长度 L 有限时,D-最优输入信号应满足式(3.3.4)。

证明 因为 D-最优输入信号设计是通过 $J_{\mathrm{D}}=\min$ 来实现的,所以必须先推演出关于模型参数的 Fisher 信息矩阵。

定义模型参数向量和数据向量

$$\begin{cases}\boldsymbol{\theta}=[b_1,b_2,\cdots,b_n]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{h}(k)=[u(k-1),u(k-2),\cdots,u(k-n)]^{\mathrm{T}}\end{cases} \tag{3.3.6}$$

模型式(3.3.5)写成

$$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{H\theta}+\boldsymbol{v} \tag{3.3.7}$$

其中

$$\begin{cases}\boldsymbol{z}=[z(1),z(2),\cdots,z(L)]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}=[v(1),v(2),\cdots,v(L)]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}u(0) & u(1) & \cdots & u(1-n)\\ u(1) & u(2) & \cdots & u(2-n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ u(L-1) & u(L-2) & \cdots & u(L-n)\end{bmatrix}\end{cases} \tag{3.3.8}$$

因为模型噪声 $v(k)$服从正态分布,那么根据附录 A 定理 A.1,有

$$\begin{cases}p(\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{\theta})=(2\pi\sigma_v^2)^{-\frac{L}{2}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_v^2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{\theta})\right\}\\ \log p(\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{\theta})=-\frac{L}{2}\log(2\pi)-\frac{L}{2}\log\sigma_v^2-\frac{1}{2\sigma_v^2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{\theta})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{\theta})\end{cases} \tag{3.3.9}$$

则关于模型参数$\boldsymbol{\theta}$ 的 Fisher 信息矩阵可以写成

$$\boldsymbol{M}=\mathrm{E}\left\{\left(\frac{\partial\log p(\boldsymbol{z}\mid\theta)}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial\log p(\boldsymbol{z}\mid\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right)\right\}=\frac{1}{\sigma_v^2}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} \tag{3.3.10}$$

平均 Fisher 信息矩阵为

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{M}} &= \frac{1}{L}\boldsymbol{M} = \frac{1}{L\sigma_v^2}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} \\
&= \frac{1}{\sigma_v^2}\begin{bmatrix}
\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u^2(k-1) & \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-1)u(k-2) & \cdots & \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-1)u(k-n) \\
\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-2)u(k-1) & \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u^2(k-2) & \cdots & \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-2)u(k-n) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-n)u(k-1) & \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-n)u(k-2) & \cdots & \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u^2(k-n)
\end{bmatrix} \\
&\triangleq \frac{1}{\sigma_v^2}\boldsymbol{\Gamma}
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

式中，由于输入信号受式(3.3.3)约束，所以对角线元素均为 1，且 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\Gamma}=n$。

极小化 $J_{\mathrm{D}}=-\log\det\boldsymbol{M}$ 等价于极小化 $\bar{J}_{\mathrm{D}}=-\log\det\overline{\boldsymbol{M}}=-\log\det\boldsymbol{\Gamma}+\log\sigma_v^2$，这也就是等价于极大化 $\log\det\boldsymbol{\Gamma}$。

设 $\lambda_i=1,(i=1,2,\cdots,n)$ 为 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的特征值，通过变换可得 $\log\det\boldsymbol{\Gamma}=\sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i$，再利用简单不等式 $\log x\leqslant x-1$，当 $x>0$ 及 $\mathrm{tr}\boldsymbol{\Gamma}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$，可求得

$$
\begin{aligned}
\log\det\boldsymbol{\Gamma} &= \sum_{i=1}^{n}\log\lambda_i \leqslant \sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-1)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i-n \\
&= \mathrm{tr}\boldsymbol{\Gamma}-n=0
\end{aligned}
\tag{3.3.12}
$$

上式意味着 $\lambda_i=1,(i=1,2,\cdots,n)$是 $\log\det\boldsymbol{\Gamma}$ 取最大值的一组解。特征值均为 1，对角线元素又全为 1 的矩阵一定是单位阵，所以 $\boldsymbol{\Gamma}=\boldsymbol{I}$。故有

$$
\frac{1}{L}\sum_{k=1}^{L}u(k-i)u(k-j)=\begin{cases}1, & i=j \\ 0, & i\neq j\end{cases}
\tag{3.3.13}
$$

证毕。■

以上论述表明，选用相关函数具有脉冲响应特性的信号作为辨识输入信号是一种很好的选择，如白噪声或 M 序列(或称伪随机码)[①]。因为白噪声的相关函数具有理想的脉冲响应特性，但工程上不易实现，M 序列的相关函数具有近似的脉冲响应特性，而且工程上容易操作。

3.4 采样时间的选择

采样时间选择的基本原则：在保证满足数据性能和辨识模型应用要求的前提下，尽可能增大采样时间。基于这个原则，选择采样时间需要兼顾考虑以下 4 个问题。

(1) 采集数据性能的考虑

如果采样时间选择不合适，可能会直接影响采集数据的性能。根据香农采样定理，采样速率至少不能低于信号截止频率的 2 倍。但是，复现信号时因为只有当前时刻以前的数据可以利用，为了确保复现信号的性能，通常采样速率要远大于信号截止频率的 2 倍。当信号有突变发生时，突变又刚好发生在采样间隔之后，采集数

