2025 新高考 | 数学

真题全刷

清优辅考
组编

决胜800题

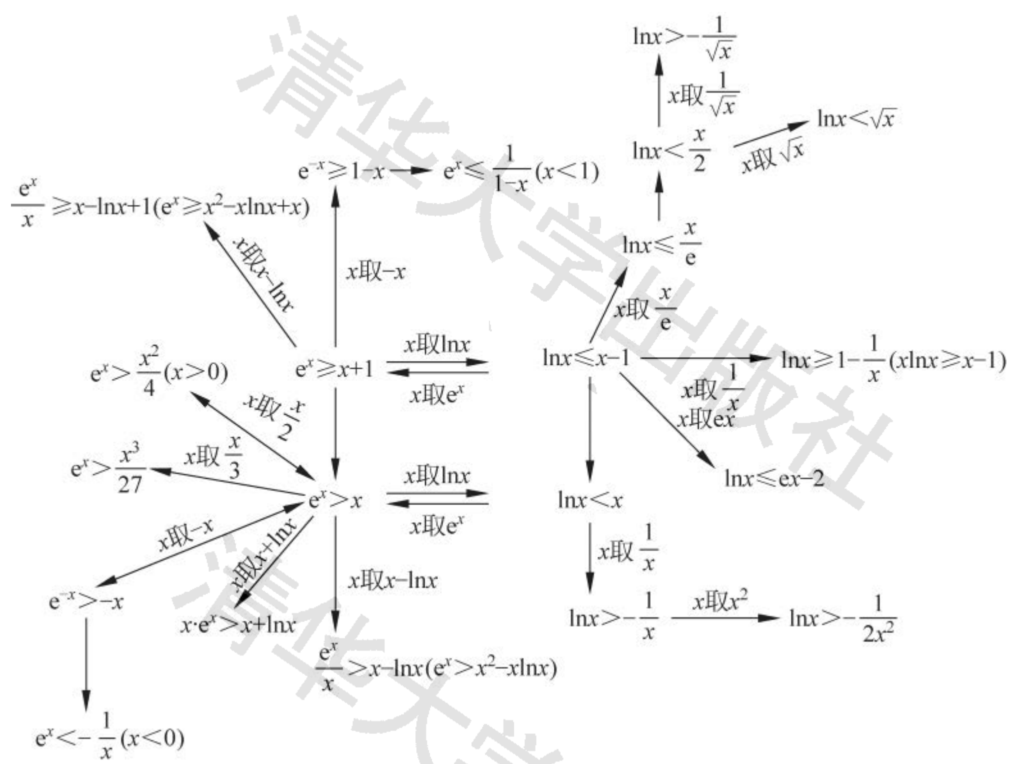
含2024高考真题 | 在线刷题 | 免费视频

清华大学出版社

新高考数学真题全刷
决胜800题
清优辅考 组编
清华大学出版社

新高考数学真题全刷
决胜800题
答案详解
清华大学出版社

第 2 章　导数



当 $x>1$ 时，$1-\frac{1}{x}<2\cdot\frac{x-1}{x+1}<\ln x<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<x-1<x+1<\mathrm{e}^{x}$；

当 $0<x<1$ 时，$1-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)<\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}<\ln x<2\cdot\frac{x-1}{x+1}$。

刷题散点图

让我们用数学的思想来备战高考数学,如统计中的散点图可展示出数据的分布和聚合情况,甚至可以得到趋势线公式。大道至简,请在刷题后完成属于你的本章刷题散点图,直接用你刷题的黑笔在题号上标出即可,做对画√,做错画×。

完成后,根据题号的分布和聚合情况,合理安排你的二刷甚至三刷。

2.1

104 105 106 107 108 109

110 111 112 113 114 115

2.2

116 117 118 119 120 121

122 123 124 125 126 127

128 129 130 131 132 133

134 135 136 137 138 139

140 141 142 143 144 145

146 147 148 149 150 151

152 153

2.3

154 155 156 157 158 159

160 161 162 163 164 165

166 167 168 169 170 171

172 173 174 175 176 177

178 179

2.4

180 181 182 183 184 185

186 187 188 189 190 191

192 193 194 195 196 197

198 199 200 201 202 203

204

2.1　切线问题

本章视频讲解

核心笔记

切线问题是考查导数几何意义的理解和几何应用，在具体应用时要明确题目所提的是在点处问题还是过点处问题，在点处问题的点是切点，切点处的导数即为该点处切线斜率，而过点处问题的点则不一定。切线具体问题还可以结合着直线间关系进行考查。

函数 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线方程为 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$。

【104】（**2021·新高考全国一·7·**）

若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线，则（　　）。

A. $e^b<a$　　B. $e^a<b$

C. $0<a<e^b$　　D. $0<b<e^a$

【105】（**2016·新课标全国二·16·**）

若直线 $y=kx+b$ 是曲线 $y=\ln x+2$ 的切线，也是曲线 $y=\ln(x+1)$ 的切线，则 $b=$________。

【106】（**2015·新课标全国二·16·**）

已知曲线 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，则 $a=$________。

【107】（**2016·山东·10·**）

若函数 $y=f(x)$ 的图像上存在两点，使得函数的图像在这两点处的切线互相垂直，则称 $y=f(x)$ 具有 T 性质。下列函数中具有 T 性质的是（　　）。

A. $y=\sin x$　　B. $y=\ln x$

C. $y=e^x$　　D. $y=x^3$

【108】（**2015·陕西·15·**）

设曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=\dfrac{1}{x}(x>0)$ 上点 P 处的切线垂直，则 P 的坐标为________。

目光只能看到眼前，而有眼光才能看到未来！凡事不能太片面推断，把格局放大，一个人的思想有多远，未来就能走多远！（推荐人：@李嘉竣（山西））

【109】（2014·安徽·15·）

若直线 l 与曲线 C 满足下列两个条件：(i) 直线 l 在点 $P(x_0,y_0)$ 处与曲线 C 相切；(ii)曲线 C 在 P 附近位于直线 l 的两侧，则称直线 l 在点 P 处"切过"曲线 C。下列命题正确的是________。（写出所有正确命题的序号）

① 直线 l：$y=0$ 在点 $P(0,0)$ 处"切过"曲线 C：$y=x^3$；

② 直线 l：$x=-1$ 在点 $P(-1,0)$ 处"切过"曲线 C：$y=(x+1)^2$；

③ 直线 l：$y=x$ 在点 $P(0,0)$ 处"切过"曲线 C：$y=\sin x$；

④ 直线 l：$y=x$ 在点 $P(0,0)$ 处"切过"曲线 C：$y=\tan x$；

⑤ 直线 l：$y=x-1$ 在点 $P(1,0)$ 处"切过"曲线 C：$y=\ln x$。

【110】（2010·江苏·8·）

函数 $y=x^2(x>0)$ 的图像在点 (a_k,a_k^2) 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 a_{k+1}，其中 $k\in\mathbf{N}^*$，若 $a_1=16$，则 $a_1+a_3+a_5=$________。

【111】（2012·新课标全国·12·）

设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为（　　）。

A. $1-\ln2$　　B. $\sqrt{2}(1-\ln2)$

C. $1+\ln2$　　D. $\sqrt{2}(1+\ln2)$

【112】（2021·新课标全国乙·21·）

已知函数 $f(x)=x^3-x^2+ax+1$。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 求曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标。

【113】(2014・北京・20・)

已知函数 $f(x)=2x^3-3x$。

(1) 求 $f(x)$在区间$[-2,1]$上的最大值;

(2) 若过点 $P(1,t)$存在 3 条直线与曲线 $y=f(x)$相切,求 t 的取值范围;

(3) 问过点 $A(-1,2)$,$B(2,10)$,$C(0,2)$分别存在几条直线与曲线 $y=f(x)$相切?(只需写出结论)

【114】(2019・新课标全国二・20・)

已知函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x+1}{x-1}$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性,并证明 $f(x)$有且仅有两个零点;

(2) 设 x_0 是 $f(x)$的一个零点,证明曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$处的切线也是曲线 $y=e^x$ 的切线。

【115】(2022・新课标全国甲・20・)

已知函数 $f(x)=x^3-x$,$g(x)=x^2+a$,曲线 $y=f(x)$在点$(x_1,f(x_1))$处的切线也是曲线 $y=g(x)$的切线。

(1) 若 $x_1=-1$,求 a;

(2) 求 a 的取值范围。

2.2 最值与极值

核心笔记

求导法是求函数的单调性的一种重要方法,通过求导,导数为正的区间函数单调递增,求导为负的区间函数单调递减,求导看似好用,但对计算有一定要求。极值点是导函数的变号零点,它是函数上两侧单调性互异的点。极值点和极值是不一样的,分别强调的是 x 和 y。无论是求最值、值域、极值还是求极值点,都需要借助导数来求解函数的单调性。

1. $\forall x\in D$, $y=f(x)$单调递增$\Leftrightarrow$ $\forall x\in D$, $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立;

2. $\forall x\in D$，$y=f(x)$ 单调递减 $\Leftrightarrow$ $\forall x\in D$，$f'(x)\leqslant 0$ 恒成立；

3. $\exists x\in D$，$y=f(x)$ 单调递增 $\Leftrightarrow$ $\exists x\in D$，$f'(x)>0$ 能成立；

4. $\exists x\in D$，$y=f(x)$ 单调递减 $\Leftrightarrow$ $\exists x\in D$，$f'(x)<0$ 能成立；

5. 若 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$。

再次提醒：极值点并不是点，而是横坐标，极值是纵坐标。

【116】（2010·辽宁·12·）

已知点 P 在曲线 $y=\dfrac{4}{e^x+1}$ 上，α 为曲线在点 P 处的切线的倾斜角，则 α 的取值范围是（　　）。

A. $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right)$　　B. $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$

C. $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$　　D. $\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$

【117】（2011·湖南·8·）

设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=x^2$，$g(x)=\ln x$ 的图像分别交于点 M，N，则当 $|MN|$ 达到最小时，t 的值为（　　）。

A. 1　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

【118】（2011·福建·10·）

若 $a>0$，$b>0$，且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 $x=1$ 处有极值，则 ab 的最大值等于（　　）。

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

【119】（2017·新课标全国一·9·）

已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则（　　）。

A. $f(x)$在$(0,2)$上单调递增

B. $f(x)$在$(0,2)$上单调递减

C. $y=f(x)$的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$的图像关于点$(1,0)$对称

【120】(2023·新高考全国二·6·🌶🌶🌶)

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增,则 a 的最小值为(　　)。

A. e^2　　B. e　　C. e^{-1}　　D. e^{-2}

【121】(2016·新课标全国一·12·🌶🌶🌶🌶)

若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增,则 a 的取值范围是(　　)。

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

【122】(2023·新课标全国乙·16·🌶🌶🌶)

设 $a\in(0,1)$,若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,则 a 的取值范围是________。

【123】(2023·新高考全国二·11·🌶🌶🌶)

(多选题)若函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}(a\neq 0)$ 既有极大值也有极小值,则(　　)。

A. $bc>0$　　B. $ab>0$

C. $b^2+8ac>0$　　D. $ac<0$

【124】(2008·江苏·14·🌶🌶🌶🌶)

设函数 $f(x)=ax^3-3x+1$ 对任意 $x\in[-1,1]$ 总有 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立,则实数 a 的值为________。

【125】（2014·新课标全国二·12·）

设函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\frac{\pi x}{m}$。若存在 $f(x)$ 的极值点 x_0，满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$，则 m 的取值范围是（　　）。

A. $(-\infty,-6)\cup(6,+\infty)$

B. $(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

C. $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

D. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

【126】（2011·辽宁·11·）

函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(-1)=2$，对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f'(x)>2$，则 $f(x)>2x+4$ 的解集为（　　）。

A. $(-1,1)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)$　　D. $(-\infty,+\infty)$

【127】（2015·福建·10·）

若定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=-1$，其导函数 $f'(x)$ 满足 $f'(x)>k>1$，则下列结论中一定错误的是（　　）。

A. $f\left(\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}$　　B. $f\left(\frac{1}{k}\right)>\frac{1}{k-1}$

C. $f\left(\frac{1}{k-1}\right)<\frac{1}{k-1}$　　D. $f\left(\frac{1}{k-1}\right)>\frac{k}{k-1}$

【128】（2014·湖南·9·）

若 $0<x_1<x_2<1$，则（　　）。

A. $e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$

B. $e^{x_2}-e^{x_1}<\ln x_2-\ln x_1$

C. $x_2e^{x_1}>x_1e^{x_2}$

D. $x_2e^{x_1}<x_1e^{x_2}$

【129】（2015·新课标全国二·12·）

设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是（　　）。

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

【130】(2013 · 辽宁 · 12 ·)

设函数 $f(x)$ 满足 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$，$f(2)=\frac{e^2}{8}$，则当 $x>0$ 时，$f(x)$(　　)。

A. 有极大值，无极小值

B. 有极小值，无极大值

C. 既有极大值又有极小值

D. 既无极大值也无极小值

【131】(2009 · 天津 · 10 ·)

设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上的导函数为 $f'(x)$，且 $2f(x)+xf'(x)>x^2$，下面的不等式在 $\mathbf{R}$ 上恒成立的是(　　)。

A. $f(x)>0$　　B. $f(x)<0$

C. $f(x)>x$　　D. $f(x)<x$

【132】(2022 · 新课标全国甲 · 12 ·)

已知 $a=\frac{31}{32}$，$b=\cos\frac{1}{4}$，$c=4\sin\frac{1}{4}$，则(　　)。

A. $c>b>a$　　B. $b>a>c$

C. $a>b>c$　　D. $a>c>b$

【133】(2021 · 新课标全国乙 · 12 ·)

设 $a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则(　　)。

A. $a<b<c$　　B. $b<c<a$

C. $b<a<c$　　D. $c<a<b$

【134】(2022 · 新高考全国一 · 7 ·)

设 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}$，$c=-\ln 0.9$，则(　　)。

A. $a<b<c$　　B. $c<b<a$

C. $c<a<b$　　D. $a<c<b$

人生的空虚不在于人的孤独，在于心的寂寞；人生的智慧不在于善于观察，在于善于辨别；人生的寻找不在于千山万水，在于咫尺之间；人生的境界不在于盲目跟随，在于自我探求。(推荐人：@莫立航(安徽))

【135】(2023·新课标全国乙·文20·)

已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$。

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(x))$ 处的切线方程；

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，求 a 的取值范围。

【136】(2024·全国甲·21·)

已知函数 $f(x)=(1-ax)\ln(1+x)-x$。

(1) 当 $a=-2$ 时，求 $f(x)$ 的极值；

(2) 当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\geqslant0$ 恒成立，求 a 的取值范围。

【137】(2023·新课标全国乙·理21·)

已知函数 $f(x)=\left(\frac{1}{x}+a\right)\ln(1+x)$。

(1) 当 $a=-1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 是否存在 a,b，使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称。若存在，求 a,b 的值；若不存在，说明理由；

(3) 若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极值，求 a 的取值范围。

【138】(2024·新高考全国一·18·)

已知函数 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$。

(1) 若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant0$，求 a 的最小值；

(2) 证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

(3) 若 $f(x)>-2$，当且仅当 $1<x<2$，求 b 的取值范围。

【139】（**2023 · 新高考全国二 · 22 ·** ）

（1）证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

（2）已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围。

【140】（**2018 · 新课标全国三 · 21 ·** ）

已知函数 $f(x)=(2+x+ax^2)\ln(1+x)-2x$。

（1）若 $a=0$，证明：当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；

（2）若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a。

【141】（**2015 · 新课标全国二 · 21 ·** ）

已知函数 $f(x)=\ln x+a(1-x)$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $f(x)$ 有最大值，且最大值大于 $2a-2$ 时，求 a 的取值范围。

【142】（**2019 · 新课标全国三 · 理 20 ·** ）

已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+b$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）是否存在 a,b，使得 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最小值为 -1 且最大值为 1？若存在，求出 a,b 的所有值；若不存在，说明理由。

要成功，就要长期等待而不焦躁，态度从容却保持敏锐，不怕挫折且充满希望。（推荐人：@秦暄雅（江西））

【143】(2019·新课标全国三·文 20·)

已知函数 $f(x)=2x^3-ax^2+2$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 当 $0<a<3$ 时，记 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为 M，最小值为 m，求 $M-m$ 的取值范围。

【144】(2019·北京·19·)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$。

(1) 求曲线 $y=f(x)$的斜率为 1 的切线方程；

(2) 当 $x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

(3) 设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$在区间$[-2,4]$上的最大值为 $M(a)$，当 $M(a)$最小时，求 a 的值。

【145】(2017·新课标全国一·21·)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-a)-a^2x$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若 $f(x)\geqslant0$，求 a 的取值范围。

【146】(2016·新课标全国二·21·)

已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$。

(1) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2) 若当 $x\in(1,+\infty)$时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围。

所有的努力都不会完全白费，你付出多少时间和精力，都是在对未来积累。世界上什么都不公平，唯独时间最公平，你是懒惰还是努力，时间都会给出结果！（推荐人：@罗元锋（山东））

【147】（2020・新课标全国二・21・）

已知函数 $f(x)=2\ln x+1$。

(1) 若 $f(x)\leqslant 2x+c$，求 c 的取值范围；

(2) 设 $a>0$ 时，讨论函数 $g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 的单调性。

【148】（2015・新课标全国二・21・）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{mx}+x^2-mx$。

(1) 证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

(2) 若对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，都有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant \mathrm{e}-1$，求 m 的取值范围。

【149】（2014・新课标全国一・21・）

设函数 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-bx(a\neq 1)$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为 0。

(1) 求 b；

(2) 若存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$，求 a 的取值范围。

【150】（2012・新课标全国・21・）

已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=f'(1)\mathrm{e}^{x-1}-f(0)x+\dfrac{1}{2}x^2$。

(1) 求 $f(x)$ 的解析式及单调区间；

(2) 若 $f(x)\geqslant \dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，求 $(a+1)b$ 的最大值。

人生从来没有真正的绝境。无论遭受多少艰辛，无论经历多少苦难，只要一个人的心中还怀着一粒信念的种子，那么总有一天，他就能走出困境，让生命重新开花结果。（推荐人：@蒙梦洁（河南））

【151】(2014·新课标全国二·21·))))

已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 设 $g(x)=f(2x)-4bf(x)$，当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，求 b 的最大值；

(3) 已知 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$，估计 $\ln 2$ 的近似值(精确到 0.001)。

【152】(2023·新课标全国甲·文 20·)))

已知函数 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若 $f(x)+\sin x<0$，求 a 的取值范围。

【153】(2023·新课标全国甲·理 21·))))

已知 $f(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$。

(1) 当 $a=8$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若 $f(x)<\sin 2x$，求 a 的取值范围。

2.3 零点问题

核心笔记

零点问题是高考中的热点问题，也是难点问题，尤其是利用零点存在定理找零点所在区间。要善于使用前面小问题所形成的不等式，或利用函数的单调性判断函数局部范围值域从而形成不等式等手段进行放缩找零点，找零点是一种不等式存在性的解法，要注意判断零点与极值点的大小。

【154】(2015·江苏·13·))))

已知函数 $f(x)=|\ln x|$，$g(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1,\\ |x^2-4|-2, & x>1,\end{cases}$ 则方程 $|f(x)+g(x)|=1$ 实根的个数为________。

【155】(2014・新课标全国一・12・))))）

已知函数 $f(x)=ax^3-3x^2+1$，若 $f(x)$ 存在唯一零点 x_0，且 $x_0>0$，则 a 的取值范围是(　　)。

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(1,+\infty)$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-1)$

【157】(2018・江苏・11・))))）

若函数 $f(x)=2x^3-ax^2+1(a\in\mathbf{R})$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，则 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值和最小值的和为________。

【156】(2015・新课标全国一・12・))))）

设函数 $f(x)=e^x(2x-1)-ax+a$，其中 $a<1$，若存在唯一的整数 x_0，使得 $f(x_0)<0$，则 a 的取值范围是(　　)。

A. $\left[-\frac{3}{2e},1\right)$　　B. $\left[-\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$

C. $\left[\frac{3}{2e},\frac{3}{4}\right)$　　D. $\left[\frac{3}{2e},1\right)$

【158】(2013・湖北・10・))))）

已知 a 为常数，函数 $f(x)=x(\ln x-ax)$ 有两个极值点 $x_1,x_2(x_1<x_2)$，则(　　)。

A. $f(x_1)>0,f(x_2)>-\frac{1}{2}$

B. $f(x_1)<0,f(x_2)<-\frac{1}{2}$

C. $f(x_1)>0,f(x_2)<-\frac{1}{2}$

D. $f(x_1)<0,f(x_2)>-\frac{1}{2}$

【159】（2022·新课标全国乙·16·）

已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-\mathrm{e}x^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点，若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是________。

【160】（2023·新课标全国乙·8·）

函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在 3 个零点，则 a 的取值范围是（　　）。

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-3)$

C. $(-4,-1)$　　D. $(-3,0)$

【161】（2021·新课标全国甲·20·）

设函数 $f(x)=a^2x^2+ax-3\ln x+1$，其中 $a>0$。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴没有公共点，求 a 的取值范围。

【162】（2024·北京·20·）

设函数 $f(x)=x+k\ln(1+x)(k\neq0)$，直线 l 是曲线 $y=f(x)$ 在点 $(t,f(t))(t>0)$ 处的切线。

(1) 当 $k=-1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：切线 l 不经过 $(0,0)$；

(3) 当 $k=1$ 时，设 $A(t,f(t))(t>0)$，$C(0,f(t))$，$O(0,0)$，B 为 l 与 y 轴的交点，$S_{\triangle ACO}$ 和 $S_{\triangle ABO}$ 分别表示 $\triangle ACO$ 和 $\triangle ABO$ 的面积。是否存在点 A，使得 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 成立？若存在，这样的点有几个？（参考数据：$1.09<\ln3<1.10$，$1.60<\ln5<1.61$，$1.94<\ln7<1.95$）

【163】（2014・新课标全国二・21・🌶🌶🌶🌶）

已知函数 $f(x)=x^3-3x^2+ax+2$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线与 x 轴交点的横坐标为 -2。

(1) 求 a；

(2) 证明：当 $k<1$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点。

【164】（2019・新课标全国二・21・🌶🌶🌶🌶）

已知函数 $f(x)=(x-1)\ln x-x-1$。证明：

(1) $f(x)$ 存在唯一的极值点；

(2) $f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数。

【165】（2012・湖南・22・🌶🌶🌶🌶）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$。其中 $a>0$。

(1) 若对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant 1$ 恒成立，求 a 的取值集合；

(2) 在函数 $f(x)$ 的图像上取两定点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)(x_1<x_2)$，记直线 AB 的斜率为 k，证明：存在 $x_0\in(x_1,x_2)$，使 $f'(x_0)=k$ 恒成立。

【166】（2020・新课标全国三・21・🌶🌶🌶🌶）

设函数 $f(x)=x^3+bx+c$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与 y 轴垂直。

(1) 求 b；

(2) 若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，证明：$f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1。

【167】(2020·新课标全国三·20·)

已知函数 $f(x)=x^3-kx+k^2$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若 $f(x)$有三个零点，求 k 的取值范围。

【168】(2018·新课标全国二·21·)

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-a(x^2+x+1)$。

(1) 若 $a=3$，求 $f(x)$的单调区间；

(2) 证明：$f(x)$只有一个零点。

【169】(2022·新课标全国乙·20·)

已知函数 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x$。

(1) 当 $a=0$ 时，求 $f(x)$的最大值；

(2) 若 $f(x)$恰有一个零点，求 a 的取值范围。

【170】(2020·新课标全国一·20·)

已知函数 $f(x)=e^x-a(x+2)$。

(1) 当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$的单调性；

(2) 若 $f(x)$有两个零点，求 a 的取值范围。

【171】(2018·新课标全国二·21·)

已知函数 $f(x)=e^x-ax^2$。

(1) 若 $a=1$，证明：当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant 1$；

(2) 若 $f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点，求 a。

【172】(2013·陕西·21·)

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$，$x\in\mathbf{R}$。

(1) 若直线 $y=kx+1$ 与 $f(x)$ 的反函数的图像相切，求实数 k 的值；

(2) 设 $x>0$，讨论曲线 $y=f(x)$ 与曲线 $y=mx^2(m>0)$ 公共点的个数；

(3) 设 $a<b$，比较 $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ 与 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小，并说明理由。

【173】(2021·新课标全国甲·21·)

已知 $a>0$ 且 $a\neq1$，函数 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}(x>0)$。

(1) 当 $a=2$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 若曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，求 a 的取值范围。

【174】(2016·新课标全国一·21·)

已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

【175】(2017·新课标全国一·21·)

已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x$。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求 a 的取值范围。

【176】（2019·天津·20·）

设函数 $f(x)=\ln x-a(x-1)e^x$，其中 $a\in\mathbf{R}$。

(1) 若 $a\leqslant 0$，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $0<a<\frac{1}{e}$，则：

① 证明：$f(x)$ 恰有两个零点；

② 设 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，x_1 为 $f(x)$ 的零点，且 $x_1>x_0$，证明：$3x_0-x_1>2$。

【177】（2019·新课标全国一·文20·）

已知函数 $f(x)=2\sin x-x\cos x-x$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数。

(1) 证明：$f'(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上存在唯一零点；

(2) 当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant ax$，求 a 的取值范围。

【178】（2019·新课标全国一·理20·）

已知函数 $f(x)=\sin x-\ln(1+x)$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导数。证明：

(1) $f'(x)$ 在区间 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一极大值点；

(2) $f(x)$ 有且仅有两个零点。

【179】（2022·新课标全国乙·21·）

已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$。

(1) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,+\infty)$ 上各恰有一个零点，求 a 的取值范围。

这世上无论是谁，都没有平白无故的成功，也没有一帆风顺的坦荡。再有光芒和成就的人，都是从一件件小事、一天又一天积累起来的。你所看到的光鲜，都是无数流汗的日日夜夜组成的。（推荐人：@秦学乐（甘肃））

2.4 不等式的证明

核心笔记

不等式证明是高考中重要的一类综合问题，主要从单调性、最值、极值等多个角度进行考查。综合程度较高，对思维有很高的要求。通常构造函数利用导数求单调性进行证明，其中涉及放缩、找点等手段。

【180】（**2012 · 辽宁 · 12 ·** ）

若 $x\in[0,+\infty)$，下列不等式恒成立的是（　　）。

A. $e^x\leqslant 1+x+x^2$

B. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}x^2$

C. $\cos x\geqslant 1-\dfrac{1}{2}x^2$

D. $\ln(1+x)\geqslant x-\dfrac{1}{8}x^2$

【181】（**2018 · 新课标全国一 · 21 ·** ）

已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$。

(1) 设 $x=2$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 a，并求 $f(x)$ 的单调区间；

(2) 证明：当 $a\geqslant\dfrac{1}{e}$ 时，$f(x)\geqslant 0$。

【182】（**2018 · 新课标全国三 · 21 ·** ）

已知函数 $f(x)=\dfrac{ax^2+x-1}{e^x}$。

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程；

(2) 证明：当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+e\geqslant 0$。

【183】（**2021 · 新课标全国乙 · 20 ·** ）

设函数 $f(x)=\ln(a-x)$，已知 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点。

(1) 求 a；

(2) 设函数 $g(x)=\dfrac{x+f(x)}{xf(x)}$，证明：$g(x)<1$。

没有特别幸运，那么请先特别努力，别因为懒惰而失败，还矫情地将原因归于自己倒霉。你必须特别努力，才能显得毫不费力。（推荐人：@罗迪文（青海））

【184】（2015·北京·18·）

设函数 $f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$。

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）求证：当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$；

（3）设实数 k 使得 $f(x)>k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$ 对 $x\in(0,1)$ 恒成立，求 k 的最大值。

【185】（2014·新课标全国一·21·）

设函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x\ln x+\frac{b\mathrm{e}^{x-1}}{x}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=\mathrm{e}(x-1)+2$。

（1）求 a,b 的值；

（2）证明：$f(x)>1$。

【186】（2012·辽宁·21·）

设 $f(x)=\ln(x+1)+\sqrt{x+1}+ax+b$ $(a,b\in\mathbf{R},a,b$ 为常数），曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=\frac{3}{2}x$ 在 $(0,0)$ 点相切。

（1）求 a,b 的值；

（2）证明：当 $0<x<2$ 时，$f(x)<\frac{9x}{x+6}$。

【187】（2017·新课标全国三·21·）

已知函数 $f(x)=\ln x+ax^2+(2a+1)x$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $a<0$ 时，证明：$f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$。

任何时候都可以开始做自己想做的事，请不要用年龄和其他东西来束缚自己，年龄从来不是界限，除非你自己拿来为难自己。（推荐人：@代正勤（内蒙古））

【188】（2023・新高考全国一・19・）

已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$。

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$。

【189】（2013・新课标全国二・21・）

已知函数 $f(x)=e^x-\ln(x+m)$。

（1）设 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，求 m，并讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $m\leqslant 2$ 时，证明：$f(x)>0$。

【190】（2016・新课标全国二・21・）

（1）讨论函数 $f(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x$ 的单调性，并证明：当 $x>0$ 时，$(x-2)e^x+x+2>0$；

（2）证明：当 $a\in[0,1)$ 时，函数 $g(x)=\frac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ 有最小值。设 $g(x)$ 的最小值为 $h(a)$，求函数 $h(a)$ 的值域。

【191】（2017・新课标全国二・21・）

已知函数 $f(x)=ax^2-ax-x\ln x$，且 $f(x)\geqslant 0$。

（1）求 a；

（2）证明：$f(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0，且 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$。

【192】（2016・新课标全国三・21・）

设函数 $f(x)=a\cos 2x+(a-1)(\cos x+1)$，其中 $a>0$，记 $|f(x)|$ 的最大值为 A。

（1）求 $f'(x)$；

（2）求 A；

（3）证明：$|f'(x)|\leqslant 2A$。

【193】（2024·天津·20·）

设函数 $f(x)=x\ln x$。

(1) 求 $f(x)$ 图像上点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2) 若 $f(x)\geqslant a(x-\sqrt{x})$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立，求 a 的取值范围；

(3) 若 $x_1,x_2\in(0,1)$，证明：$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant|x_1-x_2|^{\frac{1}{2}}$。

【194】（2012·天津·21·）

已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}(x\in\mathbf{R})$。

(1) 求函数的单调区间与极值；

(2) 已知函数 $y=g(x)$ 的图像与函数 $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称，证明：当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$；

(3) 如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2>2$。

【195】（2016·新课标全国一·21·）

已知函数 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$ 有两个零点。

(1) 求 a 的取值范围；

(2) 设 x_1,x_2 是 $f(x)$ 的两个零点，证明：$x_1+x_2<2$。

【196】（2022·新课标全国甲·21·）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}-\ln x+x-a$。

