

计算机控制系统设计,是指在给定系统性能指标的条件下,设计出数字控制器的控制规律和相应的控制算法(Control Algorithm)。本章主要介绍计算机控制系统的常规及复杂控制技术。常规控制技术介绍数字控制器的连续化设计技术和离散化设计技术,并分别以数字 PID 控制器和最少拍控制器为例来具体阐述;复杂控制技术介绍纯滞后系统控制、串级控制、前馈-反馈控制、解耦控制等技术。对大多数系统,采用常规控制技术均可达到满意的控制效果,但对于复杂及有特殊控制要求的系统,采用常规控制技术难以达到目的,在这种情况下,则需要采用复杂控制技术,甚至采用智能控制等技术。

### 3.1 计算机控制系统的性能指标

自动控制理论的核心问题是系统的建模、控制与优化。控制系统的基本要求是稳、快、准,即系统运行的稳定性、响应动作的快速性、跟踪精度的准确性,还要求具有抗扰性、鲁棒性、灵敏性、经济性、安全性等,并解决控制受限和参数饱和等问题。

控制系统的设计问题由三个基本要素组成,即模型、指标和容许控制,三者缺一不可。性能指标随设计方法的不同而不同,最常见的有时域指标、频域指标、零极点分布及二次型积分指标等。另外对于跟踪系统和调节系统,性能指标的要求也不相同。计算机控制系统的结构如图 3-1 所示。

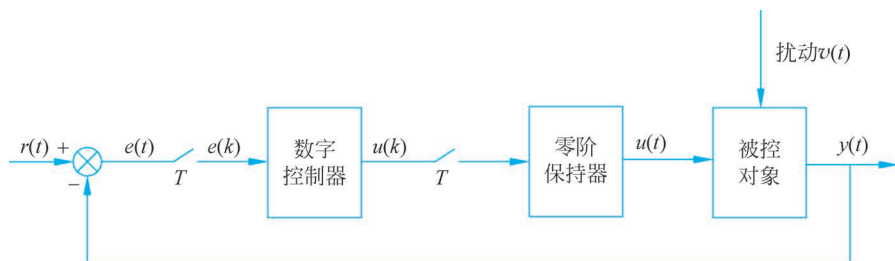


图 3-1 计算机控制系统的结构

#### 3.1.1 稳态性能指标

在输入的作用下,控制系统的输出响应在过渡过程结束后的变化形态称为稳态(静态)。稳态误差是期望的稳态输出量与实际的稳态输出量之差。控制系统的稳态误差越小说明控制精度越高。

稳态误差是衡量控制系统精度的重要标志,它表明了控制系统的准确程度。不稳定的系统不能实现稳态,因此也就谈不上稳态误差。对于连续系统,稳态误差可以用基于拉普拉斯变换的终值定理求得。对于离散系统,稳态误差可以用基于 $z$ 变换的终值定理求得。

### 3.1.2 动态性能指标

在输入的作用下,控制系统的输出响应由初始状态到最终稳态的过渡过程(中间变化过程)称为动态(暂态)。动态性能指标有很多种表示方式。

对于连续系统,最常见的时域指标有超调量 $\sigma\%$ 、调整时间(过渡过程时间) $t_s$ 、峰值时间 $t_p$ 、上升时间 $t_r$ 等。动态性能指标有时也用闭环系统零极点的分布,尤其是用主导极点表示。

对于离散系统,也有相应的几种表示方式。人们对于性能指标与连续系统之间的关系较为熟悉,因此常常首先提出对于连续系统的性能指标要求,然后再根据 $z = e^{Ts}$ 的映射关系,将其变换到相应的离散系统。

### 3.1.3 抗扰性

为了讨论抗干扰(如负载扰动)性能,在图3-1中,令输入 $r(t)=0$ ,扰动为 $v(t)$ 。这时可以求得误差的 $z$ 变换为

$$E(z) = \frac{V(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (3-1)$$

如果在某个频率范围内有 $D(z)G(z) \gg 1$ (一般情况下,低频段都能满足这个要求),那么式(3-1)可化简为

$$E(z) \approx \frac{V(z)}{D(z)} \quad (3-2)$$

如果在同一频率范围内 $D(z)$ 有较高的增益,则系统对这个频率范围的干扰有较好的抑制作用。如果 $D(z)$ 中包含积分环节,即 $D(z)$ 中有 $z=1$ 的极点,对于恒定干扰(即 $\omega=0, z=1$ ),这时有 $D(1) \rightarrow \infty$ ,由式(3-2), $E(1)=0$ 。也就是说,这时该系统可以完全抑制恒定的干扰,对于低频干扰则具有较好的抑制作用。

