# 第 5 章 Chapter 5

# 连续时间 LTI 系统的时域分析

## 5.1 实验目的

- 学会运用 MATLAB 符号求解连续系统的零输入响应和零状态响应；
- 学会运用 MATLAB 数值求解连续系统的零状态响应；
- 学会运用 MATLAB 求解连续系统的冲激响应和阶跃响应；
- 学会运用 MATLAB 卷积积分法求解系统的零状态响应。

## 5.2 实验原理及实例分析

### 5.2.1 连续时间系统零输入响应和零状态响应的符号求解

LTI 连续系统可用线性常系数微分方程来描述，即

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{M} b_j f^{(j)}(t)$$

其中，$a_i(i=0,1,\cdots,N)$和 $b_j(j=0,1,\cdots,M)$为实常数。该系统的完全响应由零输入响应和零状态响应两部分组成。零输入响应是指输入信号为零，仅由系统的起始状态作用所引起的响应，通常用 $y_{zi}(t)$表示；零状态响应是指系统在起始状态为零的条件下，仅由激励信号作用所引起的响应，通常用 $y_{zs}(t)$表示。

MATLAB 符号工具箱提供了 dsolve 函数，可实现常系数微分方程的符号求解，其调用格式为

```
dsolve('eq1,eq2,...','cond1,cond2,...','v')
```

其中，参数 eq1，eq2，…表示各微分方程，它与 MATLAB 符号表达式的输入基本相同，微分或导数的输入使用 diff 函数定义；参数 cond1，cond2，…表示各初始条件或起始条件；参数 $v$ 表示自变量，默认为变量 $t$。可利用 dsolve 函数来求解系统微分方程的零输入响应和零状态响应，进而求出完全响应。

**【实例 5-1】** 试用 MATLAB 命令求齐次微分方程 $y'''(t)+2y''(t)+y'(t)=0$ 的零输入响应，已知起始条件为 $y(0_-)=1, y'(0_-)=1, y''(0_-)=2$。

**解**：MATLAB 源程序为

```
syms y(t);
Dy=diff(y,t);                                  %一阶导数
D2y=diff(y,t,2);                               %二阶导数
D3y=diff(y,t,3);                               %三阶倒数
eq=D3y+2*D2y+Dy==0;                            %定义符号微分方程表达式
cond=[y(0)==1,Dy(0)==1,D2y(0)==2];             %初始条件
ans=dsolve(eq,cond);
simplify(ans)
```

运行结果为

```
ans=
    5-3*t*exp(-t)-4*exp(-t)
```

在求解该微分方程的零输入响应过程中，$0_-$ 到 $0_+$ 是没有跳变的，因此，程序中初始条件选择 $t=0$ 时刻，即 cond=[y(0)==1,Dy(0)==1,D2y(0)==2]。

**【实例 5-2】** 已知输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$，试用 MATLAB 命令求解微分方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x(t)$的零状态响应。

**解**：依题意，可理解为求解给定的两个方程，即

$$\begin{cases} y''(t)+5y'(t)+6y(t)=3x(t) \\ x(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t) \end{cases}$$

其 MATLAB 源程序为

```
syms y(t) x(t);
D2y=diff(y,t,2);
Dy=diff(y,t);
eq=D2y+5*Dy+6*y(t)==3*exp(-t)*heaviside(t);     %定义符号微分方程表达式
cond=[y(-0.001)==0,Dy(-0.001)==0];              %起始条件
ans=dsolve(eq,cond);simplify(ans)
```

运行结果为

```
ans=
    (3*exp(-3*t)*(exp(t)-1)^2*(sign(t)+1))/4
```

使用 dsolve 求解零状态响应和零输入响应时，起始条件的时刻是不同的，不能选择 $t=0$ 时刻，程序中选择了 $t=-0.01$ 时刻。如果用 cond=[y(0)==0,Dy(0)==0]定义起始条件，则实际上是定义了初始条件 $y(0_+)=0$，$y'(0_+)=0$，因此，得出错误的结论。

**【实例 5-3】** 试用 MATLAB 命令求解微分方程 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=x'(t)+3x(t)$，当输入 $x(t)=\mathrm{e}^{-3t}u(t)$，起始条件为 $y(0_-)=1$、$y'(0_-)=2$ 时系统的零输入响应，零状态响应及完全响应。