---

① M 序列(或称伪随机码)的相关函数性质见附录 B.3。

据就不能及时反映信号的突变,造成突变数据的延迟,延迟时间在 $0\sim T_0$ 之间,平均约为 $\frac{T_0}{2}$,T_0 为采样间隔。为了减小这种延迟对采集数据性能的影响,有必要适当减小采样时间。离散系统可能包含一个零阶保持器,它使信号变成不连续的阶梯形信号,为了使信号尽可能光滑,也需要适当提高采样速率。就工程经验而言,采样时间一般可选择在 $\frac{T_{95}}{5\sim15}$ 范围内,T_{95} 为系统阶跃响应达到稳态值 95%的过渡过程时间。也就是说,在系统响应的自然振荡周期内至少要采样 6~10 次,系统响应的上升阶段采样不要少于 2~4 次。如果系统的主导时间常数为 T_M,那么采样时间需要满足不等式 $T_0\leqslant\frac{T_M}{10}$。如果系统包含多个谐振点,则采样速率通常选择最高谐振频率的 6~10 倍。

(2) 抗干扰的考虑

对低频干扰,采样时间的大小对开环系统抗干扰性能的影响不大。对高频干扰,采样时间的大小取决于开环系统的频带。由于有限的开环系统频带对干扰本身就有抑制作用,因此采样时间的大小对开环系统抗干扰性能的影响也是有限的。对闭环系统来说,如果采样时间小,由于采样数据包含了干扰的全部信息,这时对系统抗干扰性能没什么影响;如果采样时间大,由于采样数据不包含干扰的全部信息,反馈信息中也缺乏干扰信息,对系统抗干扰性能也不会有大的变化。当干扰信号的频带在系统频带范围之内时,采样时间的大小对系统抗干扰性能会有影响。这时采样时间的选择原则是:在输出方差无显著增加的情况下,尽可能选择较大的采样时间。

(3) 抗假频采样的考虑

如果信号含有正弦成分,会因为存在混叠效应而影响对信号谱密度函数的估计。设信号 $x(t)$ 的采样序列为 $\{x(k)=x(kT_0),k=1,2,\cdots\}$,其中 T_0 为采样时间,则采样频率为 $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$,Nyquist 频率为 $\omega_N=\frac{\omega_0}{2}$。如果对 $x(t)$ 进行数据采样,对正弦信号成分来说,Nyquist 频率 ω_N 之外与频率在 $[-\omega_N,\omega_N]$ 之间存在两个无法区别的信号,即对任一个 $|\omega|>\omega_N$,总存在一个 $\bar{\omega}$,$|\bar{\omega}|\leqslant\omega_N$,使得

$$\begin{aligned}\sin(\omega kT_0)&=\sin(n\omega_N+\bar{\omega})kT_0=\sin\left(\frac{n\pi}{T_0}+\bar{\omega}\right)kT_0\\&=\sin(nk\pi+\bar{\omega}kT_0)=\sin(\bar{\omega}kT_0),\quad k=0,1,2,\cdots\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

可见,在 Nyquist 频率 ω_N 内外可能采集到两个相同的信号,称之为假频现象。这使得采样序列 $\{x(k)\}$ 的谱密度函数 $S_x(\omega,T_0)$ 与原信号的谱密度函数 $S_x(\omega)$ 存在如下的混叠效应

$$S_x(\omega,T_0)=S_x(\omega)+\sum_{n=1}^{\infty}[S_x(\omega+n\omega_0)+S_x(\omega-n\omega_0)]\tag{3.4.2}$$

这种混叠效应对信号谱密度函数的估计会产生影响,可能的情况下通过选择采样时间,以回避这种影响,或采用抗假频滤波器来抑制这种混叠效应,也就是通过设置一个抗假频滤波器

$$x_F(t)=F(s)x(t)\tag{3.4.3}$$

其中,抗假频滤波器 $F(s)$ 的特性为

$$\begin{cases}\|F(j\omega)\|^2=1, & \omega<|\omega_N|\\ \|F(j\omega)\|^2=0, & \omega\geqslant|\omega_N|\end{cases}\tag{3.4.4}$$

抗假频滤波器 $F(s)$ 输出信号谱密度函数 $S_{x,F}(\omega)$ 与原信号谱密度函数 $S_x(\omega)$ 的关系为

$$S_{x,F}(\omega)=\begin{cases}S_x(\omega) & \omega<|\omega_N|\\ 0, & \omega\geqslant|\omega_N|\end{cases}\tag{3.4.5}$$

这样 Nyquist 频率 ω_N 以外的信号谱密度函数就不会再叠加到 Nyquist 频率 ω_N 以内的信号谱密度函数上。

（4）辨识精度的考虑

经验与分析表明，如果系统的主导时间常数为 T_M，当采样时间 $T_0=10T_M$ 时，与理想的最佳采样时间相比，辨识精度下降 10^5 倍。当采样时间 $T_0=0.1T_M$，与理想的最佳采样时间相比，辨识精度下降 10 倍。当然，理想的最佳采样时间并不一定能知道，这只能是为选择采样时间提供一种参考。