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2) 证明：若 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，则 $x_1x_2<1$。

【197】(2021·新高考全国一·22·)

已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性;

(2) 设 a,b 为两个不相等的正数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$,证明:$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<\mathrm{e}$。

【198】(2016·新课标全国三·21·)

设函数 $f(x)=\ln x-x+1$。

(1) 讨论 $f(x)$的单调性;

(2) 证明:当 $x\in(1,+\infty)$时,$1<\dfrac{x-1}{\ln x}<x$;

(3) 设 $c>1$,证明:当 $x\in(0,1)$时,$1+(c-1)x>c^x$。

【199】(2017·新课标全国三·21·)

已知函数 $f(x)=x-1-a\ln x$。

(1) 若 $f(x)\geqslant 0$,求 a 的值;

(2) 设 m 为整数,且对于任意正整数 n,$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{2^n}\right)<m$,求 m 的最小值。

【200】(2022·新高考全国二·22·)

已知函数 $f(x)=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x$。

(1) 当 $a=1$ 时,讨论 $f(x)$的单调性;

(2) 当 $x>0$ 时,$f(x)<-1$,求 a 的取值范围;

(3) 设 $n\in\mathbf{N}^*$,证明:$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$。

生活是公平的,哪怕吃了很多苦,只要你坚持下去,一定会有收获,即使最后失败了,你也获得了别人不具备的经历。(推荐人:@何茂桦(新疆))

【201】（2018·新课标全国一·21·）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{x}-x+a\ln x$。

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $f(x)$ 存在两个极值点 x_1,x_2，证明：$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$。

【202】（2022·新高考全国一·22·）

已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值。

(1) 求 a；

(2) 证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列。

【203】（2020·天津·20·）

已知函数 $f(x)=x^3+k\ln x\ (k\in\mathbf{R})$，$f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数。

(1) 当 $k=6$ 时：

① 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

② 求函数 $g(x)=f(x)-f'(x)+\frac{9}{x}$ 的单调区间和极值；

(2) 当 $k\geqslant-3$ 时，求证：对任意的 $x_1,x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$。

【204】（2018·浙江·22·）

已知函数 $f(x)=\sqrt{x}-\ln x$。

(1) 若 $f(x)$ 在 $x=x_1,x_2(x_1\neq x_2)$ 处导数相等，证明：$f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln 2$；

(2) 若 $a\leqslant 3-4\ln 2$，证明：对于任意 $k>0$，直线 $y=kx+a$ 与曲线 $y=f(x)$ 有唯一公共点。

首先通过计算可得 $\angle AOB=x$，当弦 AB 在圆心下方，即 $0\leqslant x\leqslant \pi$ 时，有 $y=S_{扇AOB}-S_{\triangle AOB}=2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x\right)=x-\sin x$，而 $y'=1-\cos x\geqslant 0$，则 $y=x-\sin x\geqslant y_{x=0}=0$，且 $x-\sin x<x$ 即 $y=x-\sin x$ 的图像在 $y=x$ 下方，此时可排除 A,B。

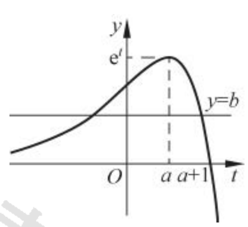
当弦 AB 在圆心上方，即 $\pi<x\leqslant 2\pi$ 时，同理可得 $y=x-\sin x$。$y=x$ 与 $y=\sin x$ 都有对称中心，可以通过平移使 $y=x$ 与 $y=\sin x$ 的任意对称中心重合，所以 $y=x-\sin x=(x-\pi)-\sin x+\pi$，则 $y=x-\sin x$ 有对称中心 (π,π)。故选 D。

方法二：当 $x\in(0,\pi)$ 时，弓形的面积小于扇形的面积，又扇形 OAB 的面积为 $\frac{1}{2}x$，$f(x)$ 为弓形面积的两倍，则 $f(x)<x$，即当 $x\in(0,\pi)$ 时，$y=f(x)$ 的图像在 $y=x$ 的下方；当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，弓形的面积大于扇形的面积，且扇形 OAB 的面积为 $\frac{1}{2}x$，$f(x)$ 为弓形面积的两倍，则 $f(x)>x$，即当 $x\in(\pi,2\pi)$ 时，$y=f(x)$ 的图像在 $y=x$ 的上方。故选 D。

第 2 章　导数

2.1　切线问题

【104】D。提示：过点处问题，先设切点，在曲线 $y=e^x$ 上任取一点 $P(t,e^t)$，且 $y'=e^x$，所以曲线 $y=e^x$ 在点 P 处的切线方程为 $y-e^t=e^t(x-t)$，即 $y=e^tx+(1-t)e^t$。由题意可知，点 (a,b) 在直线 $y=e^tx+(1-t)e^t$ 上，可得 $b=ae^t+(1-t)e^t=(a+1-t)e^t$。求出切线自然是没问题的，关键是如何对应题目中说的两条呢？



条数是由切点个数决定的，也就是说此刻形成的方程 $b=(a+1-t)e^t$ 有两个关于 t 的解，也可几何转化为直线与曲线有 2 个交点。

那么令 $f(t)=(a+1-t)e^t$，则 $f'(t)=(a-t)e^t$。

当 $t<a$ 时，$f'(t)>0$，此时函数 $f(t)$ 单调递增。

当 $t>a$ 时，$f'(t)<0$，此时函数 $f(t)$ 单调递减，所以 $f(t)_{\max}=f(a)=e^a$，由题意可知直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图像有两个交点，则 $b<f(t)_{\max}=e^a$。

当 $t<a+1$ 时，$f(t)>0$，当 $t>a+1$ 时，$f(t)<0$，故当 $0<b<e^a$ 时，直线 $y=b$ 与曲线 $y=f(t)$ 的图像有两个交点。故选 D。

【105】$1-\ln 2$。提示：这是一道公切线问题，怎么操作呢？分别设出两条曲线的切线，求出各自切线，而后待定系数法解方程即可。

设 $y=kx+b$ 与 $y=\ln x+2$ 和 $y=\ln(x+1)$ 的切点分别为 $(x_1,\ln x_1+2)$ 和 $(x_2,\ln(x_2+1))$，则切线分别为 $y-\ln x_1-2=\frac{1}{x_1}(x-x_1)$，$y-\ln(x_2+1)=\frac{1}{x_2+1}(x-x_2)$，化简得 $y=\frac{1}{x_1}\cdot x+\ln x_1+1$，$y=\frac{1}{x_2+1}x+\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1}$，依题意知 $\begin{cases}\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2+1},\\ \ln x_1+1=\ln(x_2+1)-\frac{x_2}{x_2+1},\end{cases}$ 解得 $x_1=\frac{1}{2}$，从而 $b=\ln x_1+1=1-\ln 2$。

【106】8。提示：又是公切线问题，先求出 $y=x+\ln x$ 在 $(1,1)$ 处的切线，再和 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 联立解 a。因为 $y'=1+\frac{1}{x}$，所以 $y'_{x=1}=2$，则 $y=x+\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $y=2x-1$，又切线与曲线 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 相切，而这里我们容易直接把其看成二次函数，这样的话容易漏解(长得像也不一定是二次，也有可能是一次)，所以对于出现的不确定我们需要分类讨论。

当 $a=0$ 时，$y=2x+1$ 与 $y=2x-1$ 平行，故 $a\neq 0$。对 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 求导可得 $y'=2ax+(a+2)$，所以令 $2ax+a+2=2$ 得 $x=-\frac{1}{2}$，代入 $y=2x-1$，得 $y=-2$，则点 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ 在 $y=ax^2+(a+2)x+1$ 的图像上，故 $-2=a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(a+2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1$，即 $a=8$。

二次函数和直线的相切也可以联立方程通过 $\Delta=0$ 来计算 a。

【107】A。提示：处理此类问题按题意操作逐个检验和验证即可。设函数 $y=f(x)$ 的图像上两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则由导数的几何意义可知，点 P,Q 处切线的斜率分别为 $k_1=f'(x_1)$，$k_2=f'(x_2)$。若函数具有 T 性质，则 $k_1\cdot k_2=f'(x_1)f'(x_2)=-1$。

A：$f'(x)=\cos x$，显然 $k_1\cdot k_2=\cos x_1\cos x_2=-1$ 有无数组解，所以该函数具有 T 性质。

B：$f'(x)=\frac{1}{x}(x>0)$，显然 $k_1\cdot k_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=-1$ 无解，故该函数不具有 T 性质。

C：$f'(x)=e^x>0$，显然 $k_1\cdot k_2=e^{x_1}\cdot e^{x_2}=-1$ 无解，故该函数不具有 T 性质。

D：$f'(x)=3x^2\geqslant 0$，显然 $k_1\cdot k_2=3x_1^2\cdot 3x_2^2=-1$ 无解，故该函数不具有 T 性质。故选 A。

【108】$(1,1)$。提示：看题抓关键，关键是什么？垂直！两条有斜率的直线相互垂直，则斜率之积为 -1。对 $y=e^x$ 求导得 $y'=e^x$，那么 $y'_{x=0}=1$，所以曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线为 $y=x+1$，而曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 上点 P 处的切线垂直，对 $y=\frac{1}{x}$ 求导得 $y'=-\frac{1}{x^2}$。设 $P(s,t)$，则 $y'_{x=s}=-\frac{1}{s^2}=-1$，由 $s>0$ 解得

$s=1$,将 $s=1$ 代入 $y=\frac{1}{x}$ 得 $t=1$,所以 P 的坐标为(1,1)。

【109】①③④。提示:新定义问题跟题走,简单套定义,一定要严格理解题意才行。

①: $y'=3x^2$, $y'|_{x=0}=0$,所以 l: $y=0$ 是曲线 C: $y=x^3$ 在点 $P(0,0)$ 处的切线,画图可知曲线 C: $y=x^3$ 在点 $P(0,0)$ 附近位于直线 l 的两侧,①正确。

②:因为 $y'=2(x+1)$, $y'|_{x=-1}=0$,所以切线为 $y=0$, $x=-1$ 不是曲线 C: $y=(x+1)^2$ 在点 $P(-1,0)$ 处的切线,②错误。

③: $y'=\cos x$, $y'|_{x=0}=1$,在点 $P(0,0)$ 处的切线为 l: $y=x$,画图可知曲线 C: $y=\sin x$ 在点 $P(0,0)$ 附近位于直线 l 的两侧,③正确。

④: $y'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $y'|_{x=0}=\frac{1}{\cos^2 0}=1$,在点 $P(0,0)$ 处的切线为 l: $y=x$,画图可知曲线 C: $y=\tan x$ 在点 $P(0,0)$ 附近位于直线 l 的两侧,④正确。

⑤: $y'=\frac{1}{x}$, $y'|_{x=1}=1$,在点 $P(1,0)$ 处的切线为 l: $y=x-1$,令 $h(x)=x-1-\ln x(x>0)$,可得 $h'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,所以 $h(x)_{\min}=h(1)=0$,故 $x-1\geqslant\ln x$,可知曲线 C: $y=\ln x$ 在点 $P(1,0)$ 附近位于直线 l 的同侧,⑤错误。故正确的是①③④。

【110】21。提示:由题意求得 $y=x^2(x>0)$ 在点 (a_k,a_k^2) 处的切线方程为 $y-a_k^2=2a_k(x-a_k)$,当 $y=0$ 时,解得 $x=\frac{a_k}{2}$,即 $a_{k+1}=\frac{a_k}{2}$,所以 $\{a_n\}$ 为等比数列,公比为 $\frac{1}{2}$,所以 $a_1+a_3+a_5=16+4+1=21$。

【111】B。提示:遇题不要慌,观察很重要,通过观察可得 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与 $y=\ln(2x)$ 互为反函数,那么它们的图像关于直线 $y=x$ 对称,于是问题可转化为 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上点 P 或 $y=\ln(2x)$ 上点 Q 到直线 $y=x$ 距离最小值的 2 倍。

不妨选取 $y=\ln(2x)$ 上点 Q 到直线 $y=x$ 距离最小值的 2 倍进行计算。$y=\ln(2x)$ 上距离直线 $y=x$ 最近的点 Q 即为 $y=\ln(2x)$ 上与 $y=x$ 平行的切线和曲线 $y=\ln(2x)$ 的切点。对 $y=\ln(2x)$ 求导得 $y'=\frac{1}{x}$,当 $y'=\frac{1}{x}=1$ 时得 $x_Q=1$,进一步可得 $y_Q=\ln 2$,那么 Q 到直线 $y=x$ 的距离 $d=\frac{|1-\ln 2|}{\sqrt{2}}=\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$,则 $|PQ|_{\min}=2d=2\times\frac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$。故选 B。

【112】见提示。提示:(1) 首先求得导函数的解析式,然后分类讨论导函数的符号即可确定原函数的单调性。由函数的解析式可得 $f'(x)=3x^2-2x+a$,导函数的判别式 $\Delta=4-12a$。

① 当 $a\geqslant\frac{1}{3}$,即 $\Delta=4-12a\leqslant 0$ 时,$f'(x)\geqslant 0$,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增。

② 当 $a<\frac{1}{3}$,即 $\Delta=4-12a>0$ 时,由 $f'(x)=0$ 解得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}$,$x_2=\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}$。

当 $x\in\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;

当 $x\in\left(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;

当 $x\in\left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增。

综上可得,当 $a\geqslant\frac{1}{3}$ 时,$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增;

当 $a<\frac{1}{3}$ 时,$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3}\right)$,$\left(\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3},+\infty\right)$ 上单调递增,在 $\left(\frac{1-\sqrt{1-3a}}{3},\frac{1+\sqrt{1-3a}}{3}\right)$ 上单调递减。

(2) 先求 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线方程,再将原问题转化为方程求解的问题,即可求得公共点坐标。

设切点 $P(x_0,f(x_0))$,则 $f(x_0)=x_0^3-x_0^2+ax_0+1$,$f'(x_0)=3x_0^2-2x_0+a$,则切线方程为 $y-(x_0^3-x_0^2+ax_0+1)=(3x_0^2-2x_0+a)(x-x_0)$,因切线过坐标原点,所以 $0-(x_0^3-x_0^2+ax_0+1)=(3x_0^2-2x_0+a)(0-x_0)$,整理化简得 $(x_0-1)(2x_0^2+x_0+1)=0$,解得 $x_0=1$,则 $f(x_0)=f(1)=1-1+a+1=a+1$,有 $f'(x_0)=f'(1)=1+a$,故切线方程为 $y=(a+1)x$。由 $f(x)=(a+1)x$ 得 $x^3-x^2+ax+1=(a+1)x$,化简得 $x^3-x^2-x+1=0$,由于切点的横坐标 1 必然是该方程的一个根,所以 $(x-1)$ 是 x^3-x^2-x+1 的一个因式,故该方程可以分解因式为 $(x-1)(x^2-1)=0$,解得 $x_1=1$,$x_2=-1$,$f(-1)=-1-a$。

综上,曲线 $y=f(x)$ 过坐标原点的切线与曲线 $y=f(x)$ 的公共点的坐标为 $(1,1+a)$ 和 $(-1,-1-a)$。

【113】(1)$\sqrt{2}$;(2)$(-3,-1)$;(3)3,2,1。提示:(1) $f'(x)=6x^2-3$,当 $x\in\left[-2,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x\in\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减,所以 $f(x)_{\max}=\max\left\{f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),f(1)\right\}=\max\{\sqrt{2},-1\}=\sqrt{2}$。

(2) 设过点 $P(1,t)$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 的切点为 $Q(m,n)$,则切线方程为 $y-(2m^3-3m)=(6m^2-3)(x-m)$,即 $y=(6m^2-3)(x-m)+(2m^3-3m)$,又其经过

$P(1,t)$，则 $t=(6m^2-3)(1-m)+(2m^3-3m)=-4m^3+6m^2-3$。令 $p(m)=-4m^3+6m^2-3-t$，$p'(m)=12m(1-m)$，当 $m\in(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$p'(m)<0$，$p(m)$ 单调递减；当 $m\in(0,1)$ 时，$p'(m)>0$，$p(m)$ 单调递增，由题意知 $y=p(m)$ 有 3 个零点，则 $-3-t=p(0)<0<p(1)=-1-t$，即 $-3<t<-1$。

此时 $p(-1)=7-t>0$，$p(2)=-11-t<0$，由零点存在定理知，存在 $x_1\in(-1,0)$，$x_2\in(0,1)$，$x_3\in(1,2)$，使得 $p(m)=0$，故 $t\in(-3,-1)$。

(3) 设直线 l 与曲线相切的切点为 $(x_0,2x_0^3-3x_0)$。

过点 A 的切线斜率为 $k=f'(x_0)=6x_0^2-3=\dfrac{(2x_0^3-3x_0)-2}{x_0-(-1)}$，化简可得 $4x_0^3+2x_0^2-1=0$，而 $4x_0^3+6x_0^2-1=(2x_0+1)(2x_0^2+2x_0-1)=0$，解得 $x_0=-\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}$，所以过点 A 的切线有 3 条。

过点 B 的切线斜率为 $k=f'(x_0)=6x_0^2-3=\dfrac{2x_0^3-3x_0-10}{x_0-2}$，化简可得 $x_0^3-3x_0^2+4=0$，而 $x_0^3-3x_0^2+4=(x_0+1)(x_0-2)^2=0$，解得 $x_0=-1,2$，所以过点 B 的切线有 2 条。

过点 C 的切线斜率为 $k=f'(x_0)=6x_0^2-3=\dfrac{2x_0^3-3x_0-2}{x_0}$，化简可得 $4x_0^3+2=0$，解得 $x_0=-\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$，所以过点 C 的切线有 1 条。

综上，过点 A 的切线有 3 条，过点 B 的切线有 2 条，过点 C 的切线有 1 条。

【114】见提示。提示：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$。因为 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{(x-1)^2}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增。因为 $f(\mathrm{e})=1-\dfrac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}-1}=\dfrac{-2}{\mathrm{e}-1}<0$，$f(\mathrm{e}^2)=2-\dfrac{\mathrm{e}^2+1}{\mathrm{e}^2-1}=\dfrac{\mathrm{e}^2-3}{\mathrm{e}^2-1}>0$，所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点 x_1，即 $f(x_1)=0$。又 $0<\dfrac{1}{x_1}<1$，$f\left(\dfrac{1}{x_1}\right)=-\ln x_1+\dfrac{x_1+1}{x_1-1}=-f(x_1)=0$，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 有唯一零点 $\dfrac{1}{x_1}$。

综上，$f(x)$ 有且仅有两个零点。

(2) 因为 $\mathrm{e}^{-\ln x_0}=\dfrac{1}{x_0}$，故点 $B\left(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 在曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 上。又 $f(x_0)=0$，即 $\ln x_0=\dfrac{x_0+1}{x_0-1}$，故直线 AB 的斜率 $k=$

$$\frac{\dfrac{1}{x_0}-\ln x_0}{-\ln x_0-x_0}=\frac{\dfrac{1}{x_0}-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}}{-\dfrac{x_0+1}{x_0-1}-x_0}=\frac{1}{x_0}。$$

曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在点 $B\left(-\ln x_0,\dfrac{1}{x_0}\right)$ 处切线的斜率是 $\dfrac{1}{x_0}$，曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处切线的斜率也是 $\dfrac{1}{x_0}$，所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $A(x_0,\ln x_0)$ 处的切线也是曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线。

【115】(1) 3；(2) $[-1,+\infty)$。提示：(1) $f'(x)=3x^2-1$，$f'(x_1)=f'(-1)=2$，$f(x_1)=f(-1)=0$，所以 $f(x)$ 在点 $(-1,0)$ 处的切线为 $y=2(x+1)$，又该切线也是 $g(x)=x^2+a$ 的切线，联立 $y=2(x+1)$ 和 $g(x)=x^2+a$，可得 $x^2-2x+a-2=0$，由 $\Delta=0$ 可得 $a=3$。

(2) 公切线问题需要分别设两条曲线上的两个切点，分别求出两条曲线在各自切点处的切线方程，然后通过斜率和截距相等形成方程组，再通过其中某一条切线的切点横坐标表示出关于 a 的函数，进而转变为求函数值域的问题。

$f'(x)=3x^2-1$，$f'(x_1)=3x_1^2-1$，所以 $f(x)$ 在点 $(x_1,f(x_1))$ 处的切线为 $y-(x_1^3-x_1)=(3x_1^2-1)(x-x_1)$，即为 $y=(3x_1^2-1)x-2x_1^3$，设该切线与 $g(x)=x^2+a$ 相切于 (x_2,x_2^2+a)，$g'(x)=2x$，则切线方程为 $y-(x_2^2+a)=2x_2(x-x_2)$，即为 $y=2x_2x-x_2^2+a$，则有 $3x_1^2-1=2x_2$，$-2x_1^3=-x_2^2+a$，则 $a=\left(\dfrac{3x_1^2-1}{2}\right)^2-2x_1^3=\dfrac{9x_1^4}{4}-2x_1^3-\dfrac{3x_1^2}{2}+\dfrac{1}{4}$。

记 $\varphi(x)=\dfrac{9x^4}{4}-2x^3-\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{1}{4}$，则 $\varphi'(x)=9x^3-6x^2-3x=3x(3x+1)(x-1)$，当 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)$ 和 $(0,1)$ 时，$\varphi'(x)<0$，$\varphi(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，所以 $\varphi(x)\geqslant\min\left\{\varphi\left(-\dfrac{1}{3}\right),\varphi(1)\right\}=\min\left\{\dfrac{5}{27},-1\right\}=-1$，故 $a\in[-1,+\infty)$。

2.2　最值与极值

【116】D。提示：倾斜角对应斜率，而斜率又关系到导数，斜率范围就是导函数值域，只要求得导数且求得导数值域，那么再结合 $k=\tan\alpha$，$\alpha\in[0,\pi)$ 进一步可求得倾斜角。

由题意知 $y'=\dfrac{-4\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}=\dfrac{-4}{\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+2}$，因为 $\mathrm{e}^x>0$，故 $\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+2\geqslant4$（当且仅当 $x=0$ 时取等），所以 $y'=\dfrac{-4}{\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}+2}\in[-1,0)$，再结合 $k=\tan\alpha$，$\alpha\in[0,\pi)$，可得 $\alpha\in\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right)$。故选 D。

【117】D。提示：由题意知 $M(t,t^2)$，$N(t,\ln t)$，则 $|MN|=t^2-\ln t(t>0)$。不妨令 $p(x)=x^2-\ln x$，则 $p'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，故当 $x\in\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$p'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，

$p'(x)>0$。所以当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$|MN|$ 达到最小，即 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$。故选 D。

【118】D。提示：由题意知 $f'(x)=12x^2-2ax-2b$，又 $f'(1)=0$，即 $12-2a-2b=0$，故 $a+b=6$。"和定双正求积最大"那就一定要上基本不等式。由 $a>0,b>0$，所以 $ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=9$，当且仅当 $a=b=3$ 时取等号。故选 D。

【119】C。提示：结合选项来看需要判断函数的单调性和对称性。

A，B：先判断函数单调性，$f(x)=\ln x+\ln(2-x)=\ln x(2-x)(0<x<2)$，求导得 $f'(x)=\frac{2(1-x)}{x(2-x)}$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,2)$ 上单调递减，排除 A，B。

C：因为 $f(2-x)=\ln(2-x)+\ln x=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图像关于 $x=1$ 对称，C 正确。

D：$f(2-x)+f(x)=[\ln x+\ln(2-x)]+[\ln(2-x)+\ln x]=2\ln(2-x)+2\ln x\neq 0$，D 错误。故选 C。

【120】C。提示：问题转化为"$\forall x\in(1,2)$，$f'(x)=a\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}\geqslant 0$ 恒成立"，分离参数可得 $a\geqslant\frac{1}{x\mathrm{e}^x}$，令 $g(x)=x\mathrm{e}^x(x\in(1,2))$，则 $g'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x>0$，即 $g(x)$ 在 $x\in(1,2)$ 上单调递增，故 $g(x)\in(\mathrm{e},2\mathrm{e}^2)$，则 $\frac{1}{2\mathrm{e}^2}<\frac{1}{x\mathrm{e}^x}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，因此 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，所以 a 的最小值为 e^{-1}。故选 C。

【121】C。提示：函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，等价于 $f'(x)=1-\frac{2}{3}\cos 2x+a\cos x=-\frac{4}{3}\cos^2 x+a\cos x+\frac{5}{3}\geqslant 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恒成立。到这里必然是需要三角函数换元降低复杂度，但换元的过程中注意范围不能丢。设 $\cos x=t\in[-1,1]$，则 $g(t)=-\frac{4}{3}t^2+at+\frac{5}{3}\geqslant 0$ 在 $[-1,1]$ 上恒成立，则需要 $[g(t)]_{\min}\geqslant 0$，而 $[g(t)]_{\min}=\min\{g(-1),g(1)\}$，则需 $\begin{cases}g(1)=-\frac{4}{3}+a+\frac{5}{3}\geqslant 0,\\ g(-1)=-\frac{4}{3}-a+\frac{5}{3}\geqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-\frac{1}{3}\leqslant a\leqslant\frac{1}{3}$。故选 C。

【122】$\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$。提示：问题转化为"$\forall x\in(0,+\infty)$，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立"，而 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)$，即 $\forall x\in(0,+\infty)$，$g(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\ln(1+a)\geqslant 0$ 恒成立，又 $g'(x)=a^x(\ln a)^2+(1+a)^x[\ln(1+a)]^2>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以需 $g(0)=\ln a+\ln(1+a)=\ln a(1+a)\geqslant 0$，即 $a(1+a)\geqslant 1$，且 $a\in(0,1)$，解得 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}\leqslant a<1$，即 $a\in\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2},1\right)$。

【123】BCD。提示：$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}-\frac{2c}{x^3}=\frac{ax^2-bx-2c}{x^3}(x>0)$，又函数既有极大值又有极小值，则 $y=ax^2-bx-2c(a\neq 0)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不等实根（函数的极值点是导函数的变号零点）。

设两实根 $0<x_1<x_2$，则有 $\begin{cases}x_1+x_2>0,\\ x_1x_2>0,\\ \Delta>0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{b}{a}>0,\\ \frac{-2c}{a}>0,\\ b^2+8ac>0。\end{cases}$ 通过判断可得 a 与 b 同号，a 与 c 异号，进一步可得 b 与 c 异号，所以有 $ab>0$，$bc<0$，$ac<0$，$b^2+8ac>0$。所以 A 错误，BCD 正确，故选 BCD。

【124】4。提示：任取 $x\in[-1,1]$ 总有 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，即 $[f(x)]_{\min}\geqslant 0$，果断求导看单调性，$f'(x)=3ax^2-3$，很显然 $3a\leqslant 0$，即当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，$[f(x)]_{\min}=f(1)=a-2<0$，显然不合题意。

当 $a>0$ 时，$f'(x)=3a\left(x-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$，当 $\frac{1}{\sqrt{a}}\geqslant 1$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减，此时需要 $[f(x)]_{\min}=f(1)=a-2<0$，依然不合题意。

当 $\frac{1}{\sqrt{a}}<1$，即 $a>1$ 时，$f(x)$ 在 $\left[-1,-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{\sqrt{a}},1\right]$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 上单调递减，所以 $[f(x)]_{\min}=\min\left\{f(-1),f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\right\}$，那么需要 $f(-1)=-a+4\geqslant 0$，$f\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=-\frac{2}{\sqrt{a}}+1\geqslant 0$，解得 $a=4$。

综上所述，$a=4$。

【125】C。提示：极值点 x_0 满足 $f'(x_0)=0$，而 $f'(x)=\frac{\sqrt{3}\pi}{m}\cos\frac{\pi x}{m}$，所以有 $\frac{\sqrt{3}\pi}{m}\cos\frac{\pi x_0}{m}=0$，可得 $\frac{\pi x_0}{m}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，化简得 $x_0=\frac{m}{2}+mk(k\in\mathbf{Z})$。

又由 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$ 得 $\left(\frac{m}{2}+mk\right)^2+\left[\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right]^2<m^2(k\in\mathbf{Z})$，即 $m^2\left(k+\frac{1}{2}\right)^2+3<m^2(k\in\mathbf{Z})$。而 $m\neq 0$，故 $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{m^2-3}{m^2}(k\in\mathbf{Z})$。而存在 x_0 满足 $x_0^2+[f(x_0)]^2<m^2$，即存在 $k\in\mathbf{Z}$ 满足 $\left(k+\frac{1}{2}\right)^2<\frac{m^2-3}{m^2}$，则需 $\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right]_{\min}<\frac{m^2-3}{m^2}$，即 $\frac{1}{4}<\frac{m^2-3}{m^2}$，解得 $m\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$。故选 C。

解决本题的核心在于借助 $x_0=\frac{m}{2}+mk(k\in\mathbf{Z})$ 实现由存在 x_0 到存在 k 的转化。

【126】B。提示：通过观察 $f'(x)>2$ 和 $f(x)>2x+4$ 发现条

件不正是问题求导后的结果吗？所以令 $g(x)=f(x)-(2x+4)$，而 $g'(x)=f'(x)-2>0$，故 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $g(-1)=f(-1)-2=0$，那么 $f(x)>2x+4$ 的解集即为 $g(x)>0$ 的解集，即 $g(x)>g(-1)$，故 $x\in(-1,+\infty)$。故选 B。

【127】C。提示：取满足题意的函数 $f(x)=2x-1$，若取 $k=\frac{3}{2}$，则 $f\left(\frac{1}{k}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}<\frac{2}{3}=\frac{1}{k}$，所以排除 A。

若取 $k=\frac{11}{10}$，则 $f\left(\frac{1}{k-1}\right)=f\left(\frac{1}{\frac{11}{10}-1}\right)=f(10)=19>11=\frac{\frac{11}{10}}{\frac{11}{10}-1}=\frac{k}{k-1}$，所以排除 D。

取满足题意的函数 $f(x)=10x-1$，若取 $k=2$，则 $f\left(\frac{1}{k}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=4>1=\frac{1}{2-1}=\frac{1}{k-1}$，所以排除 B，故结论一定错误的是 C。

这里我们继续探究 C：由题意得 $f'(x)>k$，即 $f'(x)-k>0$，从导数视角来看这是一个求导的结果。将其看成导数可得 $g(x)=f(x)-kx$，且该函数在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，满足 $g(0)=-1$。

当 $k>1$ 时，$\frac{1}{k-1}>\frac{1}{k}>0$，所以 $g\left(\frac{1}{k-1}\right)>g\left(\frac{1}{k}\right)>g(0)$，即 $f\left(\frac{1}{k-1}\right)-\frac{k}{k-1}>f\left(\frac{1}{k}\right)-1>-1$，因此有 $f\left(\frac{1}{k}\right)>0$，$f\left(\frac{1}{k-1}\right)>\frac{k}{k-1}$。

