



新高考数学 题型全归纳 下 参考答案

张永辉 张宏卫 主编

清华大学出版社

新高考数学 题型全归纳 下

张永辉 张宏卫 主编

清华大学出版社

10年经典
焕新升级

张永辉 张宏卫 主编

新 高考数学 题型全归纳

题型 + 模型 + 变式
增加新高考创新题型

· 向量 · 复数 · 立体几何
· 解析几何 · 概率统计

下

清华大学出版社

$(2,0)$, 半径为 $\sqrt{3}$ 的圆, $\frac{y}{x} = \frac{y-0}{x-0}$ 的几何意义是圆上一点 $M(x,y)$ 与原点连线的斜率. 设 $y-x=b$, 可看作直线 $y=x+b$ 在 y 轴上的截距. x^2+y^2 是圆上一点与原点距离的平方, 可借助于平面几何知识, 利用数形结合的方法求解.

解析 (1) 原方程可化为 $(x-2)^2+y^2=3$, 即以 $(2,0)$ 为圆心, $\sqrt{3}$ 为半径的圆. 设 $\frac{y}{x}=k$, 即 $y=kx$, 当直线 $y=kx$ 与圆相切时, 斜率 k 取得最大值或最小值, 此时 $\frac{|2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{3}$, 解得 $k=\pm\sqrt{3}$.

所以 $\frac{y}{x}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$, 最小值为 $-\sqrt{3}$.

(2) 设 $y-x=b$, 即 $y=x+b$, 当 $y=x+b$ 与圆相切时, 纵截距 b 取得最大值或最小值, 此时 $\frac{|2-0+b|}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}$, 即 $b=-2\pm\sqrt{6}$.

故 $y-x$ 的最大值为 $-2+\sqrt{6}$, 最小值为 $-2-\sqrt{6}$.

(3) **解法一(几何法)**: x^2+y^2 表示圆上的一动点与原点距离的平方, 由平面几何知识知, 其在原点和圆心连线所在直线与圆的两个交点处取得最大值和最小值. 又圆心到原点的距离为2.

故 $(x^2+y^2)_{\max}=(2+\sqrt{3})^2=7+4\sqrt{3}$,
 $(x^2+y^2)_{\min}=(2-\sqrt{3})^2=7-4\sqrt{3}$.

解法二(参数方程法): 把圆的方程化为标准方程得 $(x-2)^2+y^2=3$. 设 $\begin{cases} x=2+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数, $\theta \in [0, 2\pi)$), 则 $x^2+y^2=(2+\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sqrt{3}\sin\theta)^2=7+4\sqrt{3}\cos\theta$.

可得当 $\cos\theta=-1$ 时, $(x^2+y^2)_{\min}=7-4\sqrt{3}$; 当 $\cos\theta=1$ 时, $(x^2+y^2)_{\max}=7+4\sqrt{3}$.

解法三(方程消元法): 由圆的标准方程为 $(x-2)^2+y^2=3$, 可得 $y^2=3-(x-2)^2$, 且 $x \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, 所以 $x^2+y^2=x^2+3-(x-2)^2=4x-1$, 由 $x \in [2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}]$, 得 $x^2+y^2=4x-1 \in [7-4\sqrt{3}, 7+4\sqrt{3}]$, 故所求最大值为 $7+4\sqrt{3}$, 最小值为 $7-4\sqrt{3}$.

变式 (多选题) 已知 x, y 满足 $x^2+y^2-6x+2y+1=0$, 则().

A. x^2+y^2 的最小值为 $\sqrt{10}-3$

B. $\frac{y}{x+1}$ 的最大值为 $\frac{6\sqrt{2}-4}{7}$

C. $x+2y$ 的最小值为 $1-3\sqrt{5}$

D. $\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2}+\sqrt{x^2+(y-3)^2}$ 的最小值为5

10.4 无“圆”藏有“圆”——寻找隐形圆解题

圆因为具有显著的几何特征, 是学习解析几何的入门内容, 也是高考必考的知识点. 在

很多题目中, 从题面上来看似乎并没有提及圆, 但是通过挖掘题目中的隐藏条件, 我们可

以发现圆的存在,由此便可以利用圆的几何性质辅助解题.这类看似“无圆”,实则“有圆”的问题,可以称为“隐形圆”问题.

那么哪些条件隐藏了圆的信息呢?从数的角度看,如果有三角关系 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$,由此可以构造熟悉的“单位圆”;从形的角度看,如果可以判定一个动点到另一个定点的距离是定值,则根据圆的定义也可以确定圆的存在,此外还有我们常常提及的阿波罗尼

斯圆等内容.

本节内容将从常见的圆的定义开始,介绍几类重要的“隐形圆”.为了让内容易于理解,本节几乎不涉及后面的圆锥曲线的内容.但是需要指出的是,在与椭圆、双曲线和抛物线的问题中,也经常出现“隐形圆”问题,如椭圆的蒙日圆等,大家可以参考《高考数学培优 40 讲》这套书,其中有更为深入的介绍.



板块一 知识要点

根据学习本节内容的需要,我们重温几个重要的定理或结论,这些内容将在模型的证明或解释中起到作用.

一、与三角形相关的结论

1. 直角三角形斜边的中线等于斜边的一半.

2. 内角平分线定理:三角形一个角的平分线与其对边所成的两条线段与这个角的两边对应成比例.如图 10.24(a)中, AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线,则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

3. 外角平分线定理:三角形任一外角平分线外分对边成两线段,这两条线段和夹相应的内角的两边成比例.如图 10.24(b)中, AD 是 $\triangle ABC$ 的外角平分线,则 $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.

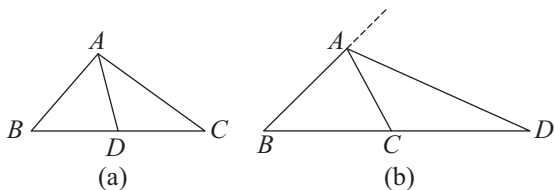


图 10.24

二、与圆相关的结论

1. 垂径定理:垂直于弦的直径平分弦且平分这条弦所对的两条弧.

2. 圆的直径所对的圆周角是直角.

3. 在圆中同弧或等弧所对的圆周角相等.

4. 同弧所对的圆周角是圆心角的一半.

5. 若一个四边形的两组对角互补,则四边形的四个顶点共圆.特别地,若四边形有一组对角都是直角,则四个顶点共圆.

三、与向量相关的结论

极化恒等式:如图 10.25 所示,在 $\triangle ABC$ 中, D 是边 BC 上的中点,则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AD}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{BC}|^2 = |\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{BD}|^2$.

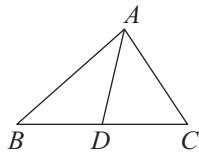


图 10.25



板块二 题型归纳

题型1 定义圆

思路提示

模型1: 根据圆的定义,如果能确定一个动点到另一个定点的距离是定值,则动点的轨迹是一个圆.

例 10.4.1 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 2nx + 2ny + 2n^2 - 8 = 0$ 上存在两个点到点 $A(-1, 1)$ 的距离均为 $\sqrt{2}$, 则实数 n 的一个取值为_____.

分析 易得到点 $A(-1, 1)$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点的轨迹方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 由题意可知圆 A 与圆 C 相交, 从而可求出 n 的范围, 即可得解.

解析 到点 $A(-1, 1)$ 的距离为 $\sqrt{2}$ 的点的轨迹方程为 $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$, 其圆心为 $A(-1, 1)$, 半径 $r_1 = \sqrt{2}$, 圆 $C: x^2 + y^2 - 2nx + 2ny + 2n^2 - 8 = 0$ 化为标准方程为 $(x-n)^2 + (y+n)^2 = 8$, 其圆心 $C(n, -n)$, 半径 $r_2 = 2\sqrt{2}$.

由题意可知圆 A 与圆 C 相交, 则 $2\sqrt{2} - \sqrt{2} < |AC| < 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$, 即 $\sqrt{2} < \sqrt{(n+1)^2 + (-n-1)^2} < 3\sqrt{2}$, 解得 $-4 < n < -2$ 或 $0 < n < 2$, 故实数 n 的一个取值为 1 (答案不唯一, 只要在 $(-4, -2) \cup (0, 2)$ 内即可).

变式 已知圆 $C: (x-a)^2 + (y-a)^2 = 8$ ($a > 0$) 上总存在两个点到原点的距离均为 $\sqrt{2}$, 则 a 的取值范围是_____.

例 10.4.2 已知圆 $C: x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 若直线 $y = k(x+1)$ 上存在一点 P , 且过点 P

所作的圆的两条切线互相垂直, 则实数 k 的取值范围为_____.

分析 根据题意, 将圆的方程化为标准方程, 求出圆心和半径, 结合题意可得圆心到直线的距离小于等于 $\sqrt{2}$, 再由点到直线的距离公式列式可求得结果.

解析 由 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, 得 $(x-2)^2 + y^2 = 1$, 则圆心 $C(2, 0)$, 半径 $r = 1$. 如图 10.26 所示, 若过点 P 所作的圆的两条切线互相垂直, 则 P, C 及两切点构成正方

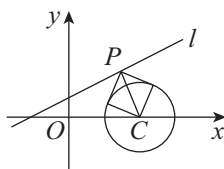


图 10.26

形, 所以 $|PC| = \sqrt{2}$, 因为直线 $y = k(x+1)$ 上存在一点 P , 且过点 P 所作的圆的两条切线互相垂直, 所以圆心到直线的距离 $\frac{|2k-0+k|}{\sqrt{1+k^2}} \leq \sqrt{2}$, 解得 $-\frac{\sqrt{14}}{7} \leq k \leq \frac{\sqrt{14}}{7}$,

即实数 k 的取值范围为 $\left[-\frac{\sqrt{14}}{7}, \frac{\sqrt{14}}{7}\right]$.

变式 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 1$, 圆 $M: (x-a)^2 + (y-a+4)^2 = 1$. 若圆 M 上存在点 P , 过点 P 作圆 O 的两条切线, 切点为 A, B , 使得 $\angle APB = 60^\circ$, 则实数 a 的取值范围为_____.

题型2 定弦长圆

思路提示

模型2: 如图 10.27 所示, 若已知圆 O 上有两个动点 A, B , 且弦 AB 的长度为定值, 则 A, B 的中点 M 到圆心 O 的距离也是

定值,由此可知 M 的轨迹是以 O 为圆心的圆,进而可以推广到 M 是弦 AB 的 λ 等分点,即 $\frac{MA}{AB} = \frac{1}{\lambda}$, 则 M 的轨迹也是圆.

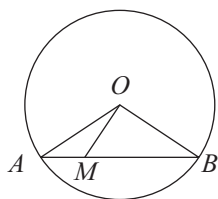


图 10.27

模型证明:

(1) 若 M 是弦 AB 的中点,显然 $OM^2 = OA^2 - \frac{1}{4}AB^2$ 是定值,所以 M 的轨迹是以 O 为圆心的圆.

(2) 若 M 是弦 AB 的 λ 等分点,即 $\frac{MA}{AB} = \frac{1}{\lambda}$, 设 D 是 A, B 中点,则 $OD^2 = OA^2 - AD^2$, 又因为 $AM = \frac{1}{\lambda}AB = \frac{2}{\lambda}AD$, 所以 $DM = \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)AD$, 由勾股定理可知: $OM^2 = DM^2 + OD^2 = \left(1 - \frac{2}{\lambda}\right)^2 AD^2 + OA^2 - AD^2 = \frac{4}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) AD^2 + OA^2 = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) AB^2 + OA^2$ 也是定值,所以 M 的轨迹是以 O 为圆心的圆.

例 10.4.3 若圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上的两个动点 A, B 满足 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15}$, 点 M 在直线 $2x + y = 10$ 上运动,则 $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|$ 的最小值是().

A. $2\sqrt{5}$ B. $3\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $2\sqrt{10}$

分析 设 AB 中点为 N , 则点 N 轨迹为圆, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ 转化为点 M 到该圆上一点的距离,再求最值.

解析 由 $x^2 + y^2 = 5$ 可知圆心为坐标原点 $O(0, 0)$, 半径为 $r = \sqrt{5}$, 因为 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{15}$,

所以圆心到直线 AB 的距离 $d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

设 AB 的中点为 N , 则 $|ON| = d = \frac{\sqrt{5}}{2}$, 所以

点 N 在以原点为圆心, 以 $r_1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 为半径的

圆上, 则点 N 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = \frac{5}{4}$,

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$, 又 N 为 AB 的中点, 所以 $\overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{NB}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MN}$, 圆心 $(0, 0)$ 到 $2x + y = 10$ 的距

离为 $d_1 = \frac{|-10|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5}$.

所以 $|\overrightarrow{MN}|_{\min} = d_1 - r_1 = 2\sqrt{5} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{5}}{2}$,

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}|_{\min} = 2|\overrightarrow{MN}|_{\min} = 3\sqrt{5}$. 故选 B.

变式 1 已知 A, B 是圆 $M: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 上不同的两个动点, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2}$, O 为坐标原点, 则 $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}|$ 的取值范围是().

A. $[2 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$ B. $[3 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$
C. $[4 - \sqrt{2}, 4 + \sqrt{2}]$ D. $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$

变式 2 (2023 海南校考三模) 已知 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ 是圆 $C: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4$ 上的两个不同的点, 若 $|\overrightarrow{MN}| = 2\sqrt{2}$, 则 $|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|$ 的取值范围为_____.

题型 3 双定点中点圆

思路提示

若直线 l_1, l_2 分别过定点 A, B , 且 $l_1 \perp l_2$, l_1 与 l_2 相交于点 M , 则 M 在以 AB 为直径的圆上. 在解题时, 要注意观察两条直线是否过定点, 以及两条直线的位置关系是否垂直, 从特殊的数量关系中挖掘特殊的位置关系.

方向1 直径圆

模型3:如果两条相互垂直的直线分别过定点 A, B , 且相交于一个动点 M , 则 M 在以 AB 为直径的圆上. 给出的直线方程往往含有参数, 要注意判断直线是否过定点, 以及两条直线是否垂直, 从而判断动点的轨迹是不是圆.

例 10.4.4 在平面直角坐标系中, 从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线, 垂足为 M , 则点 $Q(2, 4)$ 与点 M 的距离的最小值是().

- A. $5 - 2\sqrt{2}$ B. $4\sqrt{2}$ C. $6\sqrt{2}$ D. 17

分析 直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 过定点 N , 则从点 P 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线, 垂足 M 轨迹为以 PN 为直径的圆, 所以问题转化为定点到圆上一点距离的最小值.

解析 因为 $kx - y - 2 - k = 0$, 所以 $k(x-1) - y - 2 = 0$, 则 $\begin{cases} x-1=0 \\ -y-2=0 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$, 所以直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 过定点 $N(1, -2)$, 从点 $P(-3, 2)$ 向直线 $kx - y - 2 - k = 0$ 作垂线, 垂足为 M , 则 M 在以 PN 为直径的圆上.

又 $P(-3, 2), N(1, -2)$, 所以 PN 的中点为 $G(-1, 0)$, $|PN| = \sqrt{(-3-1)^2 + (2+2)^2} = 4\sqrt{2}$, 则圆 G 的方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 8$, 即 M 的轨迹方程为 $(x+1)^2 + y^2 = 8$.

因为 $Q(2, 4)$, $(2+1)^2 + 4^2 > 8$, 所以点 $Q(2, 4)$ 在圆外, $|QG| = \sqrt{(2+1)^2 + 4^2} = 5$, 则 $|QM|_{\min} = |QG| - r = 5 - 2\sqrt{2}$. 故选 A.

变式1 (2023 浙江嘉兴模拟) 已知点 P 是直线 $l_1: mx - ny - 5m + n = 0$ 和 $l_2: nx +$

$my - 5m - n = 0 (m, n \in \mathbf{R}, m^2 + n^2 \neq 0)$ 的交点, 点 Q 是圆 $C: (x+1)^2 + y^2 = 1$ 上的动点, 则 $|PQ|$ 的最大值是().

- A. $5 + 2\sqrt{2}$ B. $6 + 2\sqrt{2}$
C. $5 + 2\sqrt{3}$ D. $6 + 2\sqrt{3}$

变式2 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 5$, A, B 为圆 O 上的两个动点, 且 $AB = 2$, M 为弦 AB 的中点, $C(2\sqrt{2}, a), D(2\sqrt{2}, a+2)$. 当 A, B 在圆 O 上运动时, 始终有 $\angle CMD$ 为锐角, 则实数 a 的取值范围为_____.

方向2 过圆外定点的割线圆

模型4:过圆 O 外一定点 P 作一条割线交圆 O 于 A, B 两点, 设 M 是 AB 的中点, 因为 $OM \perp MP$, 且 O, P 为定点, 所以 M 在以 OP 为直径的圆上. 由此可以确定动点的轨迹.

例 10.4.5 已知直线 $l: ax + by + c = 0$ 被圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 截得的弦的中点为 M , 若 $3a + 2b - c = 0$, O 为坐标原点, 则点 M 的轨迹方程为_____, $|OM|$ 的最大值为_____.

分析 根据 $OM \perp AB$, 可得 M 的轨迹为圆, $|OM|$ 的最大值为点 O 到该圆圆心的距离 + 半径.

解析 圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 的圆心为 $(0, 0)$, 半径为 4, 设 $M(x, y)$, 显然 x, b 不能同时为 0, 则:

(1) 若 $x \neq 0, b \neq 0$, 则有 $k_{OM} = \frac{y}{x}, k_l = -\frac{a}{b}$,

又因为 $k_{OM} \cdot k_l = -1$, 所以 $\frac{y}{x} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) =$

-1 , 则 $a = \frac{bx}{y}$.

又 $3a + 2b - c = 0, x \neq 0, b \neq 0$, 所以 $c =$

$$3a+2b=\frac{3bx}{y}+2b=\frac{3bx+2by}{y}. \text{ 将 } c, a \text{ 代入}$$

$$\text{直线 } l: ax+by+c=0, \frac{bx}{y} \cdot x+by+\frac{3bx+2by}{y}=0, \text{ 即 } x^2+y^2+2y+3x=0.$$

(2) 若 $x=0, b \neq 0$, 即 $M(0, y)$, 则此时直线为平行于 x 轴的直线, 即 $a=0$, 此时 $M(0, -2)$ 在 $x^2+y^2+2y+3x=0$ 上.

(3) 若 $x \neq 0, b=0$, 即直线为平行于 y 轴的直线, 此时 $y=0$, 即 $M(-3, 0)$, 在 $x^2+y^2+2y+3x=0$ 上.

综上所述, 点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2+2y+3x=0$, 圆 $x^2+y^2+2y+3x=0$ 的圆心

为 $(-\frac{3}{2}, -1)$, 半径为 $\frac{\sqrt{13}}{2}$, 所以 $|OM|_{\max} =$

$$\sqrt{(-\frac{3}{2}-0)^2+(-1-0)^2}+\frac{\sqrt{13}}{2}=\sqrt{13}.$$

故答案为 $x^2+y^2+2y+3x=0; \sqrt{13}$.

变式 1 (多选题) 设直线 $l: mx-y-2m+2=0 (m \in \mathbf{R})$, 交圆 $C: (x-3)^2+(y-4)^2=9$ 于 A, B 两点, 则下列说法中正确的有().

