第三章

导数创新题

一、单选题

1. 若函数 $f(x)$在 D 上可导，且导函数 $f'(x)$在 D 上也可导，则称 $f(x)$在 D 上存在二阶导函数，二阶导函数 $f''(x)=(f'(x))'$。若 $f''(x)<0$ 在 D 上恒成立，则称 $f(x)$在 D 上为凸函数。以下四个函数在定义域上是凸函数的是(　　)

A. $f(x)=e^x$　　B. $f(x)=2x$　　C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=\ln x$

【答案】 D

【解析】 选项 A，$f(x)=e^x$，$f'(x)=e^x$，则 $f''(x)=e^x>0$，故 $f(x)$不是凸函数。

选项 B，$f(x)=2x$，$f'(x)=2$，则 $f''(x)=0$，故 $f(x)$不是凸函数。

选项 C，$f(x)=x^3$，$f'(x)=3x^2$，则 $f'(x)=6x<0$ 在 $\mathbf{R}$ 上不恒成立，故 $f(x)$不是凸函数。

选项 D，$f(x)=\ln x$，$f'(x)=\frac{1}{x}$，则 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ 在定义域上恒成立，故 $f(x)$是凸函数。

故选 D。

2. 公元 1715 年英国数学家布鲁克·泰勒在他的著作中陈述了“泰勒公式”，如果满足一定的条件，泰勒公式可以用函数在某一点的各阶导数值做系数构建一个多项式来近似表达这个函数在该点附近取值。泰勒公式将一些复杂函数近似地表示为简单的多项式函数，使得它成为分析和研究许多数学问题的有力工具，例如：$e^x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}=\frac{x^0}{0!}+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$，其中 $x\in\mathbf{R}$，$n\in\mathbf{N}^*$，试用上述公式估计$\sqrt{e}$的近似值为(精确到 0.001)(　　)

A. 1.647　　B. 1.649　　C. 1.648　　D. 1.646

【答案】 C

【解析】 令 $x=0.5$，取前 5 项可得

$$e^{\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{0.5^n}{n!}\approx\sum_{n=0}^{4}\frac{0.5^n}{n!}=\frac{0.5^0}{0!}+\frac{0.5^1}{1!}+\frac{0.5^2}{2!}+\frac{0.5^3}{3!}+\frac{0.5^4}{4!}\approx 1.648438\approx 1.648,$$

所以 $e^{\frac{1}{2}}$ 的近似值为 1.648，故选 C。

3. 在数学中，布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理。该定理的简单版本是对于满足一定条件的连续函数 $f(x)$，存在一个实数 x_0，使得 $f(x_0)=x_0$。设函数 $f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}+x^2-x+a$，若 $f(x)$ 在区间 $(0,3)$ 上存在不动点，则 a 的取值范围是(　　)

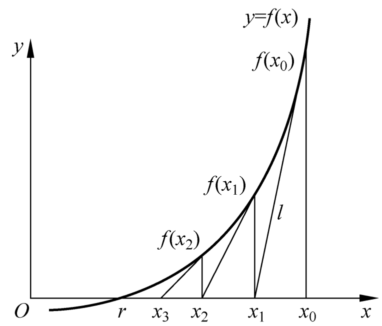
A. $(-e^2-e^{-2}-3,-1]$　　　B. $[-e^2-e^{-2},-1]$

C. $[-e^2-e^{-2}-7,-e-e^{-1}]$　　　D. $(-e^2-e^{-2}-5,-e-e^{-1}]$

【答案】 A

【解析】 由题意可得，$f(x)=e^{x-1}+e^{1-x}+x^2-x+a=x$ 在 $(0,3)$ 上有解，即 $e^{x-1}+e^{1-x}+x^2-2x+1=1-a$ 有解。令 $x-1=t$，$t\in(-1,2)$，则 $-a+1=e^t+e^{-t}+t^2$。令函数 $g(t)=e^t+e^{-t}+t^2$，$g'(t)=e^t-e^{-t}+2t$。当 $t\in(0,2)$ 时，$g'(t)>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增。$g(t)$ 为偶函数，所以 $g(t)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，故 $g(t)$ 的最小值为 $g(0)=2$，$g(t)<g(2)=e^2+e^{-2}+4$，$-a+1\in[2,e^2+e^{-2}+4)$，$a\in(-e^2-e^{-2}-3,-1]$。

