

## 第5章 谓词逻辑

「尺与尺俱不尽。端与端俱尽。尺与端，或尽或不尽。」<sup>①</sup> 出自《墨子·经说上》。

谓词逻辑（Predicate Logic）又称一阶逻辑，是数理逻辑的重要组成部分。谓词逻辑在命题逻辑的基础上引入了量词和谓词等概念，从而能够表达更加复杂的命题和推理。谓词逻辑在人工智能、数据库查询以及自动定理证明等领域有着广泛的应用。例如，人工智能中的知识表示和推理机制大多基于谓词逻辑。

### 5.1 谓词逻辑的基本概念

命题逻辑以原子命题为基本单位，研究复合命题之间的逻辑关系和推理关系。但是，有些推理关系用命题逻辑难以确切表达。典型的例子是苏格拉底三段论：

- （1）所有的人都是会死的。
- （2）苏格拉底是人。
- （3）所以苏格拉底是会死的。

显然，结论是前提合理的结果，即推理是正确的。

如果将三段论推理符号化，可以得到：

- （1） $p$ ：所有的人都是会死的。
- （2） $q$ ：苏格拉底是人。
- （3） $r$ ：苏格拉底是会死的。

前提是 $p$ 和 $q$ ，结论是 $r$ 。需证明的目标是： $\{p, q\} \models r$ 。

在苏格拉底三段论中，各命题的逻辑关系不是体现在原子命题之间，而是体现在构成原子命题内部的组成部分之间，即体现在命题结构的更深层次上。 $p$ 是对所有人情况的判断，其中也包括 $q$ 。 $q$ 和 $r$ 都是关于苏格拉底一个人的判断。这些逻辑关系在命题表达时被淹没了。

在研究某些推理时，有必要对原子命题作进一步分析，分解出其中的各个成分：个体、谓词和量词等。研究它们的形式结构、逻辑关系和推理规则，这些正是谓词逻辑的主要研究内容。

---

<sup>①</sup> 体现了谓词逻辑中的量词概念。

### 5.1.1 个体和谓词

**定义 5.1** (个体) 表示主体或客体成分的词称为个体 (词)。个体可以是具体的或是抽象的。

**例 5.1** 天安门、熊猫、思想和数字“2”等都是个体。

**定义 5.2** (个体常元与个体变元) 个体常元表示具体的、确定的个体的词。用小写字母  $a, b, c, \dots$  表示。个体变元表示不确定的个体的词。用小写字母  $x, y, z, \dots$  表示。

**例 5.2** 以下是谓词逻辑中的典型命题。

- (1) 我是大学生。
- (2) 小张喜欢橘猫。

在命题中所出现的每个个体都是个体常元。

**定义 5.3** (谓词) 表示一个个体性质或多个个体之间关系的词称为谓词。表示一个个体性质的谓词称为一元谓词, 表示  $n$  个个体之间关系的谓词称为  $n$  元谓词。

**例 5.3** 以下是体现谓词的实例。

- (1) “某某是大学生”表示一个个体性质。
- (2) “82分在80分到90分这个区间内”表示多个个体之间关系。

**定义 5.4** (谓词常元与谓词变元) 谓词常元表示具体性质或具体关系的谓词。谓词变元表示抽象或泛指的性质或关系的谓词。

谓词一般用大写英文字母  $P, Q, R, \dots$  来表示。

**定义 5.5** (原子命题) 一个原子命题用一个谓词  $P$  和  $n$  个有序的个体常元  $a_1, a_2, \dots, a_n$  表示成  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , 称它为该原子命题的谓词形式。

在谓词逻辑里, 符号化一个原子命题是基本的任务。

**例 5.4** 以下是几个谓词逻辑符号化的实例。

- (1) 7是素数, 可以符号化为  $P(a)$ , 其中谓词  $P$  表示“……是素数”, 个体  $a$  表示“7”。
- (2) 小张喜欢橘猫, 可以符号化为  $F(a, b)$ , 其中谓词  $F$  表示“……喜欢……”, 个体  $a$  表示“小张”, 个体  $b$  表示“橘猫”。
- (3) 周二位于周一和周三之间, 可以符号化为  $G(a, b, c)$ , 其中谓词  $G$  表示“……位于……和……之间”, 个体  $a$  表示“周二”, 个体  $b$  表示“周一”, 个体  $c$  表示“周三”。

**例 5.5** 同样的自然语言, 如“张三是大学生, 李四是大学生”在命题逻辑和谓词逻辑中的符号化结果可能不同。

在命题逻辑中的符号化结果可以是:  $p$  表示张三是大学生,  $q$  表示李四是大学生。

在谓词逻辑中的符号化结果可以是:  $S(a)$  表示张三是大学生,  $S(b)$  表示李四是大学生。其中谓词  $S$  表示“……是大学生”, 个体  $a$  表示“张三”, 个体  $b$  表示“李四”。

在命题逻辑符号化的结果中,  $p$  和  $q$  没有任何联系。而在谓词逻辑符号化的结果中,  $S(a)$  和  $S(b)$  反映出了两者的联系, 即两者同是大学生。

**定义 5.6** 一个由谓词  $P$  和  $n$  ( $n \geq 1$ ) 个个体变元  $x_1, x_2, \dots, x_n$  组成的符号串  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为  $n$  元谓词。

- (1)  $n = 1$ , 一元谓词, 如:  $P(x)$  表示  $x$  喜欢动物。
- (2)  $n = 2$ , 二元谓词, 如:  $Q(x, y)$  表示  $x$  和  $y$  是同学。
- (3)  $n = 3$ , 三元谓词, 如:  $R(x, y, z)$  表示  $x + y = z$ 。

**注意** 有时将原子命题的谓词形式称为零元谓词,  $P(a)$ 、 $F(a, b)$  和  $G(a, b, c)$  等都是零元谓词。由于命题逻辑中的命题均可表示成零元谓词, 所以可以将命题看作特殊的谓词。

### 5.1.2 量词

谓词本身不是命题, 只有其中的所有个体变元用特定的个体取代, 有确定的值后, 才成为一个命题。个体变元可用哪些特定个体取代, 可在什么范围内取值, 对其真值有很大的影响。

**定义 5.7** (个体域) 个体变元取值的范围称为个体域或论域。

**例 5.6** 已知  $P(x, y) : x^2 + y^2 = 0$ , 如果  $x$  和  $y$  的个体域均为全体正数, 那么对  $x$  和  $y$  的任何取值,  $P(x, y)$  均为假; 如果  $x$  和  $y$  的个体域均为全体实数, 那么除  $P(0, 0)$  是一个真命题之外, 其余情形均是假命题。

**例 5.7** 已知  $S(x) : x$  是某化工大学学生, 如果  $x$  的个体域为该化工大学的全体师生, 那么  $x$  的取值为某个学生时,  $S(x)$  为真命题, 其余取值  $S(x)$  为假命题。如果  $x$  的个体域为该化工大学全体学生, 那么  $x$  任一取值  $S(x)$  均为真命题。

在命题中除了个体和谓词之外, 有时还会出现一些表示数量的词, 这些词称为量词。

**定义 5.8** (量词) 在谓词逻辑中, 表示数量的词称为量词。量词分为三类。

- (1) 全称量词: 表示“所有”“一切”“任意的”等数量的词, 用符号  $\forall$  表示。
- (2) 存在量词: 表示“存在一些”“有一个”“至少有一个”等数量的词, 用符号  $\exists$  表示。
- (3) 存在唯一量词: 表示“存在着唯一的”“恰有一个”等数量的词, 用符号  $\exists!$  表示。

**注意** 符号  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\exists!$  不能单独使用。还需引入一个个体变元 (如  $x$ ) 作为量词的指导变元置于这些符号之后, 形成  $\forall x$ ,  $\exists x$ ,  $\exists! x$  形式的量词, 分别表示“对于所有的  $x$ ”“存在至少一个  $x$ ”“恰有一个  $x$ ”之意。

量词可以放到  $n$  元谓词之前作为其组成部分, 对个体变元在个体域中的取值作进一步的约束。

**例 5.8** 不同的量词表示不同的意义:

- (1)  $\forall x P(x)$  表示个体域中的所有个体均满足  $P(x)$ 。
- (2)  $\exists x Q(x)$  表示个体域中至少有一个个体满足  $Q(x)$ 。
- (3)  $\exists! x R(x)$  表示个体域中恰有一个个体满足  $R(x)$ 。

**例 5.9** 将下列命题符号化, 要求分析出量词、个体和谓词。

- (1) 所有的大学生都会说英语。
- (2) 有一些大学生会说英语。
- (3) 凡自然数都是整数。
- (4) 有些老虎是白色的。
- (5) 存在着唯一的偶素数。

**解** (1) 命题符号化为  $\forall xE(x)$ 。其中  $x$  的个体域为全体大学生,  $E(x)$  表示  $x$  会说英语。

- (2) 命题符号化为  $\exists xE(x)$ 。其中  $x$  的个体域为全体大学生,  $E(x)$  表示  $x$  会说英语。
- (3) 命题符号化为  $\forall xI(x)$ 。其中  $x$  的个体域为自然数集,  $I(x)$  表示  $x$  是整数。
- (4) 命题符号化为  $\exists xW(x)$ 。其中  $x$  的个体域为所有的老虎,  $W(x)$  表示  $x$  是白色的。
- (5) 命题符号化为  $\exists!xR(x)$ 。其中  $x$  的个体域为偶数集,  $R(x)$  表示  $x$  是素数。

**定义 5.9** (全总论域) 一个命题函数中所有个体的论域合在一起构成的论域, 称为命题函数的全总论域。

**例 5.10** 教师的年龄比学生大。  $P(x, y)$  表示  $x$  的年龄比  $y$  大, 其中  $x$  的个体域为全体教师的集合  $T$ ,  $y$  的个体域为全体学生的集合  $S$ 。这里的全总论域是教师和学生一起形成的集合, 即  $T \cup S$ 。

