

第3章 函数

3.1 函数的概念及表示

函数是高考数学最重要的内容,就像一条红线,贯穿始终.要学好函数,首先要深刻理解函数的概念以及组成要素.本节的内容,从考试角度来看,不仅可以单独出小题,也可以作

为一道综合题中的关键步骤来考查.从解题方法来看,涉及很多具体且有用的解题方法,建议同学们在学习的时候结合题目的特征,学会在思考中理解,在理解中掌握.



板块一 知识要点

一、函数的概念

设集合 A, B 是非空的数集,对集合 A 中任意实数 x ,按照确定的法则 f ,集合 B 中都有唯一确定的实数值 y 与它对应,则这种对应关系叫作集合 A 到集合 B 上的一个函数,记作 $y=f(x), x \in A$,其中 x 叫作自变量,其取值范围(数集 A)叫作该函数的定义域.如果自变量取值 a ,则由法则 f 确定的值 y 称为函数在 a 处的函数值,记作 $y=f(a)$ 或 $y|_{x=a}$,所有函数值构成的集合 $C=\{y|y=f(x), x \in A\}$ 叫作该函数的值域,可见集合 C 是集合 B 的子集.

注意: (1) 函数是非空数集之间的对应关系.

(2) 构成函数的三要素:定义域、对应法则、值域.由于值域是由定义域和对应法则决定的,所以如果两个函数的定义域相同,并且对应法则一致,就称两个函数为同一个函数,

定义域和对应法则中只要有一个不同,就是不同的函数.

二、函数的定义域

求解函数的定义域应注意:

- (1) 分式的分母不为零;
- (2) 偶次方根的被开方数大于或等于零;
- (3) 对数的真数大于零,底数大于零且不等于1;
- (4) 零次幂或负指数次幂的底数不为零;
- (5) 三角函数中的正切函数 $y=\tan x$ 的定义域是 $\left\{x \mid x \in \mathbf{R}, \text{且 } x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$;
- (6) 已知 $f(x)$ 的定义域求解 $f[g(x)]$ 的定义域,或已知 $f[g(x)]$ 的定义域求 $f(x)$ 的定义域,遵循两点:①定义域是指自变量的取值范围;②在同一对应法则 f 下,括号内式子的范围相同;
- (7) 对于实际问题中函数的定义域,在同

一对应法则 f 下,括号内式子的范围相同,从而得到实际问题函数的定义域.

三、函数的值域

求解函数值域主要有以下六种方法:

(1)观察法;(2)配方法;(3)换元法;(4)分离常数法;(5)单调性法;(6)导数法.需要指出

的是,定义域、值域的结果必须写成区间或集合的形式.

四、函数的表示方法

表示函数的方法,有以下三种:(1)解析法;(2)列表法;(3)图像法.



板块二 题型归纳

题型 1 函数的概念及求值

方向 1 函数概念的理解

函数是建立在两个非空数集之间的一种对应关系,从定义域到值域,允许“多对一”,不允许“一对多”,所以在两个非空数集之间,可以通过不同的对应法则定义一个或多个函数.

如果要判断两个函数相等,则只需要定义域和对应法则分别相同.在解与有限值离散集合的函数问题时,可以用列举法.

例 3.1.1 (多选题)(2020 广东中山模拟)已知集合 $M = \{-1, 1, 2, 4\}$, $N = \{1, 2, 4, 16\}$, 请根据函数定义,下列四个对应法则能构成从 M 到 N 的函数的是().

- A. $y = 2x$ B. $y = |x|$
C. $y = x + 2$ D. $y = x^2$

分析 利用函数的定义,判断集合 M 中的每一个元素,通过对应法则,检验是否在集合 N 中有唯一确定的元素与之对应即可.

解析 A 选项:集合 M 中 -1 在集合 N 中没有对应元素,故 A 不符合题意;B 选项:由函数的定义集合 M 中的每一个元素在集合 N 中都有唯一元素与之对应,故 B 符合题意;C 选项:集合 M 中 $1, 4$ 在集合 N 中没有对应元素,故 C 不符合题意;D 选项:由函数的定

义集合, M 中的每一个元素在集合 N 中都有唯一元素与之对应,故 D 符合题意.

综上所述,选 BD.