4. 英国数学家牛顿在 17 世纪给出了一种求方程近似解的方法——牛顿迭代法。如图所示，设 r 是 $f(x)=0$ 的根，选取 x_0 作为 r 初始近似值，过点 $(x_0,f(x_0))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线 l，l 与 x 轴的交点的横坐标 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ $(f'(x_0)\neq0)$，称 x_1 是 r 的一次近似值，过点 $(x_1,f(x_1))$ 作曲线 $y=f(x)$ 的切线，则该切线与 x 轴的交点的横坐标为 $x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ $(f'(x_1)\neq0)$，称 x_2 是 r 的二次近似值。重复以上过程，得到 r 的近似值序列，其中 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ $(f'(x_n)\neq0)$，称 x_{n+1} 是 r 的 $n+1$ 次近似值，这种求方程 $f(x)=0$ 近似解的方法称为牛顿迭代法。若使用该方法求方程 $x^2=2$ 的近似解，则下列说法不正确的是(　　)



A. 若取初始近似值为 1，则该方程的二次近似解为 $\frac{17}{12}$

B. 若取初始近似值为 2，则该方程的二次近似解为 $\frac{17}{12}$

C. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

D. $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}+\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$

【答案】 D

【解析】 构造函数 $f(x)=x^2-2$，则 $f'(x)=2x$。取初始近似值 $x_0=1$，则

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_0-\frac{x_0^2-2}{2x_0}=1-\frac{1-2}{2\times1}=\frac{3}{2},$$

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=x_1-\frac{x_1^2-2}{2x_1}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12},$$

故 A 正确。

取初始近似值 $x_0=2$，则

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=2-\frac{4-2}{2\times2}=\frac{3}{2},\quad x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}=\frac{3}{2}-\frac{\frac{9}{4}-2}{2\times\frac{3}{2}}=\frac{17}{12},$$

故 B 正确。

根据题意，可知 $x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$，$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$，$x_4=x_3-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$，上述四式相加，得 $x_4=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}-\frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$，则 C 正确，D 不正确。故选 D。

5. 若定义在 **R** 上的函数 $f(x)$ 满足对任意 x_1,x_2，都有 $\frac{f(x_0+x_2)-f(x_1-x_0)}{x_0}<0$，其中 $x_0=x_1-x_2$，$x_1\neq x_2$，则称 $f(x)$ 为 T 函数，给出下列函数：

① $y=-e^x-x$；② $y=-x^3+3x^2-3x+1$；③ $y=\frac{\ln x}{x}$；④ $y=-x-\sin x$。

其中是 T 函数的个数为（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 1　　D. 3

【答案】 D

【解析】 $\frac{f(x_0+x_2)-f(x_1-x_0)}{x_0}=\frac{f(x_1-x_2+x_2)-f(x_1-x_1+x_2)}{x_1-x_2}=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$，

由题设过可得，若过函数 $f(x)$ 图像上任意两不同点 $P(x_1,f(x_1))$，$Q(x_2,f(x_2))$ 的割线的斜率小于 0，则函数 $f(x)$ 为“T 函数”。结合导数的几何意义，可知 T 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)\leqslant0$ 在定义域上恒成立。对于①，$y=-e^x-x$ 的定义域为 **R**，$y'=-e^x-1<0$ 恒成立，故①是 T 函数；对于②，$y=-x^3+3x^2-3x+1$ 的定义域为 **R**，$y'=-3x^2+6x-3=-3(x-1)^2\leqslant0$ 恒成立，故②是 T 函数；对于③，$y=\frac{\ln x}{x}$ 的定义域不是 **R**，故③不是 T 函数；对于④，$y=-x-\sin x$ 的定义域为 **R**，$y'=-1-\cos x\leqslant0$ 恒成立，故④是 T 函数，故选 D。