**定义 5.10** (特性谓词) 对每个个体变元的真正取值范围, 也可使用一个谓词来加以限制, 称之为特性谓词。

**例 5.11** 可以使用特性谓词的表达。

- (1) 所有的大学生都会说英语:  $\forall x(S(x) \rightarrow E(x))$ , 其中  $S(x)$  表示  $x$  是大学生,  $E(x)$  表示  $x$  会说英语。
- (2) 有一些大学生会说英语:  $\exists x(S(x) \wedge E(x))$ , 其中  $S(x)$  表示  $x$  是大学生,  $E(x)$  表示  $x$  会说英语。
- (3) 凡自然数都是整数:  $\forall x(N(x) \rightarrow I(x))$ , 其中  $N(x)$  表示  $x$  是自然数,  $I(x)$  表示  $x$  是整数。
- (4) 有些老虎是白色的:  $\exists x(M(x) \wedge W(x))$ , 其中  $M(x)$  表示  $x$  是老虎,  $W(x)$  表示  $x$  是白色的。
- (5) 存在着唯一的偶素数:  $\exists!x(Q(x) \wedge R(x))$ , 其中  $Q(x)$  表示  $x$  是偶数,  $R(x)$  表示  $x$  是素数。

**定义 5.11** (谓词的量化) 给谓词加上量词, 称为谓词的量化。

**例 5.12** 已知  $L(x): x + 3 > 7$ , 设个体域分别如下。

- (1)  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ 。
- (2)  $\{-5, 0, 3, 5, 6\}$ 。
- (3)  $\{20, 30, 40, 50\}$ 。

考查命题  $\forall xL(x)$  及  $\exists xL(x)$  的真值。

**解** 命题  $\forall xL(x)$  及  $\exists xL(x)$  的真值分别如下。

- (1) 当个体域为  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$  时, 命题  $\forall xL(x)$  为 F,  $\exists xL(x)$  为 F。  
 (2) 当个体域为  $\{-5, 0, 3, 5, 6\}$  时, 命题  $\forall xL(x)$  为 F,  $\exists xL(x)$  为 T。  
 (3) 当个体域为  $\{20, 30, 40, 50\}$  时, 命题  $\forall xL(x)$  为 T,  $\exists xL(x)$  为 T。

可见, 个体域的改变可能影响命题的真值。

## 5.2 谓词公式

**定义 5.12**(原子谓词公式) 设  $P$  是  $n$  元谓词,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是个体变元或个体常元, 则  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  称为原子谓词公式。特别地, 当  $n = 0$  时, 原子谓词公式  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  就是命题常元或命题变元  $P$ , 因此命题常元和命题变元也是原子谓词公式。

**定义 5.13**(复合谓词公式) 复合谓词公式由量词和联结词将原子谓词公式联结组成。

**定义 5.14**(谓词公式的递归定义) 谓词公式可递归定义如下。

- (1) 原子谓词公式是谓词公式。
- (2) 如果  $A$  是谓词公式, 则  $\neg A$  也是谓词公式。
- (3) 如果  $A, B$  是谓词公式, 则  $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B$  和  $A \leftrightarrow B$  等也是谓词公式。
- (4) 如果  $A$  是谓词公式,  $x$  是个体变元, 则  $\forall xA$  和  $\exists xA$  也是谓词公式。
- (5) 有限次使用规则 (1) ~ (4) 所得到的由原子谓词公式、逻辑联结词、量词和圆括号组成的符号串是谓词公式。

**例 5.13** 以下是一些谓词公式的例子:

$$\begin{aligned}
 &P(x, y, z) \\
 &P(a, 2) \wedge Q(x) \\
 &\exists yL(x, y) \rightarrow R(x) \\
 &\forall x(P(x, y) \rightarrow \exists yQ(y)) \\
 &\forall x((R(x) \rightarrow P(x)) \wedge S(x)) \\
 &\exists x\exists y(D(y) \vee E(x, y)) \rightarrow \forall xC(x)
 \end{aligned}$$

### 5.2.1 谓词逻辑符号化

**定义 5.15**(命题符号化) 把一个用自然语言描述的命题表示成谓词公式的形式, 称为谓词逻辑中命题的符号化。

**例 5.14** 设个体域为实数集, 将下列命题符号化。

- (1) 任一实数或者是有理数, 或者是无理数。
- (2) 对于每个实数  $x$  都存在一个实数  $y$ , 使得  $x + y = 0$ 。

**解** 命题符号化如下。

(1) 令  $U(x)$  表示  $x$  是有理数,  $V(x)$  表示  $x$  是无理数。命题符号化为  $\forall x(U(x) \vee V(x))$ 。

(2) 令  $E(x, y)$  表示  $x + y = 0$ 。命题符号化为  $\forall x \exists y E(x, y)$  ( $\forall x \exists y (x + y = 0)$ )。

谓词逻辑中命题符号化可以通过以下几个步骤实现。

(1) 找出命题中各原子命题和联结词。

(2) 分解出每个原子命题的个体、谓词和量词。

(3) 确定每个个体的个体域, 若在全总论域中讨论, 则给出相应的特性谓词。

(4) 按照谓词公式的表示规则将命题翻译出来。

**例 5.15** 试将下列命题符号化。

(1) 每列火车都比某些汽车快。

(2) 某些汽车比所有火车快。

(3) 不存在比一切数都大的数。

(4) 有种液体可以溶解所有金属。

**解** 命题符号化如下。

(1) 令  $F(x)$  表示  $x$  是火车,  $G(y)$  表示  $y$  是汽车,  $H(x, y)$  表示  $x$  比  $y$  快。命题符号化为  $\forall x(F(x) \rightarrow \exists y(G(y) \wedge H(x, y)))$ 。

(2) 令  $F(x)$  表示  $x$  是火车,  $G(y)$  表示  $y$  是汽车,  $H(x, y)$  表示  $x$  比  $y$  快。命题符号化为  $\exists y(G(y) \wedge \forall x(F(x) \rightarrow H(y, x)))$ 。

(3) 令  $F(x)$  表示  $x$  是数,  $G(x, y)$  表示  $x$  比  $y$  大。命题符号化为  $\neg \exists x(F(x) \wedge \forall y(F(y) \rightarrow G(x, y)))$ 。

(4) 令  $F(x)$  表示  $x$  是液体,  $G(y)$  表示  $y$  是金属,  $H(x, y)$  表示  $x$  可以溶解  $y$ 。命题符号化为  $\exists x(F(x) \wedge \forall y(G(y) \rightarrow H(x, y)))$ 。

**定义 5.16** (约束部分与辖域) 给定谓词公式  $A$ , 其中形如  $\forall x P(x)$  或  $\exists x P(x)$  的部分, 称为谓词公式  $A$  的  $x$  约束部分,  $P(x)$  称为量词  $\forall$  或  $\exists$  的辖域。

**定义 5.17** (约束变元与自由变元)  $x$  在谓词公式  $A$  的  $x$  约束部分的任何出现都称为  $x$  的约束出现, 并称  $x$  为约束变元。在谓词公式中, 当  $x$  的出现不是约束出现时, 称  $x$  的出现是自由出现, 称自由出现的变元为自由变元。

**例 5.16** 指出下列谓词公式中各量词的辖域和变元约束的情况。

(1)  $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$ 。

(2)  $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)) \wedge R(x)$ 。

(3)  $\exists x \forall y(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \wedge R(y)))$ 。

(4)  $\forall x(P(x, y) \wedge Q(y)) \rightarrow \exists y R(x, y)$ 。

(5)  $\forall x P(y, z) \rightarrow \exists y Q(y)$ 。

**解** 辖域和变元约束的情况如下。

(1)  $\exists x$  的辖域是  $P(x) \wedge Q(x)$ ,  $x$  是约束变元。

(2)  $\forall x$  的辖域是  $P(x) \rightarrow \exists y Q(x, y, z)$ ,  $\exists y$  的辖域是  $Q(x, y, z)$ 。 $x$  和  $y$  是约束变元,  $z$  是自由变元,  $R(x)$  中的  $x$  是自由变元。在整个谓词公式中,  $x$  既是约束出现又是自由出现,  $y$  为约束出现,  $z$  为自由出现。

(3)  $\exists x$  的辖域是  $\forall y(P(x, y) \rightarrow (Q(x) \wedge R(y)))$ ,  $\forall y$  的辖域是  $P(x, y) \rightarrow (Q(x) \wedge R(y))$ ,  $x$  和  $y$  是约束变元。在整个谓词公式中,  $x$  和  $y$  为约束出现。

(4)  $\forall x$  的辖域为  $P(x, y) \wedge Q(y)$ ,  $x$  是约束变元,  $y$  是自由变元。 $\exists y$  的辖域是  $R(x, y)$ ,  $x$  是自由变元,  $y$  是约束变元。在整个谓词公式中,  $x$  和  $y$  既是自由出现又是约束出现。

(5)  $\forall x$  的辖域是  $P(y, z)$ ,  $y$  和  $z$  是自由变元。 $\exists y$  的辖域是  $Q(y)$ ,  $y$  是约束变元。在整个谓词公式中,  $z$  为自由出现,  $y$  既是自由出现也是约束出现。

在一个谓词公式中, 个体变元可以作为自由变元, 也可以作为约束变元, 还可以同时作为自由变元和约束变元出现。

一个变元在一个谓词公式中可能既约束出现又自由出现, 为避免由此引起的混乱, 可对约束变元进行换名, 使每个个体变元在一个谓词公式中只以一种形式出现, 或是自由出现, 或是约束出现。

一个约束变元在谓词公式中所使用的名称符号是不重要的, 所以变元使用符号的更改并不改变谓词公式的含义。

**例 5.17** 以下结论显然成立。

(1)  $\forall xP(x)$  与  $\forall yP(y)$  具有相同的意义。

(2)  $\exists xQ(x)$  与  $\exists yQ(y)$  具有相同的意义。

具体地, 约束变元的换名规则如下。

(1) 对于约束变元的换名, 其换名范围是量词辖域中的某个约束出现的个体变元, 谓词公式中的其他部分不变。

(2) 换名时要换成在辖域中未曾出现的符号, 最好是谓词公式中未出现过的符号。

**例 5.18** 对谓词公式:

$$(\forall x(P(x) \rightarrow (R(x) \vee Q(x))) \wedge \exists xR(x)) \rightarrow \exists zS(x, z)$$

的约束变元换名, 可换名为

$$(\forall y(P(y) \rightarrow (R(y) \vee Q(y))) \wedge \exists wR(w)) \rightarrow \exists zS(x, z)$$