变式 1 (2023 辽宁鞍山模拟)任给 $u \in [-2, 0]$, 对应关系 f 使方程 $u^2 + v = 0$ 的解 v 与 u 对应, 则 $v = f(u)$ 是函数的一个充分条件是().

- A. $v \in [-4, 4]$ B. $v \in (-4, 2]$
C. $v \in [-2, 2]$ D. $v \in [-4, -2]$

变式 2 若一系列函数的解析式相同,值域相同,但定义域不同,则称这些函数为“孪生函数”,例如解析式为 $y = 2x^2 + 1$, 值域为 $\{9\}$ 的“孪生函数”有三个:① $y = 2x^2 + 1, x \in \{-2\}$; ② $y = 2x^2 + 1, x \in \{2\}$; ③ $y = 2x^2 + 1, x \in \{-2, 2\}$. 那么函数解析式为 $y = 2x^2 + 1$, 值域为 $\{1, 5\}$ 的“孪生函数”共有()个.

- A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

方向 2 函数求值

函数求值问题多见于分段函数、复合函数以及抽象函数.如果是具体函数求值,要根据定义域的不同选择不同的解析式,如果是抽象函数求值则往往借助赋值法,将所求函数值转化为已知函数值求解.

例 3.1.2 (2015 新课标全国II卷理 5) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \log_2(2-x), & x < 1 \\ 2^{x-1}, & x \geq 1 \end{cases}, f(-2) +$$

$$f(\log_2 12) = (\quad).$$

A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

分析 分段函数求值, 只需要根据定义域选择对应的解析式逐步计算即可.

解析 $f(-2) = 1 + \log_2 [2 - (-2)] = 3$,
 $f(\log_2 12) = 2^{\log_2 12 - 1} = 2^{\log_2 6} = 6$, 所以
 $f(-2) + f(\log_2 12) = 9$. 故选 C.

变式 已知函数 $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1-x}{x}$, 则

$$f\left(\frac{1}{e}\right) + f\left(-\frac{1}{e}\right) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

例 3.1.3 若函数 $f(x)$ 满足对任意实数 a, b 都有 $f(a+b) = f(a)f(b) \neq 0$, 且 $f(1) =$

$$1, \text{ 则 } \frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(321)}{f(320)} + \frac{f(322)}{f(321)} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

分析 由题设条件, 令 $b=1$, 求得 $\frac{f(a+1)}{f(a)} = 1$,

$$\text{进而可求解 } \frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(322)}{f(321)} \text{ 的值, 得到答案.}$$

解析 由题意, 函数 $f(x)$ 满足 $f(a+b) = f(a)f(b)$, 令 $b=1$, 得 $f(a+1) = f(a)f(1)$, 又 $f(1)=1$, 所以 $f(a+1) = f(a)$, 又 $f(a) \neq 0$, 则 $\frac{f(a+1)}{f(a)} = 1$.

$$\text{当 } a \text{ 取 } 1, 2, 3, \dots, 321 \text{ 时, 得 } \frac{f(2)}{f(1)} = \frac{f(3)}{f(2)} = \frac{f(4)}{f(3)} = \cdots = \frac{f(321)}{f(320)} = \frac{f(322)}{f(321)} = 1, \text{ 所以}$$

$$\frac{f(2)}{f(1)} + \frac{f(3)}{f(2)} + \frac{f(4)}{f(3)} + \cdots + \frac{f(321)}{f(320)} + \frac{f(322)}{f(321)} = 321.$$

评注与拓展

本题考查了函数的概念及函数表示方法的应用, 其中根据函数的对应关系得到

$$\frac{f(a+1)}{f(a)} = 1 \text{ 是解答的关键.}$$

变式① 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy (x, y \in \mathbf{R})$, $f(1) = 2$, 则 $f(-3)$ 等于().

A. 2 B. 3 C. 6 D. 9

变式② 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的单调递增的函数, $\forall n \in \mathbf{N}, f(n) \in \mathbf{N}$, 且 $f(f(n)) = 3n$, 则 $f(28) = ()$.

A. 54 B. 55 C. 56 D. 57

题型 2 函数的定义域

方向 1 求具体函数的定义域

具体函数的定义域问题比较简单, 也是考试常见的形式. 解题的时候: ①先列出使得 $f(x)$ 有意义的不等式或不等式组; ②解不等式或不等式组; ③将解集写成集合或区间的形式.