- A. 直线 l 恒过定点 $(1, 2)$
- B. 弦 AB 长的最小值为 4
- C. 过坐标原点 O 作直线 l 的垂线, 垂足为点 M , 则线段 MC 长的最小值为 $\sqrt{5}$
- D. 当 $m=1$ 时, 圆 C 关于直线 l 对称的圆的方程为 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$

变式 2 已知点 $P(0, 4)$, 圆 $M: (x-4)^2+y^2=16$, 过点 $N(2, 0)$ 的直线 l 与圆 M 交于 A, B 两点, 则 $|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}|$ 的最大值为().

- A. $8\sqrt{2}$ B. 12 C. $6\sqrt{5}$ D. $9\sqrt{2}$

方向 3 数量积定值圆

模型 5: 若已知 A, B 是两个定点, 且动点

P 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \lambda$, 则动点 P 的轨迹是圆.

模型解释: 设 A, B 的中点是 O , 由极化恒等式可知 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2 = \lambda$,

所以 $|\overrightarrow{PO}|^2 = \lambda + \frac{1}{4} |\overrightarrow{AB}|^2$, 即 $|\overrightarrow{PO}|$ 是定值,

所以 P 是以 A, B 中点 O 为圆心的圆.

例 10.4.6 (多选题) 在平面内, 点 $F_1(-1, 0), F_2(1, 0)$ 为两个定点, 动点 P 满足 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1$, 则点 P 到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 d 的点恰好有两个, 则 d 的值可以是().

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 4

分析 设 $P(x, y)$, 由 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1$, 可得点 P 的轨迹为与 $x+y-2=0$ 相切的圆, 要使得 P 到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 d 的点恒有 2 个, 则 $0 < d < 2r$.

解析 设点 $P(x, y)$, 则 $\overrightarrow{PF_1} = (-1-x, -y)$, $\overrightarrow{PF_2} = (1-x, -y)$, 所以 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-1-x)(1-x) + (-y)^2 = x^2 + y^2 - 1 = 1$, 整理得 $x^2 + y^2 = 2$.

因为圆 $x^2 + y^2 = 2$ 的圆心 $(0, 0)$ 到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 $\frac{|-2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 所以直线

$x+y-2=0$ 与圆 $x^2 + y^2 = 2$ 相切, 又点 P 到直线 $x+y-2=0$ 的距离为 d 的点恰好有两个, 则 $0 < d < 2\sqrt{2}$, 故选 AB.

变式 1 若直线 $y=kx+8$ 上存在点 P , 过点 P 作圆 $O: x^2+y^2=4$ 的两条切线, A, B 为切点, 满足 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 6$, 则 k 的取值范围是_____.

变式 2 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $O: x^2+y^2=1$, 若曲线 $y=k|x-1|+2$ 上存在

四个点 $P_i (i=1,2,3,4)$, 过动点 P_i 作圆 O 的两条切线, A, B 为切点, 满足 $\overrightarrow{P_i A} \cdot \overrightarrow{P_i B} = \frac{3}{2}$, 则 k 的取值范围是().

- A. $(-\frac{4}{3}, 0)$
 B. $(-\infty, -\frac{4}{3})$
 C. $(-\frac{4}{3}, 0) \cup (0, +\infty)$
 D. $(-\infty, -\frac{4}{3}) \cup (0, +\infty)$

方向4 平方和定值圆

模型6: 若已知 A, B 是两个定点, 且动点 P 满足 $PA^2 + PB^2 = \lambda$, 则动点 P 的轨迹是圆.

模型解释: 设 A, B 的中点是 O , 则 $\overrightarrow{PO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB})$, 所以 $|\overrightarrow{PO}|^2 = \frac{1}{4}(|\overrightarrow{PA}|^2 + |\overrightarrow{PB}|^2 + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{4}(\lambda + 2\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB})$. 又由极化恒等式可知 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = |\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2$, 所以 $|\overrightarrow{PO}|^2 = \frac{1}{4}(\lambda + 2|\overrightarrow{PO}|^2 - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2)$, 解得 $|\overrightarrow{PO}|^2 = \frac{1}{2}(\lambda - \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2)$ 是定值, 所以 P 是以 AB 中点 O 为圆心的圆.

例 10.4.7 直线 $l: y = k(x-5) (k \neq 0)$ 与圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 相交于 A, B 两点, O 为圆心, 当 k 变化时, 求弦 AB 的中点 M 的轨迹方程.

分析 设 $M(x, y)$, 由垂径定理可得 $OM \perp AB$. 因为 AB 过定点 P , 所以 $OM \perp MP$, 则 $|OP|^2 = |OM|^2 + |MP|^2$, 可得点 M 轨迹为圆, 又 M 在圆 O 内且不在 x 轴上, 所

以 $0 < x < \frac{16}{5}$.

解析 设 $M(x, y)$, 易知直线恒过定点 $P(5, 0)$, 再由 $OM \perp MP$, 得 $|OP|^2 = |OM|^2 + |MP|^2$, 所以 $x^2 + y^2 + (x-5)^2 + y^2 = 25$, 整理得 $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.

因为点 M 应在圆内且不在 x 轴上, 所以所求的轨迹为圆内的部分且不在 x 轴上, 解方程

$$\begin{cases} (x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4} \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

得两曲线交点的横坐标为 $x = \frac{16}{5}$, 故所求轨迹方程为 $(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{25}{4} (0 < x < \frac{16}{5})$.

变式1 如图 10.28 所示, 点 $A(1, 1)$ 为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 内一点, P, Q 为圆上的动点, 且 $\angle PAQ = 90^\circ$, 则线段 PQ 中点的轨迹方程为_____.

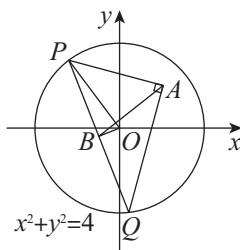


图 10.28

变式2 设 $A(-2, 0), B(2, 0), O$ 为坐标原点, 点 P 满足 $|PA|^2 + |PB|^2 \leq 16$, 若直线 $kx - y + 6 = 0$ 上存在点 Q 使得 $\angle PQO = \frac{\pi}{4}$, 则实数 k 的取值范围为().

- A. $[-\frac{\sqrt{14}}{2}, \frac{\sqrt{14}}{2}]$
 B. $(-\infty, -\frac{\sqrt{14}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{14}}{2}, +\infty)$
 C. $(-\infty, -\frac{\sqrt{5}}{2}] \cup [\frac{\sqrt{5}}{2}, +\infty)$
 D. $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$

方向5 阿波罗尼斯圆

模型7:在平面上给定两点 A, B 与动点 P 点在同一平面上且满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda$, 当 $\lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$ 时, 点 P 的轨迹是圆, 称为阿波罗尼斯圆, 简称“阿波罗圆”或“阿氏圆”.

模型解释: 设 $A(-c, 0), B(c, 0), P(x, y)$, 因为 $AP = \lambda BP$ ($c > 0, \lambda > 0$ 且 $\lambda \neq 1$), 由两点间距离公式得 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \lambda \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, 化简得 $(1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + 2c(1+\lambda^2)x + (1-\lambda^2)c^2 = 0$ (*).

(1) 当 $\lambda = 1$ 时, $x = 0$, P 点的轨迹是线段 AB 的中垂线(定义这样的直线为阿波罗直线).

(2) 当 $\lambda \neq 1$ 时方程(*)变形为 $(x - \frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \cdot c)^2 + y^2 = (\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1} \cdot c)^2$, 所以点 P 的轨迹是以 $(\frac{\lambda^2 + 1}{\lambda^2 - 1} \cdot c, 0)$ 为圆心, 以

$|\frac{2\lambda}{\lambda^2 - 1}c|$ 为半径的圆.

几何意义:如图 10.29

所示, 过点 P 分别作 $\triangle PAB$ 的内角平分线 PM 和外角平分线 PN ,

由角平分线定理可知

$AM = \lambda BM, AN = \lambda BN$, 因为 λ 和 $|AB|$ 都是定值, 所以 M, N 是两个定点, 且 $\angle MPN = 90^\circ$, 所以 P 在以 MN 为直径的圆上.

例 10.4.8 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 $A(0, 3)$, 直线 $l: y = 2x - 4$. 设圆 C 的半径为1, 圆心在 l 上. 若圆 C 上存在点 M , 使 $|MA| = 2|MO|$, 则圆心 C 的横坐标 a 的取值范围为().

A. $[0, \frac{12}{5})$

B. $(0, \frac{12}{5}]$

C. $[-\frac{12}{5}, \frac{12}{5}]$

D. $[0, \frac{12}{5}]$

分析 先求得圆 C 的方程, 再利用 $|MA| = 2|MO|$ 求得点 M 满足的圆的方程, 进而利用两圆有公共点列出关于 a 的不等式, 解之即可求得 a 的取值范围.

解析 圆心 C 的横坐标为 a , 则圆心 C 的坐标为 $(a, 2a - 4)$, 圆 C 的方程 $(x - a)^2 + (y - 2a + 4)^2 = 1$.

设 $M(x, y)$, 由 $|MA| = 2|MO|$, 可得 $\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, 整理得 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$, 则圆 $(x - a)^2 + (y - 2a + 4)^2 = 1$ 与圆 $x^2 + (y + 1)^2 = 4$ 有公共点, 所以

$2 - 1 \leq \sqrt{(0 - a)^2 + (-1 - 2a + 4)^2} \leq 2 + 1$, 即 $1 \leq 5a^2 - 12a + 9 \leq 9$, 解得 $0 \leq a \leq \frac{12}{5}$. 故选 D.

变式① 已知点 $A(3, 0)$, O 为坐标原点, 动点 M 满足 $|MA| = 2|MO|$, P, Q 为直线 $l: y = x - 3$ 上的两点, 且对任意的点 M 都有 $\angle PMQ \geq \frac{\pi}{2}$, 则线段 PQ 长度的最小值为().

A. $8\sqrt{2} + 4$

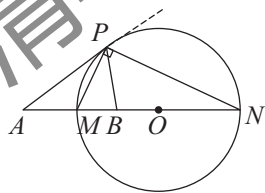
B. $3\sqrt{2} + 4$

C. $4\sqrt{2} + 2$

D. $4\sqrt{2} + 4$

变式② (2021 江苏统考模拟)(多选题)古希腊著名数学家阿波罗尼斯发现: 平面内到两个定点 A, B 的距离之比为定值 λ ($\lambda \neq 1$)的点的轨迹是圆, 此圆被称为“阿波罗尼斯圆”. 在平面直角坐标系 xOy 中, $A(-2, 0)$, $B(4, 0)$, 点 P 满足 $\frac{|PA|}{|PB|} = \frac{1}{2}$. 设点 P 轨迹

图 10.29



为C,则().

A. 轨迹C的方程为 $(x+4)^2+y^2=9$

B. 在x轴上存在异于A,B的两点D,E,使

$$\text{得} \frac{|PD|}{|PE|} = \frac{1}{2}$$

C. 当A,B,P三点不共线时,射线PO是 $\angle APB$ 的角平分线

D. 在C上存在点M,使得 $|MO|=2|MA|$

题型4 由圆外定直线生成的切点弦中点圆

思路提示

模型8: 若 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $l: ax + by + c = 0$ 上一动点,过P作圆 $O: x^2 + y^2 = r^2$ 的两条切线,切点分别是A,B,M是AB的中点,由切点弦公式可知直线AB的方程是 $x_0x + y_0y = r^2$,则可以证明直线AB过定点N,所以可知M在以ON为直径的圆上(不含O点).

模型解释: 如图10.30(a)所示,因为 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $ax + by + c = 0$ 上一动点,不妨假设 $a \neq 0$,则 $x_0 = -\frac{by_0 + c}{a}$. 又因为由点 $P(x_0, y_0)$ 生成的切点弦方程为 $x_0x + y_0y = r^2$,代入得 $\left(-\frac{b}{a}x + y\right)y_0 - \left(\frac{c}{a}x + r^2\right) = 0$,令 $\begin{cases} \frac{c}{a}x + x^2 = 0 \\ -\frac{b}{a}x + y = 0 \end{cases}$,得 $x = -\frac{a}{c}r^2, y = -\frac{b}{c}r^2$,即直线AB恒过定点 $N\left(-\frac{a}{c}r^2, -\frac{b}{c}r^2\right)$,又因为 $MN \perp OM$,所以M在以ON为直径的圆上.

如果进一步探究,我们会发现 $k_{ON} = \frac{b}{a}$,

而 $ax + by + c = 0$ 的斜率是 $k_l = -\frac{a}{b}$,所以

$ON \perp l$,即只需要过O作l的垂线,垂足为P,求出P的坐标,就可以求出直线AB的方程(此时 $AB \parallel l$,如图10.30(b)所示),然后即可求出N的坐标,也就能求出M的轨迹方程. 另外,由于AB不可能垂直于l,所以点M不可能与O点重合,故点M的轨迹是以ON为直径的圆,不包含O点.

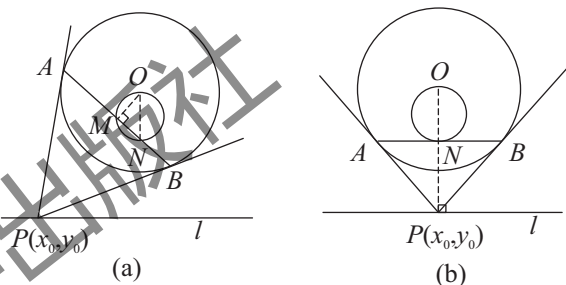


图 10.30

10.4.9 已知圆 $M: x^2 + (y-2)^2 = 1$,Q是x轴上的动点,QA,QB分别切圆M于A,B两点,则动弦AB的中点P的轨迹方程为_____.

分析 转化条件点P,Q,M三点共线得到a与动点坐标的关系式,再由 $|MQ| \cdot |PM| = |BM|^2$ 可得点P满足的条件,化简得轨迹方程.

解析 解法一(利用切点弦方程寻找定点): 设 $Q(a, 0)$,因为 $MA \perp QA, MB \perp QB$,所以M,A,B,Q四点共圆,又因为 $M(0, 2)$,所以圆心为 $\left(\frac{a}{2}, 1\right)$,半径为 $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 4}$,即M,A,B,Q所在的圆方程为 $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 +$

$(y-1)^2 = \frac{a^2}{4} + 1$, 又因为 A, B 同时在两个

圆上, 所以由
$$\begin{cases} \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{a^2}{4} + 1 \\ x^2 + (y-2)^2 = 1 \end{cases},$$

可得 AB 的方程为 $ax - 2y + 3 = 0$.

易知直线 AB 过定点 $N\left(0, \frac{3}{2}\right)$, 所以 P 在

以 MN 为直径的圆上, 圆心为 $\left(0, \frac{7}{4}\right)$, 半径

为 $r = \frac{1}{2}|MN| = \frac{1}{4}$, 且由图 10.31 可知 $y <$

2, 故 P 的方程为 $x^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} (y < 2)$.

解法二: 由圆的方程

可知圆心为 $M(0,$

2), 半径为 1, 设点

$P(x, y), Q(a, 0)$,

因为 P, Q, M 三点

共线, 所以 $\frac{y-2}{x} =$

$-\frac{2}{a}$, 即 $a = \frac{2x}{2-y}$. 又由 $|MQ| \cdot |PM| =$

$|BM|^2$, 即 $\sqrt{a^2 + 4} \cdot \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 1$, 消去

a , 并由图 10.31 可知 $y < 2$, 得 $x^2 + \left(y - \frac{7}{4}\right)^2 =$

$\frac{1}{16} (y < 2)$, 即动点 P 的轨迹方程为 $x^2 +$

$\left(y - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} (y < 2)$.

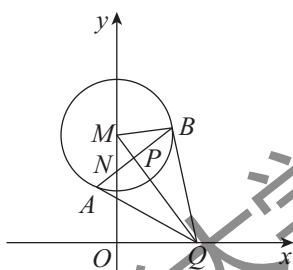


图 10.31

评注与拓展

对于选择题或者填空题, 可以直接利用切点弦方程的公式得到 AB 的方程为 $ax + (0-2)(y-2) = 1$, 即 $ax - 2y + 3 = 0$. 另外一定要注意由圆外定直线生成的切点弦的

中点的轨迹不是完整的圆(少了一个点), 所以要注意变量的取值范围.

变式① 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 $A(-4, 0), B(0, 4)$, 从直线 AB 上一点 P 向圆 $x^2 + y^2 = 4$ 引两条切线 PC, PD , 切点分别为 C, D . 设线段 CD 的中点为 M , 则线段 AM 长的最大值为_____.

变式② 圆的反演点: 已知圆 O 的半径是 r , 从圆心 O 出发任作一条射线, 在射线上任取两点 M, N , 若 $|OM| \cdot |ON| = r^2$, 则 M, N 互为关于圆 O 的反演点. 圆的反演点还可以由以下几何方法获得: 若点 M 在圆 O 外, 过 M 作圆的两条切线, 两切点的连线与 OM 的交点就是点 M 的反演点; 若点 M 在圆 O 内, 则连接 OM , 过点 M 作 OM 的垂线, 该垂线与圆两交点处的切线的交点即为 M 的反演点. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 点 $M(1, 3)$, 则 M 的反演点的坐标为_____.

题型 5 由三角坐标确定的圆

思路提示

若动点 P 的坐标是 $(a + r\cos\theta, b + r\sin\theta)$, 则 P 的轨迹是以 (a, b) 为圆心, r 为半径的圆. 特别地, 若点 P 的坐标是 $P(\cos\theta, \sin\theta)$, 则点 P 的轨迹是单位圆. 在解题时, 要注意分析一些代数式的几何意义, 将问题转化为圆与直线的位置关系问题.

例 10.4.10 已知 O 为坐标原点, 点 $A(\cos\alpha, \sin\alpha), B\left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\right)$, 以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $AOBP$, $Q(-2, 0)$, 则 $\angle PQO$ 的最大值为_____.

A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{2}$

分析 根据点 A, B 的坐标, 可得 A, B 是单位圆 O 上两动点, 且 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$, 根据两点间距离公式, 可得 $|AB| = 1$, 取 AB 的中点 M , 即可得 $|OM|$ 及 $|OP|$, 进而可得点 P 的轨迹, 分析可得当 PQ 与 $x^2 + y^2 = 3$ 相切时, $\angle PQO$ 最大.

解析 由 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$,

$B(\cos(\alpha + \frac{\pi}{3}), \sin(\alpha + \frac{\pi}{3}))$ 可知, A, B 是圆 O :

$x^2 + y^2 = 1$ 上两动点, 且

$\angle AOB = \frac{\pi}{3}$. 又因为

$|AB| = |OA| = 1$, 所以 $\triangle AOB$ 为等边三角形, 如图 10.32 所示, 取 AB 的中点 M , 则

$|OM| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $|OP| = \sqrt{3}$, 则点 P 的轨迹方程为 $x^2 + y^2 = 3$. 当 PQ 与 $x^2 + y^2 = 3$ 相切时, $\angle PQO$ 最大, 此时 $\sin \angle PQO = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则

$\angle PQO = \frac{\pi}{3}$. 故选 C.