C 选项一定错误，故选 C。

【128】C。提示：由选项 A,B 构造函数 $f(x)=e^x-\ln x$，则 $f'(x)=e^x-\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，且 $f'(1)=e-1>0$，$f'\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}-e<0$，由零点存在定理知 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有一个极值点，即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上不是单调函数，无法判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小，故 A,B 错误。

由选项 C,D 构造函数 $g(x)=\frac{e^x}{x}$，$g'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$，故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，所以 $g(x_1)>g(x_2)$，即 $\frac{e^{x_1}}{x_1}>\frac{e^{x_2}}{x_2}$，化简得 $x_2e^{x_2}>x_1e^{x_1}$。故选 C。

【129】A。提示：通过对 $xf'(x)-f(x)<0$ 进行观察，这不正是分式求导 $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ 的分子吗？

这是典型的逆向考查求导四则运算构造函数呀！条件没有分母怎么构造？分式求导的分母是被平方作用过的，可以给不等式两边同乘正数再调整其结构。由 $xf'(x)-f(x)<0$ 得 $\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}<0$，即 $\left[\frac{f(x)}{x}\right]'<0$，故令 $h(x)=\frac{f(x)}{x}$，因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $h(x)$ 为偶函数。

当 $x>0$ 时，$h'(x)<0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，根据对称性知 $h(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递增。又 $f(-1)=0$，$f(1)=0$，数形结合可知，使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(0,1)$。故选 A。

【130】D。提示：观察 $x^2f'(x)+2xf(x)=\frac{e^x}{x}$，等式的左边即“前导后不导，前不导后导再相加”的形式，不正是 $[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 的形式吗？

$x^2f'(x)+2xf(x)=(x^2f(x))'=\frac{e^x}{x}$，设 $g(x)=x^2f(x)$，那么 $f(x)=\frac{g(x)}{x^2}$，则 $f'(x)=\frac{g'(x)\cdot x^2-2x\cdot g(x)}{x^4}=\frac{\frac{e^x}{x}\cdot x^2-2x\cdot x^2f(x)}{x^4}=\frac{e^x-2x^2f(x)}{x^3}=\frac{e^x-2g(x)}{x^3}$，导数正负难断，那怎么办？通过观察我们发现分子控制着导数正负，那我们就有必要再单独研究分子了。令 $h(x)=e^x-2g(x)$，则 $h'(x)=e^x-2g'(x)=e^x-2\frac{e^x}{x}=\frac{e^x(x-2)}{x}$，易得 $h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $[h(x)]_{\min}=h(2)=e^2-2\frac{e^2}{2}=0$。故当 $x>0$ 时，$h(x)\geqslant 0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即既无极大值也无极小值。故选 D。

【131】A。提示：$2f(x)+xf'(x)>x^2$，即 $\frac{2xf(x)+x^2f'(x)}{x}>x^2$，有 $\frac{[x^2f(x)]'}{x}>x^2$。那么当 $x>0$ 时，$[x^2f(x)]'>x^3>0$；当 $x<0$ 时，$[x^2f(x)]'<x^3<0$，故令 $g(x)=x^2f(x)$，则 $g(x)$ 在 $x>0$ 时单调递增，在 $x<0$ 时单调递减。所以 $g(x)\geqslant g(0)$，即 $x^2f(x)\geqslant 0$，化简得 $f(x)\geqslant 0$，把 $x=0$ 代入 $2f(x)+xf'(x)>x^2$ 可得 $f(0)>0$。综上可得 $f(x)>0$。故选 A。

【132】A。提示：通过观察可得 $a=\frac{31}{32}=1-\frac{1}{32}=1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2}$，而 $b=\cos\frac{1}{4}$，$c=4\sin\frac{1}{4}$，因为 $b>0$，$c>0$，所以 $\frac{c}{b}=\frac{4\sin\frac{1}{4}}{\cos\frac{1}{4}}=4\tan\frac{1}{4}$，这里 $\tan\frac{1}{4}$ 和 $\frac{1}{4}$ 的大小我们并不能直接看出来。

构造函数 $f(x)=\tan x-x\ \left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$，则 $f'(x)=\frac{1}{\cos^2x}-1=\frac{\sin^2x}{\cos^2x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 上单调递

增，即 $f(x)>f(0)=0$，故当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$\tan x>x$，所以 $\tan\frac{1}{4}>\frac{1}{4}$，因此有 $\frac{c}{b}=4\tan\frac{1}{4}>4\times\frac{1}{4}=1$，即 $c>b$。

而 $b-a=\cos\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2}\right)$，构造函数 $g(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$，则 $g'(x)=x-\sin x$，令 $\varphi(x)=x-\sin x\left(0<x<\frac{\pi}{4}\right)$，则 $\varphi'(x)=1-\cos x>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 上单调递增，因此有 $g'(x)=\varphi(x)=x-\sin x>\varphi(0)=0$，所以 $g(x)$ 在 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 上单调递增，则当 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$g(x)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)>g(0)=0$，因此 $g\left(\frac{1}{4}\right)=\cos\frac{1}{4}-\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{4^2}\right)>0$，即 $b>a$，所以有 $c>b>a$。故选 A。

注意：本题构造函数比较大小使用到了不等式：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x<x<\tan x$。

【133】B。提示：直接观察很难比较出这三个的大小，那我们就需要进一步观察数组特征和结构特征。对结构进行观察的时候我们发现了 a 和 b 结构相似，可通过调整结构进一步比较大小，$a=2\ln 1.01=\ln 1.01^2=\ln(1+0.01)^2=\ln(1+2\times 0.01+0.01^2)>\ln 1.02=b$。那么 c 与 a,b 该如何比较大小呢？结构上的不相似难以利用函数单调性比较大小，那就作差吧，$a-c=2\ln 1.01-(\sqrt{1.04}-1)$。通过观察，这几个数字有关联，$1.01=1+0.01$，$1.02=1+0.02$，$1.04=1+0.04$。

不变的是整数部分，变化的是小数部分，对于变化的部分可通过 x 替换，这样就构造出函数 $f(x)=2\ln(1+x)-\sqrt{1+4x}+1$ 了，$f(0)=0$，$f'(x)=\frac{2}{1+x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2(\sqrt{1+4x}-1-x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$。由于 $1+4x-(1+x)^2=2x-x^2=x(2-x)$，因此当 $0<x<2$ 时，$1+4x-(1+x)^2>0$，即 $\sqrt{1+4x}>(1+x)$，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，则 $f(0.01)>f(0)=0$，有 $2\ln 1.01>\sqrt{1.04}-1$，即 $a>c$。

而 $b-c=\ln 1.02-(\sqrt{1.04}-1)$，令 $g(x)=\ln(1+2x)-\sqrt{1+4x}+1$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{\sqrt{1+4x}}=\frac{2(\sqrt{1+4x}-1-2x)}{(1+x)\sqrt{1+4x}}$。由于 $1+4x-(1+2x)^2=-4x^2$，在 $x>0$ 时，$1+4x-(1+2x)^2<0$，因此 $g'(x)<0$，即函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(0.01)<g(0)=0$，得 $\ln 1.02<\sqrt{1.04}-1$，即 $b<c$。

综上，$b<c<a$。故选 B。

【134】C。提示：由题意知 $a=0.1e^{0.1}$，$b=\frac{1}{9}=\frac{0.1}{1-0.1}$，$c=-\ln(1-0.1)$，则 $c=-\ln 0.9=\ln\frac{10}{9}=\ln\left(1+\frac{1}{9}\right)<\left(1+\frac{1}{9}\right)-1=\frac{1}{9}=b$（使用不等式 $\ln x<x-1$），即 $c<b$。

观察 a,b：

方法一：构造函数 $f(x)=xe^x-\frac{x}{1-x}=x\left(e^x-\frac{1}{1-x}\right)(0<x<1)$，令 $t(x)=e^x-\frac{1}{1-x}(0<x<1)$，因为 $e^x\geqslant x+1$，用 $-x$ 替换 x，可得 $e^{-x}\geqslant 1-x$，当 $1-x>0$ 时，则有 $e^x<\frac{1}{1-x}$，即 $e^x-\frac{1}{1-x}<0$。所以当 $0<x<1$ 时，$f(x)=xe^x-\frac{x}{1-x}<0$，即 $a<b$。

方法二：构造函数 $f(x)=\frac{xe^x}{\frac{x}{1-x}}=e^x(1-x)(0<x<1)$，则 $f'(x)=-xe^x<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，故 $f(x)<f(0)=1$，所以 $f(x)=\frac{xe^x}{\frac{x}{1-x}}<1$，又当 $0<x<1$ 时，$xe^x>0$，$\frac{x}{1-x}>0$，所以 $xe^x<\frac{x}{1-x}$，故 $a=0.1e^{0.1}<\frac{0.1}{1-0.1}$，即 $a<b$。

观察 a,c：构造函数 $p(x)=xe^x+\ln(1-x)(0<x<0.2)$，则 $p'(x)=(x+1)e^x+\frac{1}{x-1}=\frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}$，令 $q(x)=(x^2-1)e^x+1$，则 $q'(x)=(x^2+2x-1)e^x$。当 $0<x<0.2$ 时，$x^2+2x-1=(x+1)^2-2<1.44-1<0$，而 $e^x>0$，所以 $q'(x)<0$，那么 $q(x)=(x^2-1)e^x+1$ 在 $(0,0.2)$ 上单调递减，故 $q(x)<q(0)=0$。

又 $x-1<0$，故 $p'(x)=\frac{(x^2-1)e^x+1}{x-1}>0$，所以 $p(x)$ 在 $(0,0.2)$ 上单调递增，因此有 $p(x)>p(0)=0$，所以 $0.1e^{0.1}+\ln(1-0.1)>0$，则 $a=0.1e^{0.1}>-\ln(1-0.1)=c$，即 $a>c$。

因此有 $b>a>c$，故选 C。

注：构造函数比较大小的时候除了根据作差的结果构造，也可以考虑根据作比的结果构造函数哦！

【135】(1) $y=-\ln 2(x-1)$；(2) $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$。提示：(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\left(\frac{1}{x}-1\right)\ln(1+x)$，$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{1}{1+x}$，$f'(1)=-\ln 2$，$f(1)=0$，所求切线为 $y=-\ln 2(x-1)$。

(2) $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\frac{1}{x}+a\right)\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{x^2}\left[\ln(1+x)-\frac{ax^2+x}{x+1}\right]$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递

增，即 $\forall x\in(0,+\infty)$，则 $g(x)=\ln(1+x)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}\leqslant 0$ 恒成立，即 $h(x)=ax^2+x-(1+x)\ln(1+x)\geqslant 0$，$h'(x)=2ax-\ln(1+x)$。

① 若 $a\leqslant 0$，则 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$h(x)<h(0)=0$，不合题意。

② 若 $a>0$，令 $p(x)=h'(x)$，则 $p'(x)=2a-\dfrac{1}{x+1}$ 单调递增，$p'(x)>p'(0)=2a-1$。

若 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，$p'(x)>0$，则 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$h(x)>h(0)=0$，满足题意。

若 $0<a<\dfrac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2a}-1\right)$ 时，$p'(x)<0$，$h'(x)$ 单调递减，$h'(x)<h'(0)=0$，$h(x)$ 单调递减，则 $h(x)<h(0)=0$，不合题意。

综上，当 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

【136】 (1) $f(x)_{极小值}=f(0)=0$，无极大值；(2) $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$。

提示：(1) 当 $a=-2$ 时，$f(x)=(1+2x)\ln(1+x)-x$，$f'(x)=2\ln(1+x)+\dfrac{1+2x}{1+x}-1=2\ln(1+x)-\dfrac{1}{1+x}+1$。

因为 $y=2\ln(1+x)$，$y=-\dfrac{1}{1+x}+1$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上为增函数，又 $f'(0)=0$，因此当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

故 $f(x)_{极小值}=f(0)=0$，无极大值。

(2) $f'(x)=-a\ln(1+x)+\dfrac{1-ax}{1+x}-1=-a\ln(1+x)-\dfrac{(a+1)x}{1+x}(x\geqslant 0)$，设 $g(x)=-a\ln(1+x)-\dfrac{(a+1)x}{1+x}(x\geqslant 0)$，则 $g'(x)=\dfrac{-a}{x+1}-\dfrac{a+1}{(1+x)^2}=-\dfrac{a(1+x)+a+1}{(1+x)^2}=\dfrac{-ax-(2a+1)}{(1+x)^2}$，令 $h(x)=-ax-(2a+1)$，$h(x)$ 与 $g'(x)$ 同正负。

① 当 $a\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，$h(x)\geqslant 0$（仅 $x=0$ 取等号），$g'(x)\geqslant 0$，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $f'(x)\geqslant 0$，故 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为增函数，$f(x)\geqslant f(0)=0$。

② 当 $-\dfrac{1}{2}<a<0$ 时，$0\leqslant x<-\dfrac{2a+1}{a}$，$h(x)<0$，$g'(x)<0$，故 $g(x)$ 单调递减，$g(x)\leqslant g(0)=0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(x)\leqslant f(0)=0$，不合题意，舍去。

③ 当 $a\geqslant 0$，$h(x)\leqslant 0$（仅 $x=0$ 取等号）恒成立，$g'(x)\leqslant 0$ 恒成立，故 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$g(x)\leqslant g(0)=0$，$f'(x)\leqslant 0$，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递减，$f(x)\leqslant f(0)=0$，不合题意，舍去。

综上所述，a 的取值范围为 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$。

【137】 (1) $y=-\ln 2(x-1)$；(2) $a=\dfrac{1}{2}$，$b=-\dfrac{1}{2}$；(3) $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$。提示：(1) 当 $a=-1$ 时，$f(x)=\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\ln(1+x)$，$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\dfrac{1}{1+x}$，$f'(1)=-\ln 2$，$f(1)=0$，所求切线为 $y=-\ln 2(x-1)$。

(2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)(x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty))$，若曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称，则 $b=\dfrac{-1+0}{2}=-\dfrac{1}{2}$，即曲线 $y=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=-\dfrac{1}{2}$ 对称。

令 $g(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，则有 $g(-1-x)=g(x)$，即 $(x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=(-1-x+a)\ln\left(1+\dfrac{1}{-1-x}\right)$，化简可得 $(x+a)\ln\dfrac{x+1}{x}=-(x-a+1)\ln\dfrac{-x}{-1-x}=(x-a+1)\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{-1}=(x-a+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$，则有 $a=-a+1$，所以 $a=\dfrac{1}{2}$。

(3) $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x)+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)\dfrac{1}{1+x}=-\dfrac{1}{x^2}\left[\ln(1+x)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}\right]$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在极值，则 $p(x)=\ln(1+x)-\dfrac{ax^2+x}{x+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在变号零点，故 $p'(x)=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{(2ax+1)(x+1)-(ax^2+x)}{(x+1)^2}=-\dfrac{x}{(x+1)^2}(ax+2a-1)$。

① 若 $a\leqslant 0$，则 $p'(x)>0$，$p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$p(x)>p(0)=0$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，所以不存在极值。

② 若 $a\geqslant\dfrac{1}{2}$，则 $p'(x)<0$，$p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，$p(x)<p(0)=0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，所以不存在极值。

③ 若 $0<a<\dfrac{1}{2}$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1-2a}{a}\right)$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$ 单调递增，$p(x)>p(0)=0$，所以 $p(x)$ 在 $x\in\left(0,\dfrac{1-2a}{a}\right)$ 上无零点；

当 $x\in\left(\dfrac{1-2a}{a},+\infty\right)$ 时，$p'(x)<0$，$p(x)$ 单调递减，则 $p(x)_{\max}=p\left(\dfrac{1-2a}{a}\right)=\ln\left(1+\dfrac{1-2a}{a}\right)-$

$\dfrac{a\left(\frac{1-2a}{a}\right)^2+\frac{1-2a}{a}}{\frac{1-2a}{a}+1}=\ln\left(\frac{1}{a}-1\right)+4a-2$，令 $h(x)=\ln(x-1)+\frac{4}{x}-2\ (x>2)$，则 $h'(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{4}{x^2}=\frac{(x-2)^2}{(x-1)x^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，故 $h(x)>h(2)=0$，令 $x=\frac{1}{a}\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$，则有 $p\left(\frac{1-2a}{a}\right)=\ln\left(\frac{1}{a}-1\right)+4a-2>0$。

因为 $p(x)=\ln(1+x)-\frac{ax^2+x}{x+1}<\ln(1+x)-\frac{ax^2+ax}{x+1}<\sqrt{x+1}-ax\ (\ln x<\sqrt{x})$，那么利用不等式的同向同正可乘方性，需要找出点 x_0 说明 $x_0+1<a^2x_0^2$，即可说明 $\sqrt{x_0+1}-ax_0<0$，故需 $\begin{cases}\frac{a^2x_0^2}{2}>x_0,\\ \frac{a^2x_0^2}{2}>1\end{cases}$（逆向利用不等式的同向可加性），解得 $x_0>\frac{2}{a^2}>\frac{1-2a}{a}$。

取 $x_0=\frac{2}{a^2}$，则 $\frac{a^2x_0^2}{2}=x_0$，$\frac{a^2x_0^2}{2}>1$，所以 $x_0+1<a^2x_0^2$，即 $\sqrt{x_0+1}<ax_0$，而 $p(x_0)=\ln(1+x_0)-\frac{ax_0^2+x_0}{x_0+1}<\ln(1+x_0)-\frac{ax_0^2+ax_0}{x_0+1}<\sqrt{x_0+1}-ax_0<0$，所以 $p(x)$ 在 $x\in\left(\frac{1-2a}{a},+\infty\right)$ 上有变号零点，即 $f(x)$ 存在极值，故 $a\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$。

【138】(1) -2；(2)见提示；(3) $\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$。提示：(1)当 $b=0$ 时，$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax\ (0<x<2)$，$f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+a$，$f'(x)\geqslant0$，即 $\forall\in(0,2)$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\geqslant-a$ 恒成立。又 $\frac{1}{x}>0$，$\frac{1}{2-x}>0$，且 $\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}=\frac{1}{2}(x+2-x)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2-x}{x}+\frac{x}{2-x}\right)\geqslant\frac{1}{2}\left(2+2\sqrt{\frac{2-x}{x}\cdot\frac{x}{2-x}}\right)=2$，当且仅当 $\frac{2-x}{x}=\frac{x}{2-x}$，即 $x=1$ 时取等号，所以 $2\geqslant-a$，即 $a\geqslant-2$，故 $a_{\min}=-2$。

(2) 通过对 $f(x)$ 进行结构分析可得 $y=b(x-1)^3$ 关于 $(1,0)$ 成中心对称，$y=ax$ 关于 $(0,0)$ 成中心对称，先统一 $y=b(x-1)^3$ 和 $y=ax$ 的对称中心，将 $y=ax+b(x-1)^3$ 向左平移一个单位，可得 $y=a(x+1)+bx^3=ax+bx^3+a$ 关于 $(0,a)$ 成中心对称，此时进一步猜测 $y=\ln\frac{x}{2-x}$ 也向左平移一个单位可能的对称，$y=\ln\frac{x}{2-x}$ 向左平移一个单位可得 $y=\ln\frac{x+1}{1-x}$，而 $y=\ln\frac{x+1}{1-x}$ 为奇函数，关于 $(0,0)$ 成中心对称，进一步可得 $y=\ln\frac{x+1}{1-x}+a(x+1)+bx^3=\ln\frac{x+1}{1-x}+ax+bx^3+a$ 关于 $(0,a)$ 成中心对称，因为 $y=\ln\frac{x+1}{1-x}+ax+bx^3$ 为奇函数，所以 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$ 关于 $(1,a)$ 成中心对称。

又 $f(x)+f(2-x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3+\ln\frac{2-x}{x}+a(2-x)+b(x-1)^3=2a$，所以 $f(x)$ 关于 $(1,a)$ 成中心对称。

(3)（必要性解题）由题知 $f'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{2-x}+a+3b(x-1)^2$，当 $1<x<2$ 时，$f(x)>-2$，则 $f(1)=a$，$f'(1)=a+2$。

① 若 $a<-2$，则 $f(1)=a<-2$，$f'(1)=a+2<0$，由 $f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3>\ln\frac{x}{2-x}+2a-|b|(x-1)^3>\ln\frac{x}{2-x}+2a-|b|>-2$，解得 $x>\frac{2e^{|b|-2-2a}}{e^{|b|-2-2a}+1}$，所以取 $x_0=\frac{2e^{|b|-2-2a}}{e^{|b|-2-2a}+1}$，取 $x_0=\frac{2e^{|b|-2-2a}}{e^{|b|-2-2a}+1}\in(1,2)$，则 $f(x_0)=\ln\frac{x_0}{2-x_0}+ax_0+b(x_0-1)^3>\ln\frac{x_0}{2-x_0}+2a-|b|(x_0-1)^3>\ln\frac{x}{2-x}+2a-|b|=-2$，故存在 $x_1\in(1,x_0)$，使得 $f(x_1)<-2$，不合题意。

② 若 $a\geqslant-2$，则 $f(1)=a\geqslant-2$，$f'(1)=a+2\geqslant0$，$f(x)=\ln\frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3>\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$，令 $g(x)=\ln\frac{x}{2-x}-2x+b(x-1)^3$，$g'(x)=(x-1)^2\left[\frac{2}{x(2-x)}+3b\right]$，令 $h(x)=\frac{2}{x(2-x)}+3b$，$h(1)=2+3b$。

(a) 若 $b<-\frac{2}{3}$，则 $h(1)=2+3b<0$，令 $\frac{2}{x(2-x)}+3b>0$，解得 $1-\frac{\sqrt{9b^2+6b}}{3b}<x<2$，取 $1-\frac{\sqrt{9b^2+6b}}{3b}<x_2<2$，则 $\frac{2}{x(2-x)}+3b>0$，故存在 $x_3\in(1,x_2)$，使得 $h(x_3)=0$，当 $x\in(1,x_3)$ 时，则 $g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(1)=-2$，不合题意。

(b) 若 $b\geqslant-\frac{2}{3}$，则 $h(1)=2+3b\geqslant0$，$h(x)=\frac{2}{x(2-x)}+3b>\frac{2}{\frac{[x+(2-x)]^2}{4}}+3b=2+3b\geqslant0$，则 $g'(x)>0$，所以

$g(x)$单调递增,故当$1<x<2$时,$g(x)>g(1)=-2$。

综上所述,b的取值范围为$\left[-\frac{2}{3},+\infty\right)$。

【139】(1)见提示;(2)$a\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$。提示:(1)令$g(x)=x-x^2-\sin x(0<x<1)$,则$g'(x)=1-2x-\cos x$,令$h(x)=g'(x)$,则$h'(x)=-2+\sin x<0$,所以$g'(x)$在$x\in(0,1)$上单调递减,故$g'(x)<g'(0)=0$,所以$g(x)$在$x\in(0,1)$上单调递减,因此$g(x)<g(0)=0$,即当$0<x<1$时,$x-x^2<\sin x$。

令$p(x)=x-\sin x(0<x<1)$,则$p'(x)=1-\cos x>0$,所以$p(x)$在$x\in(0,1)$上单调递增,因此$p(x)>p(0)=0$,即$0<x<1$时,$x>\sin x$。

综上,当$0<x<1$时,$x-x^2<\sin x<x$。

(2)$f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)(-1<x<1)$,因为$f(-x)=f(x)$,所以$f(x)$是偶函数,$f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}$。

若$a=0$,则$f'(x)=\frac{2x}{1-x^2}$,当$x\in(0,1)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,显然$x=0$不是极大值点。

若$a>0$,当$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$时,$ax\in(0,1)$,由(1)知$-a\sin ax<-a(ax-a^2x^2)$,当$a>1$时,$f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}<-a(ax-a^2x^2)+\frac{2x}{1-x^2}<-a(ax-a^2x^2)+\frac{2x}{1-ax}=\frac{a^2x}{1-ax}\left[\frac{2}{a^2}-(1-ax)^2\right]$,取$0<x<\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{2}}{a^2}$且$\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{2}}{a^2}>0$,即当$a>\sqrt{2}$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,$f(x)$在$x\in\left(\frac{\sqrt{2}}{a^2}-\frac{1}{a},0\right)$上单调递增,因此$x=0$是极大值点。

当$0<a\leqslant\sqrt{2}$时,$x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$,$ax\in(0,1)$,由(1)知$-a\sin ax>-a^2x$,则$f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}>-a^2x+\frac{2x}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}[a^2x^2+(2-a^2)]$,显然$a^2x^2+(2-a^2)>0$。当$x\in\left(0,\frac{1}{a+1}\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,显然$x=0$不是极大值点。

为什么取$\frac{1}{a+1}$呢?因为既要保证$1-x^2>0$,还需要保证小于$\frac{1}{a}$,这里也不限于是$\frac{1}{a+1}$,也可以是$\frac{1}{a+2},\frac{1}{2a+1},\cdots$,只要能说明问题,存在性的说明找到即可。

若$a<0$,当$x\in\left(\frac{1}{a},0\right)$时,$ax\in(0,1)$,由(1)知$-a\sin ax>-a(ax-a^2x^2)$,当$a<-1$时,$f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}>-a(ax-a^2x^2)+\frac{2x}{1-x^2}>-a(ax-a^2x^2)+\frac{2x}{1-ax}=\frac{a^2x}{1-ax}\left[\frac{2}{a^2}-(1-ax)^2\right]$,取$\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{2}}{a^2}<x<0$且$\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{2}}{a^2}<0$,即当$a<-\sqrt{2}$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,$f(x)$在$x\in\left(0,-\frac{1}{a}-\frac{\sqrt{2}}{a^2}\right)$上单调递减,因此$x=0$是极大值点。

当$-\sqrt{2}\leqslant a<0$时,$x\in\left(\frac{1}{a},0\right)$,$ax\in(0,1)$,由(1)知$-a\sin ax<-a^2x$,则$f'(x)=-a\sin ax+\frac{2x}{1-x^2}<-a^2x+\frac{2x}{1-x^2}=\frac{x}{1-x^2}[a^2x^2+(2-a^2)]$,显然$a^2x^2+(2-a^2)>0$,当$x\in\left(\frac{1}{a-1},0\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,显然$x=0$不是极大值点。

为什么取$\frac{1}{a-1}$呢?因为既要保证$1-x^2>0$,还需要保证大于$\frac{1}{a}$,这里也不限于是$\frac{1}{a-1}$,也可以是$\frac{1}{a-2},\frac{1}{2a-1},\cdots$,只要能说明问题,存在性的说明找到即可。

综上,$a\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$。

【140】(1)见提示;(2)$-\frac{1}{6}$。提示:(1)这一问较为简单,常规操作,注意计算就行。

当$a=0$时,$f(x)=(2+x)\ln(1+x)-2x$,$f'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$。设函数$g(x)=f'(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$,则$g'(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$。

当$-1<x<0$时,$g'(x)<0$;当$x>0$时,$g'(x)>0$。故当$x>-1$时,$g(x)\geqslant g(0)=0$,从而$f'(x)\geqslant f'(0)=0$,所以$f(x)$在$(-1,+\infty)$上单调递增。又$f(0)=0$,故当$-1<x<0$时,$f(x)<0$;当$x>0$时,$f(x)>0$。

(2)(i)若$a\geqslant0$,由(1)知,当$x>0$时,$f(x)\geqslant(2+x)\ln(1+x)-2x>0=f(0)$,显然这与$x=0$是$f(x)$的极大值点矛盾。

(ii)若$a<0$,我们自然清楚极值点是导数的变号零点,但问题在于求导首先结构复杂,二来求导后的式子是个满足$f'(0)=0$的恒等式。那么可以尝试在不改变极值点的前提下能否简化函数解析式。然而该如何简化呢?那必然是孤立对数了。

设函数$h(x)=\frac{f(x)}{2+x+ax^2}=\ln(1+x)-\frac{2x}{2+x+ax^2}$。考虑$|x|<\min\left\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\right\}$,为何取这么个范围呢?这里我们选取包含0的一小段区间解决问题,进而说明$x=0$是极大值点即可。那么这个范围怎么来的?因为$2+x+ax^2=(1+x)+(1+ax^2)$,分别通过求解$(1+x)>0$,$(1+ax^2)>0$得$-1<x$,$-\frac{1}{\sqrt{-a}}<x<\frac{1}{\sqrt{-a}}$。因为我们需要

的是包含 0 的区间，此刻当然是不等式取交集。这里只是存在性说明，取满足两个不等式交集的子集就行。这里也不用比较其具体大小了，就用最大最小符号表示，为了使表达更容易，我们直接用 $-1<x<1$ 和 $-\frac{1}{\sqrt{-a}}<x<\frac{1}{\sqrt{-a}}$ 取交集得 $\max\left\{-1,-\frac{1}{\sqrt{-a}}\right\}<x<\min\left\{\frac{1}{\sqrt{-a}},1\right\}$ 即 $|x|<\min\left\{\frac{1}{\sqrt{-a}},1\right\}$，也可以写成 $|x|<\min\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}},1\right\}$，此时 $2+x+ax^2>0$，故 $h(x)$ 与 $f(x)$ 符号相同。又 $h(0)=f(0)=0$，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点当且仅当 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点。

是不是还是不理解两个函数的极值点为什么一致呢？那继续探究，设 x_0 是 $f(x)=h(x)\cdot g(x)$ 的极大值点也是零点，且 $h(x_0)=0,g(x)\neq 0$，那么 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，则 $h'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$，那么 $h'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$，又 $f(x_0)=f'(x_0)=0$，则 $h'(x_0)=0$。

这里我们不妨取区间 (m,n) $\left(\text{其中 } m<x_0<n,(m,n)\subset\left\{x\,\middle|\,|x|<\min\left\{\frac{1}{\sqrt{|a|}},1\right\}\right\}\right)$，且当 $x\in(m,n)$ 时，$h(x)\leqslant 0$（当且仅当 $x=0$ 时取"="）。又 $2+x+ax^2>0$，所以当 $x\in(m,x_0)$ 时，$h(x)<h(x_0)=0$，同样当 $x\in(x_0,n)$ 时，$h(x)<h(x_0)=0$。x_0 既满足 $h'(x_0)=0$，且两侧一定范围内左侧递增，右侧递减。故 x_0 是 $h(x)$ 极大值点。（此处解说不一定那么严谨，但笔者尽可能地在给大家叙述这部分的思路。）

$h'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{2(2+x+ax^2)-2x(1+2ax)}{(2+x+ax^2)^2}=\frac{x^2(a^2x^2+4ax+6a+1)}{(x+1)(ax^2+x+2)^2}$。