例 3.1.4 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \ln(\sqrt{x^2 - 3x + 2} +$

$$\sqrt{-x^2 - 3x + 4}) \text{ 的定义域为 } (\quad).$$

A. $(-\infty, -4] \cup [2, +\infty)$

B. $(-4, 0) \cup (0, 1)$

C. $[-4, 0) \cup (0, 1]$

D. $[-4, 0) \cup (0, 1)$

分析 本题需要考虑多方面的因素: ①分母不等

于0;②被开方式大于等于0;③对数的真数大于0.列出不等式组求出自变量的取值范围.

解析 要使函数有意义,需满足

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ -x^2 - 3x + 4 \geq 0 \\ \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 - 3x + 4} > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 1 \text{ 或 } x \geq 2 \\ -4 \leq x \leq 1 \\ x \neq 1 \end{cases}, \text{解不等式组得解集为 } [-4, 0) \cup (0, 1).$$

故选 D.

评注与拓展

当解析式是几个式子的和、差、积、商的形式的时候,定义域是使得每个式子都有意义的取值范围的交集.

变式① (2015 湖北) 函数 $f(x) = \sqrt{4 - |x|} + \lg \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ 的定义域为().

- A. (2, 3) B. (2, 4]
C. (2, 3) $\cup$ (3, 4] D. (-1, 3) $\cup$ (3, 6)

变式② 已知函数 $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$, $g(x) = \frac{1}{x^2 + x - 2}$, 则 $f(x) \cdot g(x) =$ _____.

方向 2 求抽象函数的定义域

抽象函数的定义域会涉及复合函数求定义域的问题,解题时需要注意以下两点:

(1)定义域是指自变量的取值范围,自变量就是引起函数变化的最基本的量,如 $f(2x+1)$ 中自变量是 x , $f(2x+1)$ 的定义域

是指 x 的范围而非 $2x+1$ 的范围.

(2)在同一个对应法则 f 的作用下,括号内的式子的范围相同,如 $f(x)$, $x \in M$,则在 $f(2x+1)$ 中 $2x+1 \in M$.

例 3.1.5 (1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 求 $f(x^2)$ 的定义域;

(2)已知函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $(2, 4)$, 求 $f(x)$ 的定义域;

(3)已知函数 $f(x^2)$ 的定义域为 $(1, 2)$, 求 $f(2x+1)$ 的定义域.

分析 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 求函数 $f[g(x)]$ 的定义域 D' , 只需 $D' = \{x | g(x) \in D\}$; 已知函数 $f[g(x)]$ 的定义域 D' , 求函数 $f(x)$ 的定义域, 只需 $D = \{t | t = g(x), x \in D'\}$, 即求 $g(x)$ 的值域.

解析 (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, 1)$, 即 $0 < x < 1$, 故 $0 < x^2 < 1$, 所以 $-1 < x < 1$ 且 $x \neq 0$, 则 $f(x^2)$ 的定义域为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$.

(2) $f(x^2)$ 的定义域为 $(2, 4)$, 即 $2 < x < 4$, 所以 $4 < x^2 < 16$, 故 $f(x)$ 的定义域为 $(4, 16)$.

(3) 因为 $f(x^2)$ 的定义域为 $(1, 2)$, 即 $1 < x < 2$, 所以 $1 < x^2 < 4$, 故需 $1 < 2x+1 < 4$, 解得 $0 < x < \frac{3}{2}$, 故 $f(2x+1)$ 的定义域为 $(0, \frac{3}{2})$.

变式① 若 $f(x)$ 的定义域为 $[-4, 4]$, 求 $g(x) = f(2x+1) + f(x^2)$ 的定义域.

变式2 已知函数 $y = f\left(\frac{x^2+2x-1}{x^2+x-1}\right)$ 的定义域是 $[1, +\infty)$, 则函数 $y = f(x)$ 的定义域是_____.

方向3 根据定义域求参数取值范围

对于含参的函数解析式,若已知函数的定义域求参数的值或取值范围,常常将问题转化为不等式恒成立问题求解,再利用函数的最值或数形结合求解,必要的时候需要分类讨论.