变式 1 (2018 重庆一模) 设集合 $A = \{(x, y) | (x + 3\sin\alpha)^2 + (y + 3\cos\alpha)^2 = 1, \alpha \in \mathbf{R}\}$, $B = \{(x, y) | 3x + 4y + 10 = 0\}$, 记 $P = A \cap B$, 则点集 P 所表示的轨迹长度为_____.

变式 2 平面直角坐标系中, 点集 $M = \{(x, y) | \begin{cases} x = \sin\alpha - 2\cos\beta \\ y = \cos\alpha + 2\sin\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbf{R}\}$, 则点集 M 所覆盖的平面图形的面积为().

A. 3π B. 4π C. 8π D. 9π

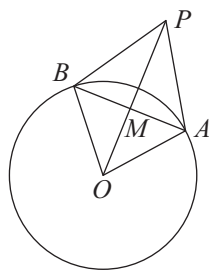


图 10.32

题型 6 由已知轨迹确定动圆方程

思路提示

如果已知动点 P 的轨迹与另一个动点 P_0 相关, 而 P_0 的轨迹方程已知, 则可以利用相关点法确定动点 P 的轨迹.

例 10.4.11 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 3$, 直线 l 过点 $A(-2, 0)$, 线段 AB 的端点 B 在圆 C 上运动, 则线段 AB 的中点 M 到原点 O 的距离的最大值为_____.

分析 由相关点法得 M 的轨迹为一个圆, 则问题转化为圆外一点到圆上一点距离的最大值, 为定点到圆心距离加半径.

解析 设 $M(x, y)$, $B(x_0, y_0)$, 由于 M 是线段

AB 的中点, 所以 $\begin{cases} x = \frac{x_0 - 2}{2} \\ y = \frac{y_0 + 0}{2} \end{cases}$, 可得

$\begin{cases} x_0 = 2x + 2 \\ y_0 = 2y \end{cases}$, 又因为 $B(x_0, y_0)$ 在圆 C :

$x^2 + y^2 = 3$ 上, 所以 $(2x + 2)^2 + (2y)^2 = 3$,

即点 M 的轨迹方程是 $(x + 1)^2 + y^2 = \frac{3}{4}$, 是

一个圆, 半径为 $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

设圆心为 D , 且原点 O 在圆 D 外, 所以 M 到原点 O 的距离的最大值为 $|OD| + r = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$.

变式 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 $C_1: x^2 + y^2 = 4$, 圆 $C_2: x^2 + y^2 = 6$, 点 $M(1, 0)$, 动点 A, B 分别在圆 C_1 和圆 C_2 上, 且 $MA \perp MB$, N 为线段 AB 的中点, 则 MN 最小值为().

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

小结

解析几何中常见向量关系的转化

(1) P 是 MN 的中点 $\Leftrightarrow \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN} = \mathbf{0}$.

(2) A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 λ , 使 $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{AC}$; A, B, C 三点共线 $\Leftrightarrow$ 存在实数 $\alpha, \beta, \alpha + \beta = 1$, 有 $\overrightarrow{OC} = \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB}$.

(3) $\angle AMB$ 是直角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$;
 $\angle AMB$ 是钝角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = m < 0$; $\angle AMB$

是锐角 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = m > 0$.

(4) 在 $\triangle ABC$ 中, AD 是 BC 边上的中线 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

(5) 在平行四边形 $ABCD$ 中, $ABCD$ 是菱形 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) = 0$;
 $ABCD$ 是矩形 $\Leftrightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}|$.

11.5 代数计算方法与简化运算

解析几何的题目有一个显著特征, 就是条件多、位置关系复杂、计算量比较大. 所以在解题的时候如何合理利用条件, 有效减少运算,

就成为能否顺利解题的关键.

本节主要从代数运算的角度介绍如何合理利用条件, 从而减少运算量的方法.



板块 题型归纳

题型 1 如何设直线

思路提示

我们先来说说设直线的问题, 常见设直线的方式就是利用点斜式 $y = kx + m$ (称为正设直线), 这种设法的特点是不能表示直线斜率不存在的情况, 如果斜率不存在就需要单独讨论. 这种情况下为了解题方便, 也可以考虑把直线设为 $x = ty + m$ (称为反设直线), 这样设的好处是包含了斜率不存在的情况 (当 $t = 0$ 时, $x = m$, 斜率不存在), 但是缺点是不能包含斜率为 0 的情况. 所以解题的时候需要根据情况选择合适的直线形式, 可以有效减少运算量.

例 11.5.1 已知抛物线 $y^2 = 4x$, 直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 若线段 AB 中点的纵坐标为 2, 则直线 AB 的斜率为 ().

- A. 2 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. 1

分析 抛物线开口向右, 直线 l 与抛物线交于 A, B 两点, 所以直线 l 的斜率一定不等于 0, 设直线 l 的方程为 $x = my + n$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立直线与抛物线的方程, 由韦达定理及直线斜率公式即可求解.

解析 解法一 (反设直线): 设直线 l 的方程为 $x = my + n$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 联立直

线 l 与抛物线方程 $\begin{cases} x = my + n \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 化简可得

$y^2 - 4my - 4n = 0$, 由韦达定理可得 $y_1 + y_2$

$$=4m.$$

因为 $\frac{y_1+y_2}{2}=2$, 所以 $4m=4$, 即 $m=1$, 则

直线 l 的方程为 $y=x-n$, 即 $k=1$. 故选 D.

解法二(正设直线): 设直线 l 的方程为 $y=kx+m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 联立方程得

$$\begin{cases} y=kx+m \\ y^2=4x \end{cases}, \text{化简得 } k^2x^2+(2km-4)x+m^2=0,$$

由韦达定理可得 $x_1+x_2=-\frac{2km-4}{k^2}$, $x_1x_2=\frac{m^2}{k^2}$, 所以 $y+y_2=kx_1+m$

$$+kx_2+m=k(x_1+x_2)+2m=-\frac{2km-4}{k}+2m=\frac{4}{k}=4, \text{解得 } k=1. \text{ 故选 D.}$$

评注与拓展

从解题的原理来讲, 正设直线和反设直线都可以解题, 但是计算量可能不同. 如果抛物线开口向右, 方程为 $y^2=2px$, 则可以设直线为 $x=ty+m$, 直接代入抛物线方程, 可以避免平方运算, 会比较简单.

变式 (2024 新高考全国 II 卷 16) 已知 A

$(0, 3)$ 和 $P\left(3, \frac{3}{2}\right)$ 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$(a > b > 0)$ 上两点.

(1) 求 C 的离心率;

(2) 若过 P 的直线 l 交 C 于另一点 B , 且 $\triangle ABP$ 的面积为 9, 求 l 的方程.

例 11.5.2 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过椭圆

右焦点的直线交椭圆于 M, N 两点. 求 $\triangle OMN$ 面积的最大值.

分析 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 因为直线 MN 不可能与 x 轴重合, 所以斜率不为 0, 可以设方程为 $x=my+1$, 并与椭圆方程联立, 利用韦达定理得到 $|y_1-y_2|$, 又 $S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 1 \times |y_1-y_2|$, 求得 $|y_1-y_2|$ 的最大值, 即可得结果.

解析 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 直线 MN 的

$$\text{方程为 } x=my+1, \text{ 联立 } \begin{cases} x=my+1 \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases} \text{ 得}$$

$$(3m^2+4)y^2+6my-9=0.$$

由韦达定理可得 $y_1+y_2=\frac{-6m}{3m^2+4}$, $y_1y_2=\frac{-9}{3m^2+4}$, 故 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}$

$$=\sqrt{\frac{36m^2+36(3m^2+4)}{(3m^2+4)^2}}$$

$$=12\sqrt{\frac{m^2+1}{9(m^2+1)^2+6(m^2+1)+1}}, \text{ 即 } |y_1-y_2|$$

$$=12\sqrt{\frac{1}{9(m^2+1)+\frac{1}{m^2+1}+6}}, \text{ 所以}$$

$$S_{\triangle OMN} = \frac{1}{2} \times 1 \times |y_1-y_2|.$$

$$\text{又因为 } m^2+1 \geq 1, \text{ 令 } m^2+1=t \in [1, +\infty), \text{ 函数 } y=9t+\frac{1}{t}+6 \text{ 在 } [1, +\infty) \text{ 上为}$$

增函数, 故当 $t=1$, 即 $m=0$ 时, $|y_1-y_2|_{\max}=3$, 此时 $\triangle OMN$ 的面积取得最大值为 $\frac{3}{2}$.

评注与拓展

如果采用正设直线的方式,还需要讨论斜率存在和不存在两种情况.因为注意到了直线斜率不为0,所以采用反设直线的方式,可以避免分类讨论.

变式 已知椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 过右焦点 F 作不平行于 y 轴的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 点 A 关于 x 轴对称点为 A' , 求证: 直线 BA' 过定点.

小结

如何设直线?

(1) 抛物线开口向右, 反设直线; 开口向上则正设直线.

(2) 如果能判断直线斜率不为0, 采用反设直线; 如果能判断直线斜率一定存在, 可以采用正设直线.

(3) 如果直线过 x 轴的一个定点, 可以反设直线, 尤其是直线过椭圆的左、右焦点或左、右顶点, 采用反设直线; 如果直线过 y 轴的一个定点, 可以正设直线, 尤其是直线过椭圆的上、下焦点或上、下顶点, 采用正设直线.

题型 2 如何设点

思路提示

曲线的方程一般是已知或者很容易求出来的, 比较麻烦的是直线与曲线相交之后所产生的交点是不确定的, 所以就要假设点的坐标, 这就是设点. 在假设出点的坐标之后, 是否要求出(或表示出)点的坐标呢? 在某些情况下可以直接求出点的坐标, 再利用点在曲线上对坐标进行消元化简, 这就是设而求之的思想.

更多的时候是仅设出点的坐标, 在运算中并不把它们求出来, 而是利用韦达定理, 将形如“ $x_1 + x_2, x_1 x_2, y_1 + y_2, y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1$ ”的这类式子进行整体代换, 转化为关于直线斜率 k 和 m 的式子, 达到整体消元化简的目的, 这就是设而不求的思想.

方向 1 曲线上的单动点问题

如果曲线上有一个动点, 其他直线或者动点都是由此动点引发出来的, 那么我们可以设出这个动点的坐标, 并用此坐标表示其他的点或者直线, 这类问题我们称为单动点问题. 设点的方式常有: 直接设点、参数方程设点.

例 11.5.3 (2021 全国乙卷文 11) 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 点 P 在 C 上, 则 $|PB|$ 的最大值为().

A. $\frac{5}{2}$ B. $\sqrt{6}$ C. $\sqrt{5}$ D. 2

分析 可以假设 $P(x_0, y_0)$, 则 $|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2$, 又因为 P 在椭圆上, 故 $x_0^2 = 5 - 5y_0^2$, 消去 x_0 , 将问题转化为关于 y_0 的函数最值问题.

解析 解法一(直接设点): 设 $P(x_0, y_0)$, 因为 P 在椭圆上, 所以 $x_0^2 = 5 - 5y_0^2$. 由题意可知 $B(0, 1)$, 所以 $|PB|^2 = x_0^2 + (y_0 - 1)^2 = x_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1 = 5 - 5y_0^2 + y_0^2 - 2y_0 + 1 = -4y_0^2 - 2y_0 + 6$, 其中 $y_0 \in [-1, 1]$, 所以当 $y_0 = -\frac{1}{4}$ 时 $|PB|^2$ 取得最大值, 最大值为 $|PB|^2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$, 即 $|PB|$ 的最大值为 $\frac{5}{2}$, 故选 A.

解法二(参数方程设点): B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ 的上顶点, 所以 $B(0, 1)$, 点 P 在 C 上, 设 $P(\sqrt{5} \cos \theta, \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$, 所以 $|PB| = \sqrt{(\sqrt{5} \cos \theta - 0)^2 + (\sin \theta - 1)^2} = \sqrt{4 \cos^2 \theta - 2 \sin \theta + 2} = \sqrt{-4 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta + 6} = \sqrt{-4 \left(\sin \theta + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{25}{4}}$. 当 $\sin \theta = -\frac{1}{4}$ 时, $|PB|$ 取得最大值, 最大值为 $\frac{5}{2}$. 故选 A.

评注与拓展

现行教材虽然没有明确讲椭圆的参数方程, 但是在解题的时候往往能起到化繁为简的效果, 所以建议大家在学习的时候掌握参数方程的形式. 若椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 则椭圆上的点可以表示为 $P(a \cos \theta, b \sin \theta)$.

变式 (2021 全国乙卷理 11) 设 B 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的上顶点, 若 C 上的任意一点 P 都满足 $|PB| \leq 2b$, 则 C 的离心

率的取值范围是().

- A. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ B. $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$
C. $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ D. $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

例 11.5.4 (2021 全国乙卷文 20) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 到准线的距离为 2.

(1) 求 C 的方程;

(2) 已知 O 为坐标原点, 点 P 在 C 上, 点 Q 满足 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$, 求直线 OQ 斜率的最大值.

分析 第(2)问可知点 Q 坐标与点 P 坐标息息相关, 所以点 P 成为解题的核心要素, 因此我们设点 P 的坐标表示出 Q 的坐标, 并利用点 P 在抛物线上达到消元的目的.

解析 (1) 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, 由 p 的几何意义可知为 $p = 2$, 所以该抛物线的方程为 $y^2 = 4x$.

(2) 解法一(直接设点): 设 $Q(x_0, y_0)$, 则 $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF} = (9 - 9x_0, -9y_0)$, 所以 $P(10x_0 - 9, 10y_0)$.

由点 P 在抛物线上可得 $(10y_0)^2 = 4(10x_0 - 9)$, 即 $x_0 = \frac{25y_0^2 + 9}{10}$, 据此可得点

Q 的轨迹方程为 $y^2 = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25}$, 所以直线

OQ 的斜率 $k_{OQ} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{y_0}{\frac{25y_0^2 + 9}{10}} = \frac{10y_0}{25y_0^2 + 9}$.

当 $y_0 = 0$ 时, $k_{OQ} = 0$; 当 $y_0 \neq 0$ 时, $k_{OQ} = \frac{10}{25y_0 + \frac{9}{y_0}}$; 当 $y_0 > 0$ 时, 因为 $25y_0 + \frac{9}{y_0} \geq$

$2\sqrt{25y_0 \cdot \frac{9}{y_0}} = 30$, 此时 $0 < k_{OQ} \leq \frac{1}{3}$, 当且仅当 $25y_0 = \frac{9}{y_0}$, 即 $y_0 = \frac{3}{5}$ 时, 等号成立; 当 $y_0 < 0$ 时, $k_{OQ} < 0$.

综上所述, 直线 OQ 的斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

解法二(参数方程设点): 由题可设 $P(4t^2, 4t) (t > 0)$, $Q(x, y)$.

因为 $F(1, 0)$, $\overrightarrow{PQ} = 9\overrightarrow{QF}$, 所以 $(x - 4t^2, y - 4t) = 9(1 - x, -y)$, 于是 $\begin{cases} x - 4t^2 = 9(1 - x) \\ y - 4t = -9y \end{cases}$,

所以 $\begin{cases} 10x = 4t^2 + 9 \\ 10y = 4t \end{cases}$, 则直线 OQ 的斜率为 $\frac{y}{x}$

$= \frac{4t}{4t^2 + 9} = \frac{4}{4t + \frac{9}{t}} \leq \frac{4}{2\sqrt{4t \cdot \frac{9}{t}}} = \frac{1}{3}$, 当且仅

当 $4t = \frac{9}{t}$, 即 $t = \frac{3}{2}$ 时等号成立, 所以直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

解法三(设线+数形结合法): 同解法一得到点 Q 的轨迹方程为 $y^2 = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25}$.

设直线 OQ 的方程为 $y = kx$, 则当直线 OQ 与抛物线 $y^2 = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25}$ 相切时, 其斜率 k 取

到最值, 联立 $\begin{cases} y = kx \\ y^2 = \frac{2}{5}x - \frac{9}{25} \end{cases}$, 得 $k^2x^2 -$

$\frac{2}{5}x + \frac{9}{25} = 0$, 令其判别式 $\Delta = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 - 4k^2 \cdot$

$\frac{9}{25} = 0$, 解得 $k = \pm \frac{1}{3}$, 所以直线 OQ 斜率的最大值为 $\frac{1}{3}$.

评注与拓展

对于抛物线 $y^2 = 2px$ 而言, 因为有一个变量是一次项, 所以如果动点在抛物线上, 一般可以利用设点的方法解题, 然后利用抛物线方程消元, 转化为一个二次函数问题. 此外, 抛物线的参数方程形式也比较简单, 方程 $y^2 = 2px$ 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$, 因此也经常利用参数方程设点.

变式 (2024 北京海淀一模 19) 已知椭圆 G :

$x^2 + my^2 = m$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, A_1, A_2 分别是 G 的左、右顶点, F 是 G 的右焦点.

(1) 求 m 的值及点 F 的坐标;

(2) 设 P 是椭圆 G 上异于顶点的动点, 点 Q 在直线 $x = 2$ 上, 且 $PF \perp FQ$, 直线 PQ 与 x 轴交于点 M . 比较 $|MP|^2$ 与 $|MA_1| \cdot |MA_2|$ 的大小.

方向 2 曲线上的双动点问题

在更为复杂的情形中, 往往是由动直线与曲线相交产生动点, 或者两个动点可以连成一条直线. 在这类问题中, 单纯的设点或设线都难以简洁表达其中的位置和数量关系, 所以需要同时设点和设线. 至于动点的坐标是否要求解(或表达出来), 也可以根据具体的位置关系做出判断, 如果解出来就是设而求之, 如果不解出来就是设而不求.

类型 1 直线过原点

当直线过原点且与椭圆交于两点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由对称性可知 $x_1 = -x_2, y_1 = -y_2$, 若直线方程为 $y = kx$, 联立可得

$$\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{得 } (b^2 + a^2 k^2)x^2 = a^2 b^2, \text{即 } x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}.$$

所以 $x_1 x_2 = -\frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}$. 在这种情况下, 容易解出 x_1, x_2 , 所以经常会设点并求出点的坐标.

例 11.5.5 (2018 天津文 19) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右顶点为 A , 上顶点为 B .

已知椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $|AB| = \sqrt{13}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设直线 $l: y = kx (k < 0)$ 与椭圆交于 P, Q 两点, l 与直线 AB 交于点 M , 且点 P, M 均在第四象限. 若 $\triangle BPM$ 的面积是 $\triangle BPQ$ 面积的 2 倍, 求 k 的值.

分析 由两个三角形的面积关系可得出 x_M, x_P 的数量关系, 而 x_M, x_P 与直线 l 的斜率有关, 将 x_M 和 x_P 都用关于 k 的式子表示, 代入 x_M 与 x_P 的数量关系中, 即可得出 k 的值.

解析 (1) 设椭圆的焦距为 $2c$, 由已知得 $\frac{c^2}{a^2} =$

$\frac{5}{9}$, 又由 $a^2 = b^2 + c^2$, 可得 $2a = 3b$. 由 $|AB| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, 从而 $a = 3, b = 2$.