6. 我们把分子、分母同时趋近于 0 的分式结构称为 $\frac{0}{0}$ 型，比如：当 $x\to0$ 时，$\frac{e^x-1}{x}$ 的极

限为$\frac{0}{0}$型。两个无穷小之比的极限可能存在，也可能不存在，为此，洛必达在 1696 年提出洛必达法则，在一定条件下通过对分子、分母分别求导再求极限来确定未定式值的方法。例如，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-1)'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=1$，则$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3\ln x}=$(　　)

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 1　　D. 2

【答案】 D

【解析】 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2-1)'}{(x^3\ln x)'}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{3x^2\ln x+x^2}=2$，故选 D。

7. 以罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理为主体的“中值定理”反映了函数与导数之间的联系，是微积分重要的理论基础，其中拉格朗日中值定理是“中值定理”的核心内容。该定理的内容为若函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上的图像不间断，在开区间(a,b)内可导，则在区间(a,b)内至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，ξ 称为函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上的中值点。那么函数 $f(x)=1-2x^3$ 在区间$[-1,1]$上的中值点的个数为(　　)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

【答案】 C

【解析】 因为 $f(x)=1-2x^3$，$x\in[-1,1]$，所以 $f(-1)=3$，$f(1)=-1$，$f'(x)=-6x^2$。所以 $f(1)-f(-1)=-4$，$f'(\xi)=-6\xi^2$。由拉格朗日中值定理得 $f(1)-f(-1)=f'(\xi)[1-(-1)]$，即$-4=-12\xi^2$，解得 $\xi=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$。因为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\frac{\sqrt{3}}{3}\in[-1,1]$，所以函数 $f(x)=1-2x^3$ 在区间$[-1,1]$上的中值点有 2 个。故选 C。

8. 在区间 I 上，若函数 $y=f(x)$是减函数，且 $y=xf(x)$是增函数，则称 $y=f(x)$在区间 I 上是弱减函数。若 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(m,+\infty)$上是弱减函数，则 m 的取值范围是(　　)

A. $(0,e]$　　B. $(0,e)$　　C. $[e,+\infty)$　　D. $(e,+\infty)$

【答案】 C

【解析】 对于 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $y=xf(x)=\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增。易知 $m\geqslant 0$，因为 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(m,+\infty)$上是弱减函数，所以 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(m,+\infty)$上是减函数，且 $y=xf(x)=\ln x$ 在$(m,+\infty)$上是增函数。

又因为 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，所以当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$。故 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$在$(e,+\infty)$上单调递减，故$(m,+\infty)\subseteq(e,+\infty)$，故 $m\geqslant e$，即 $m\in[e,+\infty)$。故选 C。

9. 拉格朗日中值定理又称拉氏定理，如果函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上可导，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)(b-a)=f(b)-f(a)$。已知函数 $f(x)=(1+x)\cdot\ln(1+x)-\frac{1}{2}x^2-x$，任取 $a,b\in\left[\frac{1}{e}-1,e-1\right]$，有 $\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$，那么实数 λ 的最大值为(　　)

A. $e-2$　　B. 0　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $\ln2$

【答案】 B

【解析】 由题意知，$\forall a,b\in\left[\frac{1}{e}-1,e-1\right]$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\lambda=f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

因为 $f(x)=(1+x)\ln(1+x)-\frac{1}{2}x^2-x$，则 $f'(x)=\ln(1+x)-x$，令 $h(x)=\ln(1+x)-x$，则 $h'(x)=\frac{1}{1+x}-1=\frac{-x}{1+x}$。当 $\frac{1}{e}-1<x<0$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$在$\left(\frac{1}{e}-1,0\right)$上为增函数；

当 $0<x<e-1$ 时，$h'(x)<0$，即 $h(x)$在$(0,e-1)$上为减函数。所以 $f'(x)=\ln(1+x)-x\leqslant f'(0)=0$，所以 $f'(x)$的最大值为 0，所以实数 λ 的最大值为 0，故选 B。

二、多选题

10. 对于定义在区间 I 上的函数 $f(x)$和正数 $\alpha(0<\alpha\leqslant1)$，若存在正数 M，使得不等式 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|^\alpha$ 对任意 $x_1,x_2\in I$ 恒成立，则称函数 $f(x)$在区间 I 上满足 α 阶李普希兹条件，则下列说法正确的有(　　)