例 3.1.6 若函数 $f(x) = \sqrt{2^{x^2+2ax-a} - 1}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围为_____.

分析 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 即 $2^{x^2+2ax-a} - 1 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 再利用指数函数的单调性求解.

解析 由题意知 $2^{x^2+2ax-a} - 1 \geq 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立, 所以 $2^{x^2+2ax-a} \geq 1 = 2^0$, 即有 $x^2 + 2ax - a \geq 0$ 恒成立, 其等价于 $\Delta = 4a^2 + 4a \leq 0 \Rightarrow -1 \leq a \leq 0$, 则实数 a 的取值范围为 $[-1, 0]$.

评注与拓展

$f(x) \geq 0$ 的解集为 A 与 $f(x) \geq 0$ 在 B 上恒成立的区别: 解集为 A 是使 $f(x) \geq 0$ 成立的全部值; 在 B 上恒成立: $\forall x \in B$, 都有 $f(x) \geq 0$ 成立, 因此 B 是 A 的一个子集, 即 $B \subseteq A$, 两种说法并不等价.

变式 已知函数 $y = \sqrt{kx^2 - 6kx + 9}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围是().

- A. $k \leq 0$ 或 $k \geq 1$ B. $k \geq 1$
C. $0 \leq k \leq 1$ D. $0 < k \leq 1$

例 3.1.7 设函数 $f(x) = \sqrt{\sqrt{x(4-x)} - mx}$.

(1) 若该函数在 $[0, 3]$ 上有意义, 求实数 m

的取值范围;

(2) 若该函数的定义域为 $[0, 3]$, 求实数 m 的取值范围.

分析 这是一道经典的题目, 两问的形式非常相似, 颇能迷惑一些同学. 关键是区分“在区间上有意义”和“定义域为”两个说法. 显然“定义域”的要求更强, 是“有意义”的特殊情况.

解析 (1) 依题意可得 $\sqrt{x(4-x)} - mx \geq 0$ 在 $[0, 3]$ 上恒成立, 当 $x = 0$ 时, 不等式成立; 当 $x \in (0, 3]$, $m \leq \sqrt{\frac{4-x}{x}} = \sqrt{\frac{4}{x} - 1}$ 恒成立, 故 $m \leq \left(\sqrt{\frac{4}{x} - 1}\right)_{\min}$, 得 $m \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以实数 m 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

(2) 依题意可得关于 x 的不等式 $\sqrt{x(4-x)} \geq mx$ 的解集是 $[0, 3]$, 由 3 是方程 $\sqrt{x(4-x)} = mx$ 的根, 得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 将 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 代入不等式 $\sqrt{x(4-x)} \geq mx$, 其解集为 $[0, 3]$, 所以实数 m 的取值范围是 $\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

变式 (2022 江西模拟) 已知函数 $f(x) = \sqrt{ax^2 + bx + c}$ 的定义域与值域均为 $[0, 4]$, 则 $a = ()$.

- A. -4 B. -2 C. -1 D. 1

题型3 求函数的解析式

方向1 待定系数法

如果已知函数解析式的类型, 就可以利用相关条件把其中的参数解出来, 从而确定函数的解析式. 待定系数法是我们最熟悉的方法之一.

例 3.1.8 已知函数 $f(x) = \frac{x^2+a}{bx-c}$ ($b, c \in \mathbf{N}^*$), 若方程 $f(x) = x$ 有且只有两个相异实根 0, 2, 且 $f(-2) < -\frac{1}{2}$. 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.

分析 由 $f(x) = x$ 可得 $(1-b)x^2 + cx + a = 0$, 已知两根分别为 0, 2, 可得系数之间的等量关系. 由 $f(-2) < -\frac{1}{2}$ 确定系数的值.

解析 由 $\frac{x^2+a}{bx-c} = x$ 得 $(1-b)x^2 + cx + a = 0$ 有两个实根 0, 2, 得 $\begin{cases} (1-b) \cdot 0 + c \cdot 0 + a = 0 \\ (1-b) \cdot 4 + c \cdot 2 + a = 0 \end{cases}$, 解

$$\text{得} \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 + \frac{c}{2} \end{cases}, \text{所以 } f(x) = \frac{x^2}{\left(1 + \frac{c}{2}\right)x - c}.$$

由 $f(-2) = \frac{-2}{1+c} < -\frac{1}{2}$ 得 $c < 3$, 因为 $b, c \in \mathbf{N}^*$, 则 $c = 2, b = 2$, 所以 $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ ($x \neq 1$).