所以椭圆的方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(2) 如图 11.35 所示, 设点 P 的坐标为 (x_1, y_1) , 点 M 的坐标为 (x_2, y_2) , 由题意 $x_2 >$

$x_1 > 0$, 点 Q 的坐标

为 $(-x_1, -y_1)$. 由

$\triangle BPM$ 的面积是

$\triangle BPQ$ 面积的 2

倍, 可得 $|PM| =$

$2|PQ|$, 从而 $x_2 =$

$x_1 = 2[x_1 - (-x_1)]$, 即 $x_2 = 5x_1$.

易知直线 AB 的方程为 $2x + 3y = 6$, 由方程

组 $\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ y = kx \end{cases}$, 消去 y 可得 $x_2 = \frac{6}{3k+2}$.

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx \end{cases}$, 消去 y 可

得 $x_1 = \frac{6}{\sqrt{9k^2+4}}$.

由 $x_2 = 5x_1$, 可得 $\sqrt{9k^2+4} = 5(3k+2)$, 两边

平方整理得 $18k^2 + 25k + 8 = 0$, 解得 $k =$

$-\frac{8}{9}$ 或 $k = -\frac{1}{2}$.

当 $k = -\frac{8}{9}$ 时, $x_2 = -9 < 0$, 不合题意, 舍去;

当 $k = -\frac{1}{2}$ 时, $x_2 = 12, x_1 = \frac{12}{5}$, 符合题意.

故 k 的值为 $-\frac{1}{2}$.

变式 1 已知 F 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的一个焦

点, AB 为过椭圆中心的一条弦, 则 $\triangle ABF$ 面积的最大值为().

A. 6 B. 15 C. 20 D. 12

变式 2 已知椭圆 $x^2 + 2y^2 = 1$, 过原点的两条直线 l_1 和 l_2 分别与椭圆交于 A, B 和 C, D , 记得到的平行四边形 $ABCD$ 的面积为 S .

(1) 设 $A(x_1, y_1), C(x_2, y_2)$, 用 A, C 的坐

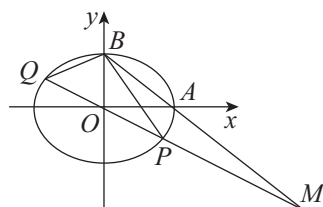


图 11.35

标表示点 C 到直线 l_1 的距离, 并证明 $S = 2|x_1y_2 - x_2y_1|$;

(2) 设 l_1 与 l_2 的斜率之积为 $-\frac{1}{2}$, 求面积 S 的值.

类型 2 直线过曲线上的已知点

当直线过曲线上的一个已知点 $A(x_1, y_1)$, 并与曲线交于另一个点 $B(x_2, y_2)$, 这时候把直线和曲线联立消去 y (或消去 x) 得到一个二次方程, 则二次方程中的一个根相当于是已知的, 可以利用韦达定理求出另一个根, 这种情况也经常会求出点的坐标, 即设而求之, 特别是当直线过曲线的顶点时, 表示另一个根会更简单.

例 11.5.6 (2023 天津 18) 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$) 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 右焦点为 F , 已知 $|A_1F| = 3, |A_2F| = 1$.

(1) 求椭圆方程及其离心率;

(2) 已知点 P 是椭圆上一动点 (不与端点重合), 直线 A_2P 交 y 轴于点 Q , 若 $\triangle A_1PQ$ 的面积是 $\triangle A_2FP$ 面积的二倍, 求直线 A_2P 的方程.

分析 在第 (2) 问中涉及两个三角形的面积关系, 一般通过转化为具有共同底边或高的两个三角形面积关系, 把面积的条件转化为线段长的条件. 由 $S_{\triangle A_2QA_1} = S_{\triangle A_1PQ} + S_{\triangle A_1A_2P}$

$= 2S_{\triangle A_2PF} + S_{\triangle A_1A_2P}$, 得 $2|y_Q| = 3|y_P|$, 所以求 P, Q 的纵坐标, 先设直线 A_2P 的方程, 与椭圆方程联立, 消去 y , 再由韦达定理可得 $x_{A_2} \cdot x_P$, 从而得到 P 点和 Q 点坐标, 即可得到关于 k 的方程, 解出 k , 代入直线 A_2P 的方程即可得到答案.

解析 (1) 如图 11.36 所

示, 由题意得

$$\begin{cases} a+c=3 \\ a-c=1 \end{cases}, \text{解得 } a =$$

$2, c = 1$, 所以 $b =$

$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, 故椭

圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} =$

1 , 离心率为 $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

(2) 由题意得, 直线 A_2P 斜率存在, 由椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 可得 $A_2(2, 0)$, 设直线 A_2P 的方程为 $y = k(x - 2)$, 联立方程组

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x - 2) \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 整理得 } (3 + 4k^2)x^2 -$$

$16k^2x + 16k^2 - 12 = 0$, 由韦达定理得 $x_{A_2} \cdot$

$x_P = \frac{16k^2 - 12}{3 + 4k^2}$, 所以 $x_P = \frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}$, 则

$P\left(\frac{8k^2 - 6}{3 + 4k^2}, -\frac{12k}{3 + 4k^2}\right), Q(0, -2k)$.

所以 $S_{\triangle A_2QA_1} = \frac{1}{2} \times 4 \times |y_Q|, S_{\triangle A_2PF} = \frac{1}{2} \times$

$1 \times |y_P|, S_{\triangle A_1A_2P} = \frac{1}{2} \times 4 \times |y_P|$, 所以

$S_{\triangle A_2QA_1} = S_{\triangle A_1PQ} + S_{\triangle A_1A_2P} = 2S_{\triangle A_2PF} + S_{\triangle A_1A_2P}$, 故 $2|y_Q| = 3|y_P|$, 即 $2|-2k| =$

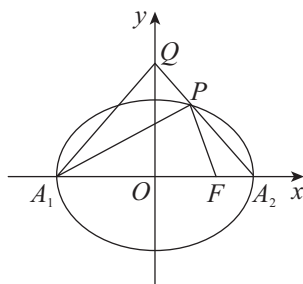


图 11.36

$3\left|-\frac{12k}{3+4k^2}\right|$, 解得 $k = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}$, 所以直线

A_2P 的方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{6}}{2}(x-2)$.

变式 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左焦点为 F , 上顶点为 B . 已知椭圆的短轴长为 4, 离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

(1) 求椭圆的方程;

(2) 设点 P 在椭圆上, 且异于椭圆的上、下顶点, 点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点, 点 $N(0, -1)$, 且 $OP \perp MN$ (O 为原点), 求直线 PB 的斜率.

类型3 任意的直线与曲线交于两点

如果一条不过曲线上定点的直线与曲线交于 A, B 两点, 一般来说可以同时设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ 和设直线 $y = kx + m$, 将直线与曲线联立后消去 y , 得到关于 x 的二次方程, 再利用韦达定理表示出 $x_1 + x_2, x_1x_2$, 采用设而不求的思想整体代换求解问题.

例 11.5.7 (2023 全国乙卷理 20) 已知椭圆

$C: \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$, 点

$A(-2, 0)$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(-2, 3)$ 的直线交 C 于 P, Q 两点, 直线 AP, AQ 与 y 轴的交点分别为 M, N , 证明: 线段 MN 中点为定点.

分析 思路一: 直线 PQ 虽然过点 $(-2, 3)$, 但是这个点不在椭圆上, 所以可以设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ 和直线 $PQ: y - 3 = k(x + 2)$, 再利用两点式直线方程表示出 AP, AQ , 令 $x = 0$ 得到 M, N 及其中点的坐标 (分别含有 x_1, x_2, y_1, y_2), 利用韦达定理整体代入消元化简, 求出定值. 思路二: 注意到 PQ 虽然不过椭圆上的定点, 但是 AP, AQ 都过椭圆的左顶点, 所以可以分别设出 AP, AQ 的直线方程, 再令 $x = 0$ 得到 M, N 的坐标 (与 P, Q 坐标相关), 利用韦达定理求出 P, Q 坐标 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 再利用 $(-2, 3), P, Q$ 三点共线消参, 证明 M, N 的中点坐标是定值.

解析 (1) 依题意得 $b = 2, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 则 $b^2 = a^2 - c^2 = 4$, 得 $a = 3, c = \sqrt{5}$, 故曲线 C 的方程为 $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1$.

(2) **解法一 (设而不求):**

如图 11.37 所示, 设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$, 直线 $PQ: y - 3 = k(x + 2), AP: y =$

$\frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$, 令 $x = 0$, 得

$y_M = \frac{2y_1}{x_1 + 2}$ $AQ: y = \frac{y_2}{x_2 + 2} \cdot$

$(x + 2)$, 令 $x = 0$,

得 $y_N = \frac{2y_2}{x_2 + 2}$.

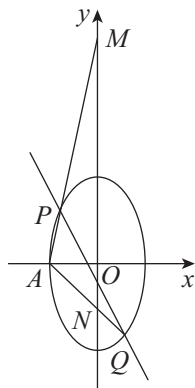


图 11.37

MN 的中点坐标为 $(0, \frac{y_1}{x_1+2} + \frac{y_2}{x_2+2})$, 联立直

线 PQ 的方程和椭圆方程得 $\begin{cases} y=k(x+2)+3 \\ 9x^2+4y^2=36 \end{cases}$,

消 y 建立关于 x 的一元二次方程, $9x^2 + 4[k(x+2)+3]^2 - 36 = 0$, 即 $(4k^2+9)x^2 + (16k^2+24k)x + 16k^2 + 48k = 0$, 得

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{16k^2+24k}{4k^2+9} \\ x_1x_2 = \frac{16k^2+48k}{4k^2+9} \end{cases} \cdot \text{又 } \frac{y_1}{x_1+2} + \frac{y_2}{x_2+2}$$

$$= \frac{k(x_1+2)+3}{x_1+2} + \frac{k(x_2+2)+3}{x_2+2} = 2k+3 \left(\frac{1}{x_1+2} + \frac{1}{x_2+2} \right) = 2k+3 \times \frac{x_1+x_2+4}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4} = 2k +$$

$$\frac{-16k^2-24k+16k^2+36}{4k^2+9} = 3. \text{ 所以线}$$

段 MN 过定点 (0, 3).

解法二 (设而求之): 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, 记 $T(-2, 3)$, 由题意可知, 直线 AP, AQ 斜率都分别存在, 且 $A(-2, 0)$.

设 AP 的方程为 $y=k_1(x+2)$, 令 $x=0$, 则 $y_1=2k_1$, 即 $M(0, 2k_1)$. 再设 AQ 的方程为 $y=k_2(x+2)$, 令 $x=0$, 则 $y_2=2k_2$, 即 $N(0, 2k_2)$, 要证明线段 MN 中点为定点, 只要证明 k_1+k_2 为定值.

$$\text{由 } \begin{cases} y=k_1(x+2) \\ \frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{4} = 1 \end{cases}, \text{ 消去 } y \text{ 并整理得 } (4k_1^2 +$$

$9)x^2 + 16k_1^2x + 16k_1^2 - 36 = 0$, 由韦达定理可

$$\text{知 } -2x_1 = \frac{16k_1^2 - 36}{4k_1^2 + 9}, \text{ 即 } x_1 = \frac{18 - 8k_1^2}{4k_1^2 + 9}, \text{ 所以}$$

$$y_1 = k_1(x_1 + 2) = \frac{36k_1}{4k_1^2 + 9}, \text{ 即 } P\left(\frac{18 - 8k_1^2}{4k_1^2 + 9}, \frac{36k_1}{4k_1^2 + 9}\right).$$

因为 AP, AQ 都过 $A(-2, 0)$, 只有斜率不同, 所以同理可得 $Q\left(\frac{18 - 8k_2^2}{4k_2^2 + 9}, \frac{36k_2}{4k_2^2 + 9}\right)$, 则

$$\overrightarrow{TP} = \left(\frac{18 - 8k_1^2}{4k_1^2 + 9} + 2, \frac{36k_1}{4k_1^2 + 9} - 3\right) = \left(\frac{36}{4k_1^2 + 9}, \frac{36k_1 - 12k_1^2 - 27}{4k_1^2 + 9}\right), \text{ 同理 } \overrightarrow{TQ} = \left(\frac{36}{4k_2^2 + 9}, \frac{36k_2 - 12k_2^2 - 27}{4k_2^2 + 9}\right).$$

又因为 T, P, Q 三点共线, 所以 $\overrightarrow{TP} \parallel \overrightarrow{TQ}$, 即 $\frac{36}{4k_1^2 + 9} \cdot \frac{36k_2 - 12k_2^2 - 27}{4k_2^2 + 9} =$

$$\frac{36}{4k_2^2 + 9} \cdot \frac{36k_1 - 12k_1^2 - 27}{4k_1^2 + 9}, \text{ 化简得 } 3(k_1 - k_2) = k_1^2 - k_2^2 = (k_1 + k_2)(k_1 - k_2), \text{ 又 } k_1 \neq k_2, \text{ 故 } k_1 + k_2 = 3, \text{ 所以线段 MN 过定点 } (0, 3).$$

评注与拓展

1. 从本题中可以看出, 在具体问题中设点与设线, 设而求之与设而不求并非对立关系, 有些题目可以兼而用之.

2. 在解法二中还是用了两个重要的计算技巧, 减少了计算量:

①技巧一“同理可得”: 当两条直线都过同一个点, 只有斜率不同时, 只需要联立一次, 第二次的时候仅需要把第一次的结果由 k_1 替换为 k_2 即可, 特别是如果两条直线垂直, 我们只需要把 k 换成 $-\frac{1}{k}$ 即可.

②技巧二“向量处理三点共线”: 我们当然可以用 $k_{TP} = k_{TQ}$ 来处理 T, P, Q 三点共线, 但是利用斜率的方式计算量偏大, 容易算错, 借助向量的方式可以有效减少运算量.

变式 已知 $M(1,1)$ 是抛物线 $C: y^2 = x$ 上一点, 直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 使得 $\angle AMB = 90^\circ$, 则原点到直线 l 的距离的最大值为_____.

方向 3 三点共线

在处理三点共线问题中, 常见于两点 A, B 在曲线上, 点 D 在坐标轴上, 当然 D 也可能不在坐标轴上. 为了表示 A, B, D 三点共线, 可以采用斜率 $k_{AB} = k_{AD} = k_{BD}$, 也可以采用向量形式 $\overrightarrow{AB} = (x_1, y_1), \overrightarrow{AD} = (x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1$. 无论哪种方式, 都需要用到点的坐标, 所以在处理三点共线问题中经常采用设点方法解题.

例 11.5.8 如图 11.38

所示, 已知 F 为抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点, 过点 F 作斜率为 k_1 的直线交抛物线于 A, B 两点, 点 $M(4,0)$, 延长 AM , BM 交抛物线于 C, D

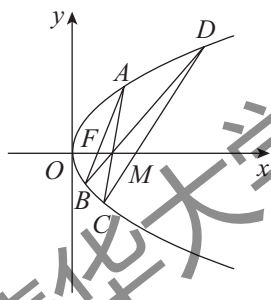


图 11.38

两点, 直线 CD 的斜率为 k_2 . 则 $\frac{k_1}{k_2} =$ _____.

分析 k_1 是直线 AB 的斜率, 所以与 A, B 的坐标有关, k_2 与 C, D 的坐标有关, 利用 B, M, D 和 A, M, C 三点共线, 将 C, D 的坐标转化为 A, B 的坐标, 减少变量后整体约分求出最值.

解析 设点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$.

解法一(韦达法): 设 BD 的直线方程为 $x =$

$t_1 y + 4$, 联立 $\begin{cases} x = t_1 y + 4 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 整理得 $y^2 -$

$4t_1 y - 16 = 0$, 所以 $y_2 y_4 = -16$, 即 $y_4 = -\frac{16}{y_2}$.

同理可得 $y_3 = -\frac{16}{y_1}$, 所以 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

$\frac{x_3 - x_4}{y_3 - y_4} = \frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{4} - \frac{y_2^2}{4}} \cdot \frac{\frac{y_3^2}{4} - \frac{y_4^2}{4}}{y_3 - y_4} = \frac{y_3 + y_4}{y_1 + y_2}$, 又因

为 A, F, B 三点共线, 所以设 AB 的直线方程为 $x = ty + 1$, 联立 $\begin{cases} x = ty + 1 \\ y^2 = 4x \end{cases}$, 消 x 得

$y^2 - 4ty - 4 = 0$, 所以 $y_1 + y_2 = 4t, y_1 y_2 = -4$, 故 $\frac{y_3 + y_4}{y_1 + y_2} = \frac{-\frac{16}{y_1} - \frac{16}{y_2}}{y_1 + y_2} = -\frac{16}{y_1 y_2} = 4$.

解法二(点差法): 由 $y_1^2 = 4x_1, y_2^2 = 4x_2$, 利用点差法可得 $y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4(x_1 - x_2)$, 所以 $k_{AB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} =$

$\frac{4}{y_1 + y_2}$, 即 $k_1 = \frac{4}{y_1 + y_2}$. 同理可得 $k_2 =$

$\frac{4}{y_3 + y_4}, k_{AC} = \frac{4}{y_1 + y_3}, k_{BD} = \frac{4}{y_2 + y_4}$, 所以

$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{4}{y_1 + y_2}}{\frac{4}{y_3 + y_4}} = \frac{y_3 + y_4}{y_1 + y_2}$. 又因为 A, M, C 三

点共线, 所以 $k_{AC} = k_{AM}$, 即 $\frac{4}{y_1 + y_3} = \frac{y_1}{x_1 - 4}$

$= \frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} - 4}$, 整理得 $y_1 y_3 = -16$, 即 $y_3 = -\frac{16}{y_1}$, 同理因为 B, M, D 三点共线, 可得

$y_2 y_4 = -16$, 即 $y_4 = -\frac{16}{y_2}$, 于是 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_3 + y_4}{y_1 + y_2}$

$$= \frac{-\frac{16}{y_1} - \frac{16}{y_2}}{y_1 + y_2} = -\frac{16}{y_1 y_2}.$$

因为 A, F, B 三点共线, 所以 $k_{AF} = \frac{y_1}{x_1 - 1} =$

$$\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{4} - 1} = \frac{4y_1}{y_1^2 - 4} = k_{AB}, \text{ 则 } \frac{4y_1}{y_1^2 - 4} = \frac{4}{y_1 + y_2}, \text{ 得}$$

$$y_1 y_2 = -4, \text{ 故 } \frac{k_1}{k_2} = 4.$$

变式 如图 11.39 所示,

过点 $M(a, 0)$ 作直线 l_1, l_2 与抛物线 $E: y^2 = 4x$ 相交, 其中 l_1 与 E 交于 A, B 两点, l_2 与 E 交于 C, D 两点, 直线 AD 过 E 的焦点

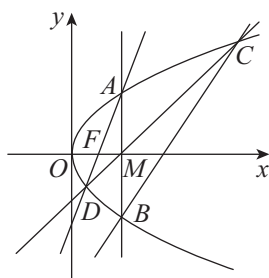


图 11.39

若 AD, BC 的斜率为 k_1, k_2 满足 $k_1 = 3k_2$, 则实数 a 的值为_____.