A. 函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$上满足$\frac{1}{2}$阶李普希兹条件

B. 若函数 $f(x)=x\ln x$ 在$[1,e]$上满足 1 阶李普希兹条件，则 M 的最小值为 2

C. 若函数 $f(x)$在$[a,b]$上满足 $M=k(0<k<1)$的 1 阶李普希兹条件，且方程 $f(x)=x$ 在区间$[a,b]$上有解 x_0，则 x_0 是方程 $f(x)=x$ 在区间$[a,b]$上的唯一解

D. 若函数 $f(x)$在$[0,1]$上满足 $M=1$ 的 1 阶李普希兹条件，且 $f(0)=f(1)$，则存在 $x_1,x_2\in[0,1]$，使得$|f(x_1)-f(x_2)|=\frac{2}{3}$

【答案】 ABC

【解析】 选项 A，假设函数 $f(x)=\sqrt{x}$ 在$[1,+\infty)$上满足$\frac{1}{2}$阶李普希兹条件，则$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant M|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}$。设 $x_1>x_2$，则$\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\leqslant M\sqrt{x_1-x_2}$，$M\geqslant\frac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1-x_2}}=$

$\sqrt{\dfrac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}}$。又因为 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}}\in(0,1)$，所以存在正数 $M\geqslant1$，任取 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，均有 $\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right|\leqslant M\left|x_1-x_2\right|^{\frac{1}{2}}$，故 A 正确。

选项 B，不妨设 $x_1>x_2$，因为 $f(x)=x\ln x$ 在 $[1,e]$ 上单调递增，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_1)-f(x_2)$，所以 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|$，即 $f(x_1)-f(x_2)\leqslant M(x_1-x_2)$，即 $f(x_1)-Mx_1\leqslant f(x_2)-Mx_2$，$\forall x_1>x_2$，$x_1,x_2\in[1,e]$，即 $f(x)-Mx$ 在 $[1,e]$ 上单调递减，所以 $f'(x)-M\leqslant0$，$\forall x\in[1,e]$，所以 $M\geqslant1+\ln x$，$\forall x\in[1,e]$，即 $M\geqslant2$，即 M 的最小值为 2，故 B 正确。

选项 C，假设方程 $f(x)=x$ 在区间 $[a,b]$ 上有两个解 x_0,t，则 $|f(x_0)-f(t)|\leqslant k|x_0-t|<|x_0-t|$，这与 $|f(x_0)-f(t)|=|x_0-t|$ 矛盾，故只有唯一解，故 C 正确。

选项 D，不妨设 $x_1>x_2$，当 $x_1-x_2\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|\leqslant\dfrac{1}{2}$。

当 $x_1-x_2>\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}|f(x_1)-f(x_2)|&=|f(x_1)-f(1)+f(0)-f(x_2)|\leqslant|f(x_1)-f(1)|+|f(x_2)-f(0)|\\&\leqslant1-x_1+x_2-0=1-(x_1-x_2)<\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\dfrac{1}{2}$ 与 $|f(x_1)-f(x_2)|=\dfrac{2}{3}$ 矛盾，故 D 错误。

综上所述，选 ABC。

11. 若函数 $y=f(x)$ 在定义域内给定区间 $[a,b]$ 上存在 $x_0(a<x_0<b)$，使得 $f(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，则称函数 $y=f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的平均值函数，x_0 是它的平均值点。若函数 $y=\dfrac{x}{e^x}+m$ 在区间 $[0,2]$ 上有两个不同的平均值点，则 m 的取值不可能是(　　)