换名后, 每个个体变元在一个谓词公式中只以一种形式出现, 或是自由出现, 或是约束出现。

自由变元的代入规则如下。

(1) 对于谓词公式中的自由变元可以代入, 且代入时需对该自由变元的所有出现同时进行代入。

(2) 用来代入的可以是个体常元和个体变元, 代入时所选用的符号应是原谓词公式中没有出现的。

**例 5.19** 对于谓词公式:

$$(\forall x(R(x, y) \vee S(x)) \rightarrow Q(x)) \wedge \exists zP(x, y, z)$$

可将自由变元  $x$  代入自由变元  $w$ , 得到谓词公式:

$$(\forall x(R(x, y) \vee S(x)) \rightarrow Q(w)) \wedge \exists zP(w, y, z)$$

代入后, 每个个体变元在一个谓词公式中只以一种形式出现, 或是自由出现, 或是约束

出现。

**注意** 量词对变元的约束与量词出现的次序有关。

**例 5.20** 以下例子说明量词对变元的约束与量词出现的次序有关。

(1)  $\forall x \exists y (x + y = 0)$  表示“对于任意的实数  $x$ ，均存在实数  $y$ ，使得  $x + y = 0$ ”，这是一个真命题。

(2)  $\exists y \forall x (x + y = 0)$  表示“存在实数  $y$ ，使得对于任意的实数  $x$  均有  $x + y = 0$ ”，这是一个假命题。

显然，改变量词出现的次序对命题的真值产生影响。

## 5.2.2 谓词公式的解释

一个谓词公式仅由一些抽象符号组成。只有在对其进行解释后才有真正的意义，对其赋值后才有真值。例如， $S(x) \wedge \exists x Q(x)$  本身是没有任何意义的。

**定义 5.18** (谓词公式的解释) 谓词公式的解释 (Interpretation) 是一系列操作，具体包括定义个体域，说明谓词符号和运算符的具体含义等。谓词公式的解释是抽象符号与个体域上的具体性质、关系、运算间的映射，常用  $I$  表示。

同样的谓词公式，在不同的解释下所具有的意义是不同的。

**定义 5.19** (谓词公式的赋值) 当给定谓词公式的一种解释后，对公式中的个体变元用其个体域中确定的个体代入，命题变元用确定的命题代入，称为谓词公式的赋值。

一个谓词公式一经赋值，就成为具有确定真值的命题。

**例 5.21** 给定以下解释  $I$ ，试讨论  $S(x)$ ， $\exists x S(x)$ ， $S(x) \wedge \exists x S(x)$  的真值。

(1)  $I_1$ : 个体域  $D_1 = \{3, 4\}$ ， $S(x)$  表示  $x$  是素数。

(2)  $I_2$ : 个体域  $D_2 = \{3, 4\}$ ， $S(x)$  表示  $x$  是偶数。

(3)  $I_3$ : 个体域  $D_3 = \{3, 5\}$ ， $S(x)$  表示  $x$  是素数。

(4)  $I_4$ : 个体域  $D_4 = \{3, 5\}$ ， $S(x)$  表示  $x$  是偶数。

**解**  $S(x)$ ， $\exists x S(x)$ ， $S(x) \wedge \exists x S(x)$  的真值表如表 5.1 所示。

表 5.1  $S(x)$ ， $\exists x S(x)$ ， $S(x) \wedge \exists x S(x)$  的真值表

|       | $x$ | $S(x)$ | $\exists x S(x)$ | $S(x) \wedge \exists x S(x)$ |
|-------|-----|--------|------------------|------------------------------|
| $I_1$ | 3   | T      | T                | T                            |
| $I_1$ | 4   | F      | T                | F                            |
| $I_2$ | 3   | F      | T                | F                            |
| $I_2$ | 4   | T      | T                | T                            |
| $I_3$ | 3   | T      | T                | T                            |
| $I_3$ | 5   | T      | T                | T                            |
| $I_4$ | 3   | F      | F                | F                            |
| $I_4$ | 5   | F      | F                | F                            |

在表5.1中, 第1列是不同的解释, 第2列是某种解释下不同的赋值, 第3~5列分别是  $S(x)$ ,  $\exists xS(x)$ ,  $S(x) \wedge \exists xS(x)$  的真值列。对于同一种解释  $I_1$ ,  $S(x)$  的真值是不确定的。当  $x = 3$  时,  $S(x)$  的真值是 T; 当  $x = 4$  时,  $S(x)$  的真值是 F。一旦  $x$  赋值,  $S(x)$  也就成为具有确定真值的命题。

给定谓词公式  $A$  的解释  $I$ , 若  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是  $A$  中出现的个体变元,

(1) 如果  $x_1, x_2, \dots, x_n$  赋值为  $t_1, t_2, \dots, t_n$  时  $A$  为真, 那么称  $A$  在  $t_1, t_2, \dots, t_n$  处为真。

(2) 如果  $x_1, x_2, \dots, x_n$  在解释  $I$  中的每个赋值  $A$  均为真, 那么称  $A$  在解释  $I$  下为真。

**例 5.22** 在某种赋值下为真, 在某种解释下为真, 是两种不同的概念。例如:

(1) 给定解释  $I$ : 个体域  $D = \{3, 4, 5\}$ ,  $S(x)$  表示  $x$  大于 2,  $T(x)$  表示  $x$  小于 6, 则  $S(x) \wedge T(x)$  在  $x = 3, 4, 5$  时均为真, 所以  $S(x) \wedge T(x)$  在解释  $I$  下为真。

(2) 给定解释  $I$ : 个体域  $D = \{-5, -4, 1, 2\}$ ,  $Q(x)$  表示  $x$  大于 3, 则  $x$  在  $-5, -4, 1, 2$  处均为假,  $Q(x)$  在解释  $I$  下为假。

(3) 给定解释  $I$ : 个体域  $D_x = \{1, 2, 3\}$ ,  $D_y = \{1, 4, 5\}$ ,  $Q(x, y)$  表示  $x < y$ , 则  $\{x, y\}$  在  $\{1, 1\}, \{2, 1\}, \{3, 1\}$  处,  $Q(x, y)$  为假, 其余为真。

**定义 5.20** (永真式、永假式和可满足式) 如果谓词公式  $A$  在每一解释  $I$  下均为真, 则称  $A$  为永真式; 如果谓词公式  $A$  在每一解释  $I$  下均为假, 则称  $A$  为永假式; 如果谓词公式  $A$  不是永假式, 则称  $A$  为可满足式。

**例 5.23**  $P(x) \vee \neg P(x)$  是永真式,  $Q(x) \wedge \neg Q(x)$  是永假式,  $P(x) \vee \exists xQ(x)$  是可满足式。

**例 5.24** 判断谓词公式:

$$(\forall xF(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall xF(x) \rightarrow \forall xG(x))$$

是否为永真式。

**解** 设个体域  $D = \{2, 4, 6, 8\}$ ;  $F(x)$  表示  $x$  能被 2 整除;  $G(x)$  表示  $x$  能被 4 整除。那么  $\forall xF(x)$  的真值为 T,  $\forall xG(x)$  的真值为 F, 故  $\forall xF(x) \rightarrow \forall xG(x)$  的真值为 F;  $G(4)$  的真值为 T, 因此有  $\forall xF(x) \rightarrow G(4)$  的真值为 T。于是,

$$(\forall xF(x) \rightarrow G(4)) \rightarrow (\forall xF(x) \rightarrow \forall xG(x))$$

的真值为 F。也就是说, 该公式不是永真式。

**例 5.25** 判断谓词公式  $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$  是否为永真式。

**解** 任意给定个体域  $D$ , 假定在该解释下  $\forall xA(x)$  为真, 则对于任意  $d \in D$ , 均有  $A(d)$  为真, 因此  $A(y)$  为真。故  $\forall xA(x) \rightarrow A(y)$  为永真式。

**例 5.26** 谓词公式  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  是否为可满足式?

**解** 定义解释  $I$ : 个体域  $D$  为整数集,  $P(x)$  表示  $x$  是整数,  $Q(x)$  表示  $x$  是有理数。在解释  $I$  下,  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  为真, 所以  $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$  是可满足式。

### 5.2.3 等价式和蕴涵式

**定义 5.21 (等价)** 设  $A$  和  $B$  是谓词公式, 若  $A \leftrightarrow B$  为永真式, 则称  $A$  和  $B$  是等价的 (或等值的), 记为  $A \Leftrightarrow B$ 。

$A \Leftrightarrow B$  表明在任意的解释下,  $A$  与  $B$  都具有相同的值。

**例 5.27**  $\forall x \neg \neg P(x) \Leftrightarrow \forall x P(x)$ 。

**定义 5.22 (蕴涵)** 设  $A$  和  $B$  是谓词公式, 若  $A \rightarrow B$  为永真式, 则称  $A$  永真蕴涵 (简称蕴涵)  $B$ , 记为  $A \Rightarrow B$ 。

$A \Rightarrow B$  表明在任意的解释下, 一切使  $A$  为真的赋值均使  $B$  为真。

**例 5.28**  $\exists x P(x) \Rightarrow \exists x \neg \neg P(x)$ 。

在谓词逻辑中, 可以通过以下一些方法得到等价式和永真蕴涵式。

(1) 命题演算中永真式的推广。

由于谓词演算中允许使用命题常元和命题变元, 因而谓词公式中仍可含有命题公式, 其中永真的命题公式在谓词演算中仍然是永真式。

在命题演算的永真式中, 若将其中的同一命题变元统一改为某谓词公式, 不会影响其永真性, 即可得到谓词演算中的永真式。

**例 5.29** 命题演算的等价式:

$$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$$

如果用  $\forall x P(x)$  代替  $A$ ,  $\exists x Q(x)$  代替  $B$ , 就得到谓词演算的等价式:

$$\neg(\forall x P(x) \vee \exists x Q(x)) \Leftrightarrow (\neg \forall x P(x) \wedge \neg \exists x Q(x))$$

也就是说, 命题演算中的等价式和永真蕴涵式在谓词演算中都是成立的。

**例 5.30** 以下是命题演算中的等价式和永真蕴涵式在谓词演算中也成立的例子:

$$\forall x P(x, y) \vee \exists x Q(x) \Leftrightarrow \exists x Q(x) \vee \forall x P(x, y)$$

$$\forall x (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \forall x (\neg P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x P(x) \wedge (\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x)) \Rightarrow \exists x Q(x)$$

(2) 量词的转换律。

全称量词  $\forall$  与存在量词  $\exists$  可以互相转换:

$$\neg \forall x \neg A(x) \Leftrightarrow \exists x A(x)$$

$$\neg \exists x \neg A(x) \Leftrightarrow \forall x A(x)$$

$$\neg \forall x A(x) \Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

(5.1)