接着讨论 $h'(x)$ 正负的可能，进而得出 $h(x)$ 的单调性和极值的可能。

① 如果 $6a+1>0$，则当 $0<x<-\frac{6a+1}{4a}$（由 $4ax+6a+1>0$ 得到），且 $|x|<\min\left\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\right\}$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，故 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点。

② 如果 $6a+1<0$，则由韦达定理知 $a^2x^2+4ax+6a+1=0$ 存在根 $x_1<0$，故当 $x\in(x_1,0)$，且 $|x|<\min\left\{1,\sqrt{\frac{1}{|a|}}\right\}$ 时，$h'(x)<0$，所以 $x=0$ 不是 $h(x)$ 的极大值点。

③ 如果 $6a+1=0$，则 $h'(x)=\frac{x^3(x-24)}{(x+1)(x^2-6x-12)^2}$，则当 $x\in(-1,0)$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(0,1)$ 时，$h'(x)<0$。所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的极大值点，从而 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点。

综上，$a=-\frac{1}{6}$。

【141】(1) 见提示；(2) $(0,1)$。提示：(1) $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{1}{x}-a$。

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

若 $a>0$，则当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$。

所以，$f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递减。

(2) 由 (1) 知，当 $a\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无最大值；当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $x=\frac{1}{a}$ 处取得最大值，最大值为 $f\left(\frac{1}{a}\right)=\ln\frac{1}{a}+a\left(1-\frac{1}{a}\right)=-\ln a+a-1$，因此 $f\left(\frac{1}{a}\right)>2a-2$，化简得 $\ln a+a-1<0$。令 $g(a)=\ln a+a-1$，而 $g(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$g(1)=0$。于是，当 $0<a<1$ 时，$g(a)<0$；当 $a>1$ 时，$g(a)>0$。

因此，a 的取值范围是 $(0,1)$。

【142】(1) 见提示；(2) $a=0,b=-1$ 或 $a=4,b=1$。提示：(1) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$。令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$。此处出现了两个零点，那么就需要分类讨论了。讨论什么，如何讨论呢？无非是讨论导数在这两个零点的正负而已，进而判断导数的正负。

① 当 $a>0$ 时，$\frac{a}{3}>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

② 当 $a=0$ 时，$\frac{a}{3}=0$，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增。

③ 当 $a<0$ 时，则当 $x\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

综上所述，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)$，$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 上单调递减；

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$，$(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{a}{3},0\right)$ 上单调递减。

(2) 根据第 (1) 问的结论讨论 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的单调性，分

别表示出最大值和最小值进而解方程组。

① 当 $a\leqslant 0$ 时，由(1)知 $f(x)$在$[0,1]$上单调递增，所以 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最小值为 $f(0)=b=-1$，最大值为 $f(1)=2-a+b=1$，解得 $a=0,b=-1$，满足题意。

② 当 $a\geqslant 3$ 时，$\frac{a}{3}\geqslant 1$，由(1)知 $f(x)$在$[0,1]$上单调递减，所以 $f(x)$在区间$[0,1]$上的最大值为 $f(0)=b=1$，最小值为 $f(1)=2-a+b=-1$，解得 $a=4,b=1$，满足题意。

③ 当 $0<a<3$ 时，$0<\frac{a}{3}<1$，由(1)知 $f(x)$在 $\left[0,\frac{a}{3}\right]$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a}{3},1\right]$ 上单调递增，那么 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+b$，最大值为 $f(0)=b$ 或 $f(1)=2-a+b$。

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1,b=1$，则 $a=3\sqrt[3]{2}$，与 $0<a<3$ 矛盾；

若 $-\frac{a^3}{27}+b=-1$，$2-a+b=1$，则 $a=3\sqrt{3}$ 或 $a=-3\sqrt{3}$ 或 $a=0$，与 $0<a<3$ 矛盾。

综上，当且仅当 $a=0,b=-1$ 或 $a=4,b=1$ 时，$f(x)$在$[0,1]$上的最小值为-1，最大值为 1。

【143】(1)见提示；(2) $\left[\frac{8}{27},2\right)$。提示：(1) $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$。令 $f'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{a}{3}$。此处出现了不确定，那么就需要分类讨论了。

① 当 $a>0$ 时，$\frac{a}{3}>0$，则当 $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减。

② 当 $a=0$ 时，$\frac{a}{3}=0$，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增。

③ 当 $a<0$ 时，$\frac{a}{3}<0$，则当 $x\in\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；当 $x\in\left(\frac{a}{3},0\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减。

综上所述，当 $a>0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,0)$，$\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$上单调递增，在$\left(0,\frac{a}{3}\right)$上单调递减；

当 $a=0$ 时，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{3}\right)$，$(0,+\infty)$上单调递增，在$\left(\frac{a}{3},0\right)$上单调递减。

(2) 当 $0<a<3$ 时，由(1)知，$f(x)$在$\left(0,\frac{a}{3}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{a}{3},1\right)$上单调递增，所以 $f(x)$在$[0,1]$上的最小值为 $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^3}{27}+2$，最大值为 $f(0)=2$ 或 $f(1)=4-a$。

此处需要对不确定的 $f(0)=2$ 和 $f(1)=4-a$ 的大小进行讨论，分段函数是个不错的表达形式。

所以 $m=-\frac{a^3}{27}+2$，$M=\begin{cases}4-a, & 0<a<2,\\ 2, & 2\leqslant a<3,\end{cases}$ 那么 $M-m=\begin{cases}2-a+\frac{a^3}{27}, & 0<a<2,\\ \frac{a^3}{27}, & 2\leqslant a<3。\end{cases}$

当 $0<a<2$ 时，可知 $y=2-a+\frac{a^3}{27}$，$y'=\frac{a^2}{9}-1<0$，所以 $y=2-a+\frac{a^3}{27}$单调递减，故 $M-m$ 的取值范围是$\left(\frac{8}{27},2\right)$。

当 $2\leqslant a<3$ 时，$y=\frac{a^3}{27}$单调递增，所以 $M-m$ 的取值范围是$\left[\frac{8}{27},1\right)$。

综上，$M-m$ 的取值范围是$\left[\frac{8}{27},2\right)$。

【144】(1) $y=x$ 和 $y=x-\frac{64}{27}$；(2)见提示；(3) -3。提示：

(1) 由题意得 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$。令 $f'(x)=1$，即 $\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$，解得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$。又 $f(0)=0$，$f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{27}$，所以曲线 $y=f(x)$的斜率为 1 的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，即 $y=x$ 和 $y=x-\frac{64}{27}$。

(2) 这是道简单的函数求值域问题，但需要对不等式 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$ 进行简单变形，通过观察知这个不等式每一个部分各减去 x 可得 $-6\leqslant f(x)-x\leqslant 0$。令 $g(x)=f(x)-x$，$x\in[-2,4]$，由 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$，令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$。

当 $x\in[-2,0)$和$\left(\frac{8}{3},4\right]$时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增；当 $x\in\left(0,\frac{8}{3}\right)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减。

$[g(x)]_{\max}=\max\{g(0),g(4)\}=0\ (g(0)=g(4)=0)$，

$[g(x)]_{\min}=\min\left\{g(-2),g\left(\frac{8}{3}\right)\right\}=\min\left\{-6,-\frac{64}{27}\right\}=-6$，所以 $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$，即 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$。

(3) $F(x)=\left|\frac{1}{4}x^3-x^2-a\right|$，结合(2)的结论以及绝对值的几何意义讨论 $F(x)$的最值，由(2)知 $-6\leqslant\frac{1}{4}x^3-x^2\leqslant 0$ 。

当 $a<-3$ 时，$M(a)=|0-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时，$M(a)=|-6-a|=a+6>3$；

当 $a=-3$ 时，$M(a)=3$。

综上，当 $M(a)$ 最小时，$a=-3$。

【145】(1)见提示；(2)$[-2e^{\frac{3}{4}},1]$。提示：(1) $f'(x)=2e^{2x}-ae^{x}-a^2=(2e^x+a)(e^x-a)$，$x\in\mathbf{R}$。

多项式的乘积正负问题在各自单调性确定的前提下，需要讨论有无零点以及因零点分段产生的各自正负进而判断乘积的正负。

① 若 $a=0$，则 $f(x)=e^{2x}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增。

② 若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$。

当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

③ 若 $a<0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln\left(-\frac{a}{2}\right)$。

当 $x\in\left(-\infty,\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

综上所述，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 单调递增；

当 $a>0$ 时，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 上单调递减，在 $(\ln a,+\infty)$ 上单调递增；

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$ 上单调递减，在 $\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right),+\infty\right)$ 上单调递增。

(2) $f(x)\geqslant 0$ 即 $[f(x)]_{\min}\geqslant 0$，根据第(1)问的结果解决问题即可。

① 若 $a=0$，则 $f(x)=e^{2x}$，所以 $f(x)>0$。

② 若 $a>0$，则由(1)得 $[f(x)]_{\min}=f(\ln a)=-a^2\ln a$，所以需 $-a^2\ln a\geqslant 0$，即 $0<a\leqslant 1$ 时，$f(x)\geqslant 0$。

③ 若 $a<0$，则由(1)得 $[f(x)]_{\min}=f\left(\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right)=a^2\left[\frac{3}{4}-\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]$，所以需 $a^2\left[\frac{3}{4}-\ln\left(-\frac{a}{2}\right)\right]\geqslant 0$，即 $0>a\geqslant -2e^{\frac{3}{4}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$。

综上，a 的取值范围为 $[-2e^{\frac{3}{4}},1]$。

【146】(1)$2x+y-2=0$；(2)$(-\infty,2]$。提示：(1) 由题意知 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$。当 $a=4$ 时，$f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$，$f'(x)=\ln x+\frac{1}{x}-3$，$f'(1)=-2$，$f(1)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $2x+y-2=0$。

(2) 当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$ 等价于 $\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}>0$。

为什么要如此操作？是为了孤立对数，使得一次求导就告别对数，但参数分离要注意不等号是否变号。

令 $g(x)=\ln x-\frac{a(x-1)}{x+1}$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2a}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2(1-a)x+1}{x(x+1)^2}$，且 $g(1)=0$。

令 $p(x)=x^2+2(1-a)x+1$，则 $\Delta=4(1-a)^2-4=4a(a-2)$。

① 当 $0\leqslant a\leqslant 2$ 时，$\Delta\leqslant 0$，$p(x)\geqslant 0$，$g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，因此 $g(x)>g(1)=0$。

② 当 $a>2$ 或 $a<0$ 时，$\Delta>0$。令 $p(x)=0$，得 $x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$，$x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$。

ⓐ 当 $a<0$ 时，由韦达定理得 $x_1x_2=1$ 且 $x_1+x_2=2(a-1)<0$，得 $x_1<x_2<0$，所以当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$p(x)>0$，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，此时 $g(x)>g(1)=0$。

ⓑ 当 $a>2$ 时，$\Delta>0$，由 $x_2>1$ 和 $x_1x_2=1$ 得 $x_1<1$，故当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $x\in(1,x_2)$ 上单调递减，则 $g(x)<g(1)=0$。因此，当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g(x)<g(1)=0$ 不合题意。

当然也可以采用如下方式进行分类讨论，不同的分类结果无非是不同的分类切入点产生的结果。

ⓐ 当 $a\leqslant 2$ 时，此讨论点是怎么来的？是通过和完全平方公式比对出来的，是通过 $2(1-a)\geqslant -2$ 推理出来的。

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$x^2+2(1-a)x+1\geqslant x^2-2x+1>0$，故 $g'(x)>0$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，因此 $g(x)>0$。

ⓑ 当 $a>2$ 时，$\Delta=4(1-a)^2-4=4a(a-2)>0$，令 $g'(x)=0$，得 $x_1=a-1-\sqrt{(a-1)^2-1}$，$x_2=a-1+\sqrt{(a-1)^2-1}$。

由 $x_2>1$ 和 $x_1x_2=1$ 得 $x_1<1$，故当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 在 $(1,x_2)$ 上单调递减。因此，当 $x\in(1,x_2)$ 时，$g(x)<g(1)=0$ 不合题意。

综上，a 的取值范围是 $(-\infty,2]$。

【147】(1)$c\geqslant -1$；(2)见提示。提示：(1) 不等式 $f(x)\leqslant 2x+c$ 转化为 $f(x)-2x-c\leqslant 0$，构造新函数，利用导数求出新函数的最大值，进而进行求解即可。由题意知 $x\in(0,+\infty)$，$f(x)\leqslant 2x+c$，即 $2\ln x+1-2x-c\leqslant 0$(*)。

设 $h(x)=2\ln x+1-2x-c\ (x>0)$，则有 $h'(x)=\frac{2}{x}-2=\frac{2(1-x)}{x}$。

当 $x>1$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$ 单调递减；当 $0<x<1$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$ 单调递增，所以 $h(x)_{\max}=h(1)=2\ln 1+1-2\times 1-c=-1-c$。

要想不等式(*)在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，只需 $h(x)_{\max}\leqslant 0$，即 $-1-c\leqslant 0$，解得 $c\geqslant -1$。

(2) $g(x)=\frac{2\ln x+1-(2\ln a+1)}{x-a}=\frac{2(\ln x-\ln a)}{x-a}$ ($x>0$ 且 $x\neq a$)，$g'(x)=\frac{2(x-a-x\ln x+x\ln a)}{x(x-a)^2}$，设 $m(x)=2(x-a-x\ln x+x\ln a)$。

对函数 $g(x)$ 求导，把导函数 $g'(x)$ 的分子构成一个新函数 $m(x)$，毕竟分母恒正，分子控制着导数正负。再求导得到 $m'(x)$，根据 $m'(x)$ 的正负判断 $m(x)$ 的单调性，进而确定 $g'(x)$ 的正负性，最后求出函数 $g(x)$ 的单调性。

$m'(x)=2(\ln a-\ln x)$。

当 $x>a$ 时，$\ln x>\ln a$，所以 $m'(x)<0$，$m(x)$单调递减，因此有 $m(x)<m(a)=0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$单调递减。

当 $0<x<a$ 时，$\ln x<\ln a$，所以 $m'(x)>0$，$m(x)$单调递增，因此有 $m(x)<m(a)=0$，即 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$单调递减。

所以，函数 $g(x)$在区间$(0,a)$和$(a,+\infty)$上单调递减，没有递增区间。

【148】(1)见提示；(2)$[-1,1]$。提示：(1) $f'(x)=m(e^{mx}-1)+2x$。

对于出现的参数那势必是需要分类讨论的，而为什么对于 m 讨论的分点是 0 呢？因为这样可以决定 m 与 $e^{mx}-1$ 各自的正负。

若 $m=0$，则 $f(x)=x^2-1$ 在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增。

若 $m>0$，则当 $x\in(-\infty,0)$时，$m(e^{mx}-1)<0$，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$时，$m(e^{mx}-1)>0$，$f'(x)>0$。

若 $m<0$，则当 $x\in(-\infty,0)$时，$m(e^{mx}-1)<0$，$f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$时，$m(e^{mx}-1)>0$，$f'(x)>0$。

所以，$f(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增。

(2) 由(1)知，对任意的 m，$f(x)$在$[-1,0]$上单调递减，在$(0,1]$上单调递增，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得最小值。所以对于任意 $x_1,x_2\in[-1,1]$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant e-1$ 的充要条件是

$$\begin{cases}f(1)-f(0)\leqslant e-1,\\ f(-1)-f(0)\leqslant e-1,\end{cases}\text{即}\begin{cases}e^{m}-m\leqslant e-1,\\ e^{-m}+m\leqslant e-1。\end{cases}\quad ①$$

设函数 $g(t)=e^t-t-e+1$，则 $g'(t)=e^t-1$。

当 $t<0$ 时，$g'(t)<0$；当 $t>0$ 时，$g'(t)>0$，故 $g(t)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增。

又 $g(1)=0$，$g(-1)=e^{-1}+2-e<0$，故当 $t\in[-1,1]$时，$g(t)\leqslant 0$。

当 $m\in[-1,1]$时，$g(m)\leqslant 0$，$g(-m)\leqslant 0$，即①式成立。

当 $m>1$ 时，由 $g(t)$的单调性得 $g(m)=e^m-m-e+1>g(1)=0$，即 $e^m-m>e-1$。

当 $m<-1$ 时，$g(-m)=e^{-m}+m-e+1>g(1)=e-1-e+1=0$，即 $e^{-m}+m>e-1$。

综上，m 的取值范围是$[-1,1]$。

【149】(1)1；(2)$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$。提示：(1) $f'(x)=\dfrac{a}{x}+(1-a)x-b$，由题意知 $f'(1)=0$，解得 $b=1$。

(2) $f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，由(1)知 $f(x)=a\ln x+\dfrac{1-a}{2}x^2-x$，$f'(x)=\dfrac{a}{x}+(1-a)x-1=\dfrac{1}{x}\left[(1-a)(x-1)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)\right]$。

因式分解是硬功夫，对于出现的不确定进一步讨论其各种可能，分别通过讨论 $y=(1-a)(x-1)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)$的开口以及两零点大小从而得到单调性。

① 若 $a\leqslant\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{a}{1-a}\leqslant 1$，故当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增。所以存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$的充要条件为 $f(1)<\dfrac{a}{a-1}$，即$\dfrac{1-a}{2}-1<\dfrac{a}{a-1}$，解得$-\sqrt{2}-1<a<\sqrt{2}-1$。

② 若$\dfrac{1}{2}<a<1$，则$\dfrac{a}{1-a}>1$，故当 $x\in\left(1,\dfrac{a}{1-a}\right)$时，$f'(x)<0$；

当 $x\in\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$在$\left(1,\dfrac{a}{1-a}\right)$上单调递减，在$\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$上单调递增。所以存在 $x_0\geqslant 1$，使得 $f(x_0)<\dfrac{a}{a-1}$的充要条件为 $f\left(\dfrac{a}{1-a}\right)<\dfrac{a}{a-1}$，而 $f\left(\dfrac{a}{1-a}\right)=a\ln\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{a^2}{2(1-a)}+\dfrac{a}{a-1}>\dfrac{a}{a-1}$，所以不合题意。

③ 若 $a>1$，则 $f(1)=\dfrac{1-a}{2}-1=\dfrac{-a-1}{2}<\dfrac{a}{a-1}$。

综上，a 的取值范围为$(-\sqrt{2}-1,\sqrt{2}-1)\cup(1,+\infty)$。

【150】(1)$f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$，单调递增区间为$(0,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,0)$；(2)$\dfrac{e}{2}$。提示：(1) $f'(x)=f'(1)e^{x-1}-f(0)+x$，$f'(1)=f'(1)-f(0)+1$，得 $f(0)=1$，所以 $f(x)=f'(1)e^{x-1}-x+\dfrac{1}{2}x^2$，$f(0)=f'(1)e^{-1}=1$，得 $f'(1)=e$，则 $f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$。

令 $g(x)=f'(x)=e^x-1+x$，则 $g'(x)=e^x+1>0$，所以 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，即 $f'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，且 $f'(0)=0$，那么当 $x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，所以 $f(x)=e^x-x+\dfrac{1}{2}x^2$，单调递增区间为$(0,+\infty)$，单调递减区间为$(-\infty,0)$。

(2) $f(x)\geqslant\dfrac{1}{2}x^2+ax+b$，即 $h(x)=e^x-(a+1)x-b\geqslant 0$，则 $h'(x)=e^x-(a+1)$。

① 当 $a+1\leqslant 0$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增。

这里我们可以通过极限预判当 $x\to-\infty$时，$h(x_0)<0$，显然与 $h(x)\geqslant 0$ 矛盾，所以我们需要找点去进行否定，该如何找呢？我们往 0 的左侧找，当 $x<0$ 时，$e^x<1$，此时 $e^x-(a+1)x-b<1-b-(a+1)x$，当 $1-b-(a+1)x<0$ 时，解得 $x<\dfrac{1-b}{1+a}$，故当 $x<\min\left\{0,\dfrac{1-b}{1+a}\right\}$时，$h(x)=e^x-(a+1)x-b<0$。取 $x_0<\min\left\{0,\dfrac{1-b}{1+a}\right\}$时，$h(x_0)=e^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)x_0-b<0$，这与 $h(x)\geqslant 0$ 矛盾。

② 若 $a+1>0$ 时，若 $x>\ln(a+1)$，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递

增,若 $x<\ln(a+1)$,$h'(x)<0$,$h(x)$单调递减,所以需 $h(x)_{\min}=h(\ln(a+1))=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\geqslant 0$,则$(a+1)b\leqslant(a+1)^2-(a+1)^2\ln(a+1)$。令 $F(x)=x^2-x^2\ln x(x>0)$,则 $F'(x)=x(1-2\ln x)$(其中 $x>0$),当 $0<x<\sqrt{e}$,$F'(x)>0$;当 $x>\sqrt{e}$,$F'(x)<0$,所以 $F(x)_{\max}=F(\sqrt{e})=\dfrac{e}{2}$。

此时 $a+1=\sqrt{e}$,即 $a=\sqrt{e}-1$,而 $b\leqslant\sqrt{e}-\sqrt{e}\ln\sqrt{e}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$,因此当 $a=\sqrt{e}-1$,$b=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$时,$(a+1)b$ 的最大值为$\dfrac{e}{2}$。

【151】(1)在**R**上单调递增;(2)2;(3) 0.693。提示:(1) $f'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\cdot\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,所以 $f(x)$在**R**上单调递增。

(2) $g(x)=f(2x)-4bf(x)=e^{2x}-e^{-2x}-4x-4b(e^x-e^{-x}-2x)$,$g'(x)=2e^{2x}+2e^{-2x}-4-4b(e^x+e^{-x}-2)=2(e^x+e^{-x}-2)(e^x+e^{-x}+2-2b)$,当 $x>0$ 时,$e^x+e^{-x}-2>0$。

① 当 $b\leqslant 2$ 时,$e^x+e^{-x}+2-2b>0$,则 $g'(x)=2(e^x+e^{-x}-2)(e^x+e^{-x}+2-2b)>0$,则 $g(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增,$g(0)=0$,故当 $b\leqslant 2$,$x>0$ 时,$g(x)>0$。

② 当 $b>2$ 时,当 $2<e^x+e^{-x}<2b-2$,即 $0<x<\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})$ 时,$g'(x)<0$,即 $g(x)$ 在$(0,\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b}))$上单调递减,则 $g(\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b}))<g(0)=0$,不合题意。

综上,$b_{\max}=2$。

(3) 由(2)得 $g(\ln 2)=(4b-2)\ln 2+\dfrac{3}{2}-2\sqrt{2}b$。

① 当 $b=2$ 时,$g(\ln 2)=6\ln 2+\dfrac{3}{2}-4\sqrt{2}>0$,解得 $\ln 2>\dfrac{8\sqrt{2}-3}{12}>0.6928$。

② 当 $b>2$ 时,由 $\ln(b-1+\sqrt{b^2-2b})=\ln 2$ 计算得 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+1$,即当 $b=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}+1$ 时,$g(\ln 2)=(4b-2)\ln 2+\dfrac{3}{2}-2\sqrt{2}b=-\dfrac{3}{2}-2\sqrt{2}+(3\sqrt{2}+2)\ln 2<0$,解得 $\ln 2<\dfrac{18+\sqrt{2}}{28}<0.6934$。

综上,$0.6928<\ln 2<0.6934$,所以 $\ln 2$ 的近似值为 0.693。

【152】(1)见提示;(2)$(-\infty,0]$。提示:(1) 当 $a=1$ 时,$f(x)=x-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$,$f'(x)=\dfrac{\cos^3 x+\cos^2 x-2}{\cos^3 x}$,当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$\cos^3 x+\cos^2 x-2<0$,所以 $f'(x)<0$,$f(x)$单调递减。

(2) $f(x)+\sin x<0$,即 $g(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\sin x=ax-\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}<0$,则 $g'(x)=a-\dfrac{3\sin^2 x\cos^3 x+2\sin^4 x\cos x}{\cos^4 x}$,$g(0)=0$,$g'(0)=a$。

当 $a>0$ 时,$g'(0)=a>0$,则存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,使得当 $x\in(0,x_0)$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,则有 $g(x)>g(0)=0$,不合题意。

当 $a\leqslant 0$ 时,$g(x)=ax-\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\leqslant-\dfrac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$,而当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$\sin^3 x>0$,$\cos^2 x>0$,则 $g(x)<0$,满足题意。

综上,$a\in(-\infty,0]$。

【153】(1)见提示;(2)$(-\infty,3]$。提示:(1)当 $a=8$ 时,$f(x)=8x-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$,$f'(x)=\dfrac{(2\cos^2 x-1)(4\cos^2 x+3)}{\cos^4 x}$,故当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $x\in\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减。

(2) 方法一(必要性解题):$f(x)<\sin 2x$,即 $g(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}-\sin 2x<0$,则 $g'(x)=a-\dfrac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}-2\cos 2x=a+2-\dfrac{3}{\cos^4 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}-4\cos^2 x$,$g(0)=0$,$g'(0)=a-3$。

当 $a>3$ 时,$g'(0)=a-3>0$,则存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,使得 $g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,则有 $g(x)>g(0)=0$,不合题意。

当 $a\leqslant 3$ 时,$g'(0)=a-3\leqslant 0$,$g'(x)\leqslant 5-\dfrac{3}{\cos^4 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}-4\cos^2 x=\dfrac{-(\cos^2 x-1)^2(4\cos^2 x+3)}{\cos^4 x}$,当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减,所以 $g(x)<g(0)=0$,满足题意。

综上,$a\in(-\infty,3]$。

方法二(换元+复合函数):$f(x)<\sin 2x$,即 $g(x)=ax-\dfrac{\sin x}{\cos^3 x}-\sin 2x<0$,$g'(x)=a-\dfrac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x}-2\cos 2x=a+2-\dfrac{3}{\cos^4 x}+\dfrac{2}{\cos^2 x}-4\cos^2 x$。

令$\cos^2 x=t\in(0,1)$,构造函数 $h(t)=a+2-\dfrac{3}{t^2}+\dfrac{2}{t}-4t(t\in(0,1))$,则 $h'(t)=\dfrac{6}{t^3}-\dfrac{2}{t^2}-4=\dfrac{-4t^3-2t+6}{t^3}=\dfrac{-4(t^3-1)-2(t-1)}{t^3}=\dfrac{-2(t-1)(2t^2+2t+3)}{t^3}>0$,故 $h(t)$在 $t\in(0,1)$上单调递增,所以 $h(t)<h(1)=a-3$。

当 $a\leqslant 3$ 时,$h(t)<0$,$g'(x)<0$,则当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,$g(x)$单调递减,所以 $g(x)<g(0)=0$,满足题意。

当 $a>3$ 时,$h(1)>0$,通过 $x\to 0^-$ 可以判断 $h(t)<0$,那就

得接着找能使 $h(t)<0$ 的点，并不是完全求解不等式，而是存在性求解，找到即可，逆向寻找，$a+2-\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t}-4t<0$，$a+2-\frac{3}{t^2}+\frac{2}{t}-4t=a+2-\frac{4t^3-2t+3}{t^2}<a+2-\frac{4t^3+1}{t^2}<a+2-\frac{1}{t^2}<0$，解得 $0<t<\sqrt{\frac{1}{a+2}}$，取 $0<t_0<\sqrt{\frac{1}{a+2}}$，$h(t_0)=a+2-\frac{3}{t_0^2}+\frac{2}{t_0}-4t_0=a+2-\frac{4t_0^3-2t_0+3}{t_0^2}<a+2-\frac{4t_0^3+1}{t_0^2}<a+2-\frac{1}{t_0^2}<0$，由零点存在定理知，存在 $t_1\in(0,1)$，使得 $h(t_1)=0$。

当 $t\in(0,t_1)$ 时，$h(t)<0$；当 $t\in(t_1,1)$ 时，$h(t)>0$，即存在 φ，使得 $\cos^2\varphi=t_1\in(0,1)$，当 $x\in(0,\varphi)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增。

故当 $x\in(0,\varphi)$ 时，$g(x)>g(0)=a-3>0$，不合题意。

综上，$a\in(-\infty,3]$。

2.3　零点问题

【154】 4。提示：$f(x)+g(x)=\begin{cases}-\ln x, & 0<x\leqslant 1,\\ \ln x+2-x^2, & 1<x\leqslant 2,\\ \ln x+x^2-6, & x>2,\end{cases}$ 易得 $f(x)+g(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增。而在 $(1,2]$ 上看不出来单调性，那就导数助阵，$[f(x)+g(x)]'=\frac{1}{x}-2x=\frac{1-2x^2}{x}$，显然 $f(x)+g(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调递减，$f(x)+g(x)$ 图像大致如图 1 所示，则 $|f(x)+g(x)|$ 的图像如图 2 所示，可得方程实数根有 4 个。

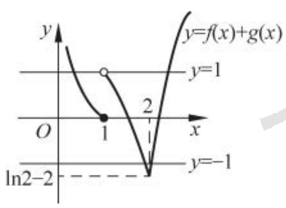


图　1

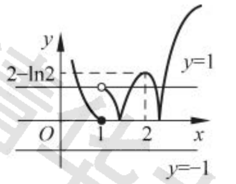
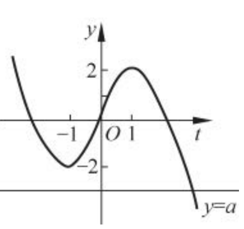
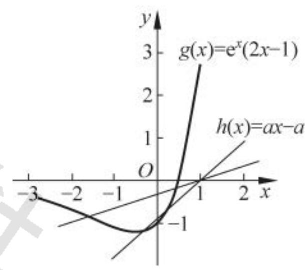


图　2

【155】 A。提示：显然 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的零点，那么我们对 $ax^3-3x^2+1=0$ 分离常数处理，得 $a=-\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x}$。再通过换元简化结构，设 $t=\frac{1}{x}\neq 0$，则 $a=-t^3+3t$，$y=a$ 与 $a=-t^3+3t$ 有一个公共点。令 $g(t)=-t^3+3t$，则 $g'(t)=-3t^2+3$，令 $g'(t)=0$，得 $t=\pm 1$，则 $g(t)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(1,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-1,1)$ 上单调递增，可作 $g(t)$ 的图像如图所示，从而 $y=a$ 与 $a=-t^3+3t$ 有一个公共点，即 $a\in(-\infty,-2)$。故选 A。



【156】 D。提示：由题意可知存在唯一的整数 x_0，使得 $e^{x_0}(2x_0-1)<ax_0-a$，设 $g(x)=e^x(2x-1)$，$h(x)=ax-a$，由 $g'(x)=e^x(2x+1)$ 可知 $g(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，作出 $g(x)$ 与 $h(x)$ 的大致图像如图所示，故 $\begin{cases}h(0)>g(0),\\ h(-1)\leqslant g(-1),\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a<1,\\ -2a\leqslant -\frac{3}{e},\end{cases}$ 所以 $\frac{3}{2e}\leqslant a<1$。故选 D。