变式 若函数 $f(x) = \frac{2}{ax^2+bx+c}$ 的部分图像如图 3.1 所示, 则 $f(5) =$ ().

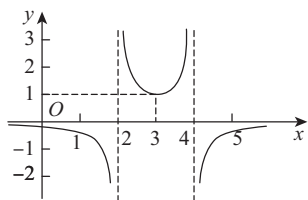


图 3.1

- A. $-\frac{1}{3}$ B. $-\frac{2}{3}$ C. $-\frac{1}{6}$ D. $-\frac{1}{12}$

方向 2 换元法和配凑法

换元法的思路: 已知 $f(h(x)) = g(x)$, 求 $f(x)$ 时, 往往可设 $h(x) = t$, 从中解出 $x =$

$\varphi(t)$, 代入 $g(x)$ 进行换元. 应用换元法时要注意新变量的取值范围.

配凑法的思路: 已知 $f(h(x)) = g(x)$, 将 $g(x)$ 恒等变形为 $g(x) = m(h(x))$, 则 $f(x) = m(x)$. 配凑法体现了整体代换的思想, 对解析式要求比较高, 一般用于易于变形的解析式, 应用面较窄.

例 3.1.9 已知 $f\left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{1}{x^2} - 1$, 则函数 $f(x)$ 的解析式为_____.

分析 $\frac{1}{x}+1$ 形式较为简单, 可以利用换元法, 同时注意到等号两边形式较为接近, 所以也可以考虑配凑法.

解析 **解法一(换元法):** 令 $t = \frac{1}{x} + 1, t \neq 1$, 则 $x = \frac{1}{t-1}$, 所以 $f\left(\frac{1}{x}+1\right) = f(t) = \frac{1}{\frac{1}{(t-1)^2}} - 1 = (t-1)^2 - 1 = t^2 - 2t$, 即 $f(x) = x^2 - 2x (x \neq 1)$.

解法二(配凑法): $f\left(\frac{1}{x}+1\right) = \frac{1}{x^2} - 1 = \left(\frac{1}{x}+1\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}+1\right)$, 令 $t = \frac{1}{x} + 1, t \neq 1$, 所以 $f(t) = t^2 - 2t$, 即函数 $f(x)$ 的解析式为 $f(x) = x^2 - 2x (x \neq 1)$.

评注与拓展

函数变形的核心思想是根据形态选择合适的方法, 到底是使用换元法还是配凑法. 一般来说, 在 $f(h(x)) = g(x)$ 中, 如果 $h(x)$ 的形式比较简单(最好是单调函数), 令 $t = h(x)$, 容易把 x 反解出来, 就利用换元法; 如果 $h(x)$ 和 $g(x)$ 形式较为接近, 通

过常用公式和变形技巧可以将 $g(x)$ 用 $h(x)$ 表示,就可以用配凑法.

例如 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}(x>0)$ 就适合用配凑法. 总体说来,配凑法更加注重函数的表达式.

变式① 已知 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$, 求 $f(x)$ 的解析式.

变式② 若函数 $f(\log_2 x + 1) = 2^x + x - 9$, 则 $f(x) =$ _____.

方向3 解方程组法

如果出现形如 $af(x) + bf(g(x)) = h(x)$ 的条件,且 $g(g(x)) = x$, 其中 $g(x)$ 和 $h(x)$ 是已知解析式,如何求 $f(x)$?

此时只需要再做一个代换,令 $x = g(x)$, 就会有 $af(g(x)) + bf(x) = h(g(x))$, 联立
$$\begin{cases} af(x) + bf(g(x)) = h(x) \\ af(g(x)) + bf(x) = h(g(x)) \end{cases}$$
, 从中解出 $f(x)$ 即可,这就是解方程组法的基本思路. 其中 $g(g(x)) = x$ 是关键,常见的形式有 $g(x) = -x$, $g(x) = \frac{1}{x}$ 或其他等价变形.