**解**：求得零输入和零状态响应后，完全响应则为二者之和。MATLAB 源程序为

```
syms y(t) x(t);
D2y=diff(y,t,2);
```

```
Dy=diff(y,t);
Dx=diff(x,t);
eq=D2y+3*Dy+2*y(t)==0;                    %齐次解求零输入响应
cond=[y(0)==1,Dy(0)==2];
yzi=dsolve(eq,cond);
yzi=simplify(yzi)
eq1=D2y+3*Dy+2*y(t)==Dx+3*x(t);           %零状态响应求解
eq2=x(t)==exp(-3*t)*heaviside(t);
cond=[y(-0.001)==0,Dy(-0.001)==0];        %起始条件
yzs=dsolve(eq1,eq2,cond);
yzs=simplify(yzs.y)
yt=simplify(yzi+yzs)
```

运行结果为

```
yzi=
    exp(-2*t)*(4*exp(t)-3)
yzs=
   (exp(-2*t)*(exp(t)-1)*(sign(t)+1))/2
yt=
    exp(-2*t)*(4*exp(t)-3)+(exp(-2*t)*(exp(t)-1)*(sign(t)+1))/2
```

须注意本例中 dsolve 求解零状态响应的解是一个 struct 数据类型，利用 yzs.y 取出响应。此外，运算结果中出现“(sign(t)+1)/2”，实际上就是单位阶跃信号，符号函数的运算结果，有时会出现不太符合习惯的表达形式，但是结果都是正确的。

利用符号求解出的零输入响应、零状态响应及完全响应后，可利用 fplot 命令绘出它们的波形，以便观察。例如，可以分别绘出实例 5-3 的零输入响应、零状态响应及完全响应，其 MATLAB 源程序为

```
subplot(311);
fplot(yzi,[0,8]);grid on;
title('零输入响应');
subplot(312);
fplot(yzs,[0,8]);grid on;
title('零状态响应');
subplot(313);
fplot(yt,[0,8]);grid on;
title('完全响应');
```

注意，程序中绘图的时间区间一定要 $t>0$。本程序中取[0,8]。程序运行后结果如图 5-1 所示。

### 5.2.2 连续时间系统零状态响应的数值求解

前面叙述了符号求解系统微分方程的方法，实际工程中用得较多的方法是数值求解微分方程。下面主要讨论零状态响应的数值求解。零输入响应的数值求解可通过 initial

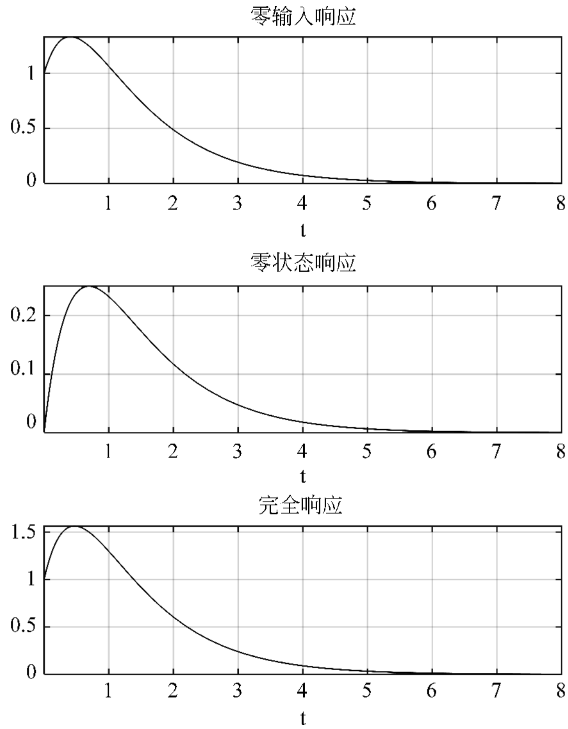


**图 5-1 实例 5-3 系统的响应**

函数实现。initial 函数中的参量必须是状态变量所描述的系统模型,此处不作说明。对于零状态响应,MATLAB 控制系统工具箱提供了对 LTI 系统的零状态响应进行数值仿真的函数 lsim,该函数可求解零初始条件下微分方程的数值解,语句格式为

```
y=lsim(sys,u,t)
```

其中,***t*** 表示计算系统响应的时间抽样点向量;***u*** 是系统的输入信号向量;sys 表示 LTI 系统模型,用来表示微分方程、差分方程或状态方程。在求微分方程时,sys 是由 MATLAB 的 tf 函数根据微分方程系数生成的系统函数对象,其语句格式为

```
sys=tf(b,a)
```