【157】 -3。提示：由题意得 $f'(x)=6x^2-2ax=2x(3x-a)$ $(x>0)$。

若 $a\leqslant 0$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f(x)>f(0)=1$，此时 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上无零点。

若 $a>0$，当 $x\in\left(0,\frac{a}{3}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{a}{3},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。$[f(x)]_{\min}=1-\frac{a^3}{27}$，而 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且只有一个零点，即 $1-\frac{a^3}{27}=0$，解得 $a=3$，此时 $f'(x)=6x^2-2ax=6x(x-1)(-1\leqslant x\leqslant 1)$，易得 $f(x)$ 在 $[-1,0)$ 上单调递增，在 $(0,1]$ 上单调递减。而 $f(-1)=-4$，$f(0)=1$，$f(1)=0$，所以 $[f(x)]_{\min}=-4$，$[f(x)]_{\max}=1$，则 $[f(x)]_{\min}+[f(x)]_{\max}=-3$。

【158】 D。提示：$f'(x)=\ln x+1-2ax(x>0)$。

若 $a\leqslant 0$，令 $g(x)=\ln x+1-2ax(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2a=\frac{1-2ax}{x}>0$，故 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)=\ln x+1-2ax$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，此时 $f'(x)$ 至多有一个零点，不合题意。

若 $a>0$，令 $g(x)=\ln x+1-2ax(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}-2a(x>0)$，故 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2a}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$ 上单调递减，则 $g\left(\frac{1}{2a}\right)=\ln\frac{1}{2a}+1-2a\cdot\frac{1}{2a}=-\ln 2a$，则需 $-\ln 2a>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$，此时 $\frac{1}{2a}\in(1,+\infty)$，故当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，$f'(x)=0$ 有两个根 x_1，x_2，且 $x_1<\frac{1}{2a}<x_2$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 上和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递减，在 (x_1,x_2) 单调递增。又 $f'(1)=1-2a>0$，故

$f(x_1)<f(1)=-a<0,f(x_2)>f(1)=-a>-\dfrac{1}{2}$。故选 D。

若在高考中选择题或填空题里遇到此题，可以结合极限大致判断可能出现的正负，但平时还是要多练习找点问题。

【159】$\dfrac{1}{e}<a<1$。提示：$f(x)=2a^x-ex^2$，则 $f'(x)=2a^x\ln a-2ex$，$f''(x)=2(a^x\ln^2 a-e)$。

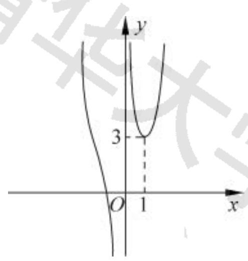
若 $a>1$，则 $f''(x)=2(a^x\ln^2 a-e)$ 单调递增，令 $f''(x_0)=0$，可得 $x_0=\log_a\dfrac{e}{\ln^2 a}$，则当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f''(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f''(x)>0$。若 $f'(x_0)>0$，则 $f(x)$ 不存在极值点；若 $f'(x_0)<0$，则 x_1,x_2 分别为极大值点和极小值点，这与题意矛盾。

若 $0<a<1$，则 $f''(x)=2(a^x\ln^2 a-e)$ 单调递减，令 $f''(x_0)=0$，可得 $x_0=\log_a\dfrac{e}{\ln^2 a}$，则当 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f''(x)<0$。若 $f'(x_0)<0$，则 $f(x)$ 不存在极值点，所以 $f'(x_0)>0$，即 $\dfrac{2e}{\ln a}-2e\log_a\dfrac{e}{\ln^2 a}>0$，则有 $\dfrac{1}{\ln a}>\dfrac{1-\ln(\ln^2 a)}{\ln a}$，进一步可得 $\ln(\ln^2 a)<0$，解得 $\ln^2 a<1$，则 $-1<\ln a<1$，即 $\dfrac{1}{e}<a<e$，又 $0<a<1$，即 $\dfrac{1}{e}<a<1$。此时 $x_1<x_2$，且 x_1 为极小值点，x_2 为极大值点，符合题意。

【160】B。提示：方法一(分类讨论)：$f'(x)=3x^2+a$。

① 若 $a\geqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，故 $f(x)$ 至多一个零点。

② 若 $a<0$，当 $x\in\left(-\infty,-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)$ 和 $\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}},+\infty\right)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}},\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，则 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在三个零点，则需 $\begin{cases}f\left(-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)>0,\\ f\left(\sqrt{-\dfrac{a}{3}}\right)<0,\end{cases}$ 经计算得 $a<-3$。故选 B。



方法二(参数分离)：显然 $x=0$ 不是 $f(x)=x^3+ax+2$ 的零点，则 $f(x)=x^3+ax+2$ 的零点个数即方程 $-a=x^2+\dfrac{2}{x}$ 的根的个数。令 $g(x)=x^2+\dfrac{2}{x}(x\neq 0)$，则 $g'(x)=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2(x^3-1)}{x^2}(x\neq 0)$，当 $x\in(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)$ 草图如图所示，方程 $-a=x^2+\dfrac{2}{x}$ 有三个根，则需 $-a>g(1)=3$，即 $a<-3$。故选 B。

【161】(1) 见提示；(2) $a>\dfrac{1}{e}$。提示：(1) $f'(x)=\dfrac{(2ax+3)(ax-1)}{x}(x>0)$，其中 $2ax+3>0$，当 $0<x<\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>\dfrac{1}{a}$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的减区间为 $\left(0,\dfrac{1}{a}\right)$，增区间为 $\left(\dfrac{1}{a},+\infty\right)$。

(2) 根据(1)的单调性可得 $f(x)_{\min}>0$，从而可求得 a 的取值范围。

由(1)中函数的单调性可得 $f(x)_{\min}=f\left(\dfrac{1}{a}\right)=3-3\ln\dfrac{1}{a}=3+3\ln a$，故 $3+3\ln a>0$，即 $a>\dfrac{1}{e}$。

【162】(1)见提示；(2)见提示；(3)存在，2 个。提示：(1) 当 $k=-1$ 时，$f(x)=x-\ln(1+x)$，$f'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}(x>-1)$，当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

(2) $f'(x)=1+\dfrac{k}{1+x}$，$f'(t)=1+\dfrac{k}{1+t}$，则切线方程为 $y-f(t)=\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)(x-t)$，将 $(0,0)$ 代入可得 $-f(t)=-t\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)$，即 $f(t)=t\left(1+\dfrac{k}{1+t}\right)$，又 $f(t)=t+k\ln(1+t)$，则 $t+k\ln(1+t)=t+t\dfrac{k}{1+t}$，即 $\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}=0$。

若切线 l 经过 $(0,0)$，则关于 t 的方程在 $t>0$ 有解。令 $g(t)=\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}(t>0)$，方程在 $t>0$ 有解转化为函数 $y=g(t)$ 在 $t>0$ 有零点。$g'(t)=\dfrac{t}{(1+t)^2}>0$，所以 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，那么 $g(t)>g(0)=0$，因此 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 无零点，即 $\ln(1+t)-\dfrac{t}{1+t}=0$ 无解，直线 l 不过 $(0,0)$。

(3) 当 $k=1$ 时，$f(x)=x+\ln(1+x)$，$f'(x)=1+\dfrac{1}{1+x}>0$。

$S_{\triangle ACO}=\dfrac{1}{2}tf(t)$，设 $B(0,b)$，由(2)知 $b\neq 0$，所以 $b>0$，则切线 l 的方程为 $y-t-\ln(t+1)=\left(1+\dfrac{1}{1+t}\right)(x-t)$，则 $b=\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}$。

由 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$，得 $2tf(t)=15t\left[\ln(1+t)-\dfrac{t}{t+1}\right]$，

即 $13\ln(1+t)-2t-15\dfrac{t}{1+t}=0$，令 $h(t)=13\ln(1+t)-2t-\dfrac{15t}{1+t}\ (t>0)$，$h'(t)=\dfrac{13}{1+t}-2-\dfrac{15}{(t+1)^2}=\dfrac{(-2t+1)(t-4)}{(t+1)^2}$，当 $t\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $(4,+\infty)$ 时，$h'(t)<0$，$h(t)$ 单调递减；当 $t\in\left(\dfrac{1}{2},4\right)$ 时，$h'(t)>0$，此时 $h(t)$ 单调递增，$h(0)=0$，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)<h(0)=0$，$h(4)=13\ln5-20>13\times1.6-20=0.8>0$。

还得找 $t_0>4$，使得 $h(t_0)>0$，可以依托于提示数据分别使用 $\ln3,\ln5,\ln7,2\ln3=\ln9=\ln(8+1),2\ln5=\ln25=\ln(24+1),2\ln7=\ln49=\ln(48+1),\cdots$，所以可以取 $h(8),h(24),h(48),\cdots$，不唯一，$h(8)=13\ln9-16-\dfrac{15\times8}{9}=26\ln3-16-\dfrac{40}{3}<26\times1.1-16-\dfrac{40}{3}=12.6-\dfrac{40}{3}<0$，由零点存在性定理知，存在 $t_1\in\left(\dfrac{1}{2},4\right)$，在 $t_2\in(4,8)$，使得 $h(t_1)=h(t_2)=0$。

所以 $h(t)$ 有两个零点，即满足 $2S_{\triangle ACO}=15S_{\triangle ABO}$ 的点 A 有两个。

【163】 (1)1；(2)见提示。提示：(1) $f'(x)=3x^2-6x+a$，$f'(0)=a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,2)$ 处的切线方程为 $y=ax+2$。由题设得 $-\dfrac{2}{a}=-2$，所以 $a=1$。

(2) 由(1)知 $f(x)=x^3-3x^2+x+2$，设 $g(x)=f(x)-kx+2=x^3-3x^2+(1-k)x+4$，由题意知 $1-k>0$。此时 $(1-k)x$ 的正负由 x 决定，所以把定义域分段而后分步骤探究函数的单调性和正负。

当 $x\leqslant0$ 时，$g'(x)=3x^2-6x+1-k>0$，$g(x)$ 单调递增，且 $g(-1)=k-1<0$，$g(0)=4$，所以 $g(x)=0$ 在 $(-\infty,0]$ 上有唯一实根。

当 $x>0$ 时，$g(x)=x^3-3x^2+4+(1-k)x>h(x)=x^3-3x^2+4$。

$h'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$，$h(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $g(x)>h(x)\geqslant h(2)=0$，故 $g(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有实根。

综上，$g(x)=0$ 在 $\mathbf{R}$ 有唯一实根，即曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=kx-2$ 只有一个交点。

【164】 证明：(1) $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}+\ln x-1=\ln x-\dfrac{1}{x}\ (x>0)$。

因为 $y=\ln x$ 单调递增，$y=-\dfrac{1}{x}$ 单调递增，所以 $f'(x)$ 单调递增。又 $f'(1)=-1<0$，$f'(2)=\ln2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{\ln4-1}{2}>0$，故由零点存在定理知 $\exists x_0\in(1,2)$，使得 $f'(x_0)=0$。

而当 $0<x<x_0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>x_0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

因此，$f(x)$ 存在唯一的极值点。

(2) 由(1)知 $f(x_0)<f(1)=-2$，又 $f(\mathrm{e}^2)=\mathrm{e}^2-3>0$，所以 $f(x)=0$ 在 $(x_0,+\infty)$ 内存在唯一根，设其为 t，即 $f(t)=(t-1)\ln t-t-1$，则有 $t>x_0>1$ 得 $\dfrac{1}{t}<1<x_0$。那么 $f\left(\dfrac{1}{t}\right)=\left(\dfrac{1}{t}-1\right)\ln\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t}-1=\dfrac{(t-1)\ln t-t-1}{t}=\dfrac{f(t)}{t}=0$，故 $\dfrac{1}{t}$ 是 $f(x)=0$ 在 $(0,x_0)$ 的唯一根。

综上，$f(x)=0$ 有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数。

【165】 (1)$\{1\}$；(2)见提示。提示：(1) $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，当 $x<\ln a$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>\ln a$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$。于是对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant1$ 恒成立，则需 $a-a\ln a\geqslant1$。令 $g(t)=t-t\ln t$，则 $g'(t)=-\ln t$。当 $0<t<1$ 时，$g'(t)>0$，$g(t)$ 单调递增；当 $t>1$ 时，$g'(t)<0$，$g(t)$ 单调递减，故 $g(t)_{\max}=g(1)=1$。因此，当且仅当 $a=1$ 时，$a-a\ln a\geqslant1$ 成立。

综上所述，a 的取值集合为 $\{1\}$。

(2) 由题意知 $k=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}-a$，

令 $\varphi(x)=f'(x)-k=\mathrm{e}^x-\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}-\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}$，则 $\varphi(x_1)=-\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}[\mathrm{e}^{x_2-x_1}-(x_2-x_1)-1]$，$\varphi(x_2)=\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2-x_1}[\mathrm{e}^{x_1-x_2}-(x_1-x_2)-1]$。

令 $F(t)=\mathrm{e}^t-t-1$，则 $F'(t)=\mathrm{e}^t-1$。

当 $t<0$ 时，$F'(t)<0$，$F(t)$ 单调递减；当 $t>0$ 时，$F'(t)>0$，$F(t)$ 单调递增，故 $F(t)>F(0)=0$，即 $\mathrm{e}^t-t-1>0$，从而 $\mathrm{e}^{x_2-x_1}-(x_2-x_1)-1>0$，$\mathrm{e}^{x_1-x_2}-(x_1-x_2)-1>0$，又 $\dfrac{\mathrm{e}^{x_1}}{x_2-x_1}>0$，$\dfrac{\mathrm{e}^{x_2}}{x_2-x_1}>0$，所以 $\varphi(x_1)<0$，$\varphi(x_2)>0$。因为函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的图像是连续不断的一条曲线，所以存在 $x_0\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(x_0)=0$，即 $f'(x_0)=k$ 成立。

【166】 (1)$-\dfrac{3}{4}$；(2)见提示。提示：(1) 利用导数的几何意义得到 $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，解方程即可。

$f'(x)=3x^2+b$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$，即 $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+b=0$，则 $b=-\dfrac{3}{4}$。

(2) 由(1)可得 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x+c$，$f'(x)=3x^2-\dfrac{3}{4}=3\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$，令 $f'(x)>0$，得 $x>\dfrac{1}{2}$ 或 $x<-\dfrac{1}{2}$；令 $f'(x)<0$，得 $-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且

$f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=c+\frac{1}{4}$。

① 当 $f\left(-\frac{1}{2}\right)=c+\frac{1}{4}<0$ 或 $f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}>0$，即 $c<-\frac{1}{4}$ 或 $c>\frac{1}{4}$ 时，$f(x)$ 只有一个大于 1 或者只有一个小于 -1 的零点。

② 当 $c=-\frac{1}{4}$ 或 $c=\frac{1}{4}$ 时，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=c+\frac{1}{4}=0$ 或 $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}=0$，$f(x)$ 有两个零点 $-\frac{1}{2}$，1 或 -1，$\frac{1}{2}$。

③ 当 $-\frac{1}{4}<c<\frac{1}{4}$ 时，此时 $f(-1)=f\left(\frac{1}{2}\right)=c-\frac{1}{4}<0$，$f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(1)=c+\frac{1}{4}>0$，则 $f(x)$ 有三个零点 x_1，x_2，x_3，且 $x_1\in\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，$x_2\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$x_3\in\left(\frac{1}{2},1\right)$。

综上，若 $f(x)$ 有一个绝对值不大于 1 的零点，则 $f(x)$ 所有零点的绝对值都不大于 1。

【167】(1)见提示；(2)$\left(0,\frac{4}{27}\right)$。提示：(1) $f'(x)=3x^2-k$，对 k 分 $k\leqslant 0$ 和 $k>0$ 两种情况讨论即可；

当 $k\leqslant 0$ 时，$f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增。

当 $k>0$ 时，令 $f'(x)<0$，得 $-\sqrt{\frac{k}{3}}<x<\sqrt{\frac{k}{3}}$；令 $f'(x)>0$，得 $x<-\sqrt{\frac{k}{3}}$ 或 $x>\sqrt{\frac{k}{3}}$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 上单调递减，在 $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$，$\left(\sqrt{\frac{k}{3}},+\infty\right)$ 上单调递增。

(2) 由题知 $f(x)$ 有三个零点，由(1)知 $k>0$，且 $\begin{cases}f\left(-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)>0,\\ f\left(\sqrt{\frac{k}{3}}\right)<0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}k^2+\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}>0,\\ k^2-\frac{2}{3}k\sqrt{\frac{k}{3}}<0,\end{cases}$ 解得 $0<k<\frac{4}{27}$，此时 $\sqrt{k}>\sqrt{\frac{k}{3}}$，这里的 $\sqrt{k}$ 是怎么找出来的？因为 $k^2>0$，所以只需 $x^3-kx=0$，解得 $x=\sqrt{k}$，且 $\sqrt{k}>\sqrt{\frac{k}{3}}$，$f(\sqrt{k})=k^2>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{k}\right)$ 上有唯一一个零点，那么 $x<-\sqrt{\frac{k}{3}}$ 的部分如何找呢？因为 $-1<-\sqrt{\frac{k}{3}}<0$ 时，$f(-1)=-1+k+k^2=\left(k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<\left(\frac{4}{27}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<1-\frac{5}{4}<0$。

所以，$f(x)$ 在 $\left(-1,-\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 上有唯一一个零点，又 $f(x)$ 在 $\left(-\sqrt{\frac{k}{3}},\sqrt{\frac{k}{3}}\right)$ 上有唯一一个零点，所以 $f(x)$ 有三个零点。

综上可知，k 的取值范围为 $\left(0,\frac{4}{27}\right)$。

【168】见提示。提示：(1) 当 $a=3$ 时，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2-3x-3$，$f'(x)=x^2-6x-3$。令 $f'(x)=0$，解得 $x=3-2\sqrt{3}$ 或 $x=3+2\sqrt{3}$。

当 $x\in(-\infty,3-2\sqrt{3})\cup(3+2\sqrt{3},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,3-2\sqrt{3})$，$(3+2\sqrt{3},+\infty)$ 上单调递增，在 $(3-2\sqrt{3},3+2\sqrt{3})$ 上单调递减。

(2) 因为 $x^2+x+1>0$，所以 $f(x)=0$，即 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a=0$。设 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a$，则 $g'(x)=\frac{x^2(x^2+2x+3)}{(x^2+x+1)^2}\geqslant 0$，仅当 $x=0$ 时 $g'(x)=0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增。故 $g(x)$ 至多有一个零点。

函数单调如何找点呢？通过观察分母 $x^2+x+1>0$，且这个式子在 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ 有所体现，则 $g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a>\frac{x^3-1}{x^2+x+1}-3a=x-1-3a=0$，令 $x-1-3a=0$，得 $x=1+3a$。

取 $m=3a+1$，则 $g(m)=\frac{m^3}{m^2+m+1}-3a>\frac{m^3-1}{m^2+m+1}-3a=(m-1)-3a=0$。

"为正"找到了，"为负"呢？"为负"必然在 $x=1+3a$ 的左侧，如果选择 $x=3a$，则可以通过 $\frac{x^3}{x^2+x+1}$ 分子变大放缩成 x 来检验，而 $(x^2+x+1)x=x^3+x^2+x$，分子放缩需要增加 x^2+x，但 x^2+x 正负不定，放缩时不等号方向没法确定，那就继续考虑 $x=3a-1$，此时需 $\frac{x^3}{x^2+x+1}$ 通过分子变大放缩 $=x+1$，而 $(x^2+x+1)(x+1)=x^3+x^2+(x+1)^2$，且 $x^2+(x+1)^2>0$，符合判断。

因此，$g(x)=\frac{x^3}{x^2+x+1}-3a<\frac{x^3+x^2+(x+1)^2}{x^2+x+1}-3a=\frac{(x^2+x+1)(x+1)}{x^2+x+1}-3a=(x+1)-3a$。

取 $n=3a-1$，则 $g(n)=\frac{n^3}{n^2+n+1}-3a<\frac{n^3+n^2+(n+1)^2}{n^2+n+1}-3a=\frac{(n^2+n+1)(n+1)}{n^2+n+1}-3a=(n+1)-3a=0$，所以 $g(x)$ 在 $(3a-1,3a+1)$ 上有一个零点。

综上，$f(x)$ 只有一个零点。

【169】(1) -1；(2) $(0,+\infty)$。提示：(1) 当 $a=0$ 时，

$f(x)=-\frac{1}{x}-\ln x$，$f'(x)=\frac{1-x}{x^2}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)_{\max}=f(1)=-1$。

(2) $f'(x)=a+\frac{1}{x^2}-\frac{a+1}{x}=\frac{ax^2-(a+1)x+1}{x^2}=\frac{(ax-1)(x-1)}{x^2}(x>0)$。

若 $a\leqslant 0$，当 $x\in(0,1)$，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，故 $f(x)_{\max}=f(1)=a-1<0$，$f(x)$ 无零点，不合题意，舍去。

若 $a=1$，$f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x^2}\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(1)=a-1=0$，所以 $f(x)$ 有唯一零点。

若 $0<a<1$，$\frac{1}{a}>1$，当 $x\in(0,1)$ 和 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 和 $\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $x\in\left(1,\frac{1}{a}\right)$ 上单调递减，此时 $f(1)=a-1<0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)<f(1)<0$，当 $x>\frac{1}{a}$ 时，$f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x>ax-a-(a+1)\ln x>ax-a-(a+1)\sqrt{x}$，此时可以让 $\frac{ax}{2}>a$，$\frac{ax}{2}>(a+1)\sqrt{x}$，解得 $x>2$，$x>\frac{4(a+1)^2}{a^2}$，$\frac{4(a+1)^2}{a^2}=4+\frac{4}{a^2}+\frac{8}{a}>2$，$\frac{4(a+1)^2}{a^2}>\frac{1}{a}$。

这里使用了 $\ln x<\sqrt{x}$ 进行放缩，因为 $\ln x\leqslant\frac{x}{e}<\frac{x}{2}$，故 $\ln\sqrt{x}<\frac{\sqrt{x}}{2}$，即 $\ln x<\sqrt{x}$。

取 $x_1=\frac{4(a+1)^2}{a^2}$，则 $f(x_1)=ax_1-\frac{1}{x_1}-(a+1)\ln x_1>ax_1-a-(a+1)\sqrt{x_1}>\left(\frac{ax_1}{2}-a\right)+\left[\frac{ax_1}{2}-(a+1)\sqrt{x_1}\right]>0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{a},x_1\right)$ 上有唯一零点。

若 $a>1$，$0<\frac{1}{a}<1$，当 $x\in\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{1}{a},1\right)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{1}{a},1\right)$ 上单调递减，此时 $f(1)=a-1>0$，$f\left(\frac{1}{a}\right)>f(1)>0$。

当 $x<\frac{1}{a}$ 时，由(1)知 $-\ln x<\frac{1}{x}-1$，所以 $f(x)=ax-\frac{1}{x}-(a+1)\ln x<ax-\frac{1}{x}-(a+1)\left(\frac{1}{x}-1\right)=\frac{ax^2+(a+1)x-(a+2)}{x}$，此时可以让 $ax^2<a+1(0<x<1$ 恒成立)，$(a+1)x<1$，解得 $x<\frac{1}{a+1}$，取 $x_2=\frac{1}{a+1}$，则 $f(x_2)=ax_2-\frac{1}{x_2}-(a+1)\ln x_2<ax_2-\frac{1}{x_2}-(a+1)\left(\frac{1}{x_2}-1\right)=\frac{[ax_2^2-(a+1)]+[(a+1)x_2-1]}{x}<0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{a}\right)$ 上有唯一零点。

综上，当 $a\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 恰有一个零点。

【170】 (1)见提示；(2) $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$。提示：(1) 将 $a=1$ 代入函数解析式，对函数求导，分别令导数大于零和小于零，求得函数的单调增区间和减区间。

当 $a=1$ 时，$f(x)=e^x-(x+2)$，$f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)<0$，解得 $x<0$，令 $f'(x)>0$，解得 $x>0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty,0)$，单调递增区间为 $(0,+\infty)$。

(2) $f'(x)=e^x-a$。

① 若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，至多有一个零点，不合题意。

② 若 $a>0$，当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\ln a,+\infty,)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，此时 $[f(x)]_{\min}=f(\ln a)=e^{\ln a}-a(\ln a+2)=-a(\ln a+1)$。因为 $f(x)$ 有两个零点，故 $-a(\ln a+1)<0$，即 $a>\frac{1}{e}$。

此时最小值为负能说明函数有两个零点吗？那显然是不能的，为什么？

零点存在定理告诉我们单调且两端异号才能存在零点，所以还缺两个在极值点两侧为正的点。接着就该找点了。当 $a>\frac{1}{e}$ 时，$\ln a>-1$，$f(-2)=e^{-2}>0$，为什么会想到取 -2 呢？因为参数干扰判断，而且 -2 带进去就可以直接把参数消了。接着我们需要在极值点右侧找点了，这要靠平时的积累记忆，也要结合第(1)问或是原函数结构赋予参数特值而后生成特定范围的不等式，再在找点放缩中进一步使用。

又 $f(-2)=e^{-2}>0$，由(1)知 $y=e^x-(x+2)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $y=e^x-(x+2)$，而 $y_{x=2}=e^2-4>0$，故当 $x>2$ 时，$e^x>x+2$，则 $f(x)=e^x-a(x+2)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=e^{\frac{x}{2}}\left(\frac{x}{2}+2\right)-2a\left(\frac{x}{2}+1\right)$。

这里我们考虑逆向使用不等式的同向同正可乘性，因为 $\frac{x}{2}+2>\frac{x}{2}+1>0$，只需 $e^{\frac{x}{2}}>2a$，解得 $x>2\ln(2a)$。

所以当 $\frac{x}{2}>2$ 且 $x>2\ln(2a)$，即当 $x>\max\{4,2\ln(2a)\}$ 时 $f(x)=e^x-a(x+2)=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}-a(x+2)>e^{\ln(2a)}\left(\frac{x}{2}+2\right)-a(x+2)=2a>0$，即 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln a)$ 和 $(\ln a,+\infty,)$ 上分别有一个零点。

此时 $f(x)$ 有两个零点，故 $a\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$。

【171】(1)见提示；(2)$\frac{e^2}{4}$。提示：(1) 当 $a=1$ 时，证 $f(x)\geqslant1$ 即证 $(x^2+1)e^{-x}-1\leqslant0$。

设 $g(x)=(x^2+1)e^{-x}-1$，则 $g'(x)=-(x^2-2x+1)e^{-x}=-(x-1)^2e^{-x}$。

当 $x\neq1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。而 $g(0)=0$，故当 $x\geqslant0$ 时，$g(x)\leqslant0$，即 $f(x)\geqslant1$。

(2) 方法一：$f(x)=e^x-ax^2(x>0)$，$f'(x)=e^x-2ax$。

① 若 $a\leqslant0$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$-2ax\geqslant0$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，那么 $f(x)>f(0)>0$，此时 $f(x)$ 无零点。

② 若 $a>0$，令 $g(x)=f'(x)=e^x-2ax$，$g'(x)=e^x-2a$。

ⓐ 若 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)=e^x-2a>0$，所以 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $f'(x)>f'(0)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，那么 $f(x)>f(0)>0$，此时 $f(x)$ 无零点。

ⓑ 若 $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{e}{2}$，当 $x\in(0,\ln2a)$ 时，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln2a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增，此时 $[f'(x)]_{\min}=f'(\ln2a)=2a(1-\ln2a)\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，那么 $f(x)>f(0)>0$，此时 $f(x)$ 无零点。

ⓒ 若 $a>\frac{e}{2}$，当 $x\in(0,\ln2a)$ 时，$g'(x)<0$，$f'(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln2a,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$f'(x)$ 单调递增，此时 $[f'(x)]_{\min}=f'(\ln2a)=2a(1-\ln2a)<0$，而 $f'\left(\frac{1}{2a}\right)=e^{\frac{1}{2a}}-1>0\left(\text{其中 }0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{e}<1<\ln2a\right)$ 而由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2+1>x^2$，$g(x)=f'(x)=e^x-2ax>x^2-2ax$。令 $x^2-2ax=0$，得 $x=2a$，为什么 $2a>\ln2a$ 呢？继续使用第(1)问结果，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2+1>x^2$；当 $x>1$ 时，$e^x>x^2+1>x^2>x$，即 $\ln x<x$，所以 $\ln2a<2a$。为什么要限制 $x>1$ 呢？因为当 $x>1$ 时，$x^2>x$。

当 $x>1$ 时，$e^x>x^2+1>x^2>x$，即 $\ln x<x$，所以 $\ln2a<2a$，故 $f'(2a)=e^x-2ax>x^2-2ax=0$，则存在 $m\in\left(\frac{1}{2a},\ln2a\right)$，$n\in(\ln2a,2a)$，使得 $f'(m)=0$，$f'(n)=0$，即 $e^m-2am=0$，$e^n-2an=0$。

因此，当 $x\in(0,m)$ 和 $(n,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x\in(m,n)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。又 $f(0)=1>0$，故 $f(m)>f(0)>0$，若 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点，则需 $f(n)=0$，即 $f(n)=e^n-an^2=2an-an^2=0$，解得 $n=2$。而 $a=\frac{e^n}{2n}$，故当 $n=2$ 时，$a=\frac{e^2}{4}$。

所以，当 $a=\frac{e^2}{4}$ 时，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点。

方法二：方法一虽是高明的解法，但略显麻烦，有没有更简捷的方法呢？当然有，我们把 $f(x)=e^x-ax^2=0$ 等价转化为 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}-a=0$ 的取解零点问题，这样的操作使得一次求导就可解决单调性问题。

设 $g(x)=\frac{e^x}{x^2}-a$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点。

① 若 $a\leqslant0$，则 $g(x)>0$，故 $g(x)$ 没有零点。

② 若 $a>0$，$g(x)=\frac{e^x(x-2)}{x^3}$。当 $x\in(0,2)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(2,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$。所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，在 $(2,+\infty)$ 上单调递增，故 $[g(x)]_{\min}=g(2)=\frac{e^2}{4}-a$。

ⓐ 若 $g(2)>0$，即 $a<\frac{e^2}{4}$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上没有零点。

ⓑ 若 $g(2)=0$，即 $a=\frac{e^2}{4}$，则 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点。

ⓒ 若 $g(2)<0$，即 $a>\frac{e^2}{4}$，而 $\frac{1}{a}<\frac{4}{e^2}<2$，因为 $g\left(\frac{1}{a}\right)=a^2e^{\frac{1}{a}}-a=a(ae^{\frac{1}{a}}-1)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上有一个零点。