例 11.5.9 (2020 北京房山一模 20) 已知椭圆

C 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 长轴的两个端点分别为 $A(-2, 0), B(2, 0)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 如图 11.40 所示, 过点 $(1, 0)$ 的直线与椭圆 C 交于 M, N (不与 A, B 重合) 两点, 直线 AM 与直线 $x=4$ 交于

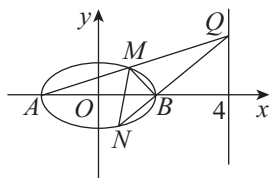


图 11.40

点 Q . 证明: $\frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle MBQ}} = \frac{|BN|}{|BQ|}$.

分析 根据题意, 只要证明 N, B, Q 三点共线即可. 可以判断直线斜率不为 0, 所以采用反设直线可以避免分类讨论.

解析 (1) 由长轴的两个端点分别为 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 可得 $a=2$, 由离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 可

得 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c = \sqrt{3}$. 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 解得

$b=1$. 故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

(2) 设直线 l 的方程为 $x = my + 1, M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 1 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 + 2my - 3 = 0,$$

$$\text{则 } y_1 + y_2 = -\frac{2m}{m^2 + 4}, y_1 \cdot y_2 = \frac{-3}{m^2 + 4}. k_{AM}$$

$$= \frac{y_1}{x_1 + 2}, \text{ 直线 } AM \text{ 的方程为 } y = \frac{y_1}{x_1 + 2} \cdot$$

$$(x + 2), \text{ 所以 } Q\left(4, \frac{6y_1}{x_1 + 2}\right).$$

解法一 (证明斜率相等): 因为 $k_{NB} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 2} =$

$$\frac{\frac{6y_1}{x_1 + 2} - 0}{\frac{4}{x_1 + 2} - 2} = \frac{6y_1}{x_1 + 2} \cdot \frac{1}{4 - 2(x_1 + 2)} = \frac{3y_1}{x_1 + 2}, k_{NB} =$$

$$k_{BQ} = \frac{y_2}{x_2 - 2} - \frac{3y_1}{x_1 + 2} = \frac{y_2(my_1 + 3) - 3y_1(my_2 - 1)}{(x_2 - 2)(x_1 + 2)}$$

$$= \frac{-2my_1y_2 + 3(y_1 + y_2)}{(x_2 - 2)(x_1 + 2)} = 0. \text{ 所以 } N, B, Q$$

三点共线, 故 $\frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle MBQ}} = \frac{|BN|}{|BQ|}$.

解法二 (利用向量共线): 因为 $\overrightarrow{BQ} =$

$$\left(2, \frac{6y_1}{x_1 + 2}\right) = \left(2, \frac{6y_1}{my_1 + 3}\right), \overrightarrow{BN} = (x_2 - 2,$$

$$y_2) = (my_2 - 1, y_2), \text{ 且 } 2y_2 - \frac{6my_1y_2}{my_1 + 3} =$$

$$\frac{6y_1}{my_1 + 3} = \frac{2my_1y_2 + 6y_2 - 6my_1y_2 + 6y_1}{my_1 + 3} =$$

$$\frac{6(y_1+y_2)-4my_1y_2}{my_1+3}=0, \text{ 所以 } N, B, Q \text{ 三}$$

$$\text{点共线, 故 } \frac{S_{\triangle MBN}}{S_{\triangle MBQ}} = \frac{|BN|}{|BQ|}.$$

评注与拓展

如果能判断直线斜率不为0, 采用反设直线; 如果能判断直线斜率一定存在, 可以采用正设直线. 采用合适的方式可以有效避免分类讨论. 在表示出相关点的坐标之后, 证明三点共线, 如果点的坐标不是很复杂, 可以采用斜率相等证明; 如果点的坐标较为复杂, 也可以采用向量共线的方法证明.

变式 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左

焦点为 $(-1, 0)$, 且 $a = \sqrt{2}b$.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 A, B , 设点 $P(-2, 0)$, 直线 PA, PB 分别与椭圆 E 交于不同的点 M, N , 若 M, N 和点 $Q(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ 共线, 求 k 的值.

小结

设点的技巧

(1) 设点与设线是为了将题目的条件凸显出来采用的手段, 在一道题目中设点和设线并非完全对立, 很多题目既可以从设线入

手, 也可以从设点入手, 还可以同时考虑设点和设线.

(2) 在什么条件下重点考虑设点, 这个点的坐标是需要设而求之, 还是设而不求呢?

① 如果是单动点问题, 其余的点或者线的产生都是由于这个点引起的, 可以考虑设点, 并用点的坐标表示其他点或线, 最终利用约分等手段消除这个点的影响, 即设而不求得题目结果.

② 如果直线过原点或者直线过曲线上的一个已知点, 这个时候比较方便地表示出直线与曲线的交点坐标, 所以可以设而求之.

③ 如果动直线与曲线交于两点, 此时既设点也设线, 并利用韦达定理得到点的横坐标的关系, 在后面的计算中利用设而不求, 整体代换的方法解题.

(3) 证明三点共线问题或者利用三点共线的条件, 一般是设出点的坐标, 再利用斜率相等、向量共线或者第三点在直线上证明结论.

题型3 韦达定理非对称结构的处理技巧

思路提示

在直线与曲线有两个交点的情形中, 我们将直线与曲线联立, 并利用韦达定理表示两个交点横坐标的关系, 并把 $x_1 + x_2, x_1 x_2$ 整体代换后求解或者证明相关结论. 这是针对 x_1, x_2 的对称结构的常规处理方式. 在有些问题中, 可能会涉及 x_1, x_2 的非对称结构, 无法直接使用韦达定理代换. 解决这种问题的一般思想是通过代数变换配凑出对称结构, 或者采用局部消元整体约分的思想解题. 下面我们看看在具体问题中如何应用.

例 11.5.10 已知点 F 为椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

的右焦点, A, B 分别为其左、右顶点, 过 F 作直线 l 与椭圆交于 M, N 两点(不与 A, B 重合), 记直线 AM 与 BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $\frac{k_1}{k_2}$ 为定值.

分析 此题核心条件为直线 AM 与 BN 的斜率 k_1, k_2 , 显然要设点, 不妨设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 而由题可知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 因此 $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2}$. 从而目标信息 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)}$, 要证明其值为定值. 从目标信息的形式来看, 用 x 或 y 表示并无差异, 考虑到直线不与 x 轴重合, 故采用反设直线要方便些, 因此设 $l: x = ty + 1$, 通过直线替换后可得 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} = \frac{y_1(ty_2 - 1)}{y_2(ty_1 + 3)}$
 $= \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2}$, 出现了韦达定理结构之外的形式, 即落单的 y_1 和 $3y_2$, 像此类结构, 一般被称为“非对称韦达定理”结构.

解析 不妨设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 设 $l: x =$

$$ty + 1, \text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = ty + 1 \end{cases}, \text{消去 } x \text{ 得 } (4 + 3t^2)y^2 +$$

$$6ty - 9 = 0, \text{易知 } \Delta > 0, \text{则} \begin{cases} y_1 + y_2 = -\frac{6t}{4 + 3t^2} \\ y_1y_2 = -\frac{9}{4 + 3t^2} \end{cases}.$$

由题意可知 $A(-2, 0), B(2, 0)$, 因此 $k_1 =$

$$\frac{y_1}{x_1 + 2}, k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2}, \text{所以 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} =$$

$$\frac{y_1(ty_2 - 1)}{y_2(ty_1 + 3)} = \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2}.$$

策略一: 和积转换——找出韦达定理中的两根之和与两根之积的关系

注意到 $y_1 + y_2, y_1y_2$ 分母一样, 分子只相差一个倍数, 所以可得 $ty_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2)$. 一般性的方法是设 $y_1y_2 = \lambda(y_1 + y_2) + \mu \Rightarrow$

$$-\frac{9}{4 + 3t^2} = \lambda \left(-\frac{6t}{4 + 3t^2} \right) + \mu \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{2} \\ \mu = 0 \end{cases}, \text{所以}$$

$$ty_1y_2 = \frac{3}{2}(y_1 + y_2), \text{因此 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) - y_1}{\frac{3}{2}(y_1 + y_2) + 3y_2}, \text{即可得 } \frac{k_1}{k_2} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}y_1 + \frac{3}{2}y_2}{\frac{3}{2}y_1 + \frac{9}{2}y_2} = \frac{1}{3}, \text{为定值.}$$

策略二: 配凑半代换——对能代换的部分进行韦达代换, 剩下的部分进行配凑

半代换也有一定技巧, 就是配凑. 比如题中

$$\text{的 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2}, \text{若只代换 } y_1y_2, \text{得 } \frac{k_1}{k_2} =$$

$$\frac{-\frac{9t}{4 + 3t^2} - y_1}{-\frac{9t}{4 + 3t^2} + 3y_2}, \text{依然无法得到定值, 因为落}$$

单的 y_1 和 $3y_2$ 不一致, 而此时为分式结构, 分式结构的定值需要满足上下一致, 且对应成比例, 抓住这个核心, 可以对 y_1 和 $3y_2$ 其中某个进行配凑使其能构成比例形式. 以分子为例, 分子要出现 y_2 形式, 可将分子整理

$$\text{为 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{ty_1y_2 - (y_1 + y_2) + y_2}{ty_1y_2 + 3y_2}, \text{从结构上可以}$$

猜测定值为 $\frac{1}{3}$, 不妨将韦达定理中 $y_1y_2, y_1 +$

$$y_2 \text{ 代入, 得 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{-\frac{9t}{4+3t^2} + \frac{6t}{4+3t^2} + y_2}{-\frac{9t}{4+3t^2} + 3y_2} = \frac{-\frac{3t}{4+3t^2} + y_2}{-\frac{9t}{4+3t^2} + 3y_2} = \frac{1}{3}, \text{ 得证. 分母可作类似处理, 得 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{ty_1y_2 - y_1}{ty_1y_2 + 3y_2} = \frac{-\frac{9}{4+3t^2} - y_1}{-\frac{27t}{4+3t^2} - 3y_1} =$$

$\frac{1}{3}$. 上面使用的是纵坐标的配凑半代换, 借助横坐标的配凑半代换亦可证明, 可自行尝试.

策略三: 先猜后证

可以先找一个特殊情况先得到该定值, 进而再证明其他情形也为该值. 显然先考虑直线 l 斜率不存在时的情形, 此时 $M(1, \frac{3}{2})$, $N(1, -\frac{3}{2})$ 或 $M(1, -\frac{3}{2})$, $N(1, \frac{3}{2})$, 对应为 $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = \frac{3}{2}$ 或 $k_1 = -\frac{1}{2}, k_2 = -\frac{3}{2}$, 此时均有 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$, 为定值.

当直线 l 斜率存在时, 不妨就正设直线 $l: y$

$$= k(x-1), \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases}, \text{ 消 } y \text{ 得 } (3+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4(k^2-3) = 0, \text{ 易知 } \Delta > 0,$$

$$\text{则 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{3+4k^2} \\ x_1x_2 = \frac{4(k^2-3)}{3+4k^2} \end{cases}, \text{ 此时目标信息 } \frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3},$$

可采用分析法证明. 要证 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$, 即证 $3k_1 =$

k_2 , 也即 $\frac{3y_1}{x_1+2} = \frac{y_2}{x_2-2}$, 即 $\frac{3k(x_1-1)}{x_1+2} = \frac{k(x_2-1)}{x_2-2}$, 也即 $3(x_1-1)(x_2-2) = (x_2-1)(x_1+2)$, $2x_1x_2 - 5(x_1+x_2) + 8 = 0$, 此时为韦达定理的结构, 代入韦达定理, 即证 $2 \times \frac{4(k^2-3)}{3+4k^2} - 5 \times \frac{8k^2}{3+4k^2} + 8 = 0$, 也即 $8(k^2-3) - 40k^2 + 8(3+4k^2) = 0$, 显然成立, 所以恒有 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$, 为定值.

上述先猜后证采用的是正设直线, 借此我们也说说正设直线时采用和积关系处理和配凑半代换的处理策略. 目标信息直线代换后得

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k(x_1-1)(x_2-2)}{k(x_2-1)(x_1+2)} = \frac{(x_1-1)(x_2-2)}{(x_2-1)(x_1+2)} = \frac{x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 2}{x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 2}.$$

若采用和积关系处理策略, 观察韦达定理不难发现, 此时和积关系没有反设直线那么直观, 那么我们该如何寻找其关系呢?

一方面, 可以采用待定系数, 设 $x_1x_2 = \lambda(x_1+x_2) + \mu$, 求解 λ, μ 得出和积关系. 如

$$\text{此处设 } x_1x_2 = \lambda(x_1+x_2) + \mu, \text{ 即 } \frac{4(k^2-3)}{3+4k^2}$$

$$= \lambda \frac{8k^2}{3+4k^2} + \mu = \frac{(8\lambda+4\mu)k^2+3\mu}{3+4k^2}, \text{ 解得 } \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2} \\ \mu = -4 \end{cases}, \text{ 即 } x_1x_2 = \frac{5}{2}(x_1+x_2) - 4. \text{ 另一方面, 可先对和积形式分别作分离常数处理}$$

$$\begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{6}{3+4k^2} + 2 \\ x_1x_2 = -\frac{15}{3+4k^2} + 1 \end{cases}, \text{ 那么 } x_1x_2 = \frac{5}{2}(x_1+x_2) - 4, \text{ 如此也能得到和积关系. 代入目标}$$

$x_2) - 4$, 如此也能得到和积关系. 代入目标

信息, 得 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_1 x_2 - 2x_1 - x_2 + 2}{x_1 x_2 - x_1 + 2x_2 - 2} = \frac{\frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 4 - 2x_1 - x_2 + 2}{\frac{5}{2}(x_1 + x_2) - 4 - x_1 + 2x_2 - 2} = \frac{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2}{\frac{3}{2}x_1 + \frac{9}{2}x_2 - 6} = \frac{1}{3}$, 得证.

都到这了, 那么“配凑半代换”也试一试好了, 目标信息 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_1 x_2 - 2x_1 - x_2 + 2}{x_1 x_2 - x_1 + 2x_2 - 2}$, 观察到此时分母中有落单的 x_1, x_2 , 先把分母配凑成 $x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 3x_2 - 2$, 此时分母中落单的只有 x_2 , 且系数为正. 因分子可配凑成 $x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + x_2 + 2$, 从而 $\frac{k_1}{k_2} = \frac{x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + x_2 + 2}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 3x_2 - 2}$, 再代入韦达定理, $\frac{k_1}{k_2} = \frac{\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2} - \frac{16k^2}{3+4k^2} + x_2 + 2}{\frac{4(k^2-3)}{3+4k^2} - \frac{8k^2}{3+4k^2} + 3x_2 - 2} = \frac{-\frac{3}{3+4k^2} + x_2 - 1}{-\frac{9}{3+4k^2} + 3x_2 - 3} = \frac{1}{3}$, 得证.

评注与拓展

策略一的“和积转换”以及策略二的“配凑半代换”可以说是“非对称韦达定理”的通法, 而猜证结合也是探究类题型的有效处理手段. 除此之外, 对于不同的结构和形式, 还有一些其他对应的处理技法, 考虑到通用性, 这里只重点讲解“猜证结合”与“和积转换”和“配凑半代换”.

通过上述例题我们也能再次感受到, 不同的参数引入和直线假设, 对后续的计算处理将产生不同的影响, 计算量也存在较大差异.

变式① 已知椭圆 E 的左、右焦点分别为 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0) (c > 0)$. 点 M 在 E 上, $MF_2 \perp F_1F_2$, $\triangle MF_1F_2$ 的周长为 $6 + 4\sqrt{2}$, 面积为 $\frac{1}{3}c$.

(1) 求 E 的方程.

(2) 设 E 的左、右顶点分别为 A, B , 过点 $(\frac{3}{2}, 0)$ 的直线 l 与 E 交于 C, D 两点, 记直线 AC 的斜率为 k_1 , 直线 BD 的斜率为 k_2 , 则 _____. (从以下①②③三个问题中任选一个填到横线上并给出解答).

① 求直线 AC 和 BD 交点的轨迹方程;

② 是否存在实常数 λ , 使得 $k_1 = \lambda k_2$ 恒成立;

③ 过点 C 作关于 x 轴的对称点 C' , 连接 C', D 得到直线 l_1 , 试探究: 直线 l_1 是否恒过定点.

变式② (2023 新高考全国 II 卷 21) 已知双曲线 C 的中心为坐标原点, 左焦点为 $(-2\sqrt{5}, 0)$, 离心率为 $\sqrt{5}$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 记 C 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过点

$(-4,0)$ 的直线与 C 的左支交于 M, N 两点, M 在第二象限, 直线 MA_1 与 NA_2 交于点 P . 证明: 点 P 在定直线上.

题型 4 解析几何中的“同构”

思路提示

同构法是处理解析几何对称问题的有力武器. 同构思想的介入, 使得解析几何中对称问题、双切线问题、平行线截线段成比例问题以及结构相同或相似问题的求解过程变得简单明了. 比较常见的是两个点的坐标如果满足同一个方程, 则这两个点同构, 或者两条直线的斜率满足同一个方程, 则两个斜率同构. 我们从一道经典的题目说起.

例 11.5.11 如图 11.41

所示, 圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 点 P 为直线 $l: x = 4$ 上一动点, 过点 P 引圆 C 的两条切线, 切点分别为 A, B .

(1) 求证: 直线 AB 恒过

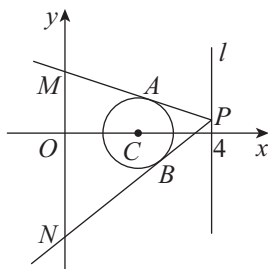


图 11.41

定点, 并求出该定点 Q 的坐标;

(2) 若两条切线 PA, PB 与 y 轴分别交于 M, N 两点, 求 $\triangle QMN$ 面积的最小值.

分析 第(1)问就是求圆的切点弦方程, 在第 10 章我们已经见过这类问题, 一般可以从四点共圆, 或者同构方程解题, 如果是选择题或者填空题也可以直接用切点弦方程得到结果.

解析 (1) **解法一 (四点共圆)**: 由题意可知 $\triangle PAB$ 外接圆即以 CP 为直径的圆, 而 $P(4, t), C(2, 0)$, 故所求方程为 $(x-4)(x-2) + (y-t)y = 0$, 即 $x^2 + y^2 - 6x - ty + 8 = 0$ ①. 圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$, 即 $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ ②. ②-①得 $2x + ty - 5 = 0$, 即为直线 AB 的方程, 所以直线 AB 恒过定点 $Q(\frac{5}{2}, 0)$.

解法二 (同构方程): 设 $P(4, t), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 因为 $CA \perp PA$, 且 A 在

圆上, 所以 $\begin{cases} (x_1-2)^2 + y_1^2 = 1 \\ \frac{y_1-0}{x_1-2} \cdot \frac{y_1-t}{x_1-4} = -1 \end{cases}$, 即

$$\begin{cases} x_1^2 - 4x_1 + y_1^2 + 3 = 0 \\ x_1^2 - 6x_1 - y_1 t + y_1^2 + 8 = 0 \end{cases}$$

两式相减得 $2x_1 + ty_1 - 5 = 0$, 同理可得 $2x_2 + ty_2 - 5 = 0$, 所以 A, B 坐标都满足方程 $2x + ty - 5 = 0$, 则直线 AB 的方程为 $2x + ty - 5 = 0$, 故直线 AB 恒过定点 $Q(\frac{5}{2}, 0)$.