(3) 量词辖域的扩张与收缩律。

设  $B$  是不含个体变元  $x$  的谓词公式, 那么

$$\begin{aligned}
 \forall x(A(x) \vee B) &\Leftrightarrow \forall x A(x) \vee B \\
 \forall x(A(x) \wedge B) &\Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge B \\
 \exists x(A(x) \vee B) &\Leftrightarrow \exists x A(x) \vee B \\
 \exists x(A(x) \wedge B) &\Leftrightarrow \exists x A(x) \wedge B
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

在这些等价式中, 等价式的左边相当于等价式的右边在辖域上的扩张。

(4) 量词的分配律。

$$\begin{aligned}
 \forall x(A(x) \wedge B(x)) &\Leftrightarrow \forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \\
 \exists x(A(x) \vee B(x)) &\Leftrightarrow \exists x A(x) \vee \exists x B(x)
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

**注意** 尽管全称量词  $\forall$  与存在量词  $\exists$ 、 $\wedge$  与  $\vee$  相互之间的组合应该有 4 种, 但是并非 4 种组合都满足量词的分配律。除上面两个等价式之外, 剩下的两种组合不是等价式。

(5) 量词的消去。

在某一解释  $I$  下, 若个体域为有限集, 如  $D = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , 则由量词的定义可得

$$\begin{aligned}
 \forall x A(x) &\Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \dots \wedge A(a_n) \\
 \exists x A(x) &\Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \dots \vee A(a_n)
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

其中,  $A(a_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  为用  $a_i$  代入公式  $A(x)$  中自由出现的  $x$  得到的公式。

(6) 含有量词的永真蕴涵式。

$$\begin{aligned}
 \forall x A(x) \vee \forall x B(x) &\Rightarrow \forall x (A(x) \vee B(x)) \\
 \exists x (A(x) \wedge B(x)) &\Rightarrow \exists x A(x) \wedge \exists x B(x) \\
 \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) &\Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \\
 \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) &\Rightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

**注意** 这些永真蕴涵式的逆均不成立。

(7) 多个量词的使用。

$$\begin{aligned}
 \forall x \forall y A(x, y) &\Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y) \\
 \exists x \exists y A(x, y) &\Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y) \\
 \forall x \forall y A(x, y) &\Rightarrow \exists y \forall x A(x, y) \\
 \forall y \forall x A(x, y) &\Rightarrow \exists x \forall y A(x, y) \\
 \exists y \forall x A(x, y) &\Rightarrow \forall x \exists y A(x, y) \\
 \exists x \forall y A(x, y) &\Rightarrow \forall y \exists x A(x, y) \\
 \forall x \exists y A(x, y) &\Rightarrow \exists y \exists x A(x, y) \\
 \forall y \exists x A(x, y) &\Rightarrow \exists x \exists y A(x, y)
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

量词次序不同, 其意义是不一样的, 不可随意交换。

**例 5.31**  $G(x, y)$ :  $x + y > 2$ , 个体域为实数集。

(1)  $\forall x \exists y G(x, y)$ : 对任意实数  $x$ , 都存在实数  $y$ , 有  $x + y > 2$ 。

(2)  $\exists y \forall x G(x, y)$ : 存在实数  $y$ , 使对任意实数  $x$ , 有  $x + y > 2$ 。

**例 5.32**  $A(x, y)$ :  $x$  和  $y$  同姓,  $x$  的个体域为甲村人集合,  $y$  的个体域为乙村人集合。

(1)  $\forall x \forall y A(x, y)$ : 甲村与乙村所有人都同姓。

(2)  $\forall y \forall x A(x, y)$ : 乙村与甲村所有人都同姓。

显然,  $\forall x \forall y A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$  成立。

(3)  $\exists x \exists y A(x, y)$ : 甲村与乙村有同姓的人。

(4)  $\exists y \exists x A(x, y)$ : 乙村与甲村有同姓的人。

显然,  $x \exists y A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$  成立。

(5)  $\forall x \exists y A(x, y)$ : 对于甲村的每一个人, 乙村都有跟他同姓的。

(6)  $\exists y \forall x A(x, y)$ : 乙村有一个人, 甲村所有人都跟他同姓。

此处,  $\forall x \exists y A(x, y)$  与  $\exists y \forall x A(x, y)$  不是等价的。

(7)  $\forall y \exists x A(x, y)$ : 对于乙村的每一个人, 甲村都有跟他同姓的。

(8)  $\exists x \forall y A(x, y)$ : 甲村有一个人, 乙村所有人都跟他同姓。

此处,  $\forall y \exists x A(x, y)$  与  $\exists x \forall y A(x, y)$  也不是等价的。

**注意** 式 (5.6) 中的 6 个蕴涵式的逆均不成立。

**定理 5.1** (置换规则) 设  $A$  为含有子公式  $A_1$  的公式, 用公式  $B_1$  置换公式  $A$  中的  $A_1$  得到公式  $B$ , 若  $A_1 \Leftrightarrow B_1$ , 则  $A \Leftrightarrow B$ 。

**证明** 由于  $A_1$  和  $B_1$  等价, 因而用  $B_1$  替换  $A_1$  不会改变  $A$  的真值, 因此  $A$  与  $B$  等价。■

**定理 5.2** (换名规则) 设  $x$  是辖域内的约束变元,  $y$  是在辖域内未曾出现的个体变元, 那么

$$\begin{aligned}\forall x A(x) &\Leftrightarrow \forall y A(y) \\ \exists x A(x) &\Leftrightarrow \exists y A(y)\end{aligned}\tag{5.7}$$

**定理 5.3** (代入规则) 设  $A$  为谓词公式, 将  $A$  中某自由变元的所有出现, 替换为  $A$  中未曾出现的某个体变元, 而  $A$  的其余部分不变, 得谓词公式  $B$ , 则  $A \Leftrightarrow B$ 。

**例 5.33** 设个体域  $D = \{a, b\}$ ,  $A$  和  $B$  的赋值如表 5.2 所示, 求  $\forall x \exists y (A(x) \rightarrow B(y))$  的真值。

表 5.2 例 5.33 中  $A$  和  $B$  的赋值

| $A(a)$ | $A(b)$ | $B(a)$ | $B(b)$ |
|--------|--------|--------|--------|
| T      | F      | T      | T      |

**解** 运用量词消去的规则, 先消去  $\exists$ , 再消去  $\forall$ 。

$$\forall x \exists y (A(x) \rightarrow B(y))$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \forall x((A(x) \rightarrow B(a)) \vee (A(x) \rightarrow B(b))) \\
&\Leftrightarrow ((A(a) \rightarrow B(a)) \vee (A(a) \rightarrow B(b))) \wedge ((A(b) \rightarrow B(a)) \vee (A(b) \rightarrow B(b))) \\
&\Leftrightarrow ((T \rightarrow T) \vee (T \rightarrow T)) \wedge ((F \rightarrow T) \vee (F \rightarrow T)) \\
&\Leftrightarrow T
\end{aligned}$$

因此,  $\forall x \exists y(A(x) \rightarrow B(y))$  的真值为真。

不过, 当个体域中的元素较多或有无限多元素时, 这种方法就变得不实际了。

**例 5.34** 求证:

$$\forall x(A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$$

**证明** 运用量词辖域的扩张与收缩律可得

$$\begin{aligned}
&\forall x(A(x) \rightarrow B) \\
&\Leftrightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B) \\
&\Leftrightarrow \forall x \neg A(x) \vee B
\end{aligned}$$

再运用量词的转换律可得

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg \exists x A(x) \vee B \\
&\Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B
\end{aligned}$$

■

**例 5.35** 求证:

$$\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$$

**证明** 运用量词辖域的扩张与收缩律可得

$$\begin{aligned}
&\exists x(A(x) \rightarrow B(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x(\neg A(x) \vee B(x)) \\
&\Leftrightarrow \exists x \neg A(x) \vee \exists x B(x)
\end{aligned}$$

再运用量词的转换律可得

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \neg \forall x A(x) \vee \exists x B(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)
\end{aligned}$$

■

**例 5.36** 求证:

$$\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \Leftrightarrow \forall x \exists y (P(x) \wedge Q(y))$$

**证明** 先运用换名规则可得

$$\begin{aligned}
&\forall x P(x) \wedge \exists x Q(x) \\
&\Leftrightarrow \forall x P(x) \wedge \exists y Q(y)
\end{aligned}$$

接下来, 反复运用量词辖域的扩张与收缩律可得

$$\Leftrightarrow \forall x(P(x) \wedge \exists yQ(y))$$

$$\Leftrightarrow \forall x\exists y(P(x) \wedge Q(y))$$

■

**例 5.37** 求证:

$$\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x) \Rightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$$

**证明** 运用量词的转换律可得

$$\exists xA(x) \rightarrow \forall xB(x)$$

$$\Leftrightarrow \neg\exists xA(x) \vee \forall xB(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x\neg A(x) \vee \forall xB(x)$$

运用含有量词的永真蕴涵式规则 (式 (5.5)) 可得

$$\Rightarrow \forall x(\neg A(x) \vee B(x))$$

$$\Leftrightarrow \forall x(A(x) \rightarrow B(x))$$

■

## 5.3 前束范式

**定义 5.23** (前束范式) 一个谓词公式, 如果它的所有量词均出现在公式的最前端, 而它们的作用域延伸到整个谓词公式的尾端, 则称该谓词公式为前束范式。

前束范式具有以下形式:

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_kx_kB$$

其中, 每个  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$  ( $1 \leq i \leq k$ ),  $B$  为不含量词的谓词公式。

如果谓词公式  $A$  中无量词,  $A$  也被看作前束范式, 如  $\neg A(x) \vee B(x)$ 。

**例 5.38** 以下谓词公式是前束范式:

$$U(x, y), \quad \forall x\forall y(S(x, w) \vee T(y))$$

$$\forall x\exists y\exists z(\neg P(x) \rightarrow (Q(y) \rightarrow R(z, y)))$$

**例 5.39** 以下谓词公式不是前束范式:

$$\forall xF(x, y) \rightarrow \exists yG(y)$$

$$\forall x\exists z(C(x, z) \wedge V(z))$$

**定理 5.4** (前束范式存在定理) 任何谓词公式均存在与其等价的前束范式。

可以通过以下步骤将谓词公式转换为前束范式。

(1) 将否定联结词向谓词公式内推入, 使之直接位于原子谓词公式之前。

(2) 利用换名规则和代入规则使所有约束变元符号均不相同, 自由变元与约束变元的符号也不相同。

(3) 利用等价式将量词逐个移至谓词公式之前。

**例 5.40** 将谓词公式  $\forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x)$  转换为前束范式。

**解** 下面用两种不同的方法将给定的谓词公式转换为前束范式。

方法 1:

$$\begin{aligned} & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \\ \Leftrightarrow & \neg \forall xP(x) \vee \exists xQ(x) \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg P(x) \vee \exists xQ(x) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee Q(x)) \end{aligned}$$