例 3.1.10 已知函数 $f(x)$ 满足: $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x (x \neq 0)$, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

分析 本题中除了所要求的 $f(x)$ 形式,同时还存在另一个形式 $f\left(\frac{1}{x}\right)$, 应通过方程消元的

思想,消去 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的形式,故只需寻求另一个

关于 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 的关系式即可.

解析 由 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 3x (x \neq 0)$ ①, 以 $\frac{1}{x}$ 代

替 x , 得到 $f\left(\frac{1}{x}\right) + 2f(x) = \frac{3}{x}$ ②, 联立 ①②

求得 $f(x) = \frac{2}{x} - x (x \neq 0)$.

评注与拓展

本题中,在 $f(x)$ 和 $f\left(\frac{1}{x}\right)$ 中用 $\frac{1}{x}$ 代替 x , 得到了另外一个方程. 能这样解题的根本原因是 $g(x) = \frac{1}{x}$, $g(g(x)) = x$. 我们再看两个题目,一方面巩固这个技巧,另一方面也做一点拓展.

变式① 已知 $f(x) + 2f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = 3x$, 求 $f(x)$ 的解析式.

变式② 已知 $f(x) + f\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1 + x (x \neq 0, x \neq 1)$, 求 $f(x)$ 的解析式.

题型 4 求函数的值域

方向 1 配方法

配方法是求“二次型函数”值域的基本方法,形如 $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ 或 $F(x) = a[f(x)]^2 + bf(x) + c (a \neq 0)$ 的函数的值域问题,均可使用配方法.

例 3.1.11 函数 $y = 5 - \sqrt{7+6x-x^2}$ 的值域是().

- A. $[-11, 5]$ B. $[1, 5]$
C. $[2, 5]$ D. $(-\infty, 5]$

分析 直接利用配方法求解函数 $y = \sqrt{7+6x-x^2}$ 的值域即可得原函数的值域.

解析 函数 $y = 5 - \sqrt{7+6x-x^2} = 5 - \sqrt{-(x-3)^2+16}$, 因为函数 $y = \sqrt{7+6x-x^2} = \sqrt{-(x-3)^2+16}$ 的值域为 $[0, 4]$, 所以函数 $y = 5 - \sqrt{7+6x-x^2}$ 的值域为 $[1, 5]$. 故选 B.

评注与拓展

计算值域,需注意函数定义域的取值.

变式 求 $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{5-x}$ 的值域.

方向 2 单调性法

如果能够利用单调函数运算的结果或者常见函数的图像与性质判断出此函数是单调函数,则在一个给定区间求其值域就只要求

区间端点的函数值即可. 常见形式有: ① $y = ax + b + \sqrt{cx+d}$ 或 $y = \sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d}$, 若 $ac > 0$, 则用单调性求值域; 若 $ac < 0$, 则用换元法或配方法. ② $y = x + \frac{k}{x} (k > 0)$ 及 $y = x + \frac{k}{x} (k < 0)$ 的单调性等.

例 3.1.12 函数 $f(x) = \sqrt{x-5} - \sqrt{24-3x}$ 的值域是_____.

分析 这是一个双根式, 可以判断函数单调性求解.

解析 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[5, 8]$, 又因为 $f(x)$ 在 $[5, 8]$ 上是增函数, 从而可知 $f(x)$ 的值域为 $[-3, \sqrt{3}]$.

评注与拓展

单调函数在求解值域或最值方面具有天然的优势, 所以我们要养成一种习惯, 即对于一些形式复杂的函数, 在动笔前不妨先判断一下函数的单调性, 如果能快速判断单调性, 或者利用导数判断单调性, 问题也就迎刃而解了.

本题又是一个双根式, 通过函数的增减性运算或者复合函数同增异减等方法先判断函数单调性, 再结合定义域区间去求值域. 关于根式函数的值域问题有很多变化, 在 P60 我们会做一个总结.

变式 1 函数 $y = 2^x + \log_3 x - \frac{3}{x} + |x|$ 在区间 $[1, 3]$ 上的最大值为_____.

变式 2 (2022 湖北武昌高三期末) 函数 $f(x) = |2e^x - 1| - 2x$ 的最小值为_____.

方向 3 分离常数法

对于分式型函数, 其主要特点是分子分母均含有自变量, 不容易分析单调性, 所以常借