(2) 设直线 AP 与 BP 的斜率分别为 k_1, k_2 , 我们会发现 AP 与 BP 都过点 P , 只有斜率不同, 所以可以不区分 k_1, k_2 , 先研究一条直

线与圆相切要满足的关系.

假设直线 $y-t=k(x-4)$ 与圆 C 相切, 所以

$$\frac{|t-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1, \text{ 即 } 3k^2-4tk+t^2-1=0, \text{ 则 } k_1,$$

k_2 是上述关于 k 的方程的两个根, 所以

$$k_1+k_2=\frac{4t}{3}, k_1 \cdot k_2=\frac{t^2-1}{3}, \text{ 而 } y_M=t-4k_1,$$

$$y_N=t-4k_2, \text{ 故 } |MN|=4|k_1-k_2|=$$

$$4\sqrt{(k_1+k_2)^2-4k_1 \cdot k_2}=4 \times \frac{\sqrt{4t^2+12}}{3} \geq$$

$$\frac{8\sqrt{3}}{3}, (S_{\triangle MNQ})_{\min}=\frac{1}{2} \times \frac{8\sqrt{3}}{3} \times \frac{5}{2}=\frac{10\sqrt{3}}{3}, \text{ 所}$$

以 $\triangle QMN$ 面积的最小值为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$.

评注与拓展

在过同一点作圆锥曲线的双切线问题中, 由于两个切点和两条切线的地位相同, 所以切点和切线隐含了同构的关系. 本题圆的两条切线 PA, PB 的斜率 k_1, k_2 都满足

$$\text{圆心到切线的距离为 } 1, \text{ 所以 } \frac{|t-2k|}{\sqrt{1+k^2}}=1,$$

即 $3k^2-4tk+t^2-1=0$, 这是同构方程. 韦达化使问题轻松得以解决.

变式① 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{a^2} = 1 (a > 0)$, 点

P, Q, R 在椭圆 C 上, 点 R 到直线 OP, OQ

的距离均等于 $\frac{a}{2}$. 直线 OP, OQ 的斜率分别为 k_1, k_2 . 求 $k_1 k_2$ 的值.

变式② (2021 全国甲卷理 20) 抛物线 C 的顶点为坐标原点 O , 焦点在 x 轴上, 直线 $l: x=1$ 交 C 于 P, Q 两点, 且 $OP \perp OQ$. 已知点 $M(2, 0)$, 且 $\odot M$ 与 l 相切.

(1) 求 $C, \odot M$ 的方程;

(2) 设 A_1, A_2, A_3 是 C 上的三个点, 直线 $A_1 A_2, A_1 A_3$ 均与 $\odot M$ 相切, 判断直线 $A_2 A_3$ 与 $\odot M$ 的位置关系, 并说明理由.

11.6 解析几何中的重要模型与背景揭示

解析几何的学习大概分为三个层次: 第一层是基础, 包括圆锥曲线的方程、性质的基本应

用, 多以选择题和填空题为主; 第二层是计算层面, 包括如何设点或者设线、设而求之与设而不

求、韦达定理的应用、对称结构的应用等；第三层面是了解命题背景，便于寻找解题思路。

命题背景是指一些重要的模型或者结论。如果能熟知一些重要结论和模型，在解题的时候，就可以更加清晰地发现特殊的位置关系、数量关系，从而发现解题的方向，甚至能采取

先猜测答案，再书写解题过程的策略，有效提高解题的成功率。

本节我们介绍几种常用的几何模型和结论。有些结论的证明过程和深层次背景比较复杂，超过本书的定位和承载范围，则不作详细的介绍和推导。



板块一 知识要点

本节介绍常用的 5 类模型：①中点弦模型；②垂直弦模型；③直线过定点或定向模型；

④阿基米德三角形模型；⑤焦点准线模型，相关性质或定义见正文。



板块二 题型归纳

题型 1 中点弦模型

思路提示

我们先介绍中点弦模型，这个模型在考试中出现的频率非常高，也比较简单，我们以椭圆为例先对模型给出简单的叙述，再给出简要的证明。在双曲线和抛物线中也有类似的结论，且研究方法都是一致的，故同学们可以自己尝试总结。

模型 1 (中点弦模

型)在椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} =$

1 ($a > b > 0$) 中，如图 11.42 所示，若直线 $y = kx + m$ ($k \neq 0$ 且 $m \neq$

0) 与椭圆 E 交于 A, B 两点，点 P 为弦 AB 的中点，设直线 PO 的斜率为 k_0 ，则 $k_0 k = -\frac{b^2}{a^2}$ 。

证法一(韦达法)：由 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$ ，消去

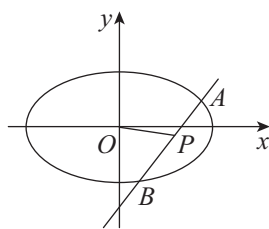


图 11.42

y ，得 $(b^2 + a^2 k^2)x^2 + 2kma^2x + a^2 m^2 - a^2 b^2 = 0$ ，由韦达定理得

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2kma^2}{b^2 + a^2 k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{a^2(m^2 - b^2)}{b^2 + a^2 k^2} \end{cases}, \text{ 由 } \Delta = 4k^2 m^2 a^4 -$$

$4a^2(b^2 + a^2 k^2)(m^2 - b^2) > 0$ ，得 $a^2 k^2 + b^2 >$

m^2 。设 $P(x_0, y_0)$ ，则 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} =$

$-\frac{kma^2}{b^2 + a^2 k^2}$ ， $y_0 = kx_0 + m = \frac{mb^2}{b^2 + a^2 k^2}$ ，所以

$k_0 = k_{OP} = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{b^2}{ka^2}$ ，故 $k_0 k = -\frac{b^2}{a^2}$ 。

证法二(点差法)：不妨设 $A(x_1, y_1)$ ，

$B(x_2, y_2)$ ，则 AB 的中点 $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ 。

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 两式作差后得 } \frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} +$$

$\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$ ，从而 $\frac{y_1^2 - y_2^2}{x_1^2 - x_2^2} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$

$$=k_0 k = -\frac{b^2}{a^2}.$$

点差法是处理中点弦问题的常用方法. 如果条件中已知了某条弦的中点坐标, 首先考虑是否可以利用中点弦的结论得到相关的等式, 有了等式就可以利用解方程的方法求出其他未知数.

例 11.6.1 (多选题) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$) 的右焦点为 $F(3, 0)$, 过点 F 的直线交椭圆 E 于 A, B 两点. 若 AB 的中点坐标为 $(1, -1)$, 则().

A. 直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x-3)$

B. $a^2 = 2b^2$

C. 椭圆的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$

D. 椭圆的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

分析 根据直线 AB 过点 $F(3, 0)$ 和点 $(1, -1)$ 可得直线 AB 的方程, 与椭圆方程联立, 可由 AB 的中点的横坐标得到 $a^2 = 2b^2$, 所以可得椭圆标准方程和离心率, 从而找到答案. 也可以直接利用中点弦的相关结论, 减少计算量.

解析 **解法一(点差法):** 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, AB 的中点坐标为 $M(1, -1)$, 因为直线 AB 过点 $F(3, 0)$ 和点 $(1, -1)$, 所以 $k_{AB} = \frac{0 - (-1)}{3 - 1} = \frac{1}{2}$, 直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x-3)$, 又因为 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 相减得 $\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = 0$, 整理得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} =$

$$-\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} = -\frac{b^2}{a^2} \left(\frac{1}{-1} \right) = \frac{b^2}{a^2}, \text{ 即 } k_{AB} = \frac{b^2}{a^2}.$$

因为 $k_{AB} = \frac{1}{2}$, 所以 $a^2 = 2b^2$ (如果记住了中点弦模型的结论, 作为选择题这里就可以直接使用 $k_{OM} \cdot k_{AB} = -1 \times \frac{1}{2} = -\frac{b^2}{a^2}$, 从而得到 $a^2 = 2b^2$). 又 $a^2 = b^2 + c^2$, 所以 $b = c = 3$, $a = 3\sqrt{2}$, 离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 所以圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$. 故选 ABD.

解法二(韦达法): 设 AB 的中点坐标为 $M(1, -1)$, 因为直线 AB 过点 $F(3, 0)$ 和点 $(1, -1)$, 所以直线 AB 的方程为 $y = \frac{1}{2}(x-3)$, 代入椭圆方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 消去 y 得 $\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)x^2 - \frac{3}{2}a^2x + \frac{9}{4}a^2 - a^2b^2 = 0$, 所以利用韦达定理得到 AB 的中点的横坐标

$$\text{为 } \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{2\left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)} = 1, \text{ 即 } a^2 = 2b^2.$$

下同解法一.

评注与拓展

熟记中点弦结论可以在选择题或者填空题中直接使用, 在解答题中则需要给出必要的推导过程. 中点弦模型 $k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 的作用实际是建立了 AB 的斜率 k_{AB} 与中点 M 的等量关系, 使得原本需要两个点 A, B 才能表示的斜率, 只需要一个点 M 即可表示出来, 在运算中起到减少变量的作用.

在某些题目中,可能不会直接给出中点坐标,但是依然可以假设出中点坐标,从而得到两条直线斜率的关系,为解题创造条件.

变式 (2022 新高考全国 II 卷 15) 已知直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 在第一象限交于 A, B 两点, l 与 x 轴、 y 轴分别交于 M, N 两点, 且 $|MA| = |NB|$, $|MN| = 2\sqrt{3}$, 则 l 的方程为_____.

例 11.6.2 (2015 陕西理 20) 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的半焦距为 c , 原点 O 到经过两点 $(c, 0), (0, b)$ 的直线的距离为 $\frac{1}{2}c$.

(1) 求椭圆 E 的离心率;

(2) 如图 11.43 所示, AB 是圆 $M: (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{2}$ 的一条直

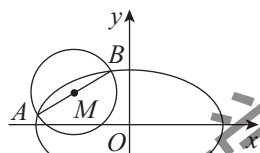


图 11.43

径, 若椭圆 E 经过 A, B 两点, 求椭圆 E 的方程.

分析 点 M 为弦 AB 的中点, 利用中点弦模型 $k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2}$ 求出 AB 的斜率及方程. 又 $|AB|$ 为圆直径, 再结合弦长公式求出待定系数得椭圆方程.

解析 (1) **解法一 (等面积法)**: 依题意 $\frac{1}{2}bc = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2} \cdot \frac{c}{2} = \frac{ac}{4}$, 得 $a = 2b$, 所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

解法二 (方程思想): 直线经过 $(c, 0), (0, b)$ 两点, 则直线的方程为 $\frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1$, 即

$bx + cy - bc = 0$, 原点 O 到直线的距离 $d = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}} = \frac{bc}{a} = \frac{c}{2}$, 则 $a = 2b$, 所以 $e = \frac{c}{a} =$

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(2) **(利用中点弦模型求解)**: 因为 $M(-2, 1)$, 设直线 AB 的方程为 $y = k(x+2) + 1$, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 代入椭圆方程有 $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1, \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$, 相减可得 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot$

$$\frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2} = k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}, \text{ 所以 } k_{OM} \cdot k_{AB} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}.$$

又 $M(-2, 1)$, 即 $k_{OM} = -\frac{1}{2}$, 得 $k_{AB} = \frac{1}{2}$, 因

此 AB 所在的直线方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}(x + 2)$,

即 $x - 2y + 4 = 0$. 联立 $\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4b^2 \\ x - 2y + 4 = 0 \end{cases}$, 消

去 x 建立关于 y 的一元二次方程得 $(2y-4)^2 + 4y^2 = 4b^2$, 化简整理得 $2y^2 - 4y + 4 - b^2 = 0$.

由韦达定理得 $y_1 + y_2 = 2, y_1 y_2 = \frac{4-b^2}{2}$, $|AB| =$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{k_{AB}^2}} \cdot |y_1 - y_2| = \sqrt{5} \times \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{5} \times \sqrt{4 - 2(4 - b^2)} = \sqrt{5} \times \sqrt{2b^2 - 4} = \sqrt{10},$$

所以 $2b^2 - 4 = 2, b^2 = 3, a^2 = 4b^2 = 12$, 故椭圆方程为 $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{3} = 1$.

变式 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 A 为椭圆 E 的左顶点, 过点 A 的直线 (斜率不为 0) 与椭圆的另外一个交点为 B , AB 的中点为 P , 过点 O 且平行

于 AB 的直线与直线 $x=4$ 交于点 Q . 试问: $k_{OP} \cdot k_{F_2Q}$ 是否为定值;若是,求出此定值;若不是,请说明理由.

下面我们总结一下中点弦模型以及其常用的变形,这几个结论在题目中出现的频率都很高,大家不妨记住并能熟练应用.

小结

中点弦模型及其拓展

(中点弦模型)

在椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 中,

如图 11.44 所示,若直线 $y = kx + m$

($k \neq 0$ 且 $m \neq 0$) 与椭圆 E 交于 A, B 两点,点 P 为弦 AB 的中点,设直线 PO 的斜率为 k_0 ,则 $k_0 k = -\frac{b^2}{a^2}$.

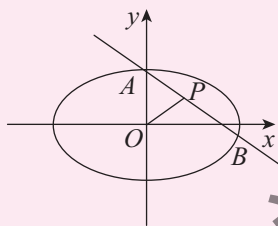


图 11.44

模型演绎 1: 当 $a=b$ 时,椭圆演变为圆,有 $k_0 k = -1$, OP 恰好是 AB 的中垂线,在直线与圆此类型的题目中,常用这点进行解题.

模型演绎 2: 类似的模型还有如下几种. 椭圆方程均为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$).

评注与拓展

(1) 长轴模型: 如图 11.45(a) 所示, A, B 为长轴端点, P 为椭圆上异于 A, B 的任一点, 则 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$.

(2) 长轴模型延伸: 如图 11.45(b) 所示, A, B 为长轴端点, 点 M, N 在椭圆上, 且关于 x 轴对称, 则 $k_{AM} \cdot k_{BN} = \frac{b^2}{a^2}$.

(3) 中心弦模型: 如图 11.45(c) 所示, MN 为过原点的弦, 点 P 在椭圆上 (异于 M, N 两点), 且 k_{PM}, k_{PN} 存在, 则 $k_{PM} \cdot k_{PN} = -\frac{b^2}{a^2}$.

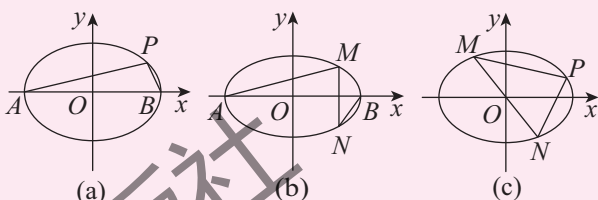


图 11.45

简证: (1) 证法一 (定义法): 不妨设 $P(x_0, y_0)$, 且满足 $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$, 故 $y_0^2 = b^2 - \frac{b^2 x_0^2}{a^2}$, 从而 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{y_0}{x_0 - a} \cdot \frac{y_0}{x_0 + a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$.

证法二 (借助中点弦的结论): 取 PA 的中点 M , 则 $OM \parallel PB$. 由中点弦模型的结论, 有 $k_{PA} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2}$, 又 $k_{OM} = k_{PB}$, 所以 $k_{PA} \cdot k_{PB} = -\frac{b^2}{a^2}$.

(2), (3) 两种模型的证明方法 (定义法) 请同学们自行完成.

这几类延伸模型也可先根据中点弦模型找到斜率之间的关系, 进而得到证明. 在解题时也可由题中斜率之间的关系, 再结合模型来解决问题.

题型 2 垂直弦模型

思路提示

模型 2(垂直弦模型) 如图 11.46

所示,椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$= 1 (a > b > 0)$ 与直线 l 交于 A, B 两点, 在 $\triangle ABO$ 中,

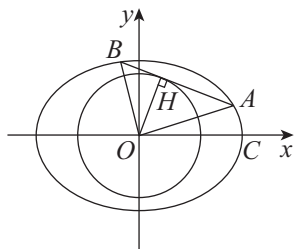


图 11.46

OH 为 AB 上的高, 则 $\langle \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \rangle = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{|OH|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

【证明】此处只证明一下充分性, 必要性读者可自行思考.

在 $\text{Rt}\triangle OAB$ 中, $|OH| \cdot |AB| = |OA| \cdot$

$$|OB|, \text{ 所以 } |OH|^2 = \frac{|OA|^2 |OB|^2}{|AB|^2} = \frac{|OA|^2 |OB|^2}{|OA|^2 + |OB|^2},$$

$$\text{即 } \frac{1}{|OH|^2} = \frac{|OA|^2 + |OB|^2}{|OA|^2 |OB|^2} = \frac{1}{|OA|^2} +$$

$$\frac{1}{|OB|^2}, \text{ 只需要证明 } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \frac{1}{a^2} +$$

$$\frac{1}{b^2} \text{ 即可.}$$

设直线 OA 的斜率为 k , 则:

①当 k 存在时, 且 $k \neq 0$. 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 OA, OB 的方程分别为 $y =$

$$kx, y = -\frac{1}{k}x, \text{ 由方程组 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \text{ 可得}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}, |OA|^2$$

$$= x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + k^2 x_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2} (1 + k^2).$$

$$\begin{aligned} \text{同理 } |OB|^2 &= x_2^2 + y_2^2 = x_2^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \\ &= \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 k^2} (1 + k^2), \text{ 所以 } \frac{1}{|OA|^2} + \frac{1}{|OB|^2} = \\ &= \frac{b^2 + a^2 k^2}{a^2 b^2 (1 + k^2)} + \frac{a^2 + b^2 k^2}{a^2 b^2 (1 + k^2)} = \frac{(a^2 + b^2)(1 + k^2)}{a^2 b^2 (1 + k^2)} \\ &= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \text{ 成立.} \end{aligned}$$

②当 k 不存在时, $|OA| = b, |OB| = a$, 满足.

③当 $k = 0$ 时, $|OA| = a, |OB| = b$, 满足.

垂直弦模型同时也说明 $|OH|$ 是一个定值, 所以 H 的轨迹是以 O 为圆心的圆.

例 11.6.3 如图 11.47 所示, 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$= 1 (a > b > 0)$, 其中

$a = \sqrt{2}b$, 设 Q_1, Q_2

为椭圆上的两个动点, $OQ_1 \perp OQ_2$, 过

原点 O 作直线 $Q_1 Q_2$ 的垂线 OD , 垂足为

D , 求点 D 的轨迹方程.