方法 2:

$$\begin{aligned} & \forall xP(x) \rightarrow \exists xQ(x) \\ \Leftrightarrow & \forall xP(x) \rightarrow \exists yQ(y) \\ \Leftrightarrow & \neg \forall xP(x) \vee \exists yQ(y) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x)) \vee \exists yQ(y) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x) \vee \exists yQ(y)) \\ \Leftrightarrow & \exists x \exists y(\neg P(x) \vee Q(y)) \\ \Leftrightarrow & \exists x \exists y(P(x) \rightarrow Q(y)) \end{aligned}$$

由此可见, 谓词公式的前束范式并不唯一。

**例 5.41** 将谓词公式  $\neg(\forall xP(x, y) \wedge \forall xQ(x, z)) \rightarrow \exists yR(y, x)$  转换为前束范式。

**解** 转换过程如下:

$$\begin{aligned} & \neg(\forall xP(x, y) \wedge \forall xQ(x, z)) \rightarrow \exists yR(y, x) \\ \Leftrightarrow & (\neg \forall xP(x, y) \vee \neg \forall xQ(x, z)) \rightarrow \exists yR(y, x) \\ \Leftrightarrow & (\exists x \neg P(x, y) \vee \exists x \neg Q(x, z)) \rightarrow \exists yR(y, x) \\ \Leftrightarrow & \exists x(\neg P(x, y) \vee \neg Q(x, z)) \rightarrow \exists yR(y, x) \\ \Leftrightarrow & \exists u(\neg P(u, y) \vee \neg Q(u, z)) \rightarrow \exists vR(v, x) \\ \Leftrightarrow & \exists u(\neg(\neg P(u, y) \vee \neg Q(u, z)) \vee \exists vR(v, x)) \\ \Leftrightarrow & \exists u \exists v(\neg(\neg P(u, y) \vee \neg Q(u, z)) \vee R(v, x)) \\ \Leftrightarrow & \exists u \exists v((\neg P(u, y) \vee \neg Q(u, z)) \rightarrow R(v, x)) \end{aligned}$$

显然,  $\exists u \exists v((\neg P(u, y) \vee \neg Q(u, z)) \rightarrow R(v, x))$  为前束范式。

**定义 5.24** (前束析取/合取范式) 一个前束范式, 若其不含量词的部分为析取范式, 称为前束析取范式; 若其不含量词的部分为合取范式, 则称为前束合取范式。

**例 5.42** 以下是前束析取范式与前束合取范式的实例。

(1)  $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x))$  是前束合取范式。

(2)  $\forall x \exists y \exists z ((R(x, y, z) \wedge S(x)) \vee Q(x))$  是前束析取范式。

**定理 5.5** (前束析取/合取范式存在定理) 任何谓词公式均可转换为与其等价的前束析取范式或前束合取范式。

可以通过以下步骤将任何谓词公式转换为前束析取范式或前束合取范式。

(1) 将谓词公式中的联结词全部转换为  $\neg$ 、 $\wedge$  和  $\vee$ 。

(2) 将公式转换为前束范式。

(3) 利用分配律将公式进一步转换为前束析取范式或前束合取范式。

**例 5.43** 求  $\exists x A(x) \rightarrow \exists y B(y)$  的前束析取范式与前束合取范式。

**解** 转换过程如下：

$$\begin{aligned} & \exists x A(x) \rightarrow \exists y B(y) \\ \Leftrightarrow & \neg \exists x A(x) \vee \exists y B(y) \\ \Leftrightarrow & \forall x \neg A(x) \vee \exists y B(y) \\ \Leftrightarrow & \forall x (\neg A(x) \vee \exists y B(y)) \\ \Leftrightarrow & \forall x \exists y (\neg A(x) \vee B(y)) \end{aligned}$$

这里的  $\forall x \exists y (\neg A(x) \vee B(y))$  既是前束析取范式，又是前束合取范式。

**例 5.44** 求  $\forall x (F(x) \vee H(y)) \rightarrow \forall y G(x, y)$  的前束析取范式与前束合取范式。

**解** 转换过程如下：

$$\begin{aligned} & \forall x (F(x) \vee H(y)) \rightarrow \forall y G(x, y) \\ \Leftrightarrow & \neg \forall x (F(x) \vee H(y)) \vee \forall y G(x, y) \\ \Leftrightarrow & \exists x \neg (F(x) \vee H(y)) \vee \forall y G(x, y) \\ \Leftrightarrow & \exists v \neg (F(v) \vee H(y)) \vee \forall w G(x, w) \\ \Leftrightarrow & \exists v (\neg (F(v) \vee H(y)) \vee \forall w G(x, w)) \\ \Leftrightarrow & \exists v \forall w (\neg (F(v) \vee H(y)) \vee G(x, w)) \\ \Leftrightarrow & \exists v \forall w ((\neg F(v) \wedge \neg H(y)) \vee G(x, w)) \end{aligned}$$

此时，已得到前束析取范式：

$$\exists v \forall w ((\neg F(v) \wedge \neg H(y)) \vee G(x, w))$$

通过分配律，可得前束合取范式：

$$\exists v \forall w (\neg F(v) \vee G(x, w)) \wedge (\neg H(y) \vee G(x, w))$$

**例 5.45** 求  $\forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge \forall x (\exists z R(z, x) \rightarrow S(w))$  的前束析取范式。

解 转换过程如下:

$$\begin{aligned}
 & \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge \forall x (\exists z R(z, x) \rightarrow S(w)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge \forall x (\neg \exists z R(z, x) \vee S(w)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \exists y (P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge \forall x (\forall z \neg R(z, x) \vee S(w)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x (\exists y (P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge \forall z (\neg R(z, x) \vee S(w))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \exists y ((P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge \forall z (\neg R(z, x) \vee S(w))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \exists y \forall z ((P(x, y) \wedge Q(x)) \wedge (\neg R(z, x) \vee S(w))) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \exists y \forall z ((P(x, y) \wedge Q(x) \wedge \neg R(z, x)) \vee (P(x, y) \wedge Q(x) \wedge S(w)))
 \end{aligned}$$

已得到前束析取范式是

$$\forall x \exists y \forall z ((P(x, y) \wedge Q(x) \wedge \neg R(z, x)) \vee (P(x, y) \wedge Q(x) \wedge S(w)))$$

例 5.46 求  $\forall x (\exists y (A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow \exists z C(y, z))$  的前束合取范式。

解 转换过程如下:

$$\begin{aligned}
 & \forall x (\exists y (A(x, y) \wedge B(x)) \rightarrow \exists z C(y, z)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x (\neg \exists y (A(x, y) \wedge B(x)) \vee \exists z C(y, z)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x (\forall y (\neg A(x, y) \vee \neg B(x)) \vee \exists z C(y, z)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x (\forall w (\neg A(x, w) \vee \neg B(x)) \vee \exists z C(y, z)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \forall w \exists z (\neg A(x, w) \vee \neg B(x) \vee C(y, z))
 \end{aligned}$$

已得到前束合取范式是

$$\forall x \forall w \exists z (\neg A(x, w) \vee \neg B(x) \vee C(y, z))$$

## 5.4 谓词逻辑推理

第4章讨论了命题逻辑推理,介绍了推理的基本概念,并且介绍了如何通过命题逻辑推理规则进行推理。谓词逻辑引入了谓词和量词,能够表达更为复杂的推理过程。接下来,将详细介绍谓词逻辑的推理方法。

**定义 5.25** 对于命题形式  $A(x)$  来说,在量词  $\forall y$  或  $\exists y$  的范围内,如果不存在  $x$  的自由变元,则称  $A(x)$  对于变量  $y$  是自由的。

由定义可知,如果  $y$  不是  $A(x)$  的约束变元,则  $A(x)$  对于  $y$  一定是自由的。

例 5.47 在下列谓词公式中:

- (1)  $A(x) = \forall y P(y) \vee Q(x, y)$ 。
- (2)  $A(x) = \forall y P(y) \rightarrow (Q(x) \wedge Q(y))$ 。
- (3)  $A(x) = \forall y P(x, y) \rightarrow Q(x, y)$ 。

$$(4) A(x) = \forall y(P(y) \vee Q(x, y)).$$

$$(5) A(x) = \forall y(P(y) \vee \forall x Q(x, y)).$$

(1)、(2) 和 (5) 中的  $A(x)$  对变量  $y$  是自由的, 而 (3) 和 (4) 中的  $A(x)$  对  $y$  不是自由的。

**定义 5.26** (US 规则) US (Universal Specification) 规则是指全称量词具体化规则。具体形式是

$$\frac{\forall x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\forall x A(x)}{\therefore A(c)} \quad (5.8)$$

其中,  $c$  为个体域中任意个体常元。这里要求  $A(x)$  对  $y$  是自由的, 即  $y$  或  $c$  是取代了  $A(x)$  中所有自由出现的  $x$ 。

**例 5.48** 设个体域为实数集,  $L(x, y)$  表示  $x < y$ , 则  $\exists x \exists y L(x, y)$  解释为“对任何实数  $x$ , 都存在实数  $y$ , 使得  $x < y$ ”, 这是一个真命题。现在按表 5.3 的过程进行推理。

表 5.3 例 5.48 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                          | 推理依据      |
|------|-------------------------------|-----------|
| (1)  | $\forall x \exists y L(x, y)$ | P 规则      |
| (2)  | $\exists y L(y, y)$           | US 规则 (1) |

推理的结果表明“存在实数  $y$ , 使  $y < y$ ”, 显然这是不正确的推理结果。仔细分析, 不难得出错误的原因是:  $\exists y L(x, y)$  对  $y$  不是自由的。

**定义 5.27** (UG 规则) UG (Universal Generalization) 规则是指全称量词泛化规则。具体形式是

$$\frac{A(x)}{\therefore \forall y A(y)} \quad (5.9)$$

这里要求前提  $A(x)$  对于  $x$  的任意取值都成立, 并且  $A(x)$  对  $y$  是自由的, 且取代  $x$  的个体变元  $y$  不能在  $A(x)$  中约束出现。