其中,***b*** 和 ***a*** 分别为微分方程右端和左端的系数向量。例如,对于微分方程

$$a_3 y'''(t)+a_2 y''(t)+a_1 y'(t)+a_0 y(t)=b_3 f'''(t)+b_2 f''(t)+b_1 f'(t)+b_0 f(t)$$

可用 $\boldsymbol{a}=[a_3,a_2,a_1,a_0]$;$\boldsymbol{b}=[b_3,b_2,b_1,b_0]$;sys=tf(b,a)获得其 LTI 模型。注意,如果微分方程的左端或右端表达式中有缺项,则其向量 ***a*** 或 ***b*** 中的对应元素应为零,不能省略不写,否则会出错。

**【实例 5-4】** 已知某 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+5y'(t)+6y(t)=6f(t)$$

其中,$f(t)=10\sin(2\pi t)u(t)$。试用 MATLAB 命令绘出 $0\leqslant t\leqslant 5$ 范围内系统零状态响应 $y(t)$ 的波形。

**解**：MATLAB源程序为

```
ts=0;te=5;dt=0.01;
sys=tf(6,[1,5,6]);
t=ts:dt:te;
f=10*sin(2*pi*t).*uCT(t);
y=lsim(sys,f,t);
plot(t,y);grid on;
xlabel('Time(sec)');ylabel('y(t)');
title('zero state response');
```

其响应波形如图5-2所示。

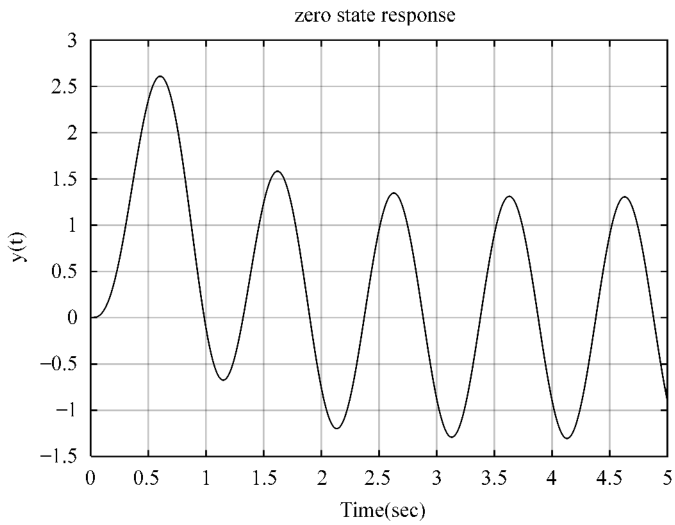


**图5-2 实例5-4系统的零状态响应**

**【实例5-5】** 试用MATLAB数值求解实例5-3中系统的零状态响应。

**解**：MATLAB源程序为

```
ts=0;te=8;dt=0.01;
sys=tf([1,3],[1,3,2]);
t=ts:dt:te;
f=exp(-3*t).*uCT(t);
y=lsim(sys,f,t);
plot(t,y);grid on;
axis([0 8 -0.02 0.27]);
xlabel('Time(sec)');ylabel('y(t)');
title('zero state response');
```

在MATLAB数值求解的方法中，激励信号的运算用到了前面定义的阶跃信号uCT函数，并且采用的是点乘运算。程序运行结果如图5-3所示，与图5-1中的零状态响应相比，不难发现，它们的结果相同。

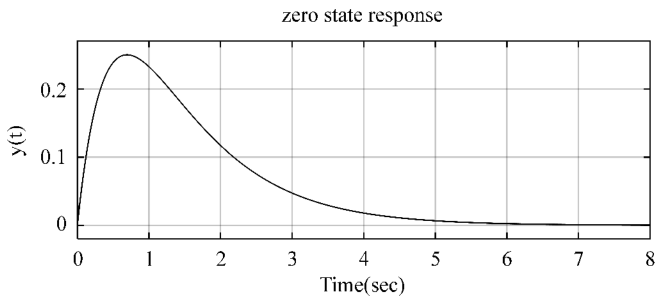


**图 5-3　数值解法求解零状态响应**

## 5.2.3　连续时间系统冲激响应和阶跃响应的求解

在连续时间 LTI 系统中，冲激响应和阶跃响应是系统特性的描述，对它们的分析是线性系统中极为重要的问题。输入为单位冲激函数 $\delta(t)$ 所引起的零状态响应称为单位冲激响应，简称为冲激响应，用 $h(t)$ 表示；输入为单位阶跃函数 $u(t)$ 所引起的零状态响应，称为单位阶跃响应，简称阶跃响应，用 $g(t)$ 表示。