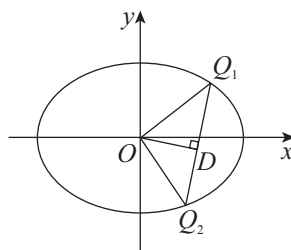


图 11.47

【分析】题意符合垂直弦模型特征, 利用模型先猜出答案, 再证明结论.

$$\text{由模型可知 } \frac{1}{|OD|^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^2} =$$

$$\frac{3}{2b^2}, \text{ 所以 } |OD|^2 = \frac{2b^2}{3}, \text{ 即 } D \text{ 的轨迹方程为}$$

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3}b^2. \text{ 这个可以作为分析的过程锁定答案, 作为解答题还是要书写完整的过程.}$$

解析 在 $\text{Rt}\triangle OQ_1Q_2$ 中, $|OD| \cdot |Q_1Q_2| = |OQ_1| \cdot |OQ_2|$, 所以 $|OD|^2 = \frac{|OQ_1|^2 |OQ_2|^2}{|Q_1Q_2|^2} =$

$$\frac{|OQ_1|^2 |OQ_2|^2}{|OQ_1|^2 + |OQ_2|^2}, \text{ 即 } \frac{1}{|OD|^2} = \frac{1}{|OQ_1|^2} + \frac{1}{|OQ_2|^2}.$$

设直线 OQ_1 的斜率为 k , 则:

① 当 k 存在且 $k \neq 0$ 时, 设 $Q_1(x_1, y_1)$, $Q_2(x_2, y_2)$, 则 OQ_1, OQ_2 的方程分别为

$$y = kx, y = -\frac{1}{k}x, \text{ 由方程组 } \begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{可得 } \frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2 x^2}{b^2} = 1, \text{ 解得 } x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}.$$

$$|OQ_1|^2 = x_1^2 + y_1^2 = x_1^2 + k^2 x_1^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 + a^2 k^2}.$$

$$(1+k^2). \text{ 同理 } |OQ_2|^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_2^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) =$$

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2 k^2} (1+k^2), \text{ 所以 } \frac{1}{|OQ_1|^2} + \frac{1}{|OQ_2|^2} =$$

$$\frac{b^2 + a^2 k^2}{a^2 b^2 (1+k^2)} + \frac{a^2 + b^2 k^2}{a^2 b^2 (1+k^2)} = \frac{(a^2 + b^2)(1+k^2)}{a^2 b^2 (1+k^2)}$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{2b^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{3}{2b^2}, \text{ 即 } |OD|^2 = \frac{2b^2}{3}.$$

② 当 k 不存在时, $|OQ_1| = b, |OQ_2| = a$, 显然满足.

③ 当 $k = 0$ 时, $|OQ_1| = a, |OQ_2| = b$, 显然满足.

所以可知点 D 到原点 O 的距离始终为定值

$$\sqrt{\frac{2b^2}{3}}, \text{ 因此点 } D \text{ 的轨迹方程为 } x^2 + y^2 = \frac{2}{3}b^2.$$

变式 设椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过 M

$(2, \sqrt{2}), N(\sqrt{6}, 1)$ 两点, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 E 的方程;

(2) 是否存在圆心在原点的圆, 使得该圆的任意一条切线与椭圆 E 恒有两个交点 A, B , 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$? 若存在, 写出该圆的方程; 若不存在, 请说明理由.

题型 3 直线定点、定向模型

思路提示

过椭圆上的一点 P 作两条直线分别交椭圆于 A, B 两点, 记 PA, PB 的斜率分别是 k_1, k_2 . 如果直线 AB 过某个定点, 我们把这类问题叫作直线过定点问题; 如果直线 AB 的斜率为定值, 我们把这类问题叫作直线定向问题或斜率定值问题.

这类问题的情形比较复杂, 证明相关结论的过程的计算量也比较大. 为了便于理解和掌握, 我们先从较为简单的情形开始介绍, 并说明这类问题的基本解题思路.

模型 3(椭圆顶点直角三角形斜边过定点)

如图 11.48 所示,

点 C 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

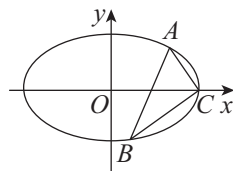


图 11.48

$(a > b > 0)$ 的右顶点, 过点 C 作两条互相垂直的直线, 分别与椭圆交于 A, B 两点, 则直线 AB 恒过定点 $\left(\frac{a(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}, 0\right)$.

【证明】当 AB 的斜率存在且不为 0 时，设 AB 的方程为 $y=kx+m$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ，

$B(x_2, y_2)$ ，故 $\begin{cases} b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2 \\ y=kx+m \end{cases}$ ，消去 y

得 $(a^2k^2+b^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0$ ，故 $\Delta=(2a^2km)^2-4(a^2k^2+b^2)(a^2m^2-a^2b^2)$ 。由

根与系数关系，可得 $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{2a^2km}{a^2k^2+b^2} \\ x_1 \cdot x_2=\frac{a^2m^2-a^2b^2}{a^2k^2+b^2} \end{cases}$ 。

由 $AC \perp BC$ ，故 $k_{CA}k_{CB} = \frac{y_1-0}{x_1-a} \cdot$

$\frac{y_2-0}{x_2-a} = \frac{kx_1+m}{x_1-a} \cdot \frac{kx_2+m}{x_2-a} = -1$ ，即

$(x_1-a)(x_2-a) + (kx_1+m)(kx_2+m) =$
 $(k^2+1)x_1 \cdot x_2 + (km-a)(x_1+x_2) + a^2 +$
 $m^2 = \frac{-k^2a^2b^2+a^2m^2+2ka^3m+a^4k^2+b^2m^2}{a^2k^2+b^2}$

$=0$ ，所以 $m^2(a^2+b^2) + 2a^3km + k^2a^2(a^2-b^2) = 0$ (m, k 形态相近，故推测 $\frac{m}{k}$ 为定值)，故

$\left(\frac{m}{k}\right)^2(a^2+b^2) + 2a^3\left(\frac{m}{k}\right) + a^2(a^2-b^2) = 0$ 。

令 $t = \frac{m}{k}$ ，即 $t^2(a^2+b^2) + 2a^3t + a^2(a^2-b^2) = 0$ ，分解因式可得 $[(a^2+b^2)t + a(a^2-b^2)](t+a) = 0$ ，即 $t_1 = \frac{m}{k} = -a$ ， $t_2 =$

$\frac{m}{k} = -\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ 。又 $y = k\left(x + \frac{m}{k}\right)$ ，当 $\frac{m}{k} = -a$ 时，直线 AB 方程为 $y = k(x-a)$ 过 C 点，不合题意；当 $\frac{m}{k} = -\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ ，直线 AB

方程为 $y = k\left(x - \frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\right)$ ，所以直线 AB

必过定点 $\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}, 0\right)$ 。当直线 AB 的斜率为 0 时，其不满足要求；当直线 AB 的斜率不存在时，依题意可得直线 AB 的方程为 $x = \frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$ ，也过点 $\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}, 0\right)$ 。

综上所述，直线 AB 必过定点 $\left(\frac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}, 0\right)$ 。

例 11.6.4 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，直线 $l: y =$

$kx+m$ 与椭圆交于 A, B 两点 (A, B 不是原点)，且以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点。

证明：直线 l 过定点，并求出该定点的坐标。

【分析】设直线 l 方程为 $y = kx + m$ ，需要找到 k, m 的关系来确定直线过定点。右顶点为 $C(2, 0)$ ，以 AB 为直径的圆过椭圆的右顶点，则转化为 $CA \perp CB$ ，即 $k_{CA} \cdot k_{CB} = -1$ ，可以得到 k, m 的关系，还要考虑 k 不存在和 $k=0$ 的情况。

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，联立 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$ ，

消去 y 得 $(4k^2+3) \cdot x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$ ，则有 $\Delta = (8km)^2 - 4(4k^2+3)(4m^2-12) > 0$ ，即 $m^2 < 4k^2+3$ 。

由韦达定理得 $\begin{cases} x_1+x_2 = -\frac{8km}{4k^2+3} \\ x_1x_2 = \frac{4m^2-12}{4k^2+3} \end{cases}$ (*)，因

为以 AB 为直径的圆过椭圆右顶点 $(2, 0)$ ，所以 $(x_1-2, y_1) \cdot (x_2-2, y_2) = 0$ ，即 $x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 4 + y_1y_2 = 0$ ，也即

$x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 + (kx_1 + m)(kx_2 + m) = 0$, 整理得 $(k^2 + 1)x_1x_2 + (km - 2)(x_1 + x_2) + m^2 + 4 = 0$, 把式(*)代入, 化简得 $7m^2 + 16km + 4k^2 = 0$, 解得 $m = -2k$ 或 $m = -\frac{2k}{7}$.

①当 $m = -2k$ 时, $l: y = kx - 2k$ 过右顶点 $(2, 0)$, 与题意不符, 舍去; ②当 $m = -\frac{2k}{7}$ 时, $l: y = kx - \frac{2k}{7}$ 过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$, 且满足 $m^2 < 4k^2 + 3$, 符合题意.

故 $l: y = kx + m$ 过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$.

评注与拓展

关于两条直线斜率乘积为定值的更一般结论.

模型 3 和本题的共同点都是椭圆的内接三角形是直角三角形, 且直角顶点 C 在椭圆的右顶点. 事实上, 我们可以证明直角顶点 C 可以是椭圆上的任意一点, 而不局限在椭圆的顶点(当然在顶点时计算会比较方便), 此外两个斜率的乘积也不局限为 -1 , 只要 $k_1k_2 = \lambda \left(\lambda \neq \frac{b^2}{a^2} \right)$ 是一个定值, 那么直线 AB 就会过一个定点. 这个结论是可以被严格证明的, 并且证明的方法和原理与证明模型 3 是一致的, 只是计算过程会更复杂. 作为一本一轮复习资料, 我们省去了证明过程, 但是相关的结论大家还是要了解. 此外, 在双曲线和抛物线中也有类似的结论, 其计算方法与在椭圆中几乎一致.

变式① 如图 11.49 所示, 已知定点 $P(x_0, y_0)$

在抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上, 过点 P 作两直线 l_1, l_2 分别交抛物线于 A, B , 且以 AB 为直径的圆过点 P , 证明: 直线 AB 过定点, 并求出此定点的坐标.

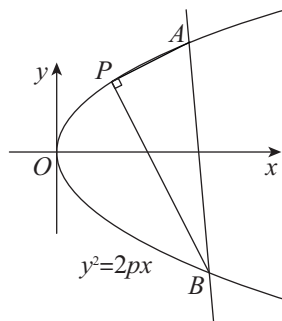


图 11.49

变式② 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, P 是椭圆的右顶点, A, B 为椭圆上两点且满足 $k_{PA} \cdot k_{PB} = \frac{1}{4}$, 证明: 直线 AB 平行于 x 轴.

小结

模型 3 的推广——斜率之积为定值的定点、定向模型

如图 11.50 所示,椭圆的内接 $\triangle PAB$, $P(x_0, y_0)$ 为椭圆上一定点, A, B 为椭圆上两个动点.

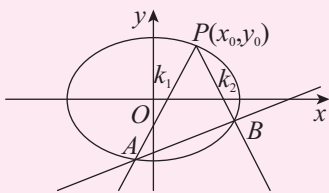


图 11.50

(1) 若 $k_1 k_2 = \lambda \left(\lambda \neq \frac{b^2}{a^2} \right)$, 直线 AB 过定点 $\left(\frac{\lambda a^2 + b^2}{\lambda a^2 - b^2} x_0, -\frac{\lambda a^2 + b^2}{\lambda a^2 - b^2} y_0 \right)$.

(2) 若 $k_1 k_2 = \frac{b^2}{a^2}$, 则直线 AB 的斜率为定值 $k_{AB} = -\frac{y_0}{x_0} (x_0 \neq 0)$.

学到这里,你会不会有这样的想法:如果两条直线的斜率之和为定值,是否也有类似的结论呢?

模型 4 (斜率之和为 0): 过椭圆上一点 $M(x_0, y_0)$ 作斜率互为相反数的两条直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 交于 A, B 两点, 则

$$k_{AB} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (y_0 \neq 0).$$

【证明】 设直线 $MA: y = k(x - x_0) + y_0$ (k 存在且 $k \neq 0$), 与椭圆方程联立, 得 $(b^2 + a^2 k^2)x^2 - (2a^2 k^2 x_0 - 2a^2 k y_0)x + a^2 y_0^2 + a^2 k^2 x_0^2 - 2a^2 k x_0 y_0 - a^2 b^2 = 0$, 利用根与系数关系得 $x_A + x_M = \frac{2a^2 k^2 x_0 - 2a^2 k y_0}{b^2 + a^2 k^2}$. 又 $x_M = x_0$, 则 $x_A = \frac{a^2 k^2 x_0 - 2a^2 k y_0 - b^2 x_0}{b^2 + a^2 k^2}$. 同理 x_B

$$= \frac{a^2 k^2 x_0 + 2a^2 k y_0 - b^2 x_0}{b^2 + a^2 k^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } k_{AB} &= \frac{k(x_A + x_B - 2x_0)}{x_A - x_B} = \frac{k\left(\frac{2a^2 k^2 x_0 - 2b^2 x_0}{b^2 + a^2 k^2} - 2x_0\right)}{\frac{-4a^2 k y_0}{b^2 + a^2 k^2}} \\ &= \frac{-4b^2 k x_0}{b^2 + a^2 k^2} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}. \end{aligned}$$

模型 4 说明过椭圆上一点作两条斜率互为相反数的直线与椭圆交于两点, 则两点所在直线的斜率是一个定值. 在解题时, 要注意条件的转化, 比如斜率之和等于零等价于两条直线的倾斜角互补, 又等价于两条直线的夹角的平分线与 x 轴垂直.

例 11.6.5 如图 11.51 所示, 已知 F_1, F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$

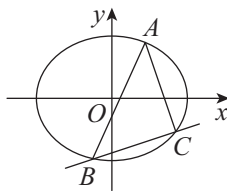


图 11.51

的左、右焦点, 点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 是 C 上一点, AF_1 的中点在 y 轴上, O 为坐标原点.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过点 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 任意作两条倾斜角互补的直线交椭圆于 B, C 两点, 设直线 BC 的斜率为 k , 证明: k 为定值, 并求 k 的值.

【分析】 (1) 根据中点在 y 轴上, 得出 $AF_2 \perp F_1 F_2$, 结合椭圆经过点的坐标可求得椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$; (2) 根据模型 4 可以猜出

$$k_{BC} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} = \frac{3}{4 \times \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}, \text{ 然后再证明结论.}$$

解析 (1) 设 $F_2(c, 0)$, 由 AF_1 的中点在 y 轴上, O 为 F_1F_2 的中点, 得 $AF_2 \parallel y$ 轴, 即 $AF_2 \perp F_1F_2$, 又由 $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 得 $c = 1$, 即 $|F_1F_2| = 2$, $|AF_2| = \frac{3}{2}$, 所以 $|AF_1| = \sqrt{AF_2^2 + F_1F_2^2} = \frac{5}{2}$, 即 $2a = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$, 解得 $a = 2$, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{3}$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

(2) **解法一 (利用韦达定理 + 直线消元)**: 设直线 BC 的方程为 $y = kx + m$, 点 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 联立方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ y = kx + m \end{cases}$, 消去 y 整理得关于 x 的方程

为 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$, 则 $\Delta > 0$, $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}$.

因为直线 AB 和直线 AC 的倾斜角互补, 所以其斜率互为相反数, 即 $k_{AB} = -k_{AC}$, 则

$\frac{\frac{3}{2} - y_1}{1 - x_1} + \frac{\frac{3}{2} - y_2}{1 - x_2} = 0$, 即 $\left(\frac{3}{2} - y_1\right)(1 - x_2) +$

$\left(\frac{3}{2} - y_2\right)(1 - x_1) = 0$, 整理得 $3 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) + x_1y_2 + x_2y_1 = 0$.

将 $y_1 = kx_1 + m$ 及 $y_2 = kx_2 + m$ 代入上式,

整理得 $2kx_1x_2 - \left(\frac{3}{2} + k - m\right)(x_1 + x_2) +$

$3 - 2m = 0$, 将 $x_1 + x_2 = -\frac{8km}{3 + 4k^2}$, $x_1x_2 =$

$\frac{4m^2 - 12}{3 + 4k^2}$ 代入上式, 化简整理得 $4k^2 - 8k +$

$3 + 4mk - 2m = 0$, 即 $(2k - 1)(2k - 3) +$

$2m(2k - 1) = 0$, 所以 $(2k - 1)(2k - 3 + 2m) = 0$, 解得 $k = \frac{1}{2}$ 或 $2k + 2m - 3 = 0$.

当 $2k + 2m - 3 = 0$ 时, 代入 $y = kx + m$, 消去 m 得 $y = k(x - 1) + \frac{3}{2}$, 即直线 BC 过定点 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$, 与题意不符.

所以 $k = \frac{1}{2}$, 即 k 为定值 $\frac{1}{2}$.

解法二 (利用椭圆方程曲线消元): 设两直线与椭圆交于点 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 则

$\frac{x_1^2}{4} + \frac{y_1^2}{3} = 1$ ①, $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{3} = 1$ ②, $\frac{1^2}{4} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} =$

1 ③, ① - ③ 得 $\frac{x_1^2 - 1^2}{4} + \frac{y_1^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2}{3} = 0$, $k_{AB} =$

$\frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} = -\frac{x_1 + 1}{y_1 + \frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{4}$, 同理, $-k_{AC} =$

$-\frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = \frac{x_2 + 1}{y_2 + \frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{4}$.

因为 $k_{AB} = -k_{AC}$, 所以 $\frac{y_1 - \frac{3}{2}}{x_1 - 1} = \frac{x_2 + 1}{y_2 + \frac{3}{2}}$.

$\frac{3}{4}$ ④, $-\frac{y_2 - \frac{3}{2}}{x_2 - 1} = -\frac{x_1 + 1}{y_1 + \frac{3}{2}} \cdot \frac{3}{4}$ ⑤, ④⑤展开

得 $\begin{cases} 4\left(y_1 - \frac{3}{2}\right)\left(y_2 + \frac{3}{2}\right) = 3(x_1 - 1)(x_2 + 1) \\ 4\left(y_2 - \frac{3}{2}\right)\left(y_1 + \frac{3}{2}\right) = 3(x_1 + 1)(x_2 - 1) \end{cases}$,

$$\begin{cases} 4y_1y_2+6y_1-6y_2-9=3x_1x_2-3x_2+3x_1-3, \\ 4y_1y_2-6y_1+6y_2-9=3x_1x_2+3x_2-3x_1-3, \end{cases}$$

相减得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{1}{2}$, 即 $k=\frac{1}{2}$, 所以 k 为定值 $\frac{1}{2}$.

变式 (2023 河北保定二模) 已知椭圆 C 的中心在原点, 焦点在 x 轴上, 长轴长为短轴长的 2 倍, 若椭圆 C 经过点 $P(2,2)$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若 A, B 是椭圆上不同于点 P 的两个点, 直线 PA, PB 与 x 轴围成底边在 x 轴上的等腰三角形, 证明: 直线 AB 的斜率为定值.

模型 5 (斜率之和不为 0): 过椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

$=1$ 上一点 $M(x_0, y_0)$ 作两条直线与椭圆交于 A, B 两点, 若 $k_{MA} + k_{MB} = \lambda (\lambda \neq 0)$, 则直线 AB 过定点, 且定点坐标为 $(x_0 - \frac{2y_0}{\lambda}, -y_0 - \frac{2x_0b^2}{\lambda a^2})$.