A. $-\dfrac{1}{e}$　　B. $-\dfrac{\sqrt{2}}{e^2}$　　C. $-\dfrac{3}{2e^2}$　　D. $-\dfrac{1}{e^2}$

【答案】 AD

【解析】 因为函数 $f(x)=\dfrac{x}{e^x}+m$ 是区间 $[0,2]$ 上的平均值函数，且有两个不同的平均值点，即关于 x 的方程 $m=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{x}{e^x}$ 有两个不同的根。令 $g(x)=\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{x}{e^x}$，其中 $x\in(0,2)$，则 $g'(x)=\dfrac{x-1}{e^x}$。当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $1<x<2$ 时，$g'(x)>0$。所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,2)$ 上单调递增，所以 $g(x)$ 的最小值为 $g(1)=\dfrac{1-e}{e^2}$，又因为 $g(0)=\dfrac{1}{e^2}$，$g(2)=-\dfrac{1}{e^2}$，所以 $\dfrac{1-e}{e^2}<m<-\dfrac{1}{e^2}$，即 $m\in\left(\dfrac{1-e}{e^2},-\dfrac{1}{e^2}\right)$。

12. 设三次函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$，$f'(x)$是函数 $y=f(x)$的导数，$f''(x)$是函数 $f'(x)$的导数，若方程 $f''(x)=0$ 有实数解 x_0，则称$(x_0,f(x_0))$为函数 $y=f(x)$的拐点。某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有拐点；任何一个三次函数都有对称中心，且拐点就是对称中心。若函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-12x+\frac{49}{6}$，则下列说法正确的是(　　)

A. $f(x)$的极大值点为$\left(-2,\frac{137}{6}\right)$

B. $f(x)$有且仅有 3 个零点

C. 点$\left(\frac{1}{2},2\right)$是 $f(x)$的对称中心

D. $f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right)=4042$

【答案】 BCD

【解析】 由题意知 $f'(x)=2x^2-2x-12$，令 $f'(x)>0$，解得 $x<-2$ 或 $x>3$，令 $f'(x)<0$，解得$-2<x<3$，所以 $f(x)$在$(-\infty,-2)$和$(3,+\infty)$上单调递增，在$(-2,3)$上单调递减，所以 $f(x)$的极大值点为 -2，故 A 错误。因为

$$f(-2)=\frac{2}{3}\times(-2)^3-(-2)^2-12\times(-2)+\frac{49}{6}=\frac{137}{6}>0,$$

$$f(3)=\frac{2}{3}\times 3^3-3^4-12\times 3+\frac{49}{6}=-\frac{113}{6}<0,$$

所以 $f(x)$有且仅有 3 个零点，故 B 正确。据题意 $f''(x)=4x-2$，令 $f''(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)-12\times\frac{1}{2}+\frac{49}{6}=2$，所以点$\left(\frac{1}{2},2\right)$是 $f(x)$的对称中心，故 C 正确。因为点$\left(\frac{1}{2},2\right)$是 $f(x)$的对称中心，所以 $f(x)+f(1-x)=4$，令

$$S=f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{3}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2021}{2022}\right),$$

因为

$$S=f\left(\frac{2021}{2022}\right)+f\left(\frac{2020}{2022}\right)+f\left(\frac{2019}{2022}\right)+\cdots+f\left(\frac{2}{2022}\right),$$

所以

$$\begin{aligned}2S=&\left[f\left(\frac{1}{2022}\right)+f\left(\frac{2021}{2022}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{2022}\right)+f\left(\frac{2020}{2022}\right)\right]+\\&\left[f\left(\frac{3}{2022}\right)+f\left(\frac{2019}{2022}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{2021}{2022}\right)+f\left(\frac{1}{2022}\right)\right]\\=&2021\times 4,\end{aligned}$$

所以 $S=4042$，故 D 正确。综上所述，选 BCD。

13. 若函数 $f(x)$在 D 上可导，且导函数 $f'(x)$在 D 上也可导，则称 $f(x)$在 D 上存在二阶导函数，二阶导函数 $f''(x)=(f'(x))'$。若 $f''(x)<0$ 在 D 上恒成立，则称 $f(x)$在 D 上为凸函数，以下四个函数在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数的是(　　)

A. $f(x)=\sin x-\cos x$　　B. $f(x)=\ln x-3x$

C. $f(x)=-x^3+3x-1$　　D. $f(x)=xe^{-x}$

【答案】 BCD

【解析】 选项 A，因为 $f''(x)=-\sin x+\cos x$，所以 $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}>0$，故 A 错误。