在 MATLAB 中，对于连续 LTI 系统的冲激响应和阶跃响应的数值解，可分别用控制系统工具箱提供的函数 impulse 和 step 来求解。其语句格式分别为

```
y=impulse(sys,t)
y=step(sys,t)
```

其中，$t$ 表示计算系统响应的时间抽样点向量，sys 表示 LTI 系统模型。

**【实例 5-6】**　已知某 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+2y'(t)+32y(t)=f'(t)+16f(t)$$

试用 MATLAB 命令绘出 $0\leqslant t\leqslant 4$ 范围内系统的冲激响应 $h(t)$ 和阶跃响应 $g(t)$。

**解**：MATLAB 源程序为

```
t=0:0.001:4;
sys=tf([1,16],[1,2,32]);
h=impulse(sys,t);                    %冲激响应
g=step(sys,t);                       %阶跃响应
subplot(211);
plot(t,h);grid on;
xlabel('Time(sec)'),ylabel('h(t)');
title('impulse response');
subplot(212);
plot(t,g);grid on;
xlabel('Time(sec)');ylabel('g(t)');
title('step response');
```

其响应波形如图 5-4 所示。

## 5.2.4　利用卷积积分法求系统的零状态响应

由卷积积分公式可以得出，LTI 系统对于任意输入信号的零状态响应，可由系统的

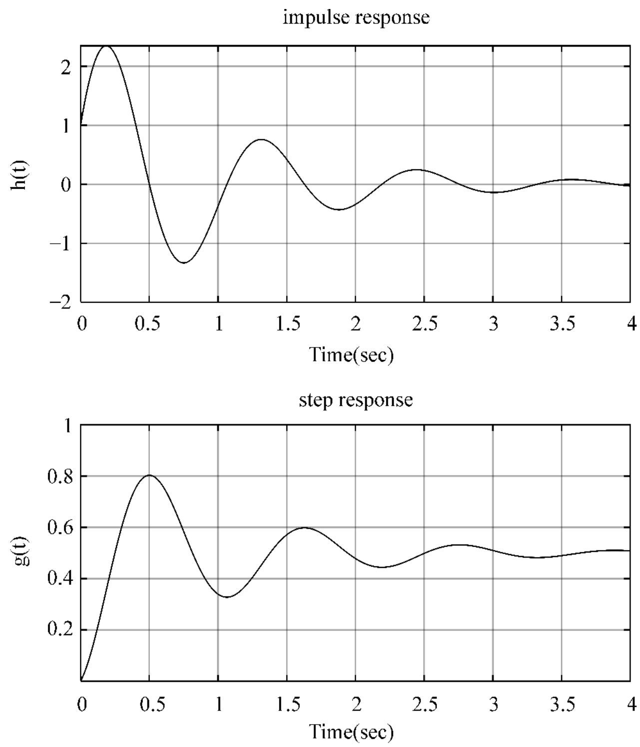


图 5-4　实例 5-6 的冲激响应和阶跃响应

单位冲激响应与输入信号的卷积积分得到。卷积积分提供了求系统零状态响应的另一途径,利用 MATLAB 可以方便计算。卷积积分还是联系时域和频域的基本概念,建立了信号与系统的时域和频域之间的关系,同时将系统分析的时域方法、傅里叶变换方法和拉普拉斯变换方法统一起来。

**【实例 5-7】** 已知某 LTI 系统的微分方程为

$$y''(t)+2y'(t)+32y(t)=f'(t)+16f(t)$$

其中,$f(t)=e^{-2t}$。试利用 MATLAB 卷积积分法绘出系统零状态响应 $y(t)$的波形。

**解**:利用卷积积分法求解。从实例 5-6 中可以看出,系统的冲激响应 $h(t)$并不是时限信号,且激励信号 $f(t)$也不是时限信号,可设置一定的时间范围使 $f(t)$和 $h(t)$衰减到足够小,从而近似地求出零状态响应。本例中取 $t=[0,4]$。MATLAB 源程序为

```
dt=0.01;t1=0:dt:4;
f1=exp(-2*t1);
t2=t1;
sys=tf([1,16],[1,2,32]);
f2=impulse(sys,t2);
[t,f]=ctsconv(f1,f2,t1,t2,dt);
```