在此我们省略这个结论的证明过程. 此外对于双曲线, 也有类似的性质, 大家不妨自己尝试总结这方面的结论.

例 11.6.6 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b >$

$0)$, 四点 $P_1(1,1), P_2(0,1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 中恰有三点在椭圆 C 上.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设直线 l 不经过点 P_2 且与 C 相交于 A, B 两点, 若直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 1, 证明: l 过定点.

分析 (1) 结合椭圆特征, 确定哪三点在椭圆上, 并求出椭圆方程; (2) 由 $k_{P_2A} + k_{P_2B} = 1$, 根据模型 5 可以直接得到结果.

解析 (1) 结合椭圆几何特征, 可得 P_2, P_3, P_4 在椭圆上, 即有 $P_2(0,1), P_3(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$P_4(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 满足椭圆方程, 也即 $b=1, \frac{1}{a^2} +$

$\frac{3}{4b^2} = 1$, 解得 $a=2, b=1$, 可得椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) ① 当直线 l 的斜率不存在时, 设 $l: x=m, A(m, y_A), B(m, -y_A)$, 因为直线 P_2A 与直线 P_2B 的斜率的和为 $-1, k_{P_2A} + k_{P_2B} = \frac{y_A-1}{x_A} + \frac{y_B-1}{x_B} = \frac{y_A-1}{m} + \frac{-y_A-1}{m} = -1$, 解得 $m=2$, 此时 l 过椭圆右顶点, 不存在两个交点, 故不满足.

② 若直线 l 的斜率存在, 设 $l: y=kx+b$, 联立椭圆 $x^2+4y^2=4$, 可得 $(1+4k^2)x^2+8kbx+4b^2-4=0$.

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则 $x_1+x_2 = -\frac{8kb}{1+4k^2}, x_1x_2 = \frac{4b^2-4}{1+4k^2}, k_{P_2A} + k_{P_2B} =$

$$\frac{y_1-1}{x_1} + \frac{y_2-1}{x_2} = 2k + \frac{(b-1)(x_1+x_2)}{x_1x_2} =$$

$$2k - \frac{2kb}{b+1} = 1 \Rightarrow b = 2k - 1, \text{ 直线 } l: y = kx +$$

$2k - 1$, 即 $y = k(x+2) - 1$, 故直线 l 经过定点 $(-2, -1)$.

变式 (2023 云南大理一模) 已知双曲线 Γ :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0), \text{ 其渐近线方程为}$$

$x \pm 2y = 0$, 点 $(2\sqrt{2}, 1)$ 在 Γ 上.

(1) 求双曲线 Γ 的方程;

(2) 过点 $A(2, 0)$ 的两条直线 AP, AQ 分别与双曲线 Γ 交于 P, Q 两点 (不与点 A 重合), 且两条直线的斜率之和为 1, 证明: 直线 PQ 过定点.

(2) 若 $k_1 + k_2 = \lambda (\lambda \neq 0)$, 直线 AB 过

$$\text{定点} \left(x_0 - \frac{2y_0}{\lambda}, -y_0 - \frac{2x_0b^2}{\lambda a^2} \right).$$

有些题目的定点问题, 其条件并非完全局限在 $k_1 + k_2 = \lambda$ 或 $k_1 k_2 = \lambda$ 的形式, 但是解题的思路几乎是一致的, 下面两个题目可以看作是上面模型的拓展或者解题方法的延续.

例 11.6.7 如图 11.52 所示, 已知椭圆 C :

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

(1) 直线 $l: y = x$ 交椭圆 C 于 P, Q 两点, 求线段 PQ 的长;

(2) A 为椭圆 C 的左顶点, 直线 l 与椭圆 C 交于

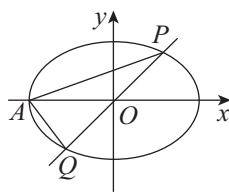


图 11.52

P, Q (不与点 A 重合) 两点, 记直线 AP, AQ, l 的斜率分别为 k_1, k_2, k , 若 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{k}$, 试问直线 PQ 是否过定点, 若是, 求出定点坐标; 若不是, 请说明理由.

分析 设直线为 $y = kx + m$, 利用条件 $k_1 + k_2$

$= -\frac{1}{k}$, 整理得到关于 m 与 k 的关系式, 从中求出定点坐标.

解析 (1) 将直线 l 与椭圆方程联立, 即

$$\begin{cases} y = x \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \end{cases}, \text{ 得 } x_P^2 = x_Q^2 = \frac{2}{3}, \text{ 也即 } y_P^2 = y_Q^2 = \frac{2}{3}.$$

$$\text{故 } |PQ| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} + \sqrt{x_Q^2 + y_Q^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 设直线 $l: y = kx + m, P(x_1, y_1),$

小结

椭圆的内接 $\triangle PAB, P(x_0, y_0)$ 为椭圆上一定点, A, B 为椭圆上两个动点. 则:

(1) 若 $k_1 + k_2 = 0$, 则直线 AB 的斜率

为定值 $k_{AB} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (y_0 \neq 0)$;

$$Q(x_2, y_2), \text{ 由 } \begin{cases} y = kx + m, \\ x^2 + 2y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow (2k^2 + 1)x^2 +$$

$$4kmx + 2m^2 - 2 = 0, \text{ 得 } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-4km}{2k^2 + 1} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2m^2 - 2}{2k^2 + 1} \end{cases},$$

$$\Delta = 16k^2m^2 - 4(2k^2 + 1)(2m^2 - 2) = 8(2k^2 +$$

$$1 - m^2), \text{ 又 } k_1 = \frac{y_1}{x_1 + \sqrt{2}} = \frac{kx_1 + m}{x_1 + \sqrt{2}}, k_2 =$$

$$\frac{kx_2 + m}{x_2 + \sqrt{2}}, \text{ 故 } k_1 + k_2 = \frac{kx_1 + m}{x_1 + \sqrt{2}} + \frac{kx_2 + m}{x_2 + \sqrt{2}} =$$

$$\frac{2kx_1x_2 + \sqrt{2}k(x_1 + x_2) + m(x_1 + x_2) + 2\sqrt{2}m}{x_1x_2 + \sqrt{2}(x_1 + x_2) + 2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}m - 2k}{m^2 - 2\sqrt{2}km + 2k^2}.$$

由 $k_1 + k_2 = -\frac{1}{k}$, 得 $m^2 - \sqrt{2}km = 0$, 所以

$$m(m - \sqrt{2}k) = 0 \Rightarrow m = \sqrt{2}k \text{ 或 } m = 0.$$

①当 $m = \sqrt{2}k$ 时, 直线 $l: y = kx + \sqrt{2}k = k(x + \sqrt{2})$, 过定点 $A(-\sqrt{2}, 0)$, 与已知不符, 舍去; ②当 $m = 0$ 时, 直线 $l: y = kx$, 过定点 $(0, 0)$, $\Delta = 8(2k^2 + 1 - m^2) = 16k^2 + 8 > 0$, 符合题意.

综上所述, 直线 PQ 过定点 $(0, 0)$.

变式 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

的焦点与椭圆 $\frac{x^2}{2} + 2y^2 = 1$ 的焦点相同, 且

双曲线 C 经过点 $P(1, 1)$.

(1) 求双曲线 C 的标准方程;

(2) 设 A, B 为双曲线 C 上异于点 P 的两点, 记直线 PA, PB 的斜率为 k_1, k_2 , 若

$(k_1 - 1)(k_2 - 1) = 1$, 求直线 AB 恒过的定点.

题型 4 抛物线中的阿基米德三角形模型

思路提示

在 11.3 节我们总结了一些关于抛物线焦点弦和焦半径的性质. 在此我们将更深入地学习抛物线两条切线与弦所围成的三角形(阿基米德三角形)的一些重要性质.

模型 6 (阿基米德三角形): 如图 11.53 所示, AB 为抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的弦, $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 分别过 A, B 作

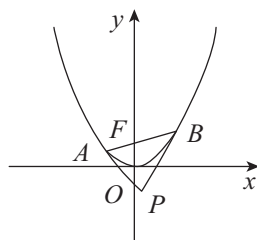


图 11.53

抛物线的切线交于点 P , 称 $\triangle PAB$ 为阿基米德三角形, 弦 AB 为阿基米德三角形的底边, 则有以下常用结论:

(1) 阿基米德三角形底边上的中线平行于抛物线的轴.

(2) 若阿基米德三角形的底边, 即弦 AB 过抛物线内定点 $C(x_0, y_0)$, 则另一顶点 P 的轨迹为一条直线.

(3) 若直线 l 与抛物线没有公共点, 以 l 上的点为顶点的阿基米德三角形的底边过定点.

(4) 底边长为 a 的阿基米德三角形的面积的最大值为 $\frac{a^3}{8p}$.

(5) 若阿基米德三角形的底边过焦点, 则顶点 Q 的轨迹为准线, 且阿基米德三角形的面积的最小值为 p^2 .

(6) 点 P 的坐标为 $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{2p})$.

(7) 底边 AB 所在的直线方程为 $(x_1+x_2)x-2py-x_1x_2=0$.

(8) $\triangle PAB$ 的面积为 $S_{\triangle PAB} = \frac{|x_1-x_2|^3}{8p}$.

例 11.6.8 在平面直角坐标系 xOy 中, M 为直线 $y=x-3$ 上的动点, 过点 M 作抛物线 $C: x^2=2y$ 的两条切线 MA, MB , 切点分别为 A, B , N 为 AB 的中点.

(1) 证明: $MN \perp x$ 轴;

(2) 直线 AB 是否恒过定点? 若是, 求出这个定点的坐标; 若不是, 请说明理由.

分析 (1) 点 M 运动引发切点 A, B 的坐标变化, 从而中点 N 变化, 若证明 $MN \perp x$ 轴, 转化为证明 $x_M = x_N$. (2) 设 $M(t, t-3)$, 表示出直线 AB 的方程可得定点坐标.

解析 (1) 设切点为 $A(x_1, \frac{x_1^2}{2}), B(x_2, \frac{x_2^2}{2})$,

$x^2=2y$, 即 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的导数为 $y'=x$, 所以

切线 MA 的斜率为 x_1 , 切线的方程为 $y - \frac{x_1^2}{2} = x_1(x - x_1)$.

设 $M(t, t-3)$, 则有 $t-3 - \frac{x_1^2}{2} = x_1(t - x_1)$, 化简可得 $x_1^2 - 2tx_1 + 2t - 6 = 0$, 同理可得 $x_2^2 - 2tx_2 + 2t - 6 = 0$, 所以 x_1, x_2 是方程 $x^2 - 2tx + 2t - 6 = 0$ 的两根, 则 $x_1 + x_2 = 2t, x_1x_2 = 2t - 6, x_N = \frac{x_1+x_2}{2} = t = x_M$, 故 $MN \perp x$ 轴.

(2) 因为 $y_N = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{2}x_1x_2 = t^2 - t + 3$, 所以 $N(t, t^2 - t + 3)$, 又 $k_{AB} = \frac{1}{2} \times \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2} = t$, 所以直线 AB 的方程为 $y - (t^2 - t + 3) = t(x - t)$, 即 $y - 3 = t(x - 1)$, 故直线 AB 恒过定点 $(1, 3)$.

变式 已知曲线 $C: y = \frac{x^2}{2}$, D 为直线 $y = -\frac{1}{2}$ 上的动点, 过 D 作 C 的两条切线, 切点分别为 A, B .

(1) 证明: 直线 AB 过定点;

(2) 若以 $E(0, \frac{5}{2})$ 为圆心的圆与直线 AB 相切, 且切点为线段 AB 的中点, 求该圆的方程.

题型5 焦点准线模型(乘积为 a^2 模型)

思路提示

模型7(焦点准线模型): 椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} +$

$\frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 左、右顶点为 A, B , 椭圆外一点 $P(m, t)$ (且 $|m| > a$), PA 交椭圆于另一点 C , PB 交椭圆于另一点 D , 则直线 CD 过定点 $(n, 0)$, 且满足 $mn = a^2$.

例 11.6.9 (2020 新课标全国 I 卷理 20)

如图 11.54 所示, 已知 A, B 分别为椭圆 E :

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$$

的左、右顶点, G 为 E 的上顶点, $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = 8$. P 为直线

$x = 6$ 上的动点,

PA 与 E 的另一交

点为 C , PB 与 E 的另一交点为 D .

(1) 求 E 的方程;

(2) 证明: 直线 CD 过定点.

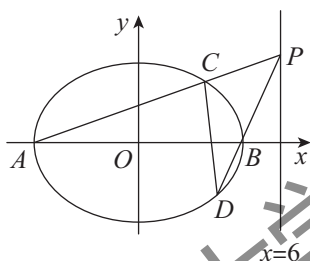


图 11.54

分析 根据题意很容易得到 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2$

$= 1$. 在证明第(2)问时, 不妨先猜测一下答案, 根据模型可知 $6x_E = a^2 = 9$, 所以 $x_E =$

$\frac{3}{2}$, 又根据图形的对称性, 直线 CD 所过的

定点必然是 $(\frac{3}{2}, 0)$. 当然这仅限于帮助我们

锁定答案, 解题过程还是要利用一般方法解题.

解析 (1) 由已知可得 $A(-a, 0), B(a, 0), G(0, 1)$, 则 $\overrightarrow{AG} = (a, 1), \overrightarrow{GB} = (a, -1)$.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GB} = a^2 - 1 = 8 \Rightarrow a = 3$, 故 E 的方程为 $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

(2) 解法一(设而求之): 设 $P(6, y_0), C(x_C, y_C), D(x_D, y_D)$, 直线 $AP: y - 0 = \frac{y_0}{9}(x + 3)$.

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y = \frac{y_0}{9}(x + 3) \end{cases} \Rightarrow (9 + y_0^2)x^2 + 6y_0^2x + 9y_0^2 - 81 = 0.$$

$$9y_0^2 - 81 = 0.$$

由韦达定理得 $-3x_C = \frac{9y_0^2 - 81}{9 + y_0^2} \Rightarrow x_C =$

$$\frac{-3y_0^2 + 27}{9 + y_0^2}, \text{ 故 } C\left(\frac{-3y_0^2 + 27}{9 + y_0^2}, \frac{6y_0}{9 + y_0^2}\right).$$

$$\text{直线 } PB: y = \frac{y_0}{3}(x - 3). \text{ 联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y = \frac{y_0}{3}(x - 3) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(1 + y_0^2)x^2 - 6y_0^2x + 9y_0^2 - 9 = 0, \text{ 同理}$$

$$D\left(\frac{3y_0^2 - 3}{1 + y_0^2}, \frac{-2y_0}{1 + y_0^2}\right).$$

若 $x_C = x_D$, 则 $\frac{-3y_0^2 + 27}{9 + y_0^2} = \frac{3y_0^2 - 3}{1 + y_0^2}$, 解得 y_0^2

$= 3$, 所以 CD 的方程为 $x = \frac{3}{2}$, 直线 CD 过

点 $M(\frac{3}{2}, 0)$.

若 $x_C \neq x_D$, 则直线 $CD: y - \frac{-2y_0}{1 + y_0^2} =$

$$\frac{\frac{6y_0}{9 + y_0^2} - \frac{-2y_0}{1 + y_0^2}}{-\frac{3y_0^2 + 27}{9 + y_0^2} - \frac{3y_0^2 - 3}{1 + y_0^2}} \left(x - \frac{3y_0^2 - 3}{1 + y_0^2}\right) \Rightarrow y =$$

$$\frac{4y_0}{9 - 3y_0^2} \left(x - \frac{3}{2}\right), \text{ 故直线 } CD \text{ 过定点 } \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

解法二(设而不求): 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 直线 CD 方程为 $y = kx + m$, 联立

$$\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \\ y = \frac{y_0}{3}(x-3) \end{cases}, \text{消去 } y \text{ 得 } x^2 + 9$$

$(kx+m)^2 - 9 = 0$, 即 $(1+9k^2)x^2 + 18kmx + 9m^2 - 9 = 0$, $\Delta = 324k^2m^2 - 36(1+9k^2)(m^2-1) = 36[9k^2m^2 - (1+9k^2)(m^2-1)] = 9k^2m^2 - m^2 + 1 - 9m^2k^2 + 9k^2 = 9k^2 - m^2 + 1 > 0$. 由韦达定理有 $x_1 + x_2 = -\frac{18km}{1+9k^2}$, $x_1x_2 = \frac{9m^2-9}{1+9k^2}$. 又 A

$(-3, 0), B(3, 0)$, 所以 $k_{AC} = \frac{y_1}{x_1+3}, k_{BD} =$

$\frac{y_2}{x_2-3}$, 故 AC 方程为 $y = \frac{y_1}{x_1+3}(x+3)$.

令 $x=6$, 得 $y_P = \frac{9y_1}{x_1+3}$, 又 BD 方程为 $y =$

$\frac{y_2}{x_2-3}(x-3)$, 令 $x=6$, 得 $y_P = \frac{3y_2}{x_2-3}$, 所以

$\frac{9y_1}{x_1+3} = \frac{3y_2}{x_2-3}$, 即 $3y_1(x_2-3) = y_2(x_1+3)$,

$3(kx_1+m)(x_2-3) = (kx_2+m)(x_1+3)$, 整理后得 $2kx_1x_2 - (9k+m)x_1 + (3m-3k)x_2 - 12m = 0$.

所以 $2k \frac{9m^2-9}{1+9k^2} - (9k+m)x_1 + (3m-3k)x_2 - 12m = 0$ ① (由求根公式可得 $x_{1,2} =$

$\frac{-18km \pm \sqrt{\Delta}}{2(1+9k^2)}$, 因为 $\Delta > 0$, 为了使 ① 中

$\sqrt{\Delta}$ 抵消, 必有 $-(9k+m) = 3m - 3k$, 即

$$m = -\frac{3}{2}k.$$

下面验证 $m = -\frac{3}{2}k$ 满足上式, 即有

$$2kx_1x_2 - \frac{15}{2}kx_1 - \frac{15}{2}kx_2 + 18k = 2kx_1x_2 -$$

$$\frac{15}{2}k(x_1+x_2) + 18k = k \left[\frac{2(9m^2-9)}{1+9k^2} + \frac{15}{2} \times \right.$$

$$\left. \frac{18km}{1+9k^2} + 18 \right] = \frac{k(18m^2 + 135km + 162k^2)}{1+9k^2}$$

$$= \frac{k}{1+9k^2} \left(\frac{81}{2}k^2 - \frac{405}{2}k^2 + \frac{324}{2}k^2 \right) = 0. \text{ 故直}$$

线 CD 方程为 $y = kx - \frac{3}{2}k = k \left(x - \frac{3}{2} \right)$, 即

直线 CD 过定点 $\left(\frac{3}{2}, 0 \right)$.

变式 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别

为点 A, B , 过椭圆 C 的右焦点, 且斜率不为 0 的直线 l 交椭圆 C 于 M, N 两点, 直线 AM, BN 的交于点 Q , 证明: 点 Q 在直线 $x=4$ 上.