选项 B，因为 $f'(x)=\frac{1}{x}-3$，所以 $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，所以 $f(x)=\ln x-3x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数，故 B 正确。

选项 C，因为 $f'(x)=-3x^2+3$，所以 $f''(x)=-6x<0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，所以 $f(x)=-x^3+3x-1$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数，故 C 正确。

选项 D，因为 $f(x)=\frac{x}{e^x}$，所以 $f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，从而 $f''(x)=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x}<0$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，所以 $f(x)=xe^{-x}$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是凸函数故 D 正确。故选 BCD。

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，将函数 $y=f(x)$的图像绕坐标原点逆时针旋转 α $(0°<\alpha\leqslant 90°)$后，所得曲线仍然是某个函数的图像，则称 $f(x)$为 α 旋转函数，则(　　)

A. 存在 90°旋转函数

B. 70°旋转函数一定是 80°旋转函数

C. 若 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$为 45°旋转函数，则 $a=1$

D. 若 $h(x)=\frac{bx}{e^x}$为 45°旋转函数，则$-e^2\leqslant b\leqslant 0$

【答案】 ACD

【解析】 选项 A，例如 $y=x$ 旋转 90°后为 $y=-x$，满足条件，故 A 正确。

选项 B，例如倾斜角为 10°的直线是 70°旋转函数，不是 80°旋转函数，故 B 错误。

选项 C，若 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$为 45°旋转函数，则根据函数的性质可得，$g(x)=ax+\frac{1}{x}$逆时针旋转 45°后，不存在与 x 轴垂直的直线，使得直线与函数有 1 个以上的交点。故不存在倾斜角为 45°的直线与 $g(x)=ax+\frac{1}{x}$的函数图像有两个交点，即 $y=x+b(b\in\mathbf{R})$与 $g(x)=$

$ax+\frac{1}{x}$最多1个交点。联立$\begin{cases}y=ax+\frac{1}{x},\\y=x+b,\end{cases}$可得$(a-1)x^2-bx+1=0$。当$a=1$时，$-bx+1=0$最多1个解，满足题意；当$a\neq1$时，$(a-1)x^2-bx+1=0$的判别式$\Delta=b^2-4(a-1)$，对任意$a$，都存在$b$使得判别式大于0，不满足题意，故$a=1$，故C正确。

选项D，同C，$h(x)=\frac{bx}{e^x}$与$y=x+a(a\in\mathbf{R})$的交点个数小于等于1，即对任意的a，$a=\frac{bx}{e^x}-x$最多1个解，故$g(x)=\frac{bx}{e^x}-x$为单调函数。由$g'(x)=\frac{b(1-x)}{e^x}-1$，$g'(1)=-1<0$，可知$g'(x)=\frac{b(1-x)}{e^x}-1\leqslant0$恒成立，即$e^x\geqslant-b(x-1)$恒成立，所以$y=e^x$的图像在$y=-b(x-1)$上方，故$-b\geqslant0$，即$b\leqslant0$。当$y=e^x$与$y=-b(x-1)$相切时，可设切点$(x_0,e^{x_0})$，对$y=e^x$求导得$y'=e^x$，故$\frac{e^{x_0}}{x_0-1}=e^{x_0}$，解得$x_0=2$，此时$b=-e^{x_0}=-e^2$，故$-e^2\leqslant b\leqslant0$。故D正确。故选ACD。