**例 5.49** 设个体域为实数集,  $L(x, y)$  表示  $x < y$ , 按表 5.4 的过程进行推理。

表 5.4 例 5.49 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                          | 推理依据      |
|------|-------------------------------|-----------|
| (1)  | $\forall x \exists y L(x, y)$ | P 规则      |
| (2)  | $\exists y L(z, y)$           | US 规则 (1) |
| (3)  | $\forall y \exists y L(y, y)$ | UG 规则 (2) |

推理的结果表明“对于任意的实数  $y$ , 存在实数  $y$ , 使  $y < y$ ”, 显然这是不正确的推理结果。仔细分析, 不难得出错误的原因是:  $\exists y L(z, y)$  中约束出现的  $y$  取代了  $z$ 。

**定义 5.28** (ES 规则) ES (Existential Specification) 规则是指存在量词具体化规则。具体形式是

$$\frac{\exists x A(x)}{\therefore A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{\exists x A(x)}{\therefore A(c)} \quad (5.10)$$

其中,  $c$  为特定的个体常元, 且使用不曾在  $A(x)$  中出现过的个体常元  $c$  或个体变元  $y$  取代  $x$ 。当  $A(x)$  中存在其他自由变元时, 不宜使用此规则, 否则可能导致错误的推理。

**例 5.50** 设个体域为实数集,  $L(x, y)$  表示  $x < y$ , 按表 5.5 的过程进行推理。

表 5.5 例 5.50 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                          | 推理依据      |
|------|-------------------------------|-----------|
| (1)  | $\forall x \exists y L(x, y)$ | P 规则      |
| (2)  | $\exists y L(z, y)$           | US 规则 (1) |
| (3)  | $L(z, c)$                     | ES 规则 (2) |

推理的结果表明“任一实数  $z$  均满足  $z < c$ ”, 显然这是不正确的推理结果。仔细分析, 不难得出错误的原因是:  $\exists y L(z, y)$  中存在自由变元  $z$ , 这种情况下不宜使用 ES 规则。

**定义 5.29** (EG 规则) EG (Existential Generalization) 规则是指存在量词泛化规则。具体形式是

$$\frac{A(c)}{\therefore \exists y A(y)} \quad \text{或} \quad \frac{A(x)}{\therefore \exists y A(y)}$$

其中,  $c$  为特定的个体常元。  $A(x)$  对  $y$  是自由的, 取代  $c$  的个体变元  $y$  不曾在  $A(x)$  中出现, 且  $y$  不能是  $A(x)$  中的个体变元。

**例 5.51** 设个体域为实数集,  $L(x, y)$  表示  $x < y$ , 按表 5.6 的过程进行推理。

表 5.6 例 5.51 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                          | 推理依据      |
|------|-------------------------------|-----------|
| (1)  | $\exists x L(x, 0)$           | P 规则      |
| (2)  | $\exists x \exists x L(x, x)$ | EG 规则 (1) |

推理的结果表明“存在实数  $x$ , 使得  $x < x$ ”, 显然这是不正确的推理结果。仔细分析, 不难得出错误的原因是: 变量  $x$  已经在  $\exists x L(x, 0)$  中出现, 此时不能用  $x$  取代 0。

构造推理证明的序列时, 在应用量词的具体化和泛化规则时, 还需要从整体上考虑个体变元与个体常元符号的选取, 避免变量冲突。

**例 5.52** 设  $x, y$  的个体域为实数集,  $F(x)$  表示  $x$  是正数,  $G(x)$  表示  $x$  是负数, 按表 5.7 的过程进行推理。

表 5.7 例 5.52 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式             | 推理依据      |
|------|------------------|-----------|
| (1)  | $\exists x F(x)$ | P 规则      |
| (2)  | $F(c)$           | ES 规则 (1) |
| (3)  | $\exists y G(y)$ | P 规则      |
| (4)  | $G(c)$           | ES 规则 (3) |

续表

| 步骤编号 | 命题公式                          | 推理依据         |
|------|-------------------------------|--------------|
| (5)  | $F(c) \wedge G(c)$            | T 规则 (2) (4) |
| (6)  | $\exists x(F(x) \wedge G(x))$ | EG 规则 (5)    |

推理的结果表明“存在实数  $x$ ，它既是正数又是负数”，显然这是不正确的推理结果。仔细分析，不难得出错误的原因是：在步骤 (2) 引入个体常元  $c$  后，在步骤 (4) 应用 ES 规则时又引入相同的个体常元，导致错误结论。

**例 5.53** 设个体域为正实数集， $F(x)$  表示  $x > 0$ ， $G(x)$  表示  $x > 2$ ，按表 5.8 的过程进行推理。

表 5.8 例 5.53 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式               | 推理依据         |
|------|--------------------|--------------|
| (1)  | $\forall xF(x)$    | P 规则         |
| (2)  | $\exists yG(y)$    | P 规则         |
| (3)  | $F(c)$             | US 规则 (1)    |
| (4)  | $G(c)$             | ES 规则 (2)    |
| (5)  | $F(c) \wedge G(c)$ | T 规则 (3) (4) |

表 5.8 的推理过程出现的典型错误是：先后将 US 规则和 ES 规则用在相同的个体常元上。可以按照表 5.9 的推理过程进行修正。

表 5.9 例 5.53 的正确推理过程

| 步骤编号 | 命题公式               | 推理依据         |
|------|--------------------|--------------|
| (1)  | $\forall xF(x)$    | P 规则         |
| (2)  | $\exists yG(y)$    | P 规则         |
| (3)  | $G(c)$             | ES 规则 (2)    |
| (4)  | $F(c)$             | US 规则 (1)    |
| (5)  | $F(c) \wedge G(c)$ | T 规则 (3) (4) |

在表 5.9 的推理过程中，先后将 ES 规则和 US 规则用在相同的个体常元上，这样的做法是可行的。因此，表 5.9 的推理过程是正确的。

**注意** 对于相同的个体常元，量词的具体化是先用 ES 规则后用 US 规则。

谓词逻辑的推理方法与命题逻辑的推理方法类似，利用已知的基本等价式、基本蕴涵式、P 规则、T 规则、CP 规则、UG 规则、US 规则、EG 规则、ES 规则等规则进行推理。推理方法也分为直接证明法和间接证明法。

**例 5.54** 推理证明：

$$\{\forall x(A(x) \vee B(x)), \exists x(A(x) \rightarrow C(x))\} \models \exists x(B(x) \vee C(x))$$

**证明** 表5.10为具体的推理过程。与命题逻辑推理相比，US规则、EG规则和ES规则的使用是谓词逻辑推理所特有的。 ■

表 5.10 例5.54的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                               | 推理依据       |
|------|------------------------------------|------------|
| (1)  | $\exists x(A(x) \rightarrow C(x))$ | P规则        |
| (2)  | $A(c) \rightarrow C(c)$            | ES规则 (1)   |
| (3)  | $\forall x(A(x) \vee B(x))$        | P规则        |
| (4)  | $A(c) \vee B(c)$                   | US规则 (3)   |
| (5)  | $\neg B(c) \rightarrow A(c)$       | T规则 (4)    |
| (6)  | $\neg B(c) \rightarrow C(c)$       | T规则 (2)(5) |
| (7)  | $B(c) \vee C(c)$                   | T规则 (6)    |
| (8)  | $\exists x(B(x) \vee C(x))$        | EG规则 (7)   |

**例 5.55** 推理证明：凡是大熊猫都产在中国四川省，欢欢是只大熊猫，所以欢欢产在中国四川省。

**证明** 设  $F(x)$ ：  $x$  是大熊猫；  $G(x)$ ：  $x$  产在中国四川省；  $c$ ： 欢欢。

(1) 前提：  $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ ，  $F(c)$ 。

(2) 结论：  $G(c)$ 。

表5.11的推理过程证明了此命题。 ■

表 5.11 例5.55的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                               | 推理依据       |
|------|------------------------------------|------------|
| (1)  | $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ | P规则        |
| (2)  | $F(c) \rightarrow G(c)$            | US规则 (1)   |
| (3)  | $F(c)$                             | P规则        |
| (4)  | $G(c)$                             | T规则 (2)(3) |

**例 5.56** 推理证明：

$$\{\forall x(P(x) \vee Q(x)), \neg \forall x P(x)\} \models \exists x Q(x)$$

**证明** 将  $\neg \exists x Q(x)$  作为附加前提。表5.12为具体的推理过程。最后一步的命题公式出现矛盾，于是根据CP规则，命题得证。 ■

表 5.12 例5.56的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                  | 推理依据     |
|------|-----------------------|----------|
| (1)  | $\neg \forall x P(x)$ | P规则      |
| (2)  | $\exists x \neg P(x)$ | T规则 (1)  |
| (3)  | $\neg P(a)$           | ES规则 (2) |

续表

| 步骤编号 | 命题公式                                            | 推理依据         |
|------|-------------------------------------------------|--------------|
| (4)  | $\neg \exists x Q(x)$                           | P 规则（附加前提）   |
| (5)  | $\forall x \neg Q(x)$                           | T 规则（4）      |
| (6)  | $\neg Q(a)$                                     | US 规则（5）     |
| (7)  | $\neg P(a) \wedge \neg Q(a)$                    | T 规则（3）（6）   |
| (8)  | $\neg (P(a) \vee Q(a))$                         | T 规则（7）      |
| (9)  | $\forall x (P(x) \vee Q(x))$                    | P 规则         |
| (10) | $P(a) \vee Q(a)$                                | US 规则（9）     |
| (11) | $(P(a) \vee Q(a)) \wedge \neg (P(a) \vee Q(a))$ | CP 规则（8）（10） |

**例 5.57** 推理证明：

$$\forall x (H(x) \rightarrow M(x)) \models \forall x \forall y (H(y) \wedge N(x, y)) \rightarrow \exists y (M(y) \wedge N(t, y))$$