而由(1)知，当 $x>0$ 时，$e^x>x^2+1$，关注第(1)问结论，找点放缩时第(1)问结论真的很好用。$g(x)=\frac{e^x}{x^2}-a=\frac{e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{\frac{x}{2}}}{x^2}-a>\frac{\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)\cdot\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)}{x^2}-a=\frac{\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{2}+1}{x^2}-a>\frac{\frac{x^4}{16}}{x^2}-a=\frac{x^2}{16}-a$。令 $\frac{x^2}{16}-a=0$，得 $x=4\sqrt{a}$，取 $x=4\sqrt{a}>2e>2$，故 $g(4\sqrt{a})=\frac{e^{4\sqrt{a}}}{(4\sqrt{a})^2}-a=\frac{e^{2\sqrt{a}}\cdot e^{2\sqrt{a}}}{(4\sqrt{a})^2}-a>\frac{(4a+1)\cdot(4a+1)}{16a}-a=\frac{16a^2+8a+1}{16a}>\frac{16a}{16}-a=0$，所以 $h(x)$ 在 $(2,4\sqrt{a})$ 上有一个零点，因此 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个零点。

综上，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个零点时，$a=\frac{e^2}{4}$。

【172】(1)$\frac{1}{e^2}$；(2)①若 $0<m<\frac{e^2}{4}$，$h(x)$ 无零点；②若 $m=$

$\frac{e^2}{4}$，$h(x)$有一个零点；③若 $m>\frac{e^2}{4}$，$h(x)$有两个零点；(3)$\frac{f(a)+f(b)}{2}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。提示：(1) $f(x)=e^x$ 的反函数为 $g(x)=\ln x$，则 $g'(x)=\frac{1}{x}$。

设 $y=kx+1$ 与 $g(x)=\ln x$ 的切点为 $P(m,n)$，又 $y=kx+1$ 恒过 $Q(0,1)$，所以 $k_{PQ}=g'(m)$，即$\frac{n-1}{m}=\frac{1}{m}$，解得 $n=2$，那么 $m=e^2$，即 $k=\frac{1}{e^2}$。

(2) 曲线 $y=f(x)$与曲线 $y=mx^2(m>0)$公共点的个数，即为 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{1}{m}(m>0)$的零点个数。

$h'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}(x>0)$，当 $0<x<2$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)$单调递增；当 $x>2$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以 $h(x)_{极大值}=h(2)=\frac{4}{e^2}-\frac{1}{m}$。

① 若 $0<m<\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)_{极大值}=\frac{4}{e^2}-\frac{1}{m}<0$，$h(x)$无零点；

② 若 $m=\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)_{极大值}=\frac{4}{e^2}-\frac{1}{m}=0$，$h(x)$有一个零点 2；

③ 若 $m>\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)_{极大值}=\frac{4}{e^2}-\frac{1}{m}>0$，$h(0)=-\frac{1}{m}<0$，所以 $h(x)$在$(0,2)$上有一个零点。

由(1)构造函数 $p(x)=\ln x-\left(\frac{x}{e^2}+1\right)$，则 $p'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e^2}$，当 $0<x<e^2$ 时，$p'(x)>0$，$h(x)$单调递增；当 $x>e^2$ 时，$p'(x)<0$，$h(x)$单调递减，所以 $p(x)\leqslant p(e^2)=0$，即 $\ln x\leqslant\left(\frac{x}{e^2}+1\right)$，那么$\left(\frac{x}{e}\right)^{e^2}\leqslant e^x$，则 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{1}{m}\leqslant\frac{x^2}{\left(\frac{x}{e}\right)^{e^2}}-\frac{1}{m}=e^{e^2}x^{2-e^2}-\frac{1}{m}$，由 $e^{e^2}x^{2-e^2}-\frac{1}{m}=0$ 得 $x=\sqrt[e^2-2]{me^{e^2}}$，取 $x_0=\sqrt[e^2-2]{me^{e^2}}$，$\sqrt[e^2-2]{me^{e^2}}>\sqrt[e^2-2]{\frac{e^2}{4}e^{e^2}}>\sqrt[e^2-2]{e^{-2}e^{e^2}}=\sqrt[e^2-2]{e^{e^2-2}}=e>2$，则 $h(x_0)=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}-\frac{1}{m}\leqslant\frac{x_0^2}{\left(\frac{x_0}{e}\right)^{e^2}}-\frac{1}{m}=e^{e^2}x_0^{2-e^2}-\frac{1}{m}=0$，所以 $h(x)$在$(2,\sqrt[e^2-2]{me^{e^2}}+2]$上有一个零点。

综上，①若 $0<m<\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)$无零点；②若 $m=\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)$有一个零点；③若 $m>\frac{e^2}{4}$，则 $h(x)$有两个零点。

注意：除了使用前一问或是题目所隐藏的不等式进行放缩找点外，也可以依靠平时积累，由 $e^x>x$ 可得 $e^{\frac{x}{3}}>\frac{x}{3}$，那么 $e^x=(e^{\frac{x}{3}})^3>\left(\frac{x}{3}\right)^3=\frac{x^3}{27}$，所以 $h(x)=\frac{x^2}{e^x}-\frac{1}{m}<\frac{x^2}{\frac{x^3}{27}}-\frac{1}{m}=\frac{27}{x}-\frac{1}{m}(x>0)$。

令$\frac{27}{x}-\frac{1}{m}=0$，解得 $x=27m>27\cdot\frac{e^2}{4}>2$，因此取 $x_0=27m$，则 $h(x_0)=\frac{x_0^2}{e^{x_0}}-\frac{1}{m}\leqslant\frac{x_0^2}{\frac{x_0^3}{27}}-\frac{1}{m}=\frac{27}{x_0}-\frac{1}{m}=0$。

(3) $\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{e^a+e^b}{2}-\frac{e^b-e^a}{b-a}=\frac{(e^a+e^b)(b-a)-2(e^b-e^a)}{2(b-a)}=\frac{e^a}{2(b-a)}[(b-a-2)e^{b-a}+(b-a+2)]$，因为 $a<b$，即 $b-a>0$，所以$\frac{e^a}{2(b-a)}>0$。构造函数 $q(x)=(x-2)e^x+(x+2)(x>0)$，则 $q'(x)=(x-1)e^x+1$，令 $\lambda(x)=q'(x)$，那么 $\lambda'(x)=xe^x>0$，则 $\lambda(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即 $q'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $q'(x)>q'(0)=0$，因此 $q(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，所以 $q(x)>q(0)=0$，则 $q(b-a)=(b-a-2)e^{b-a}+(b-a+2)>0$，因此$\frac{e^a}{2(b-a)}[(b-a-2)e^{b-a}+(b-a+2)]>0$，即 $\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$，故 $\frac{f(a)+f(b)}{2}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

【173】(1)见提示；(2)$(1,e)\cup(e,+\infty)$。提示：(1) 求导函数然后利用导函数的正负与函数的单调性的关系即可得到函数的单调性。

当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{x^2}{2^x}$，$f'(x)=\frac{2x\cdot 2^x-x^2\cdot 2^x\ln 2}{(2^x)^2}=\frac{x\cdot 2^x(2-x\ln 2)}{4^x}$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=\frac{2}{\ln 2}$，当 $0<x<\frac{2}{\ln 2}$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>\frac{2}{\ln 2}$时，$f'(x)<0$，则函数 $f(x)$在$\left(0,\frac{2}{\ln 2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{2}{\ln 2},+\infty\right)$上单调递减。

(2) 利用指数对数的运算法则，可以将曲线 $y=f(x)$与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点等价转化为方程$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$有两个不同的实数根，即曲线 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$与直线 $y=\frac{\ln a}{a}$有两个交点，利用导函数研究 $g(x)$的单调性，并结合 $g(x)$的正负、零点和极限值分析 $g(x)$的图像，然后根据 $g(x)$的图像和单调性得到 a 的取值范围。

由题意知 $f(x)=\frac{x^a}{a^x}=1$，即 $a^x=x^a$，两边取对数化简可得$\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln a}{a}$。

设函数 $g(x)=\frac{\ln x}{x}$，则 $g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\mathrm{e}$，在 $(0,\mathrm{e})$ 上，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，则 $g(x)_{\max}=g(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$，即 $\frac{\ln x}{x}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln x\leqslant\frac{x}{\mathrm{e}}<\frac{x}{2}$，进一步可得 $\ln x^2=2\ln x<x$，则 $\ln x<\sqrt{x}$。

又 $g(1)=0$，$g(x)=\frac{\ln x}{x}<\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}$，当 $x>1$ 时，$g(x)>0$（所以当 $x\to+\infty$ 时，$g(x)\to 0$），则曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=1$ 有且仅有两个交点，即曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=\frac{\ln a}{a}$ 有两个交点的充分必要条件是 $0<\frac{\ln a}{a}<\frac{1}{\mathrm{e}}$，这即是 $0<g(a)<g(\mathrm{e})$，所以 a 的取值范围是 $(1,\mathrm{e})\cup(\mathrm{e},+\infty)$。

【174】(1)见提示；(2)$(0,+\infty)$。提示：(1) $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+2a(x-1)=(x-1)\cdot(\mathrm{e}^x+2a)$。

① 设 $a\geqslant 0$，则当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

② 设 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$。

ⓐ 若 $a=-\frac{\mathrm{e}}{2}$，则 $f'(x)=(x-1)(\mathrm{e}^x-\mathrm{e})$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增。

ⓑ 若 $a>-\frac{\mathrm{e}}{2}$，则 $\ln(-2a)<1$，故当 $x\in(-\infty,\ln(-2a))$ 和 $(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；

当 $x\in(\ln(-2a),1)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln(-2a),1)$ 上单调递减。

ⓒ 若 $a<-\frac{\mathrm{e}}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(-\infty,1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减。

综上，若 $a\geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增；

若 $a=\frac{1}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

若 $-\frac{\mathrm{e}}{2}<a<0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln(-2a))$ 和 $(1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln(-2a),1)$ 上单调递减；

若 $a<-\frac{\mathrm{e}}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增，在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减。

(2) 当 $a>0$ 时，由(1)知 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

又 $f(1)=-\mathrm{e}$，$f(2)=a>0$，$x<1$ 这一侧的点怎么找？

令 $\varphi(x)=(x-2)\mathrm{e}^x(x<0)$，则 $\varphi'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$\varphi(x)$ 单调递减，此时 $\varphi(x)>\varphi(0)=-2$，所以当 $x<0$ 时，$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2>-2-2ax$，令 $-2-2ax=0$，得 $x=-\frac{1}{a}$。

取 $t=-\frac{1}{a}$，则 $f(t)=(t-2)\mathrm{e}^t+a(t-1)^2>-2-2at=0$，所以 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{1}{a},1\right)$ 和 $(1,2)$ 上分别有一个零点，即 $f(x)$ 有两个零点。

当 $a=0$ 时，$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，所以 $f(x)$ 有一个零点。

当 $a<0$ 时：

若 $-\frac{\mathrm{e}}{2}<a<0$，由(1)知 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，又当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，因此 $f(x)$ 至多一个零点，故 $f(x)$ 不存在两个零点；

若 $a=-\frac{\mathrm{e}}{2}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，因此 $f(x)$ 至多一个零点，故 $f(x)$ 不存在两个零点；

若 $a<-\frac{\mathrm{e}}{2}$，由(1)知 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增。

又当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，即当 $x\in(-\infty,\ln(-2a))$ 时，$f(x)<0$，因此 $f(x)$ 至多一个零点，故 $f(x)$ 不存在两个零点。

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$。

【175】(1)见提示；(2)$(0,1)$。提示：(1) $f'(x)=2a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-1=(a\mathrm{e}^x-1)(2\mathrm{e}^x+1)(x\in\mathbf{R})$。

① 若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减。

② 若 $a>0$，则由 $f'(x)=0$ 得 $x=-\ln a$。

当 $x\in(-\infty,-\ln a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(-\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增。

综上，若 $a\leqslant 0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递减；

若 $a>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 上单调递减，在 $(-\ln a,+\infty)$ 上单调递增。

(2) 若 $a\leqslant 0$，由(1)知 $f(x)$ 至多有一个零点。

若 $a>0$，由(1)知 $[f(x)]_{\min}=f(-\ln a)=1-\frac{1}{a}+\ln a$，$f(x)$ 有两个零点，即需 $1-\frac{1}{a}+\ln a<0$，而 $y=1-\frac{1}{a}+\ln a$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $y_{a=1}=0$，故 $0<a<1$。

在极值点为负的前提下还需找两个为正的点，结合零点存在定理可说明极值点两侧各有一零点。当 $0<a<1$ 时，$-\ln a>0$，且 $a\mathrm{e}^{2x}>0$，$a\mathrm{e}^x>0$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x>-2\mathrm{e}^x-x$，此时需要找个能使 $-2\mathrm{e}^x-x<0$ 的数。

而 $-\ln a>0>-2$ 且 $f(-2)=a\mathrm{e}^{-4}+(a-2)\mathrm{e}^{-2}+2>-2\mathrm{e}^{-2}+2>0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 有一个零点。

而当 $x>0$ 时，$f(x)=a\mathrm{e}^{2x}+(a-2)\mathrm{e}^x-x=\mathrm{e}^x(a\mathrm{e}^x+a-2)-x$，接着怎么办？接着使用不等式的同向同正可乘性，

因为 $e^x > x > 0$，则需 $ae^x + a - 2 > 1$ 即可，解得 $x > \ln\frac{3-a}{a}$，且 $\ln\frac{3-a}{a} > \ln\frac{1}{a} = -\ln a$。

设 $p(x)=e^x - x\,(x>0)$，则 $p'(x)=e^x-1>0$，所以 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 $p(x)>p(0)>0$，即 $e^x>x\,(x>0)$，故取 $t=\ln\frac{3-a}{a}$，则 $f(t)=ae^{2t}+(a-2)e^t - x = e^t(ae^t+a-2)-t > e^t - t>0$，因此 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\ln a)$ 和 $(-\ln a,+\infty)$ 上分别有一个零点，即 $f(x)$ 有两个零点。

综上，a 的取值范围为 $(0,1)$。

【176】 见提示。提示：(1) $f'(x)=\frac{1}{x} - [ae^x + a(x-1)e^x] = \frac{1-ax^2e^x}{x}(x>0)$。

当 $a\leqslant 0$ 时，$1-ax^2e^x>0$，从而 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

(2) ① 由(1)知 $f'(x)=\frac{1-ax^2e^x}{x}(x>0)$。令 $g(x)=1-ax^2e^x$，由 $0<a<\frac{1}{e}$ 可知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $g(1)=1-ae>0$，这里的 1 还是不难找的，关键是负值怎么找？此时找点必然是在 $x>1$ 这一侧，$g(x)=1-ax^2e^x$，$x^2>1$，$1-ax^2e^x<1-ae^x$，令 $1-ae^x=0$，解得 $x=\ln\frac{1}{a}$。$g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-a\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2\cdot\frac{1}{a}=1-\left(\ln\frac{1}{a}\right)^2=1-(\ln a)^2$，又 $\ln a<-1$，即 $g\left(\ln\frac{1}{a}\right)=1-(\ln a)^2<0$，故由零点存在定理知 $\exists x_0\in\left(1,\ln\frac{1}{a}\right)$，使得 $g(x)=0$，即 $\exists x_0\in\left(1,\ln\frac{1}{a}\right)$，使得 $f'(x)=0$。

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递减，则 $[f(x)]_{\max}=f(x_0)>f(1)=0$，而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-a\left(\ln\frac{1}{a}-1\right)e^{\ln\frac{1}{a}}=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\ln\frac{1}{a}+1$。

令 $h(x)=\ln x - x+1$，则当 $x>1$ 时，$h'(x)=\frac{1}{x}-1<0$，故 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，当 $x>1$ 时，$h(x)<h(1)=0$，所以 $\ln x<x-1$。

又 $\ln\frac{1}{a}>1$，从而 $f\left(\ln\frac{1}{a}\right)=\ln\left(\ln\frac{1}{a}\right)-\ln\frac{1}{a}+1<0$，所以 $f(x)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上有唯一零点且 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 内有唯一零点 1，故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恰有两个零点。

② 由题意知 $\begin{cases}f'(x_0)=0,\\ f(x_1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}ax_0^2e^{x_0}=1,\\ \ln x_1=a(x_1-1)e^{x_1},\end{cases}$ 从而 $\ln x_1=\frac{x_1-1}{x_0^2}e^{x_1-x_0}$，即 $e^{x_1-x_0}=\frac{x_0^2\ln x_1}{x_1-1}$。因为当 $x>1$ 时，$\ln x<x-1$，又 $x_1>x_0>1$，故 $e^{x_1-x_0}<\frac{x_0^2(x_1-1)}{x_1-1}=x_0^2$，两边取对数，得 $\ln e^{x_1-x_0}<\ln x_0^2$，则 $x_1-x_0<2\ln x_0<2(x_0-1)$，整理得 $3x_0-x_1>2$。

【177】 (1)见提示；(2)$(-\infty,0]$。提示：(1) $f'(x)=\cos x+x\sin x-1$，设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=x\cos x$。

当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递减。又 $g(0)=0$，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$，$g(\pi)=-2$，故 $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一零点，即 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点。

(2) 由题意知 $0=f(\pi)\geqslant a\pi$，可得 $a\leqslant 0$。

由(1)知 $f'(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上只有一个零点，设为 x_0，则当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$；当 $x\in(x_0,\pi)$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递增，在 (x_0,π) 上单调递减。又 $f(0)=0$，$f(\pi)=0$，所以当 $x\in[0,\pi]$ 时，$f(x)\geqslant 0$。又当 $a\leqslant 0$，$x\in[0,\pi]$ 时，$ax\leqslant 0$，故 $f(x)\geqslant ax$。

因此，a 的取值范围是 $(-\infty,0]$。

【178】 见提示。提示：(1) 需注意导数本身的单调性并结合零点存在定理设隐零点描述函数的单调性。

$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}$，设 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=-\sin x+\frac{1}{(1+x)^2}$。

当 $x\in\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)$ 单调递减(根据单调性或者求导可得)，不含参的找点可以尝试常见数值，而三角函数可以考虑轴线角。

而 $g'(0)=1>0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1+\frac{1}{\left(1+\frac{\pi}{2}\right)^2}<0$，由零点存在定理可得 $g'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上有唯一零点 $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则当 $x\in(-1,x_0)$ 时，$g'(x)>0$；当 $x\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$。

所以，$g(x)$ 在 $(-1,x_0)$ 上单调递增，在 $\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，故 $g(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一极大值点，即 $f'(x)$ 在 $\left(-1,\frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一极大值点。

(2) 结合第(1)问的结论来判断第(2)问，通常涉及三角函数问题时，范围可以从象限开始分段讨论，同时还要结合着三角函数的有界性说明无零点的情况。

$f'(x)=\cos x-\frac{1}{x+1}(x>-1)$，$f'(0)=0$，$f(0)=0$。

① 当 $x\in(-1,0]$ 时，由(1)知 $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增，而 $f'(0)=0$，所以当 $x\in(-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，故

$f(x)$在$(-1,0)$上单调递减。又 $f(0)=0$,从而 $x=0$ 是$f(x)$在$(-1,0]$上的唯一零点。

② 当$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时,由(1)知 $f'(x)$在$(0,x_0)$上单调递增,在$\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减,所以 $f'(x_0)>f'(0)=0$。又$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$,所以存在 $t\in\left(x_0,\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $f'(t)=0$,则当$x\in(0,t)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(t,\frac{\pi}{2}\right)$时,$f'(x)<0$,故$f(x)$在$(0,t)$上单调递增,在$\left(t,\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减。

又 $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\ln\left(1+\frac{\pi}{2}\right)>0$,所以当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$f(x)>0$,从而 $f(x)$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$上没有零点。

③ 当$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时,$f'(x)<0$,所以$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$上单调递减。而 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$, $f(\pi)<0$,所以 $f(x)$在$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$上有唯一零点。

④ 当 $x\in(\pi,+\infty)$时,$\ln(x+1)>1$,所以 $f(x)<0$,从而$f(x)$在$(\pi,+\infty)$上没有零点。

综上,$f(x)$有且仅有 2 个零点。

【179】(1)$y=2x$;(2)$a<-1$。提示:(1) 当$a=1$时,$f(x)=\ln(1+x)+xe^{-x}$,$f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{1-x}{e^x}$,$f'(0)=2$,$f(0)=0$,所以 $y=f(x)$在$(0,0)$处的切线为 $y=2x$。

(2) $f'(x)=\frac{1}{1+x}+\frac{a(1-x)}{e^x}=\frac{1}{1+x}\left[1+\frac{a(1-x^2)}{e^x}\right]=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{e^x+a(1-x^2)}{e^x}$,$f(x)$的零点即为 $y=\ln(1+x)$与$y=-axe^{-x}$ 的交点,通过观察可得 $y=\ln(1+x)$,$y=-axe^{-x}$ 都过点$(0,0)$,$y=\ln(1+x)$在$(0,0)$处的切线为$y=x$,且 $\ln(1+x)\leqslant x$。

令 $p(x)=xe^{-x}=\frac{x}{e^x}$,则 $p'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,$p'(0)=1$,所以$p(x)$在$(0,0)$的切线为 $y=x$,且 $xe^{-x}\leqslant x$,故从 $y=\ln(1+x)$,$y=-axe^{-x}$ 的公切线为$y=x$ 所对应的 $a=-1$ 进行讨论:若$-axe^{-x}=xe^{-x}$,可得 $a=-1$。

若 $a=-1$,$f'(x)=\frac{1}{1+x}\cdot\frac{e^x+x^2-1}{e^x}$,当 $x>0$ 时,$e^x+x^2-1>0$,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,所以 $f(x)>f(0)=0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上无零点。

若 $a>-1$,当 $x>0$ 时,$f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}>\ln(1+x)-xe^{-x}>0$,$f(x)$在$(0,+\infty)$上无零点。

若 $a<-1$,令 $g(x)=1+\frac{a(1-x^2)}{e^x}$,$g'(x)=\frac{a(x^2-2x-1)}{e^x}$,当$x\in(-1,1-\sqrt{2})$时,$g'(x)<0$,$g(x)$单调递减;当 $x\in(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2})$时,$g'(x)>0$,$g(x)$单调递增,$g(-1)=1>0$,$g(0)=1+a<0$,$g(1)=1>0$,所以存在$-1<x_1<0<x_2<1$,使得 $g(x_1)=0$,$g(x_2)=0$。

当 $x\in(-1,x_1)$和$(x_2,+\infty)$时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增;当 $x\in(x_1,x_2)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递增。

因为 $f(0)=0$,所以 $f(x_1)>0$,$f(x_2)<0$,

当 $x>0$ 时,$f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}\geqslant\ln(1+x)+\frac{a}{e}$,令$\ln(1+x)+\frac{a}{e}=0$,解得 $x=e^{-\frac{a}{e}}-1$。

因为 $y=xe^{-x}$ 在$(-\infty,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,所以 $y=axe^{-x}(a<-1)$在$(-\infty,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,因此 $y=axe^{-x}\geqslant\frac{a}{e}$。

取 $x_3=e^{-\frac{a}{e}}-1$,则 $f(x_3)=\ln(1+x_3)+ax_3e^{-x_3}\geqslant\ln(1+x_3)+\frac{a}{e}=0$,因为两次取等条件不一致,所以$f(x_3)>0$。

当$-1<x<0$ 时,$f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}<\ln(1+x)-ae$,令 $\ln(1+x)-ae=0$,解得 $x=e^{ea}-1$。

因为 $y=axe^{-x}(a<-1)$在$(-1,0)$上单调递减,所以 $y=axe^{-x}<-ae$。

取 $x_4=e^{ea}-1$,则 $f(x_4)=\ln(1+x_4)+ax_4e^{-x_4}<\ln(1+x_4)-ae=0$,所以存在 $x_5\in(x_4,0)$,$x_6\in(0,x_3)$,使得$f(x_5)=0$,$f(x_6)=0$,即 $f(x)$在$(-1,0)$,$(0,+\infty)$上各恰有一个零点,故 $a<-1$。

2.4 不等式的证明

【180】C。提示:这一类函数比较大小问题可以直接移项形成差函数进而求单调性由最值或上下限说明即可,但计算量有点大,具体证明的时候我们先挑看起来简单地来证明。当然也可以取特值说明。

A:$e^x\leqslant1+x+x^2$,移向构造函数 $f(x)=e^x-(1+x+x^2)$,$f(0)=0$,$f'(x)=e^x-(2x+1)$,令$g(x)=f'(x)=e^x-(2x+1)$,则 $g'(x)=e^x-2$,即当 $x\in[0,\ln2)$时,$f'(x)$单调递减;

当 $x\in(\ln2,+\infty)$时,$f'(x)$单调递增。而 $f'(\ln2)=e^{\ln2}-(2\ln2+1)=1-2\ln2<0$,$f'(0)=0$,所以当 $x\in[0,\ln2)$时,$f'(x)\leqslant0$,即 $f(x)\leqslant f(0)=0$,得当 $x\in[0,\ln2)$时,$e^x\geqslant1+x+x^2$,故 A 错误。

其实我们也可取特值 $x=5$,左边$=e^5>2^5=32$,右边$=31$,显然 A 错误。

B:$\frac{1}{\sqrt{1+x}}<1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2$,看着实在困难,可以尝试取特值,取 $x=\frac{1}{4}$,左边$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$,右边$=\frac{57}{64}$,而$\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2-\left(\frac{57}{64}\right)^2>0$,故 B 错误。

C:$\cos x\geqslant1-\frac{1}{2}x^2$,设 $f(x)=\cos x-\left(1-\frac{1}{2}x^2\right)$,

$f'(x)=x-\sin x$，而$(x-\sin x)'=1-\cos x\geqslant 0$，所以 $f'(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，则 $f'(x)\geqslant f'(0)=0$，故 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上单调递增，则 $f(x)\geqslant f(0)=0$。即 $\cos x\geqslant 1-\frac{1}{2}x^2$，故 C 正确。

到这里可以结束了，不用判断 D 了，但严谨好学的你们自会在考试时结束运算，但平时的练习仍需探究。

D：$\ln(1+x)\geqslant x-\frac{1}{8}x^2$，设 $f(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{1}{8}x^2\right)$，$f(0)=0$，$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+\frac{x}{4}=\frac{x^2-3x}{4(1+x)}$，则当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(3,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增，故当 $x\in[0,3)$ 时，$f(x)\leqslant f(0)=0$，即 $\ln(1+x)\leqslant x-\frac{1}{8}x^2$，故 D 错误。

D 选项也可以去特值，取 $x=1$，则左边$=\ln 2\approx 0.69$，而右边$=\frac{7}{8}=0.875$，显然 D 不成立。故选 C。

但这题提醒了同学们平时要积累常见对数近似值哦！

【181】 见提示。提示：(1) $f'(x)=a\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}(x>0)$。

由题意知 $f'(2)=0$，所以 $a=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}$，从而 $f(x)=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x-\ln x-1$，$f'(x)=\frac{1}{2\mathrm{e}^2}\mathrm{e}^x-\frac{1}{x}$。

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在$(0,2)$上单调递减，在$(2,+\infty)$上单调递增。

(2) 当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\ln x-1$。要证 $f(x)\geqslant 0$，即证 $g(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}}-\ln x-1$，则 $g'(x)=\mathrm{e}^{x-1}-\frac{1}{x}$，$g'(x)$ 在$(0,+\infty)$上单调递增且 $g'(1)=0$。

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的最小值点，故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$。

因此，当 $a\geqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)\geqslant 0$。

【182】 (1) $2x-y-1=0$；(2)见提示。提示：(1) $f'(x)=\frac{-ax^2+(2a-1)x+2}{\mathrm{e}^x}$，$f'(0)=2$，因此曲线 $y=f(x)$ 在点$(0,-1)$处的切线方程是 $2x-y-1=0$。

(2) 当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)+\mathrm{e}\geqslant(x^2+x-1+\mathrm{e}^{x+1})\mathrm{e}^{-x}$。要证 $f(x)+\mathrm{e}\geqslant 0$，即证 $g(x)=x^2+x-1+\mathrm{e}^{x+1}\geqslant 0$。$g'(x)=2x+1+\mathrm{e}^{x+1}$，$g'(x)$ 单调递增，且 $g'(-1)=0$。

当 $x<-1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>-1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；所以 $g(x)\geqslant g(-1)=0$，因此 $f(x)+\mathrm{e}\geqslant 0$。

【183】 (1) 1；(2)见提示。提示：(1) 由题意求出 $f'(x)$，由极值点处导数为 0 即可求解出参数 a。

$f(x)=\ln(a-x)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x-a}$，$y=xf(x)\Rightarrow y'=\ln(a-x)+\frac{x}{x-a}$，又 $x=0$ 是函数 $y=xf(x)$ 的极值点，所以 $y'_{x=0}=\ln a=0$，解得 $a=1$。

(2) 由(1)得 $g(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$，$x<1$ 且 $x\neq 0$，分类讨论 $x\in(0,1)$ 和 $x\in(-\infty,0)$，要证 $g(x)<1$，即证 $x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$ 在 $x\in(0,1)$ 和 $x\in(-\infty,0)$ 上恒成立，结合导数和换元法即可求解。

当 $x\in(0,1)$ 时，要证 $g(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$，因为 $x>0$，$\ln(1-x)<0$，所以 $x\ln(1-x)<0$，即证 $x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$，化简得 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$。

同理，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，要证 $g(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$，因为 $x<0$，$\ln(1-x)>0$，所以 $x\ln(1-x)<0$，即证 $x+\ln(1-x)>x\ln(1-x)$，化简得 $x+(1-x)\ln(1-x)>0$。

令 $h(x)=x+(1-x)\ln(1-x)$，再令 $1-x=t\in(0,1)\cup(1,+\infty)$，则 $x=1-t$，令 $g(t)=1-t+t\ln t$，$g'(t)=-1+\ln t+1=\ln t$，则：

当 $t\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单减，假设 $g(1)$ 能取到，则 $g(1)=0$，故 $g(t)>g(1)=0$；

当 $t\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单增，假设 $g(1)$ 能取到，则 $g(1)=0$，故 $g(t)>g(1)=0$。

综上所述，$g(x)=\frac{x+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}<1$ 在 $x\in(-\infty,0)\cup(0,1)$ 上恒成立。

【184】 (1) $y=2x$；(2)见提示；(3) 2。提示：(1) $f'(x)=\frac{2}{1-x^2}$，$f'(0)=2$，$f(0)=0$，则曲线 $y=f(x)$ 在$(0,f(0))$处的切线方程 $y=f'(0)(x-0)+f(0)$，即 $y=2x$。

(2) 当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$，即证 $g(x)=f(x)-2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)>0$，$g'(x)=\frac{2x^4}{1-x^2}$。

当 $x\in(0,1)$ 时，恒有 $g'(x)>0$，则 $g(x)$ 单调递增，故 $g(x)>g(0)=0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$。