三、填空题

15. 直线l与曲线C满足下列两个条件：

(i) 直线l在点$P(x_0,y_0)$处与曲线C相切；

(ii) 曲线C在点P附近位于直线l的两侧，则称直线l在点P处切过曲线C。

下列命题正确的是________(写出所有正确命题的编号)。

① 直线l：$y=0$在点$P(0,0)$处切过曲线C：$y=x^3$；

② 直线l：$x=-1$在点$P(-1,0)$处切过曲线C：$y=(x+1)^2$；

③ 直线l：$y=x$在点$P(0,0)$处切过曲线C：$y=\sin x$；

④ 直线l：$y=x$在点$P(0,0)$处切过曲线C：$y=\tan x$；

⑤ 直线l：$y=x-1$在点$P(1,0)$处切过曲线C：$y=\ln x$。

【答案】 ①③④

【解析】 命题①，因为$y'=3x^2$，$y'|_{x=0}=0$，所以l：$y=0$是曲线C：$y=x^3$在点$P(0,0)$处的切线，画图可知曲线C在点P附近位于直线l的两侧，故①正确；选项②，因为$y'=2(x+1)$，$y'|_{x=-1}=0$，所以l：$x=-1$不是曲线C：$y=(x+1)^2$在点$P(-1,0)$处的切线，故②错误；命题③，$y'=\cos x$，$y'|_{x=0}=1$，所以曲线C在点$P(0,0)$处的切线为l：$y=x$，画图可知曲线C在点P附近位于直线l的两侧，故③正确；命题④，$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$，$y'|_{x=0}=1$，所以曲线C在点$P(0,0)$处的切线为l：$y=x$，则曲线C在点P附近位于直线l的两侧，故④正确；命题⑤，$y'=\frac{1}{x}$，$y'|_{x=1}=1$，所以曲线C在点$P(1,0)$处切线为l：$y=x-1$，又

由 $h(x)=x-1-\ln x(x>0)$ 可得 $h'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$，所以 $h(x)$ 的最小值为 $h(1)=0$，故 $x-1\geqslant\ln x$，所以曲线 C 在点 P 附近位于直线 l 的下侧，故⑤错误。

16. 如果函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且满足以下两条性质：

(i) 对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，若 $xy\leqslant0$，则 $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$；

(ii) 对任意 $x>0$，有 $f(x)>0$，则称函数 $f(x)$ 为 Γ 函数，给出下列命题：

① 存在 Γ 函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$；

② Γ 函数是奇函数；

③ Γ 函数在 $\mathbf{R}$ 上是增函数；

④ 如果函数 $f(x)$ 为 Γ 函数，那么对任意 $x>0$，$\Delta x>0$，$f(x)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上的平均变化率小于 $f(x)$ 在 $[0,\Delta x]$ 上的平均变化率。

其中，所有正确结论的序号是________。

【答案】 ②③④

【解析】 由 Γ 函数的定义，对任意 $x,y\in\mathbf{R}$，若 $xy\leqslant0$，则 $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$，所以令 $x=y=0$，代入上式，得 $f(0)+f(0)=f(0)$，解得 $f(0)=0$。令 $y=-x$，有 $f(x)+f(-x)=f\left(\dfrac{x-x}{1+x^2}\right)=f(0)=0$。又因为 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$，所以 $f(x)$ 为奇函数，故②正确，①错误。

设 $x>y>0$，则 $-y<0$，将 $x,-y$ 代入 $f(x)+f(y)=f\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right)$，有 $f(x)+f(-y)=f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)$。因为 $x>y>0$，所以 $x-y>0$，$1+xy>0$，所以 $\dfrac{x-y}{1+xy}>0$。因为 Γ 函数对任意 $x>0$ 都有 $f(x)>0$，所以 $f\left(\dfrac{x-y}{1+xy}\right)>0$，即 $f(x)-f(y)>0$，所以 $f(x)>f(y)$。当 $x>y>0$ 时，$f(x)>f(y)$，所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是单调增函数，因为函数 $f(x)$ 为奇函数，故当 $x<0$ 时 $f(x)$ 也是增函数。当 $x=0$ 时 $f(0)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数，故③正确。

对任意 $x>0$，$\Delta x>0$，有 $f(x+\Delta x)-f(x)=f\left[\dfrac{x+\Delta x-x}{1+x(x+\Delta x)}\right]=f\left[\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}\right]$，又因为 $1+x(x+\Delta x)>1$，所以 $\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}<\Delta x$，所以 $f\left[\dfrac{\Delta x}{1+x(x+\Delta x)}\right]<f(\Delta x)$，所以 $f(x+\Delta x)-f(x)<f(\Delta x)$，所以 $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<\dfrac{f(\Delta x)}{\Delta x}$，故④正确。

综上所述，选②③④。

17. 函数 $y=f(x)$ 图像上两个不同点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 处的切线的斜率分别是