3.5　数据长度的选择

辨识数据长度的选择也是一个难以决断的问题。数据长度太短，影响数据的信息含量，会降低辨识精度；数据长度太长，可能出现数据饱和现象，也会影响辨识精度。

以下面系统模型为例

$$z(k)=G(z^{-1},\boldsymbol{\theta})u(k)+H(z^{-1},\boldsymbol{\theta})v(k) \tag{3.5.1}$$

其中，$v(k)$是均值为零、方差为 σ_v^2 的白噪声，辨识数据长度 L 与辨识精度的关系可以写成

$$\operatorname{cov}\left\{\begin{matrix}\hat{G}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\\ \hat{H}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\end{matrix}\right\}\sim\frac{N}{L}\sigma_v^2\begin{bmatrix}S_u(\omega) & S_{uv}(\mathrm{j}\omega)\\ S_{uv}(-\mathrm{j}\omega) & \sigma_v^2\end{bmatrix}^{-1} \tag{3.5.2}$$

其中，$S_u(\omega)$、$S_{uv}(\mathrm{j}\omega)$分别为输入信号的自谱密度函数及与噪声的互谱密度函数。该式意味着，需要通过配搭模型参数个数 N 和辨识数据长度 L，以期获得需要的辨识精度。

3.6　小结

本章讨论给出了 3 个重要的结论：①开环辨识信息实验或实验数据集是“信息充足”或“提供信息”的，辨识输入信号必须是 $2n$ 阶持续激励信号，或者说 $2n$ 阶持续激励是开环系统辨识的可辨识条件；②开环辨识信息实验最优输入信号可以选择能量受限、自相关函数具有脉冲响应特性的信号，除此之外输入信号的功率或幅度必须加以限制，而且对系统的“净扰动”要小，又必须是易实现、成本低的；③闭环辨识信息实验或实验数据集是“信息充足”或“提供信息”的，反馈通道必须有多个控制器在切换工作或反馈通道含有噪声干扰。

以上这 3 个结论是基本的、必需的，但因受信息复杂性（模糊、不完整、存在歧义）、环境干扰（噪声、实验条件）、对象差异、样本量有限、时长限制、人为偏差（主观偏见、心理因素）、数据质量（坏数据、野数据）等因素的影响，辨识信息实验设计的重点目标——辨识实验数据必须尽可能多地包含系统特性的行为信息，不一定能完全达成。那就只能重新仔细设计实验、控制实验环境，并使用适当的方法校正实验偏差，尽量达到实验设计目标。

本章还讨论了采样时间和辨识数据长度的选择，但无法给出明确的可循规则，通常需要根据具体的问题及工程需要而定。

习题

（1）考虑如下模型

$$z(k)=G(z^{-1},\boldsymbol{\theta})u(k)+H(z^{-1},\boldsymbol{\theta})v(k)$$

证明式（3.2.2），并论证开环辨识信息实验是“信息充足”的必要条件为

$$\|\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2 S_u(\omega)=0$$

其中，$S_u(\omega)$ 是输入 $u(k)$ 信号的谱密度函数，$\Delta G(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$ 是任意两个模型的偏差，定义为 $\Delta G(z^{-1})=G_2(z^{-1})-G_1(z^{-1})$。

（2）根据 n 阶持续激励信号的定义，论证只要 $S_u(\omega)$有 n 个非零点，当且仅当 $\|F_n(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})\|^2 S_u(\omega)\equiv 0$，

必须是 $F_n(e^{-j\omega})\equiv 0$。

(3) 根据持续激励信号的定义,阐述持续激励信号的物理意义。为什么白噪声是无限阶的持续激励信号?由 P 阶特征多项式生成的 M 序列信号应该是几阶的持续激励信号?

提示:通过判断信号自相关函数矩阵为非奇异时的维数,以确定信号应该是几阶的持续激励信号。

(4) 试解释 n 阶持续激励信号、n 阶强持续激励信号和 n 阶弱持续激励信号的区别。

(5) 利用开环辨识信息实验"信息充足"或"提供信息"的条件和持续激励信号的定义,试论证第5章给出的最小二乘辨识算法,其可辨识性条件可以表示为 $\det(\bar{\boldsymbol{U}}_L^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{U}}_L)\neq 0$,其中矩阵 $\bar{\boldsymbol{U}}_L$ 由输入信号组成,如式(3.2.21)所示。

(6) 使 D-最优准则 $J_{\mathrm{D}}=\min$ 的输入信号,其自相关函数满足式(3.3.4),满足该条件的信号称 D-最优输入信号。试解释选用满足式(3.3.4)的信号作为辨识输入信号的物理意义。

(7) 证明式(3.3.11)。

(8) 式(3.2.25)是闭环辨识信息实验"信息充足"或"提供信息"的条件,试说明该条件实际上可以说成反馈通道必须有两个或两个以上的控制器在切换工作。

(9) 论述应该如何考虑辨识采样时间的选择问题。