**证明** 将  $\forall x \forall y (H(y) \wedge N(x, y))$  作为附加前提。表 5.13 为具体的推理过程。最后一步的命题公式出现矛盾，于是根据 CP 规则，命题得证。 ■

表 5.13 例 5.57 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                                                                                    | 推理依据         |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| (1)  | $\forall x \forall y (H(y) \wedge N(x, y))$                                             | P 规则（附加前提）   |
| (2)  | $\forall y (H(y) \wedge N(t, y))$                                                       | US 规则（1）     |
| (3)  | $H(b) \wedge N(t, b)$                                                                   | US 规则（2）     |
| (4)  | $\forall x (H(x) \rightarrow M(x))$                                                     | P 规则         |
| (5)  | $H(b) \rightarrow M(b)$                                                                 | US 规则（4）     |
| (6)  | $H(b)$                                                                                  | T 规则（3）      |
| (7)  | $M(b)$                                                                                  | T 规则（5）（6）   |
| (8)  | $N(t, b)$                                                                               | T 规则（3）      |
| (9)  | $M(b) \wedge N(t, b)$                                                                   | T 规则（7）（8）   |
| (10) | $\exists y (M(y) \wedge N(t, y))$                                                       | EG 规则（9）     |
| (11) | $\forall x \forall y (H(y) \wedge N(x, y)) \rightarrow \exists y (M(y) \wedge N(t, y))$ | CP 规则（1）（10） |

在本章的开始介绍了苏格拉底三段论，下面对苏格拉底三段论进行论证。

**例 5.58**（苏格拉底三段论） 推理证明：所有的人都是会死的，苏格拉底是人，所以苏格拉底是会死的。

**证明** 设  $F(x)$  表示  $x$  是人， $G(x)$  表示  $x$  是会死的， $c$  表示苏格拉底。

(1) 前提： $\forall x (F(x) \rightarrow G(x))$  和  $F(c)$ 。

(2) 结论： $G(c)$ 。

表 5.14 为具体的推理过程。 ■

表 5.14 例 5.58 的推理过程

| 步骤编号 | 命题公式                               | 推理依据                |
|------|------------------------------------|---------------------|
| (1)  | $\forall x(F(x) \rightarrow G(x))$ | P 规则                |
| (2)  | $F(c) \rightarrow G(c)$            | US 规则 (1)           |
| (3)  | $F(c)$                             | P 规则                |
| (4)  | $G(c)$                             | T 规则 (假言推理) (2) (3) |

5.5 习 题

填空题

- 5.1 设  $A(x, y)$  是一个二元谓词,  $D = \{1, 2, 3\}$ , 则公式  $\forall x \exists y A(x, y)$  的可能赋值数最多是\_\_\_\_\_。
- 5.2 在全称量词下限定个体域的方法之一是使用特性谓词  $S(x)$ , 其标准形式为  $\forall x$  (\_\_\_\_\_  $\rightarrow \varphi(x)$ )。
- 5.3 公式  $\forall x \exists y (A(x, y) \vee \neg B(y))$  中的变元  $x$  的量词辖域为\_\_\_\_\_。
- 5.4 谓词公式  $\forall x \exists y A(x, y)$  与  $\exists y \forall x A(x, y)$  的量词顺序不同, 它们的逻辑意义\_\_\_\_\_ (相同/不同)。
- 5.5 在谓词公式  $\forall x (A(x) \rightarrow \exists y B(y, x))$  中, 自由变元的个数是\_\_\_\_\_。
- 5.6 命题  $\forall x (A(x) \vee \neg A(x))$  是一个\_\_\_\_\_式, 因为它在任何解释和赋值下都为真。
- 5.7 公式  $\forall x (A(x, y) \rightarrow \forall y B(y))$  的前束范式是\_\_\_\_\_。
- 5.8 在谓词逻辑的换名规则中, 若要将公式  $\forall x A(x)$  的约束变元  $x$  换成  $y$ , 则要求  $y$  在\_\_\_\_\_中不会出现。
- 5.9 公式  $\exists x \forall y (A(x) \vee B(y))$  与  $\forall y \exists x (A(x) \vee B(y))$  \_\_\_\_\_ (是/不是) 等价的。

选择题 (单选或多选)

- 5.10  $n$  个命题变元可以组成也只能组成 ( ) 个不等的公式。  
A.  $n^2$                       B.  $n!$                       C.  $2^n$                       D.  $2^{2n}$
- 5.11 设  $F(x)$  表示  $x$  是火车,  $G(x)$  表示  $x$  是汽车,  $H(x, y)$  表示  $x$  比  $y$  快, 命题“某些汽车比所有火车慢”的符号化公式应是 ( )。  
A.  $\exists y (G(y) \rightarrow \forall x (F(x) \wedge H(x, y)))$                       B.  $\forall x \exists y (G(y) \rightarrow (F(x) \wedge H(x, y)))$   
C.  $\exists y (G(y) \wedge \forall x (F(x) \rightarrow H(x, y)))$                       D.  $\exists y (G(y) \rightarrow \forall x (F(x) \rightarrow H(x, y)))$
- 5.12 设  $A(x)$  表示  $x$  是人,  $B(x)$  表示  $x$  犯错误, 命题“没有不犯错误的人”可符号化为 ( )。  
A.  $\forall x (A(x) \wedge B(x))$                       B.  $\neg \exists x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$   
C.  $\neg \exists x (A(x) \wedge B(x))$                       D.  $\neg \exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$

**5.13** 以下蕴涵式中正确的是 ( )。

A.  $\exists x F(x) \Rightarrow F(C)$

B.  $F(c) \Rightarrow \exists x F(x)$

C.  $F(c) \wedge G(c) \Rightarrow \exists x (F(x) \wedge G(x))$

D.  $\forall x F(x) \Rightarrow F(C)$

**5.14** 以下推理正确的是 ( )。

A. 前提：所有的鱼都能游泳，鲸鱼是鱼，所以鲸鱼能游泳

B. 前提：所有的狗都会叫，猫是狗，所以猫会叫

C. 前提：所有的苹果是红色的，这个水果是苹果，所以这个水果是红色的

D. 以上都不对

### 问答题

**5.15** 将下列命题符号化，并讨论它们的真值。

(1) 有些中学老师有博士学位。

(2) 凡是学生都要休息。

(3) 每个有理数都有比它大的有理数。

(4) 所有的马都是白色的。

(5) 不存在比所有猫跑得都快狗。

(6) 有些大学生会唱歌。

(7) 有些人既是教练员又是运动员。

(8) 所有素数都是奇数。

**5.16** 设  $A(x)$  表示  $x$  是水里的动物， $B(x)$  表示  $x$  用鳃呼吸，试将下列公式翻译成自然语言。

(1)  $\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$ 。

(2)  $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ 。

(3)  $\exists x (A(x) \wedge B(x)) \wedge \forall x (B(x) \rightarrow A(x))$ 。

**5.17** 将下列自然语言的语句符号化。

(1) 如果我喜欢这门课程或老师，我会去课堂听讲。

(2) 班上的所有同学，有的同学学习勤奋且成绩很好，有的同学学习勤奋但成绩欠佳。

第 (1) 题请使用命题逻辑表达，第 (2) 题请使用谓词逻辑表达。

**5.18** 令  $A(x)$  表示  $x$  是素数， $E(x)$  表示  $x$  是偶数， $O(x)$  表示  $x$  是奇数， $D(x, y)$  表示  $x$  整除  $y$ ，试将下列公式翻译成自然语言。

(1)  $A(2) \wedge \neg O(2)$ 。

(2)  $\forall x (E(x) \Leftrightarrow D(2, x))$ 。

(3)  $\exists x (O(x) \wedge D(x, 15))$ 。

(4)  $\forall x (E(x) \rightarrow \forall y (O(y) \rightarrow D(x, y)))$ 。

(5)  $\forall x (O(x) \rightarrow \exists y (E(y) \wedge D(x, y)))$ 。

(6)  $\exists y (O(y) \wedge \forall x (A(x) \rightarrow D(y, x)))$ 。

(7)  $\exists x \exists y (A(x) \wedge D(4, y) \wedge D(y, x))$ 。

**5.19** 以下是关于自然数的命题。

- (1) 每个数都有唯一的一个数是它的后继数。
- (2) 没有一个数使数1是它的后继数。
- (3) 每个不等于1的数都有唯一的一个数是它的前驱数。

其中, 前驱数表示比这个数小1的数, 后继数表示比这个数大1的数, 试将以上命题符号化。

**5.20** 取个体域为实数集 $\mathbb{R}$ , 函数 $f$ 在 $a$ 点连续的定义是: 任给一个 $\varepsilon > 0$ , 都存在一个 $\delta > 0$ , 使得对所有 $x$ , 若 $|x - a| < \delta$ , 则 $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ 。试把关于这个函数连续的定义用谓词逻辑符号化。

**5.21** 将下列命题符号化。

- (1) 对所有的实数 $x$ , 都存在实数 $y$ , 使得 $x - y = 0$ 。
- (2) 存在实数 $x$ , 对所有的实数 $y$ , 都有 $x - y = 0$ 。
- (3) 对所有的实数 $x$ 和所有的实数 $y$ , 都有 $x + y = y + x$ 。
- (4) 存在实数 $x$ 和实数 $y$ , 使得 $x + y = 100$ 。

**5.22** 指出下面谓词公式中的约束变元和自由变元, 以及各量词的辖域。

- (1)  $\forall x A(x) \rightarrow B(x)$ 。
- (2)  $\exists x(A(x, y) \vee B(z))$ 。
- (3)  $\forall x(A(x, y) \Leftrightarrow B(y, z)) \wedge \exists y C(y, z)$ 。
- (4)  $\exists x \forall y(A(x, y)) \rightarrow \forall z B(z)$ 。

**5.23** 在以下公式中,  $A(x)$ 表示 $x > 0$ ,  $B(x)$ 表示 $x = 5$ ,  $C(x, y)$ 表示 $x + y = 0$ 。试找出一个个体域, 使下列被量化谓词的真值为真, 且该个体域是整数集的最大子集。

- (1)  $\forall x A(x)$ 。
- (2)  $\exists x A(x)$ 。
- (3)  $\forall x B(x)$ 。
- (4)  $\exists x B(x)$ 。
- (5)  $\forall x(\exists y) C(x, y)$ 。

**5.24** 对于下面的谓词公式, 指出约束变元和自由变元, 并指明各个量词的辖域。

- (1)  $\forall x A(x) \rightarrow A(y)$ 。
- (2)  $\exists x(A(x) \wedge B(x)) \Leftrightarrow \forall x S(x)$ 。
- (3)  $\forall x \exists y(A(x) \vee B(y)) \rightarrow \exists x C(x, y)$ 。
- (4)  $\exists x \forall y(A(x, y, z) \wedge B(z))$ 。