(3) 由(2)知当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$，且 $x+\frac{x^3}{3}>0$。当 $k\leqslant 2$ 时，$2\left(x+\frac{x^3}{3}\right)\geqslant k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$；当 $k>2$ 时，设 $g(x)=f(x)-k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)=\ln\frac{1+x}{1-x}-k\left(x+\frac{x^3}{3}\right)$，显然 $g(0)=0$。$g'(x)=\frac{kx^4+2-k}{1-x^2}$ 令 $g'(x)=\frac{kx^4+2-k}{1-x^2}=0$，解得 $x=\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}<1$。

当 $x\in\left(0,\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}},1\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增。所以

$g\left(\sqrt[4]{\frac{k-2}{k}}\right)<g(0)=0$,显然不成立。

综上,$k_{\max}=2$。

【185】 (1) $a=1,b=2$;(2)见提示。提示:(1) $f'(x)=ae^x\ln x+\frac{a}{x}e^x-\frac{b}{x^2}e^{x-1}+\frac{b}{x}e^{x-1}=e^{x-1}\left[ae\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)+\frac{b(x-1)}{x^2}\right](x>0)$,由题意可得 $f(1)=2$,$f'(1)=e$,故 $a=1,b=2$。

(2) 由(1)知 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$,而 $f(x)>1$,即 $e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}>1$。

简直无处下手,指对混合问题,而且不是加减,是乘。怎么办?自然是分离它们,得 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$,故要证 $f(x)>1$,即证 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$。

设函数 $g(x)=x\ln x$,则 $g'(x)=\ln x+1$。所以当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时,$g'(x)<0$;当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时,$g'(x)>0$,故 $g(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$上单调递减,在$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$上单调递增,从而$[g(x)]_{\min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$。

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$,则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$。

所以当 $x\in(0,1)$时,$h'(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$时,$h'(x)<0$,故 $h(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,从而$[h(x)]_{\max}=h(1)=-\frac{1}{e}$。因为两个函数为$-\frac{1}{e}$的 x 不同,所以 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$,即 $f(x)>1$。

【186】 (1)$a=0,b=-1$;(2)见提示。提示:(1) 常规问题按部就班操作就可。由 $y=f(x)$的图像过$(0,0)$点,代入得 $b=-1$,由 $y=f(x)$在$(0,0)$处的切线斜率为$\frac{3}{2}$,又 $f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+a$,则 $f'(0)=\frac{3}{2}+a=\frac{3}{2}$,解得 $a=0$。

(2) 当 $0<x<2$ 时,$f(x)<\frac{9x}{x+6}$,即当 $0<x<2$ 时,$h(x)=f(x)-\frac{9x}{x+6}<0$,$h'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{54}{(x+6)^2}=\frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2}$。

此刻有些头疼,不合并吧,无路可走,合并吧,好像也是死胡同。

那怎么办?主要是$\sqrt{x+1}$让我们有些焦虑,那有没有办法把这个根号弄走呢?基本不等式呀! $\sqrt{x+1}=\sqrt{1}\cdot\sqrt{x+1}\leqslant\frac{1+x+1}{2}=\frac{x}{2}+1$,则 $h'(x)=\frac{2+\sqrt{x+1}}{2(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2}<\frac{x+6}{4(x+1)}-\frac{54}{(x+6)^2}=\frac{(x+6)^3-216(x+1)}{4(x+1)(x+6)^2}$。

而控制导数正负的“开关”在分子,令 $g(x)=(x+6)^3-216(x+1)$,当 $x\in(0,2)$时,$g'(x)=3(x+6)^2-216<0$,所以 $g(x)$在$(0,2)$内是减函数。

又由 $g(0)=0$ 得 $g(x)<0$,所以 $h'(x)<0$,因此 $h(x)$在$(0,2)$内是减函数,所以 $h(x)<h(0)=0$,于是当 $0<x<2$ 时,$f(x)<\frac{9x}{x+6}$。

【187】 见提示。提示:(1) $f'(x)=\frac{1}{x}+2ax+2a+1=\frac{(x+1)(2ax+1)}{x}(x>0)$。含参问题分类讨论就行,分别讨论代数式结构和两零点大小关系以及和定义域端点关系。

若 $a\geqslant0$,则当 $x\in(0,+\infty)$时,$f'(x)>0$,故 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增。

若 $a<0$,则当 $x\in\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$时,$f'(x)>0$;当 $x\in\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$时,$f'(x)<0$,故 $f(x)$在$\left(0,-\frac{1}{2a}\right)$上单调递增,在$\left(-\frac{1}{2a},+\infty\right)$上单调递减。

(2) 由(1)知,当 $a<0$ 时,$f(x)$在 $x=-\frac{1}{2a}$取得最大值,最大值为 $f\left(-\frac{1}{2a}\right)=\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a}$。所以 $f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$,即 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)-1-\frac{1}{4a}\leqslant-\frac{3}{4a}-2$,则 $\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}+1\leqslant0$。

设 $g(x)=\ln x-x+1$,则 $g'(x)=\frac{1}{x}-1$。

当 $x\in(0,1)$时,$g'(x)>0$;当 $x\in(1,+\infty)$时,$g'(x)<0$。所以 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增,在$(1,+\infty)$上单调递减,故当 $x=1$ 时,$g(x)$取得最大值,最大值为 $g(1)=0$,即 $\ln x\leqslant x-1(x>0)$。

当 $x>0$ 时,$g(x)\leqslant0$,从而当 $a<0$ 时,$\ln\left(-\frac{1}{2a}\right)+\frac{1}{2a}+1\leqslant0$,所以 $f(x)\leqslant-\frac{3}{4a}-2$。

【188】 见提示。提示:(1)$f'(x)=ae^x-1$。

① 若 $a\leqslant0$,$f'(x)<0$ 在 **R** 上恒成立,则 $f(x)$在 **R** 上单调递减。

② 若 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,-\ln a)$时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减;当 $x\in(-\ln a,+\infty)$时,$f'(x)>0$,则 $f(x)$单调递增。

综上,若 $a\leqslant0$,则 $f(x)$在 **R** 上单调递减。

若 $a>0$,则当 $x\in(-\infty,-\ln a)$时,$f(x)$单调递减;当 $x\in(-\ln a,+\infty)$时,$f(x)$单调递增。

(2) 由(1)知,当 $a>0$ 时,$f(x)_{\min}=f(-\ln a)=a^2+1+$

$\ln a$，所以 $f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$，则 $a^2+1+\ln a>2\ln a+\frac{3}{2}$，即证 $g(a)=a^2-\ln a-\frac{1}{2}>0$。

$g'(a)=2a-\frac{1}{a}=\frac{2a^2-1}{a}$，当 $a\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时，$g'(a)<0$，$g(a)$ 单调递减；当 $a\in\left(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$ 时，$g'(a)>0$，$g(a)$ 单调递增，所以 $g(a)_{\min}=g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\ln 2}{2}>0$，故当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$。

【189】见提示。提示：(1) $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+m}$，因为 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f'(0)=1-\frac{1}{m}=0$，解得 $m=1$，则函数 $f(x)=e^x-\ln(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$。$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}=\frac{e^x(x+1)-1}{x+1}$，设 $g(x)=e^x(x+1)-1$，则 $g'(x)=e^x(x+2)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是增函数。又因为 $g(0)=0$，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$g(x)<0$，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增。

(2) 当 $m\leqslant 2$ 时，$\ln(x+m)\leqslant\ln(x+2)$，则 $f(x)=e^x-\ln(x+m)\geqslant e^x-\ln(x+2)$。要证 $f(x)>0$，即需证 $g(x)=e^x-\ln(x+2)>0$，$g'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$，$g'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$ 在 $(-2,+\infty)$ 上单调递增。

这是一个导数隐零点问题，确定单调性了还需结合零点存在定理找到能使导数异号的两个点，说明隐零点的存在。

又 $g'(-1)=\frac{1}{e}-1<0$，$g'(0)=\frac{1}{2}>0$，故由零点存在定理知 $\exists x_0\in(-1,0)$ 使得 $g'(x)=0$，即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$。

当 $x\in(-2,x_0)$ 时，$g'(x)<0$；当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，从而当 $x=x_0$ 时，$f(x)$ 取得最小值。由 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0+2}$ 得 $\ln(x_0+2)=-x_0$，故 $f(x)\geqslant e^{x_0}-\ln(x_0+2)=\frac{1}{x_0+2}+x_0$，$x_0\in(-1,0)$，令 $t=x_0+2\in(1,2)$，则 $\frac{1}{x_0+2}+x_0=\frac{1}{x_0+2}+x_0+2-2=\frac{1}{t}+t-2$。而 $\frac{1}{t}+t-2$ 在 $t\in(1,2)$ 上单调递增，则 $\frac{1}{t}+t-2>\left(\frac{1}{t}+t-2\right)_{t=1}=0$，即 $f(x)\geqslant e^{x_0}-\ln(x_0+2)=\frac{1}{x_0+2}+x_0>0$，故当 $m\leqslant 2$ 时，$f(x)>0$。

【190】见提示。提示：(1) $f'(x)=e^x\left(\frac{x-2}{x+2}+\frac{4}{(x+2)^2}\right)=\frac{x^2e^x}{(x+2)^2}$。

当 $x\in(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 和 $(-2,+\infty)$ 上单调递增，故当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=-1$，即 $\frac{x-2}{x+2}e^x>-1$，化简得 $(x-2)e^x+x+2>0$。

(2) $g'(x)=\frac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^3}$。

做到这里得要注意了，千万别放弃，且要注意第(1)问的结论，莫名其妙的第(1)问其实是在为解答第(2)问作铺垫，虽然不至于“看这里！看这里！”这么夸张，但这道题中的提醒也很明显。

仔细看看分子里出现了 $(x-2)e^x$ 与 $(x+2)$，这不正是第(1)问函数的分子、分母么？所以赶紧调整结构改造出第(1)问的函数出来，故 $g'(x)=\frac{(x-2)e^x+a(x+2)}{x^3}=\frac{x+2}{x^3}(f(x)+a)$，真是柳暗花明又一村！

由(1)知 $f(x)+a$ 单调递增，因为 $\frac{x+2}{x^3}>0(x>0)$，所以决定导数正负的函数在 $p(x)=f(x)+a$。

控制导数正负的“核心”函数 $p(x)$ 是单调的，但是其等于 0 不可解，那怎么办呢？这个时候零点存在定理就显得很重要了，为什么呢？因为单调函数若在区间两端异号，那么其在该区间必定有零点，届时假设出来，那么我们至少可以使得计算可以继续了，所以这里我们该找出 $p(x)$ 异号的两个 x。令 $p(x)=f(x)+a=\frac{x-2}{x+2}e^x+a$，这两个 x 需要根据函数特征来找，$p(x)=\frac{x-2}{x+2}e^x+a$ 里面有分子和指数，那必然先找分子和指数为 0 的这两个 x，分别是 0,2，至于行不行先带进去试试。

$p(0)=a-1<0$，$p(2)=a\geqslant 0$。因此，由零点存在定理知存在唯一 $x_a\in(0,2]$，使得 $p(x_a)=0$，即 $\frac{x_a-2}{x_a+2}e^{x_a}+a=0$。

当 $0<x<x_a$ 时，$p(x)=f(x)+a<0$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；

当 $x>x_a$ 时，$p(x)=f(x)+a>0$，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增。

因此，$g(x)$ 在 $x=x_a$ 处取得最小值，最小值为 $g(x_a)=\frac{e^{x_a}-a(x_a+1)}{x_a^2}$。

接下来呢？自然是通过 $\frac{x_a-2}{x_a+2}e^{x_a}+a=0$ 替换前面的 a，得 $g(x_a)=\frac{e^{x_a}-a(x_a+1)}{x_a^2}=\frac{e^{x_a}+f(x_a)(x_a+1)}{x_a^2}=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}$ $(x_a\in(0,2])$，再结合 $f(x)$ 的单调性由 $-\frac{x_a-2}{x_a+2}e^{x_a}=a\in[0,1)$ 得 $x_a\in(0,2]$，所以 $y=h(a)(a\in[0,1))$ 的值域即为 $g(x_a)=\frac{e^{x_a}}{x_a+2}(x_a\in(0,2])$ 的值域。

而 $g'(x_a)=\dfrac{e^{x_a}(x_a+1)}{(x_a+2)^2}>0$，所以 $g(x_a)=\dfrac{e^{x_a}}{x_a+2}$ 在 $x_a\in(0,2]$ 上单调递增，故 $g(x_a=0)<g(x_a)\leqslant g(x_a=2)$，即 $g(x_a)\in\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$。

综上，当 $a\in[0,1)$ 时，$g(x)$ 有最小值 $h(a)$，$h(a)$ 的值域为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$。

【191】(1)1；(2)见提示。提示：(1) $f(x)=ax^2-ax-x\ln x=x(ax-a-\ln x)$。设 $g(x)=ax-a-\ln x$，则 $f(x)=xg(x)$，$f(x)\geqslant 0$ 等价于 $g(x)\geqslant 0$。因为 $g(1)=0$，$g(x)\geqslant 0$，故 $g'(1)=0$，而 $g'(x)=a-\dfrac{1}{x}$，$g'(1)=a-1$，得 $a=1$。

若 $a=1$，则 $g'(x)=1-\dfrac{1}{x}$。当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增。所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极小值点，故 $g(x)\geqslant g(1)=0$。

综上，$a=1$。

(2) 由(1)知 $f(x)=x^2-x-x\ln x$，$f'(x)=2x-2-\ln x$。设 $h(x)=2x-2-\ln x$，则 $h'(x)=2-\dfrac{1}{x}$。

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时，$h'(x)<0$；当 $x\in\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 时，$h'(x)>0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增。

又 $h\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$，$h(e^{-1})<0$，$h(e^{-2})>0$，$h(1)=0$，所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 处有唯一零点 x_0，在 $\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$ 处有唯一零点 1，且当 $x\in(0,x_0)$ 时，$h(x)>0$；当 $x\in(x_0,1)$ 时，$h(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$h(x)>0$。因 $f'(x)=h(x)$，所以 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 的唯一极大值点。

由 $f'(x_0)=0$ 得 $\ln x_0=2(x_0-1)$，故 $f(x_0)=x_0(1-x_0)$。由 $x_0\in(0,1)$ 得，$f(x_0)<\dfrac{1}{4}$。

因为 $x=x_0$ 是 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 的最大值点，由 $e^{-1}\in(0,1)$，$f'(e^{-1})\neq 0$ 得 $f(x_0)>f(e^{-1})=e^{-2}$，所以 $e^{-2}<f(x_0)<2^{-2}$。

【192】见提示。提示：(1) $f'(x)=-2a\sin 2x-(a-1)\sin x$。

(2) $f(x)=2a\cos^2 x+(a-1)\cos x-1$。令 $t=\cos x\in[-1,1]$，则 $g(t)=2at^2+(a-1)t-1$，故 A 是 $|g(t)|$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值，$g(-1)=a$，$g(1)=3a-2$，$g\left(\dfrac{1-a}{4a}\right)=-\dfrac{(a-1)^2}{8a}-1=-\dfrac{a^2+6a+1}{8a}$。

当 $-1\leqslant\dfrac{1-a}{4a}\leqslant 1$，即 $a\in\left[\dfrac{1}{5},+\infty\right)$ 时，$|g(t)|=\max\left\{|g(-1)|,|g(1)|,\left|g\left(\dfrac{1-a}{4a}\right)\right|\right\}$。

当 $\dfrac{1-a}{4a}>1$ 或 $\dfrac{1-a}{4a}<-1$，即 $a\in\left(0,\dfrac{1}{5}\right)$ 时，$|g(t)|=\max\{|g(-1)|,|g(1)|\}$，而 $|g(-1)|=a$，$|g(1)|=|3a-2|$，$\left|g\left(\dfrac{1-a}{4a}\right)\right|=\dfrac{a^2+6a+1}{8a}$。

此时在同一坐标系中作出三个图像，根据其范围比较出大小分段函数。$\dfrac{a^2+6a+1}{8a}$ 图像不会画？$\dfrac{a^2+6a+1}{8a}=\dfrac{1}{8}\left(a+\dfrac{1}{a}+6\right)$，这下应该会了吧！

综上，$A=\begin{cases}2-3a, & 0<a\leqslant\dfrac{1}{5},\\ \dfrac{a^2+6a+1}{8a}, & \dfrac{1}{5}<a<1,\\ 3a-2, & a\geqslant 1。\end{cases}$

(3) 利用三角函数有界性以及含绝对值的三角不等式进行放缩。

由(1)得 $|f'(x)|=|-2a\sin 2x-(a-1)\sin x|\leqslant 2a+|a-1|$。

当 $0<a\leqslant\dfrac{1}{5}$ 时，$|f'(x)|-2A\leqslant 1+a-2(2-3a)=7a-3<0$，即 $|f'(x)|<2A$。

当 $\dfrac{1}{5}<a<1$ 时，$A=\dfrac{a}{8}+\dfrac{1}{8a}+\dfrac{3}{4}\geqslant 1$，所以 $|f'(x)|\leqslant 1+a<2A$。

当 $a\geqslant 1$ 时，$|f'(x)|\leqslant 3a-1\leqslant 6a-4=2A$，所以 $|f'(x)|\leqslant 2A$。

【193】(1) $y=x-1$；(2) $\{2\}$；(3)见提示。提示：(1) 由于 $f(x)=x\ln x$，所以 $f'(x)=\ln x+1$，则 $f(1)=0$，$f'(1)=1$，故所求的切线方程为 $y-0=x-1$，即 $y=x-1$。

(2) 第(2)问看着就一筹莫展，参数分离求最值的想法是没问题，但导数我们没有把握去处理，这个时候我们应该注意下第(1)问的切线，而这个切线实则在为我们提供不等式，服务于第(2)问，莫名其妙的前一问多数时候是在为后面提示和提供做题方向。

记 $g(x)=x\ln x-(x-1)$，$g'(x)=\ln x$，当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)\geqslant g(1)=0$，即 $x\ln x\geqslant x-1$，当且仅当 $x=1$ 时取等号，即 $\ln x\geqslant 1-\dfrac{1}{x}$。进一步可得 $\ln\sqrt{x}\geqslant 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，那么当 $x\in(0,1)$ 时，$\dfrac{\ln\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}<1$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\dfrac{\ln\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}>1$，由题知 $f(x)\geqslant a(x-\sqrt{x})$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 时恒成立。

① 若 $x=1$，$a\in\mathbf{R}$；

② 若 $x\in(0,1)$，$x<\sqrt{x}$，$f(x)\geqslant a(x-\sqrt{x})$，则 $\dfrac{f(x)}{x-\sqrt{x}}=$

$\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\leqslant a$，即$\dfrac{\ln\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\leqslant\dfrac{a}{2}$，因此$\dfrac{a}{2}\geqslant1$，即 $a\geqslant2$；

③ 若 $x\in(1,+\infty)$，$x>\sqrt{x}$，$f(x)\geqslant a(x-\sqrt{x})$，则 $\dfrac{f(x)}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{\ln x}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{2\ln\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\geqslant a$，即$\dfrac{\ln\sqrt{x}}{1-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\geqslant\dfrac{a}{2}$，因此$\dfrac{a}{2}\leqslant1$，即 $a\leqslant2$。

综上所述，a 的取值范围为$\{2\}$。

(3) $f'(x)=\ln x+1$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增。

(a) 直接证找不到抓手，那就考虑证明加强命题，进而证明该命题的成立。

当 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\dfrac{1}{e}$，$\sqrt{x_2}=\sqrt{(x_2-x_1)+x_1}\leqslant\sqrt{x_2-x_1}+\sqrt{x_1}$，即 $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\leqslant\sqrt{x_2-x_1}$，即需证 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$，又 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$上单调递减，则 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，即需证 $f(x_1)+\sqrt{x_1}\leqslant f(x_2)+\sqrt{x_2}$，记 $h(x)=f(x)+\sqrt{x}=x\ln x+\sqrt{x}\left(0<x\leqslant\dfrac{1}{e}\right)$，$h'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，记 $h'(x)=k(x)$，$k'(x)=\dfrac{4\sqrt{x}-1}{4x\sqrt{x}}$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{16}\right)$，$k'(x)<0$，$h'(x)$单调递减；当 $x\in\left(\dfrac{1}{16},\dfrac{1}{e}\right]$，$k'(x)<0$，$h'(x)$单调递增，所以 $h'(x)\geqslant h'\left(\dfrac{1}{16}\right)=3-4\ln2>0$，因此 $h(x)$在$\left(0,\dfrac{1}{e}\right]$上单调递增。又 $0<x_1\leqslant x_2\leqslant\dfrac{1}{e}$，所以 $f(x_1)+\sqrt{x_1}\leqslant f(x_2)+\sqrt{x_2}$。

(b) 当$\dfrac{1}{e}<x_1\leqslant x_2<1$ 时，$\sqrt{x_2}=\sqrt{(x_2-x_1)+x_1}\leqslant\sqrt{x_2-x_1}+\sqrt{x_1}$，即 $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}\leqslant\sqrt{x_2-x_1}$，即需证 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}$，又 $f(x)$在$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$上单调递增，则 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，即需证 $f(x_2)-\sqrt{x_2}\leqslant f(x_1)-\sqrt{x_1}$，记 $p(x)=f(x)-\sqrt{x}=x\ln x-\sqrt{x}\left(\dfrac{1}{e}<x<1\right)$，当$\dfrac{1}{e}<x<1$，$p'(x)=\ln x+1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$，因此 $p(x)$在$\left(\dfrac{1}{e},1\right)$上单调递增，又$\dfrac{1}{e}<x_1\leqslant x_2<1$，所以 $f(x_1)-\sqrt{x_1}\leqslant f(x_2)-\sqrt{x_2}$。使用(a)的加强命题法失效了，那怎么办？继续观察和思考问题。通过观察题目，题目出现了 $f(x_1)-f(x_2)$和 x_1-x_2，而这两个差值与斜率有关，不妨设 $0<x_1<x_2$，则$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}$，接着考虑分离变量 $\ln x_1$ 或 $\ln x_2$。$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_1+x_2\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}=\ln x_1+\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}=\ln x_1+\dfrac{-\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}$，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}=\dfrac{x_1\ln x_1-x_1\ln x_2+x_1\ln x_2-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}=\ln x_2+\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{1-\dfrac{x_2}{x_1}}$，这两个式子分别出现了$\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}$和$\dfrac{-\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{1-\dfrac{x_2}{x_1}}$，由(2)知 $\ln x>1-\dfrac{1}{x}$，又 $0<\dfrac{x_1}{x_2}<1$，则 $1-\dfrac{x_1}{x_2}>0$，所以 $\dfrac{-\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{\dfrac{x_1}{x_2}-1}=\dfrac{\ln\dfrac{x_2}{x_1}}{1-\dfrac{x_1}{x_2}}>1$，又$\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则 $1-\dfrac{x_2}{x_1}<0$，$\dfrac{\ln\dfrac{x_1}{x_2}}{1-\dfrac{x_2}{x_1}}<1$，所以 $\ln x_1+1<\dfrac{x_1\ln x_1-x_2\ln x_2}{x_1-x_2}<\ln x_2+1$。

那么当$\dfrac{1}{e}<x_1\leqslant x_2<1$ 时，有 $|f(x_1)-f(x_2)|=f(x_2)-f(x_1)\leqslant(\ln x_2+1)(x_2-x_1)\leqslant x_2-x_1\leqslant\sqrt{x_2-x_1}$，命题成立。

(c) 当 $0<x_1\leqslant\dfrac{1}{e}\leqslant x_2<1$ 时，结合(a)和(b)，可得 $\left|f(x_1)-f\left(\dfrac{1}{e}\right)\right|\leqslant\sqrt{\dfrac{1}{e}-x_1}\leqslant\sqrt{x_2-x_1}$，$\left|f\left(\dfrac{1}{e}\right)-f(x_2)\right|\leqslant\sqrt{x_2-\dfrac{1}{e}}\leqslant\sqrt{x_2-x_1}$，结合 $f(x)$单调性可得 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\left|f(x_1)-f\left(\dfrac{1}{e}\right)\right|$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\left|f\left(\dfrac{1}{e}\right)-f(x_2)\right|$。所以 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant\sqrt{x_2-x_1}$成立。

综上，命题得证。

【194】 (1)单调递增区间是$(-\infty,1)$，单调递减区间是$(1,+\infty)$；$f(x)_{极大值}=\dfrac{1}{e}$，无极小值；(2)见提示；(3)见提示。提示：(1) $f'(x)=\dfrac{1-x}{e^x}$，当 $x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减，所以 $f(x)$的单调递增区间是$(-\infty,1)$，单调递减区间是$(1,+\infty)$；$f(x)_{极大值}=f(1)=\dfrac{1}{e}$，无极小值。

(2) 由题意知 $g(x)=f(2-x)=(2-x)e^{x-2}$，令 $p(x)=f(x)-g(x)=xe^{-x}+(x-2)e^{x-2}$，则 $p'(x)=(x-1)(e^{2x-2}-1)e^{-x}$。当 $x>1$ 时，$x-1>0$，$2x-2>0$，$e^{2x-2}-1>0$，$e^{-x}>0$，所以 $p'(x)>0$，因此 $p(x)$单调递

增，且 $p(x)>p(1)=0$，即 $f(x)-g(x)>0$。故当 $x>1$ 时，$f(x)>g(x)$。

(3) 方法一：由(1)知，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，如果 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $0<x_1<1<x_2$，当 $x_2\geqslant 2$ 时，显然 $x_1+x_2>2$；当 $0<x_1<1<x_2<2$ 时，由(2)知 $f(x_1)=f(x_2)>g(x_2)=f(2-x_2)$，而 $0<2-x_2<1$，$0<x_1<1$，且 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则有 $2-x_2<x_1$，故 $x_1+x_2>2$。

综上，如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2$。

方法二：由(1)知，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，如果 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $0<x_1<1<x_2$，且 $x_1\mathrm{e}^{-x_1}=x_2\mathrm{e}^{-x_2}$，两边取对数可得 $\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$，即 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}=1$。

要证明 $x_1+x_2>2$，即证 $\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$，进一步可得 $\dfrac{2(x_2-x_1)}{x_1+x_2}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，则需证 $\dfrac{2\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}<\ln\dfrac{x_2}{x_1}$，因为 $0<x_1<1<x_2$，所以 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$。

构造函数 $h(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，当 $x>1$ 时，$h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

因此当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$。又 $\dfrac{x_2}{x_1}>1$，所以 $h\left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)=\ln\dfrac{x_2}{x_1}-\dfrac{2\left(\dfrac{x_2}{x_1}-1\right)}{\dfrac{x_2}{x_1}+1}>0$，即 $1=\dfrac{x_2-x_1}{\ln x_2-\ln x_1}<\dfrac{x_1+x_2}{2}$。故如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2$。

方法三：由(1)知，当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，如果 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，由 $f(x_1)=f(x_2)$ 得 $0<x_1<1<x_2$，且 $x_1\mathrm{e}^{-x_1}=x_2\mathrm{e}^{-x_2}$，两边取对数可得 $\ln x_1-x_1=\ln x_2-x_2$，设 $t=\dfrac{x_2}{x_1}>1$，则有 $\ln t=x_1(t-1)$，那么 $x_1=\dfrac{\ln t}{t-1}$，$x_2=\dfrac{t\ln t}{t-1}$。要证 $x_1+x_2>2$，即证 $\dfrac{(t+1)\ln t}{t-1}>2$，即 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$。

构造函数 $h(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>1)$，当 $x>1$ 时，$h'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}>0$，所以 $h(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。

因此当 $x>1$ 时，$h(x)>h(1)=0$，即 $h(t)>h(1)=0$，则 $\ln t>\dfrac{2(t-1)}{t+1}(t>1)$。故如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，则 $x_1+x_2>2$。

【195】(1)$(0,+\infty)$；(2)见提示。提示：(1) $f'(x)=(x-1)\mathrm{e}^x+2a(x-1)=(x-1)(\mathrm{e}^x+2a)$。

有参数必然带来分类讨论。分类切入点在哪里呢？当然是在 e^x+2a 这里，指数有恒正光环，那么需要考虑的自然是 e^x+2a 这个整体会不会恒正，所以分类切入点自然就落到 a 上了。

① 若 $a=0$，则 $f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x$，$f(x)$ 只有一个零点。

② 若 $a>0$，则当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$。所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。又 $f(1)=-\mathrm{e}$，$f(2)=a$，两个零点还需要极值点的左侧有正值呀！$f(x)=(x-2)\mathrm{e}^x+a(x-1)^2$，怎么找呢？也就是再找个 $t<1$，使得 $f(t)>0$，假设 $(t-2)\mathrm{e}^t+a(t-1)^2>0$，即 $\mathrm{e}^t<\dfrac{a(t-1)^2}{2-t}$，这怎么办呢？可以在 e^t 和 $\dfrac{a(t-1)^2}{2-t}$ 之间插入一个值形成两个不等式，当然这个值不是盲目的，而是考虑 e^t 和 $\dfrac{a(t-1)^2}{2-t}$ 都为正，要给中间插入正值，随后解不等式取交集就可。取什么呢？为了便于求解，我们可以直接取 a，这样就形成了 $\mathrm{e}^t<a<\dfrac{a(t-1)^2}{2-t}$，通过解不等式得 $t<\ln a$，$t<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，取交集即为 $t<\min\left\{\ln a,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$。取 $t<\min\left\{\ln a,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$，得 $\mathrm{e}^t<a<\dfrac{a(t-1)^2}{2-t}$，即 $(t-2)\mathrm{e}^t+a(t-1)^2>0$，故 $f(t)>0$，故 $f(x)$ 存在两个零点。

③ 若 $a<0$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=1$ 或 $x=\ln(-2a)$。

若 $a<0$ 时，则 $a(x-1)^2\leqslant 0$，那么当 $x\leqslant 1$ 时，$(x-2)\mathrm{e}^x<0$，即 $f(x)<0$，也就说若 $a<0$，当 $x\leqslant 1$ 时无零点，关注点可以放到 $x>1$ 这一侧了。

ⓐ 若 $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}\leqslant a<0$，则 $\ln(-2a)\leqslant 1$，故当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增。又当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点。

ⓑ 若 $a<-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$，则 $\ln(-2a)>1$，故当 $x\in(1,\ln(-2a))$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(\ln(-2a),+\infty)$ 时，$f'(x)>0$。因此 $f(x)$ 在 $(1,\ln(-2a))$ 上单调递减，在 $(\ln(-2a),+\infty)$ 上单调递增。又当 $x\leqslant 1$ 时，$f(x)<0$，所以 $f(x)$ 不存在两个零点。