程序运行结果如图 5-5 所示,程序中调用了第 4 章提到的 ctsconv 函数。

也可以用前面提到的 lsim 函数来求解,MATLAB 源程序为

```
ts=0;te=4;dt=0.01;
sys=tf([1,16],[1,2,32]);
t=ts:dt:te;
```

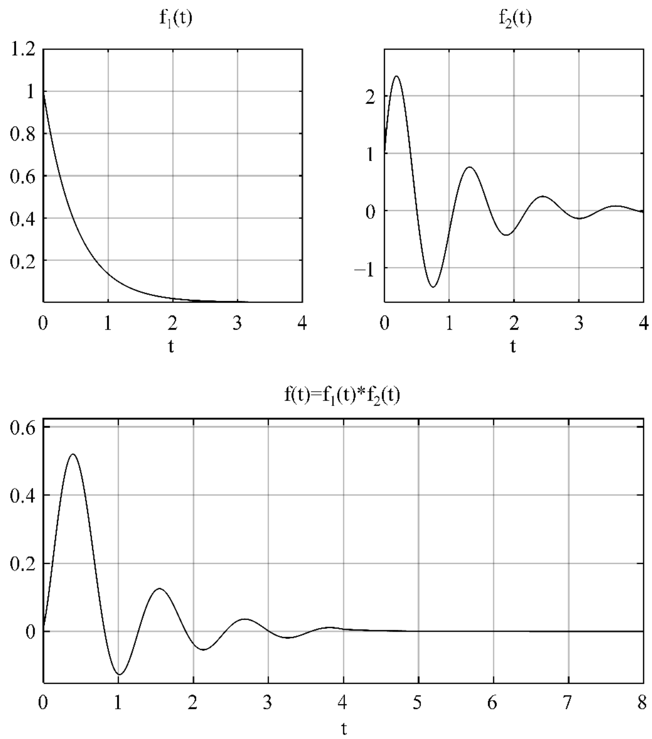


**图 5-5 卷积积分法求解零状态响应**

```
f=exp(-2*t1);
y=lsim(sys,f,t);
plot(t,y);grid on;xlabel('Time(sec)');ylabel('y(t)');title('zero state
response');
```

程序运行结果如图 5-6 所示,与图 5-5 比较可知,通过卷积积分法计算零状态响应,其结果与直接计算的结果相同。

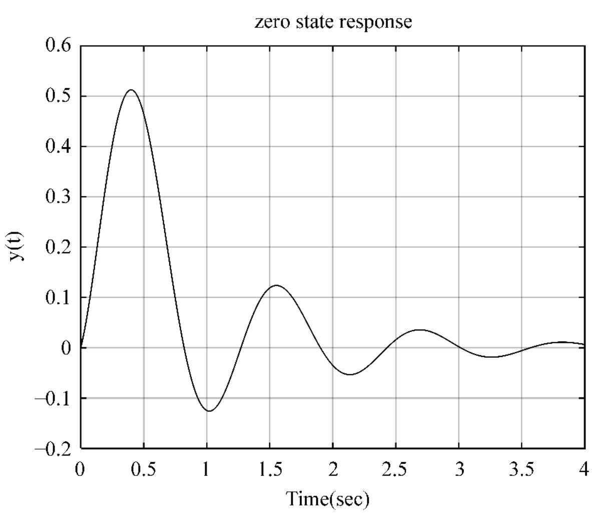


**图 5-6 直接数值解法求解零状态响应**

## 5.3 编程练习

1. 已知系统的微分方程和激励信号 $f(t)$ 如下，试用 MATLAB 命令绘出系统零状态响应的时域仿真波形。

(1) $y''(t)+4y'(t)+3y(t)=f(t)$，$f(t)=u(t)$；

(2) $y''(t)+4y'(t)+4y(t)=f'(t)+3f(t)$，$f(t)=\mathrm{e}^{-t}u(t)$。

2. 已知系统的微分方程如下，试用 MATLAB 命令求系统冲激响应和阶跃响应的数值解，并绘出系统冲激响应和阶跃响应的时域波形。

(1) $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f(t)$；

(2) $y''(t)+2y'(t)+2y(t)=f'(t)$。