**5.25** 指出下列公式中的约束变元和自由变元。

- (1)  $\forall x(A(x) \rightarrow B(y))$ 。
- (2)  $\forall x(A(x) \wedge C(x)) \rightarrow (\exists x A(x) \wedge B(x))$ 。
- (3)  $\forall x(A(x) \wedge (\exists x B(x)) \vee (\forall x C(x, y) \wedge B(z)))$ 。
- (4)  $\exists x \forall y(C(x, y) \wedge B(z))$ 。
- (5)  $\forall z(A(x) \wedge (\exists x C(x, z) \rightarrow (\exists y B(x, y))) \vee C(x, y))$ 。

**5.26** 对下列谓词公式中的约束变元进行换名。

- (1)  $\exists x \forall y(A(x, z) \rightarrow B(x, y)) \wedge C(x, y)$ 。
- (2)  $\forall x(A(x) \rightarrow (C(x) \vee B(x, y))) \wedge (\exists x C(x) \rightarrow \forall z S(x, z))$ 。

**5.27** 对下列谓词公式中的自由变元进行代入。

$$(1) (\exists y B(z, y) \rightarrow \forall x C(x, y)) \vee (\exists x S(x, y, z)).$$

$$(2) \forall y A(x, y) \wedge (\exists z B(x, z) \leftrightarrow \exists x C(x, y)).$$

**5.28** 利用约束变元的改名规则改写以下公式, 使得约束变元与自由变元不使用相同的符号。

$$(1) \forall x(A(x) \rightarrow B(x, y)) \wedge C(x, y).$$

$$(2) \exists x(A(x, y) \rightarrow B(x)) \wedge \neg \forall y(B(y) \rightarrow C(x, y)).$$

$$(3) \forall x \exists y(A(x, z) \vee B(y)) \Leftrightarrow C(x, y).$$

$$(4) \forall y \forall x(A(x, y) \Leftrightarrow B(x, z)) \vee \exists z \neg C(x, z).$$

**5.29** 利用自由变元的代入规则改写以下公式, 以避免出现既是约束变元又是自由变元的变元。

$$(1) \forall x F(x) \vee \forall x G(x) \rightarrow \exists y H(x, y).$$

$$(2) \neg \exists x F(x) \rightarrow \forall y H(x, y, z).$$

$$(3) \exists x F(x, y) \wedge \exists y G(x, y) \vee \forall y (H(x, y) \rightarrow C(y)).$$

$$(4) \forall x \forall y (A(x, y) \Leftrightarrow B(x, z)) \vee \exists z \neg C(x, z).$$

**5.30** 设个体域  $D = \{0, 1\}$ ,  $A(0) = T$ ,  $A(1) = A$ ,  $B(0) = A$ ,  $B(1) = T$ . 求下列命题的真值。

$$(1) \forall x A(x) \vee \forall x B(x).$$

$$(2) \forall x (A(x) \vee B(x)).$$

$$(3) \exists x A(x) \wedge \exists x B(x).$$

$$(4) \exists x (A(x) \wedge B(x)).$$

**5.31** 设个体域  $D = \{a, b\}$ ,  $A(a, a) = A(b, b) = T$ ,  $A(a, b) = A(b, a) = F$ , 求下列各式的真值。

$$(1) \forall x \forall y A(x, y).$$

$$(2) \forall x \exists y A(x, y).$$

$$(3) \exists y \forall x A(x, y).$$

$$(4) \exists x \exists y A(x, y).$$

**5.32** 设个体域  $D = \{2, 3, 6\}$ ,  $F(x)$  表示  $x \leq 3$ ,  $G(x)$  表示  $x > 5$ , 试消去公式  $\forall x (F(x) \wedge \exists y G(y))$  中的量词, 并讨论其真值。

**5.33** 设个体域为实数集,  $a = 0$ ,  $E(x, y) : x = y$ , 求下列命题的真值。

$$(1) \forall x \forall y E(x, y).$$

$$(2) \forall x \exists y E(x, y).$$

$$(3) \exists y \forall x E(x, y).$$

$$(4) \exists x E(x, a).$$

**5.34** 求下列各式的真值。

$$(1) \forall x \forall y H(x, y), \text{ 其中 } H(x, y) : x > y, \text{ 个体域为 } D = \{-4, 2\}.$$

(2)  $\exists x (S(x) \rightarrow B(a)) \wedge p$ , 其中  $S(x) : x > 3$ ,  $B(x) : x = 5$ ,  $a = 3$ ,  $p : 5 > 3$ , 个体域为  $D = \{-1, 3, 6\}$ .

$$(3) \exists x (x^2 - 2x + 1 = 0), \text{ 其中个体域为 } D = \{-1, 2\}.$$

**5.35** 设个体域  $D = \{a, b, c\}$ , 试具体化 (消去) 以下公式中的量词。

- (1)  $\forall x(A(x) \rightarrow B(x))$ 。
- (2)  $\exists x(A(x) \rightarrow \forall yB(y))$ 。
- (3)  $\forall xA(x) \rightarrow \exists yB(y)$ 。
- (4)  $\forall xA(x) \vee \exists yB(y)$ 。
- (5)  $\forall x(A(x) \leftrightarrow B(x))$ 。
- (6)  $\forall x\neg A(x) \vee \forall yB(y)$ 。
- (7)  $\exists y\forall xC(x, y)$ 。

**5.36** 求下列各式的前束范式。

- (1)  $\forall x A(x) \wedge \neg \exists x B(x)$ 。
- (2)  $\forall x A(x) \vee \neg \exists x B(x)$ 。
- (3)  $\exists x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ 。
- (4)  $\exists x A(x) \leftrightarrow \exists y B(y)$ 。
- (5)  $\neg(\forall x A(x, y) \vee \exists y B(x, y))$ 。
- (6)  $\forall x(\exists y A(x, y) \rightarrow \exists y B(x, y))$ 。

**5.37** 求下列各式的前束范式。

- (1)  $\forall x(\exists x A(x, y) \wedge \exists y B(x, y)) \rightarrow \forall y(H(x, y) \rightarrow C(y))$ 。
- (2)  $\forall x \forall y ((\exists z A(x, y, z) \wedge \exists u B(x, u)) \rightarrow \exists v B(x, v))$ 。
- (3)  $\forall x \forall y (\exists z (A(x, z) \wedge B(x, z)) \rightarrow \exists u C(x, y, u))$ 。
- (4)  $\neg \forall x (\exists y A(x, y) \rightarrow \exists x \forall y (B(x, y) \wedge \forall y (A(y, x) \rightarrow B(x, y))))$ 。
- (5)  $(\forall x A(x) \vee \forall x B(x)) \wedge \neg \forall y C(x, y)$ 。
- (6)  $\forall y(\exists z A(x, y, z) \wedge \exists u B(x, u)) \rightarrow \exists v C(y, v)$ 。

**5.38** 判断下面的证明是否正确。

$$\begin{aligned}
 & \forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x (\neg A(x) \vee B(x)) \\
 \Leftrightarrow & \forall x \neg (A(x) \wedge \neg B(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg \exists x (A(x) \wedge \neg B(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg (\exists x A(x) \wedge \exists x \neg B(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg (\exists x A(x) \wedge \neg \forall x B(x)) \\
 \Leftrightarrow & \neg \exists x A(x) \vee \forall x B(x) \\
 \Leftrightarrow & \exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x)
 \end{aligned}$$

### 证明题

**5.39** 证明下列等价式和蕴涵式。

- (1)  $\exists x (A(x) \rightarrow B(x)) \Leftrightarrow \forall x A(x) \rightarrow \exists x B(x)$ 。
- (2)  $\forall x (A(x) \leftrightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \leftrightarrow \forall x B(x)$ 。
- (3)  $\forall x (A(x) \rightarrow B) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow B$ 。

- (4)  $\forall x (B \rightarrow A(x)) \Leftrightarrow B \rightarrow \forall x A(x)$ 。  
 (5)  $\exists x A(x) \rightarrow \forall x B(x) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ 。  
 (6)  $\forall x \forall y (A(x) \wedge B(y)) \Leftrightarrow \forall x (A(x) \wedge B(x))$ 。  
 (7)  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \Rightarrow \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ 。  
 (8)  $\forall x \forall y (A(x) \rightarrow B(y)) \Leftrightarrow \exists x A(x) \rightarrow \forall y B(y)$ 。

**5.40** 证明下列推理成立。

- (1)  $\{\forall x \neg B(x), \exists x (A(x) \rightarrow B(x))\} \vdash \exists x \neg A(x)$ 。  
 (2)  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x)) \vdash \forall x A(x) \rightarrow \forall x B(x)$ 。  
 (3)  $\forall x (A(x) \vee B(x)) \vdash \forall x A(x) \vee \exists x B(x)$ 。  
 (4)  $\{\exists x F(x) \rightarrow \forall x (F(x) \vee G(x) \rightarrow H(x)), \exists x F(x)\} \vdash \exists x H(x)$ 。

**5.41** 运用推理规则证明：

- (1)  $\{(A \vee B), (A \rightarrow C), (B \rightarrow S)\} \models S \vee C$ 。  
 (2)  $\{\forall x (A(x) \vee B(x)), \exists y \neg A(y)\} \models \exists y B(y)$ 。

**5.42** 已知前提是  $\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$ ,  $\exists x A(x)$ , 结论是  $\exists x B(x)$ 。给出推理证明的过程。

**5.43** 符号化下列各命题, 并推理证明。

- (1) 所有的鸟都会飞, 鸵鸟是一种鸟, 所以鸵鸟会飞。  
 (2) 所有的学生都爱学习, 小李是学生, 所以小李爱学习。  
 (3) 所有的程序员都喜欢逻辑推理, 张强是程序员, 所以张强喜欢逻辑推理。

**5.44** 符号化下列各命题, 并推理证明。

- (1) 已知每个学生都是讲诚信的。小张不讲诚信。所以, 小张不是学生。  
 (2) 整数或分数都是有理数。而  $\pi$  不是有理数。因此,  $\pi$  既不是整数, 也不是分数。  
 (3) 我的同学或者是男同学, 或者是女同学, 男同学爱踢足球。因此, 不爱踢足球的同学都是女同学。  
 (4) 所有的乐队成员都懂五线谱。小王是个学生, 并且是乐队成员。因此, 有些学生懂五线谱。  
 (5) 每个喜欢步行的同学都不喜欢跑步。班上的同学要么喜欢跑步, 要么喜欢游泳。有的同学不喜欢游泳。所以有的同学不喜欢步行。