综上，a 的取值范围为 $(0,+\infty)$。

(2) 构建新函数，通过对称化构造可证。要证 $x_1+x_2<2$，即证 $x_1<2-x_2$。由(1)知 $a>0$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_1\in(-\infty,1)$，$x_2\in(1,+\infty)$，$2-x_2\in(-\infty,1)$，此刻 x_1，$2-x_2$ 同属 $(-\infty,1)$ 这个区间，可以通过比较 $f(x_1)$，$f(2-x_2)$ 的大小即可。

$f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上单调递减，所以 $x_1+x_2<2$ 等价于 $f(x_1)>f(2-x_2)$，$f(x_1)=0$，即 $f(2-x_2)<0$。因为

$f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}+a(x_2-1)^2$，而 $f(x_2)=(x_2-2)e^{x_2}+a(x_2-1)^2=0$，所以 $f(2-x_2)=-x_2e^{2-x_2}-(x_2-2)e^{x_2}$。设 $g(x)=-xe^{2-x}-(x-2)e^x$，则 $g'(x)=(x-1)(e^{2-x}-e^x)$。所以当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，而 $g(1)=0$，故当 $x>1$ 时，$g(x)<0$，从而 $g(x_2)=f(2-x_2)<0$，故 $x_1+x_2<2$。

【196】 (1) $a\leqslant e+1$；(2)见提示。提示：(1) $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$，则 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}-\frac{1}{x}+1=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{x-1}{x}=\frac{e^x+x}{x^2}(x-1)$。

由 $x>0$ 可得 $\frac{e^x+x}{x^2}>0$，所以当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，因此 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(1)=e+1-a$，若 $f(x)\geqslant0$，则需 $e+1-a\geqslant0$，即 $a\leqslant e+1$。

(2) 若 $f(x)$有两个零点，则由(1)知需 $e+1-a<0$，即 $a>e+1$。

不妨设 $0<x_1<1<x_2$，要证 $x_1x_2<1$，即需证 $x_1<\frac{1}{x_2}$，而 $x_1,\frac{1}{x_2}\in(0,1)$，且 $f(x)$在$(0,1)$上单调递减，则需证 $f(x_2)=f(x_1)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$。构造函数 $g(x)=f(x)-f\left(\frac{1}{x}\right)(x>1)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)(e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1)}{x^2}$。因为 $x>1$，所以 $xe^{\frac{1}{x}}<ex$，这里使用的是不等式的可乘性，$x>0$，$e^{\frac{1}{x}}<e$，那么 $e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1>e^x+x-ex-1=(e^x-ex)+(x-1)$。

令 $p(x)=e^x-ex(x>1)$，则 $p'(x)=e^x-e$，当 $x>1$ 时，$p'(x)>0$，$p(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增，所以 $p(x)>p(1)=0$，因此当 $x>1$ 时，$e^x+x-xe^{\frac{1}{x}}-1>e^x+x-ex-1=(e^x-ex)+(x-1)>0$，即 $g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，因此有 $g(x)>g(1)=0$，即 $f(x)>f\left(\frac{1}{x}\right)$，所以 $f(x_2)=f(x_1)>f\left(\frac{1}{x_2}\right)$，命题得证。

【197】 见提示。提示：(1) 求出函数的导数，判断其正负可得函数的单调区间。

$f'(x)=1-\ln x-1=-\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，当 $x\in(0,1)$时，$f'(x)>0$；当 $x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$的递增区间为$(0,1)$，递减区间为$(1,+\infty)$。

(2) 通过换元简化结构联系第(1)问。第(1)问多数情况是在为第(2)问做引子和铺垫的。设 $\frac{1}{a}=x_1$，$\frac{1}{b}=x_2$，原不等式等价于 $2<x_1+x_2<e$，这里可构建新函数，通过对称化构造可证。先规整条件以利于我们构造。因为 $b\ln a-a\ln b=a-b$，故 $b(\ln a+1)=a(\ln b+1)$，即 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$。

这个地方务必联系原函数找出等号两边的 y 所对应的 x，故 $f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(\frac{1}{b}\right)$，通过换元简化结构便于证明。故设 $\frac{1}{a}=x_1$，$\frac{1}{b}=x_2$，结合第(1)问数形结合判断出 x_1，x_2 范围。

由(1)知当 $0<x<e$ 时，$f(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f(x)<0$。不妨设 $0<x_1<1<x_2<e$。

① 先证：$x_1+x_2>2$。若 $x_2\geqslant2$，$x_1+x_2>2$ 必成立。

若 $1<x_2<2$，要证 $x_1+x_2>2$，即证 $x_1>2-x_2$，而 $0<2-x_2<1$，$0<x_1<1$。

同一单调区间两个变量的 y 若大小明确，则 x 间的大小也就确定了。

故需证 $f(x_1)>f(2-x_2)$，又 $f(x_1)=f(x_2)$，即证 $f(x_2)>f(2-x_2)$，其中 $1<x_2<2$。

设 $g(x)=f(x)-f(2-x)$，$1<x<2$，则 $g'(x)=f'(x)+f'(2-x)=-\ln x-\ln(2-x)=-\ln[x(2-x)]$。

因为 $1<x<2$，故 $0<x(2-x)<1$，则 $-\ln[x(2-x)]>0$，所以 $g'(x)>0$，故 $g(x)$在$(1,2)$为增函数，所以 $g(x)>g(1)=0$，故 $f(x)>f(2-x)$，即 $f(x_2)>f(2-x_2)$成立，所以 $x_1+x_2>2$ 成立。

② 方法一：再设 $x_2=tx_1$，利用比值代换构造函数，利用导数可证明该结论成立。极值点偏移问题常用方法有对称化构造和比值代换，这里两端证明采用了不同方法，方便读者掌握两种方法。

设 $x_2=tx_1$，则 $t>1$，结合 $\frac{\ln a+1}{a}=\frac{\ln b+1}{b}$，$\frac{1}{a}=x_1$，$\frac{1}{b}=x_2$ 可得 $x_1(1-\ln x_1)=x_2(1-\ln x_2)$，即 $1-\ln x_1=t(1-\ln t-\ln x_1)$，故 $\ln x_1=\frac{t-1-t\ln t}{t-1}$。

要证 $x_1+x_2<e$，即证 $(t+1)x_1<e$，两边取对数，即证 $\ln(t+1)+\ln x_1<1$，即证 $\ln(t+1)+\frac{t-1-t\ln t}{t-1}<1$，即证 $(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$。

令 $h(t)=(t-1)\ln(t+1)-t\ln t(t>1)$，则 $h'(t)=\ln(t+1)+\frac{t-1}{t+1}-1-\ln t=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{2}{t+1}$，通过观察 $\frac{1}{t}$ 与 $\frac{2}{t+1}$ 得分子分母的差都是 1，由糖水不等式可得 $\frac{1}{t}<\frac{2}{t+1}$。

因为 $\frac{1}{t}<\frac{2}{t+1}$，所以 $h'(t)=\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{2}{t+1}<\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}$。设 $q(x)=\ln(x+1)-x$，则 $q'(x)=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$，当 $-1<x<0$ 时，$q'(x)>0$；当 $x>0$ 时，$q'(x)<0$，故 $q(x)$在$(-1,0)$上为增函数，在$(0,+\infty)$上为减函数，则 $q(x)_{\max}=q(0)=0$，故 $\ln(x+1)\leqslant x$ 成立。

由上述不等式可得当 $t>1$ 时，$h'(t)<\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{t}<0$，所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上为减函数，故 $h(t)<h(1)=0$，所以 $(t-1)\ln(t+1)-t\ln t<0$ 成立，即 $x_1+x_2<\mathrm{e}$ 成立。

方法二：因为 $0<x_1<1$，所以 $x_1(1-\ln x_1)>x_1$，又 $x_2(1-\ln x_2)=x_1(1-\ln x_1)$，所以 $x_2(1-\ln x_2)>x_1$，则 $x_2(1-\ln x_2)+x_2>x_1+x_2$，那么要证 $x_1+x_2<\mathrm{e}$，只需证 $x_2(1-\ln x_2)+x_2<\mathrm{e}$。

设 $\varphi(x)=x(1-\ln x)+x(1<x<\mathrm{e})$，则 $\varphi'(x)=1-\ln x>0$，故 $\varphi(x)$ 在 $(1,\mathrm{e})$ 上单调递增，所以 $\varphi(x)<\varphi(\mathrm{e})=\mathrm{e}$，即 $x_1+x_2<\mathrm{e}$。

综上，$2<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}<\mathrm{e}$。

【198】见提示。提示：(1) $f'(x)=\frac{1}{x}-1(x\in(0,+\infty))$，令 $f'(x)=0$，解得 $x=1$。

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减。

(2) 由(1)知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得最大值，最大值为 $f(1)=0$，所以当 $x\neq1$ 时，$\ln x<x-1$；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$\ln x<x-1$，则 $\ln\frac{1}{x}<\frac{1}{x}-1$，即 $\ln x>1-\frac{1}{x}$，故 $1<\frac{x-1}{\ln x}<x$。

(3) 构造新函数要随时根据结构联系前面问题的结果且善用之。

由题意可设 $c>1$，设 $g(x)=1+(c-1)x-c^x$，则 $g'(x)=c-1-c^x\ln c$，令 $g'(x)=0$，解得 $x_0=\dfrac{\ln\frac{c-1}{\ln c}}{\ln c}$。

当 $x<x_0$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增；当 $x>x_0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减。

由(2)知 $1<\frac{c-1}{\ln c}<c$，即 $0<\ln\frac{c-1}{\ln c}<\ln c$，故 $0<x_0<1$，又 $g(0)=g(1)=0$，故当 $0<x<1$ 时，$g(x)>0$，所以当 $x\in(0,1)$ 时，$1+(c-1)x>c^x$。

【199】(1)1；(2)3。提示：(1) $f(x)\geqslant0$，即 $[f(x)]_{\min}=0$，参数不明的单调性是需要分类讨论的。

为什么从 $a\leqslant0$ 开始讨论，是因为 $x-1$ 是增函数，那么若 $-a\ln x$ 是非减函数的话，它们的和是增函数。

① 若 $a\leqslant0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a\ln2<0$，所以不满足题意。

② 若 $a>0$，由 $f'(x)=1-\frac{a}{x}=\frac{x-a}{x}$ 知，当 $x\in(0,a)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 上单调递减，在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，故 $x=a$ 是 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上唯一最小值点。由于 $f(1)=0$，所以当且仅当 $a=1$ 时，$f(x)\geqslant0$，故 $a=1$ 。

(2) 由(1)取 $a=1$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$x-1-\ln x>0$，即 $\ln x<x-1$。

再观察 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<m$，不等式左侧 n 个式子相乘，这些相乘的由来呢？结合着第(1)问得到的结果来看必然是对数相加真数相乘得来的，所以对这个式子左边取对数后问题也就迎刃而解了。

令 $x=1+\frac{1}{2^n}$，得 $\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2^n}$，从 $\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}<1$，故 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<\mathrm{e}$，又 $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\left(1+\frac{1}{2^3}\right)>2$，所以 m 的最小值为 3。

【200】(1) 当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增；(2) $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$；(3) 见提示。

提示：(1) 当 $a=1$ 时，$f(x)=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x=(x-1)\mathrm{e}^x$，$f'(x)=x\mathrm{e}^x$。

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增。

(2) $f(x)<-1$，即 $f(x)+1<0$，记 $g(x)=f(x)+1=x\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x+1$，则 $g(0)=0$，$g'(x)=(1+ax)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x$，$g'(0)=0$。记 $\varphi(x)=g'(x)$，则 $\varphi'(x)=(2a+a^2x)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x$，$\varphi'(0)=2a-1$。

若 $a>\frac{1}{2}$，$\varphi'(0)=2a-1>0$，则存在 $x_0>0$，使得当 $x\in(0,x_0)$，$\varphi'(x)>0$，即 $g'(x)$ 单调递增。

这个 x_0 如何表示呢？当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)=(2a+a^2x)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x>2a\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x>2a-\mathrm{e}^x$，令 $2a-\mathrm{e}^x>0$，解得 $0<x<\ln2a$，当 $x\in(0,\ln2a)$ 时，$\varphi'(x)=(2a+a^2x)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x>2a\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x>2a-\mathrm{e}^x>0$，所以 $g'(x)>g'(0)=0$，$g(x)$ 单调递增，$g(x)>g(0)=0$，不合题意。

若 $a\leqslant\frac{1}{2}$，则 $\varphi'(0)=2a-1\leqslant0$，$g'(x)=(1+ax)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln(1+ax)+ax}-\mathrm{e}^x\leqslant\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^x$。

同底指数作差可以借助指数函数单调性，但需要调整至系数相同，所以这里就需要系数化指数，在用指数作差构造函数判断正负，进而比较指数大小。

记 $\lambda(x)=\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}x-x=\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x$，则 $\lambda'(x)=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{2}=\frac{-x}{2(x+2)}$。

当 $x\in(-2,0)$ 时，$\lambda'(x)>0$，$\lambda(x)$ 单调递增；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\lambda'(x)<0$，$\lambda(x)$ 单调递减，则 $\lambda(x)<\lambda(0)=0$，所以 $\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)-\frac{1}{2}x<0$，即 $\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}x<x$，所以 $g'(x)=(1+ax)\mathrm{e}^{ax}-\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^{\ln(1+ax)+ax}-\mathrm{e}^x<\mathrm{e}^{\ln\left(1+\frac{1}{2}x\right)+\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^x<0$，因此当 $x>0$ 时，$g(x)$ 单调递减，所

以 $g(x)<g(0)=0$，即 $a\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$。

(3) $\ln(n+1)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\cdots\frac{3}{2}\times\frac{2}{1}\right)=\ln\frac{n+1}{n}+\cdots+\ln\frac{3}{2}+\ln 2$，把不等式左右两侧分别看成两个数列的前 n 项和，那么问题就转化为两个通项公式比较大小，但要注意合理使用前一问的结论，即当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^x<-1$，根据两个数列的通项结构令 $\ln\frac{x+1}{x}=x$，可得通项公式大小，进而使用不等式同向可加性证明。若前面没有结论可用，则要考虑根据两个通项公式构造函数比较大小。

由(2)知，当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^x<-1$，即 $x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-\mathrm{e}^x<-1$，那么 $\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x}}-\mathrm{e}^{\ln\frac{x+1}{x}}<-1$，即 $\sqrt{\frac{x+1}{x}}\left(\ln\frac{x+1}{x}\right)-\frac{x+1}{x}<-1$，化简可得 $\sqrt{\frac{1}{x^2+x}}>\ln\frac{x+1}{x}$，则当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\sqrt{\frac{1}{n^2+n}}>\ln\frac{n+1}{n}$，故 $\sqrt{\frac{1}{1^2+1}}>\ln\frac{2}{1}$，$\sqrt{\frac{1}{2^2+2}}>\ln\frac{3}{2}$，…，$\sqrt{\frac{1}{n^2+n}}>\ln\frac{n+1}{n}$，因此 $\sqrt{\frac{1}{1^2+1}}+\sqrt{\frac{1}{2^2+2}}+\cdots+\sqrt{\frac{1}{n^2+n}}>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1)$。

【201】见提示。提示：(1) 求出函数的导数，分类讨论参数判断其正负可得函数的单调区间。

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}-1+\frac{a}{x}=-\frac{x^2-ax+1}{x^2}(x>0)$。

① 若 $a\leqslant 2$，$x^2+1-ax\geqslant 2x-ax=(2-a)x\geqslant 0$，则 $f'(x)\leqslant 0$，当且仅当 $a=2$，$x=1$ 时，$f'(x)=0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

② 若 $a>2$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$ 或 $x=\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$。

当 $x\in\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 和 $\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 时，$f'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 时，$f'(x)>0$。所以 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$，$\left(\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2},+\infty\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2},\frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}\right)$ 上单调递增。

(2) 结合第(1)问判断有两个极值点的参数范围，而且需要结合韦达定理得到两零点的关系。再根据两零点的关系使得两个零点自由转化，便于后面做题减少变量个数，然后按题意一步一步正常操作即可。

由(1)知 $f(x)$ 存在两个极值点当且仅当 $a>2$。

由于 $f(x)$ 的两个极值点 x_1，x_2 满足 $x^2-ax+1=0$，所以 $x_1x_2=1$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $x_2>1$。

因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}=-\frac{1}{x_1x_2}-1+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}=-2+a\frac{-2\ln x_2}{\frac{1}{x_2}-x_2}$，所以 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$ 等价于 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$。设函数 $g(x)=\frac{1}{x}-x+2\ln x(x>1)$，由(1)知 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，又 $g(1)=0$，从而当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)<0$，所以 $\frac{1}{x_2}-x_2+2\ln x_2<0$，即 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<a-2$。

【202】(1) $a=1$；(2) 见提示。提示：(1) $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，若 $a\leqslant 0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，无最小值，故 $a>0$。当 $x\in(-\infty,\ln a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(\ln a,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)_{\min}=f(\ln a)=a-a\ln a$。

$g'(x)=a-\frac{1}{x}$，若 $a\leqslant 0$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，无最小值，故 $a>0$，当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{a}\right)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，所以 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{a}\right)=1+\ln a$。

由题意知 $a-a\ln a=1+\ln a$，即 $\ln a-\frac{a-1}{a+1}=0$。记 $h(a)=\ln a-\frac{a-1}{a+1}(a>0)$，则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{2}{(a+1)^2}=\frac{a^2+1}{a(a+1)^2}>0$，所以 $h(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $h(1)=0$，所以 $a=1$。

(2) 由(1)知 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，$g(x)=x-\ln x$，记 $p(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x+\ln x-2x$，则 $p'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}-2$。

记 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x-x(x>0)$，则 $\varphi'(x)=\mathrm{e}^x-1$，当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$\varphi'(x)>0$，$\varphi(x)$ 单调递增，则 $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，故 $p'(x)=\mathrm{e}^x+\frac{1}{x}-2>x+\frac{1}{x}-2\geqslant 0$，则 $p(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$p(1)=\mathrm{e}-2>0$，$p\left(\frac{1}{3}\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-\ln 3-\frac{2}{3}<\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}-1.6<0$，所以 $\exists x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$，使得 $p(x)=0$，则 $p(x)$ 有唯一零点，即 $f(x)=\mathrm{e}^x-x$，$g(x)=x-\ln x$ 有唯一交点 $x_0\in\left(\frac{1}{3},1\right)$。

当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$f(x)$ 单调递减；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 单调递增。

当 $x\in(-\infty,1)$ 时，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g(x)$ 单调递增。

若 $e^{x_0}-x_0=x_0-\ln x_0=b>1$，通过观察 $f(x)=e^x-x$，$g(x)=x-\ln x$ 可得 $f(\ln x)=g(x)$，$f(x)=g(e^x)$，因为 $f(\ln x)=e^{\ln x}-\ln x=x-\ln x=g(x)$，$g(e^x)=e^x-\ln e^x=e^x-x=f(x)$，所以 $f(\ln x_0)=g(x_0)=f(x_0)=g(e^{x_0})=b$，故这三个交点的横坐标分别为 $\ln x_0$，x_0，e^{x_0}，且 $\ln x_0<x_0<e^{x_0}$，且满足 $e^{x_0}+\ln x_0=2x_0$。故命题得证。

【203】 见提示。提示：(1) ① 首先求得导函数的解析式，然后结合导数的几何意义求解切线方程即可。

当 $k=6$ 时，$f(x)=x^3+6\ln x$，$f'(x)=3x^2+\frac{6}{x}$，可得 $f(1)=1$，$f'(1)=9$，所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=9(x-1)$，即 $y=9x-8$。

② 首先求得 $g'(x)$ 的解析式，然后利用导函数与原函数的关系讨论函数的单调性和函数的极值即可。

由题意知 $g(x)=x^3-3x^2+6\ln x+\frac{3}{x}$，$x\in(0,+\infty)$，则 $g'(x)=3x^2-6x+\frac{6}{x}-\frac{3}{x^2}=\frac{3(x-1)^3(x+1)}{x^2}$。令 $g'(x)=0$，解得 $x=1$。当 x 变化时，$g'(x)$，$g(x)$ 的变化情况如下表所示：

x	$(0,1)$	$x=1$	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以，函数 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，$g(x)$ 的极小值为 $g(1)=1$，无极大值。

(2) 由 $f(x)=x^3+k\ln x$ 得 $f'(x)=3x^2+\frac{k}{x}$。任取 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，则 $(x_1-x_2)(f'(x_1)+f'(x_2))-2(f(x_1)-f(x_2))=(x_1-x_2)\left(3x_1^2+\frac{k}{x_1}+3x_2^2+\frac{k}{x_2}\right)-2\left(x_1^3-x_2^3+k\ln\frac{x_1}{x_2}\right)=x_1^3-x_2^3-3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+k\left(\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}\right)-2k\ln\frac{x_1}{x_2}$，令 $\frac{x_1}{x_2}=t\ (t>1)$，则上式 $=x_2^3(t^3-3t^2+3t-1)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)$①。

令 $h(x)=x-\frac{1}{x}-2\ln x$，$x\in[1,+\infty)$。当 $x>1$ 时，$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^2>0$，由此可得 $h(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增，所以当 $t>1$ 时，$h(t)>h(1)$，即 $t-\frac{1}{t}-2\ln t>0$。因为 $x_2\geqslant1$，$t^3-3t^2+3t-1=(t-1)^3>0$，又 $k\geqslant-3$，故 $x_2^3(t^3-3t^2+3t-1)+k\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)\geqslant(t^3-3t^2+3t-1)-3\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)=t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1$②。

在解决导数问题的时候要能关联前后问题，前面的结论可服务于后面的问题。

由(1)②知，当 $t>1$ 时，$g(t)>g(1)$，即 $t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}>1$，故 $t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1>0$③，由①②③可得 $(x_1-x_2)(f'(x_1)+f'(x_2))-2(f(x_1)-f(x_2))>0$。所以，当 $k\geqslant-3$ 时，对任意的 x_1，$x_2\in[1,+\infty)$，且 $x_1>x_2$，有 $\frac{f'(x_1)+f'(x_2)}{2}>\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$。

【204】 证明：(1) $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$，由 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 得 $\frac{1}{2\sqrt{x_1}}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2\sqrt{x_2}}-\frac{1}{x_2}$。

因为 $x_1\neq x_2$，所以 $\frac{1}{\sqrt{x_1}}+\frac{1}{\sqrt{x_2}}=\frac{1}{2}$，由基本不等式得 $\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\geqslant2\sqrt[4]{x_1x_2}$。因为 $x_1\neq x_2$，所以 $x_1x_2>256$。

根据 $f'(x_1)=f'(x_2)$ 得到了 x_1，x_2 的关系和范围，进而构造新函数判断单调性，求最值证明结论即可。

$f(x_1)+f(x_2)=\sqrt{x_1}-\ln x_1+\sqrt{x_2}-\ln x_2=\frac{1}{2}\sqrt{x_1x_2}-\ln(x_1x_2)$。

设 $g(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x}-\ln x$，则 $g'(x)=\frac{1}{4x}(\sqrt{x}-4)$，所以有下表：

x	$(0,16)$	16	$(16,+\infty)$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘	$2-4\ln2$	↗

因此，$g(x)$ 在 $[256,+\infty)$ 上单调递增，故 $g(x_1x_2)>g(256)=8-8\ln2$，即 $f(x_1)+f(x_2)>8-8\ln2$。

(2) 由 $f(x)=kx+a$ 得 $k=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}$。令 $h(x)=\frac{\sqrt{x}-\ln x-a}{x}-k$，则 $h'(x)=\frac{\ln x-\frac{\sqrt{x}}{2}-1+a}{x^2}=\frac{-g(x)-1+a}{x^2}$，其中 $g(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}-\ln x$。

由(1)知 $g(x)\geqslant g(16)=2-4\ln2$，又 $a-g(x)-1\leqslant3-4\ln2-g(x)-1=0$，所以 $h'(x)\leqslant0$，即函数 $h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减。

单调且有正负才能有零点，那么正负的这两个点如何取呢？假设存在 m，n 使得 $h(m)>0$，$h(n)<0$，则由零点存在定理知 $\exists x_0\in(m,n)$，满足 $h(x_0)=0$。关键是如何找点，找点也着实不容易，光是参数就有 2 个，且 a 的正负不明，但正负不明的问题，通常可以一个绝对值可以直接限制非负

了，且$\sqrt{x}$是正的，那么就以 1 为界限开始找，因为 ln1 左负右正，在>，<的时候可以放缩舍弃。当$m<1$时，$km<k$，其实可以不用可以考虑$\sqrt{x}$，$h(m)=\frac{\sqrt{m}-\ln m-a}{m}-k>\frac{-\ln m-a-km}{m}\geqslant\frac{-\ln m-|a|-k}{m}$，令$-\ln m-k-|a|=0$，得$m=\mathrm{e}^{-(|a|+k)}$，则$h(\mathrm{e}^{-(|a|+k)})>0$。

当$n>1$时，$\sqrt{n}>1$，$\ln n>0$，$|a|\geqslant a$，$|a|\geqslant -a$，$|a|\sqrt{n}\geqslant|a|$，$h(n)=\frac{\sqrt{n}-\ln n-a}{n}-k<\frac{\sqrt{n}-a-kn}{n}\leqslant\frac{\sqrt{n}+|a|-kn}{n}\leqslant\frac{\sqrt{n}+|a|\sqrt{n}-kn}{n}=\frac{\sqrt{n}(1+|a|)-kn}{n}$。

令$\sqrt{n}(1+|a|)-kn=0$，得$n=\left(\frac{1+|a|}{k}\right)^2$，但$n=\left(\frac{1+|a|}{k}\right)^2$是否大于 1 我们不清楚，为了保证$n>1$，故取$n=\left(\frac{1+|a|}{k}\right)^2+1$，则$h\left(\left(\frac{1+|a|}{k}\right)^2+1\right)<0$，取$m=\mathrm{e}^{-(|a|+k)}$，$n=\left(\frac{1+|a|}{k}\right)^2+1$，则$h(m)=\frac{\sqrt{m}-\ln m-a}{m}-k>\frac{-\ln m-a-km}{m}\geqslant\frac{-\ln m-|a|-k}{m}=0$，$h(n)=\frac{\sqrt{n}-\ln n-a}{n}-k<\frac{\sqrt{n}-a-kn}{n}\leqslant\frac{\sqrt{n}+|a|-kn}{n}\leqslant\frac{\sqrt{n}+|a|\sqrt{n}-kn}{n}=\frac{\sqrt{n}(1+|a|)-kn}{n}$，故存在唯一$x_0\in\left(\mathrm{e}^{-(|a|+k)},\left(\frac{1+|a|}{k}\right)^2+1\right)$，使得$h(x_0)=0$。

综上，当$a\leqslant 3-4\ln 2$时，对于任意$k>0$，直线$y=kx+a$与曲线$y=f(x)$有唯一公共点。

第 3 章　不等式

3.1　基本不等式

【205】①③⑤。提示：解决此题，公式记忆很关键，别忘了"若$a>0,b>0$，则$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$"这个结论哦！

①：由$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$得$\sqrt{ab}\leqslant 1$，即$ab\leqslant 1$，当且仅当$a=b=1$时取"="，故①正确。

②：由$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$得$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\leqslant\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}=1$，即$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant 2$，当且仅当$a=b=1$时取"="，故②错误。

③：由$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$得$1=\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$，即$a^2+b^2\geqslant 2$，当且仅当$a=b=1$时取"="，故③正确。

④：对于a^3+b^3，先利用立方和公式展开得$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$，而$(a+b)(a^2-ab+b^2)=2(a^2-ab+b^2)\geqslant 2(2ab-ab)=2ab$，由①知$0<ab\leqslant 1$，那么$2ab$无最小值，不能得到$a^3+b^3\geqslant 3$，故④错误。

⑤：由$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\frac{a+b}{2}$可得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geqslant 2$，当且仅当$a=b=1$时取"="，故⑤正确。

故选①③⑤。

当然本题也可以通过取特值$a=b=1$来检验，虽说捷径好，但所有捷径还是需要有大智慧压阵。

【206】BC。提示：方法一：因为$x^2+y^2-xy=1$，所以$x^2+y^2=1+xy\leqslant 1+\frac{x^2+y^2}{2}$，即$\frac{x^2+y^2}{2}\leqslant 1$(当且仅当$x=y=\pm 1$时取=)，化简可得$x^2+y^2\leqslant 2$，所以 C 正确。

而$(x+y)^2=1+3xy\leqslant 1+3\times\frac{(x+y)^2}{4}$，即$(x+y)^2\leqslant 4$，解得$-2\leqslant x+y\leqslant 2$。

当且仅当$x=y=1$时，$x+y=2$，当且仅当$x=y=-1$时，$x+y=-2$，所以 B 正确。

或使用根的判别式：令$x+y=t$，则$y=t-x$，代入$x^2+y^2-xy=1$得$x^2+(t-x)^2-x(t-x)=1$，化简得$3x^2-3tx+t^2-1=0$，由$\Delta=(-3t)^2-12(t^2-1)\geqslant 0$，解得$-2\leqslant t\leqslant 2$，所以 B 正确。故选 BC。

方法二：$x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{2}\right)^2=1$，令$x-\frac{y}{2}=\cos\theta$，$\frac{\sqrt{3}y}{2}=\sin\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$，则$x=\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$，$y=\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}$，那么$x+y=\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}+\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$，所以$-2\leqslant x+y\leqslant 2$，因此 B 正确。

$x^2+y^2=\left(\cos\theta+\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{2\sin\theta}{\sqrt{3}}\right)^2=\cos^2\theta+\frac{5\sin^2\theta}{3}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{3}}=\frac{\sin 2\theta}{\sqrt{3}}-\frac{\cos 2\theta}{3}+\frac{4}{3}=\frac{2}{3}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{4}{3}$，所以$\frac{2}{3}\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，所以 C 正确。故选 BC。

【207】4。提示：条件是乘积，等式也是乘积，我们知道同底对数能加，但是相乘没有公式呀！

那怎么办？对了，乘积与和式可通过基本不等式联系起来。但基本不等式的使用有个前提是"为正"，那怎么办？题目说的是$\log_2 a\cdot\log_2(2b)$取得最大值，那么$\log_2 a$与$\log_2(2b)$肯定得同号且为正，为什么？因为在$a>0,b>0$，$ab=8$的前提下，要么各自均大于 1，要么一个大于 1，一个小于 1，显然均大于 1 才能同号且为正的。

于是，我们可以判定$\log_2 a>0$，$\log_2(2b)>0$，那么$\log_2 a\cdot\log_2(2b)\leqslant\left[\frac{\log_2 a+\log_2(2b)}{2}\right]^2=\frac{\log_2^2(a\cdot 2b)}{4}=4$。什么时候能取到最大值 4 呢？当然是$\log_2 a=$