如果在某个频段内(通常是高频段)有 $D(z)G(z) \ll 1$ ,那么式(3-1)可以化简为

$$E(z) \approx V(z)G(z) \quad (3-3)$$

此时若 $G(z)$ 也较小,则在该频段内干扰对系统的影响也较小。

### 3.1.4 鲁棒性

控制系统的参数发生变化时,要求控制系统的性能变化不大,即要求控制系统的性能对系统参数的灵敏度较低。若控制系统对系统参数的灵敏度较低,则称系统具有很好的鲁棒性(Robustness)。

控制系统参数的变化有两方面:一方面是被控对象参数的变化;另一方面是控制器参数的变化。这两方面的参数变化对系统性能的影响需要分别加以讨论。

若被控对象的参数变化能够被一局部反馈回路所包围,则该局部回路开环增益越大,参数变化的影响便越小。因被控对象参数的变化一般比较缓慢,故可将其看作某种形式的低频干扰。根据对干扰性能的分析结果,若在此干扰加入点之前有较高的低频增益(如有积分

环节), 则该参数变化对系统性能的影响较小。

控制器参数变化的灵敏度可有很多应用。例如, 通过对控制器参数灵敏度的研究, 可以舍弃一些对控制系统性能影响很小的控制器参数, 从而简化控制器结构。

### 3.1.5 控制受限

为了达到同样的响应性能, 控制作用越小越好。因此, 控制作用的大小也是衡量系统性能的一方面。换句话说, 施加同样大小的控制作用, 希望系统能获得尽量好的响应性能。对于实际的系统, 控制作用总是受到一定的限制。因此设计系统时应考虑控制作用的限制条件。在实际系统中, 对控制作用的限制通常有以下 3 种情况。

(1) 控制量的幅度受到限制, 即  $|u| \leq U_m$ 。这是最经常碰到的情况, 如放大器的饱和, 阀门的全开或全关等。

(2) 控制能量受到限制, 即  $\int_0^{\infty} u^2 dt \leq J_1$ 。例如当用电机驱动负载时, 控制能量的大小将直接影响电机发热的程度, 因此需对控制能量加以限制。

(3) 消耗的燃料受到限制, 即  $\int_0^{\infty} |u| dt \leq J_2$ 。在飞行器的控制中, 控制量常常有这样的限制。

在常规的设计方法中, 开始一般难以考虑这些关于控制作用的限制条件, 但是在设计完成后, 一定要校验这些限制条件, 若不能满足要求, 则需要重新修改设计。而在有些设计方法中, 如最优控制的设计, 则在设计的一开始便将控制作用的限制条件作为性能指标的一部分, 或者将它们作为寻求最优控制的约束条件而加以考虑。

## 3.2 数字控制器的连续化设计技术

数字控制器的连续化设计是忽略控制回路中所有的零阶保持器和采样器, 在  $s$  域中按连续系统进行初步设计, 求出连续控制器, 然后通过某种近似, 将连续控制器离散化为数字控制器, 并由计算机来实现。由于广大工程技术人员对  $s$  平面比对  $z$  平面更为熟悉, 因此数字控制器的连续化设计技术被广泛采用。

### 3.2.1 数字控制器的连续化设计步骤

在图 3-2 所示的计算机控制系统中,  $G(s)$  是被控对象的传递函数,  $G_h(s)$  是零阶保持器,  $D(z)$  是数字控制器,  $T$  是采样周期。需根据已知的系统性能指标和  $G(s)$  来设计数字控制器  $D(z)$ 。

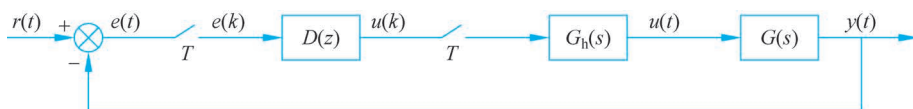


图 3-2 计算机控制系统的结构

#### 1. 设计假想的连续控制器 $D(s)$

由于人们对连续系统的设计方法比较熟悉, 因此, 可先对图 3-3 所示的假想的连续控制

系统进行设计,如利用连续系统的二阶工程设计法、频率特性法、根轨迹法等设计假想的连续控制器  $D(s)$ 。关于连续系统设计  $D(s)$  的各种方法可参考有关自动控制原理方面的资料,这里不做讨论。

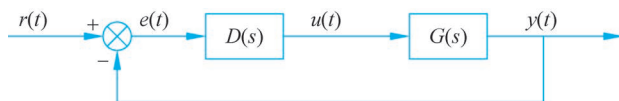


图 3-3 假想的连续控制系统的结构

## 2. 选择采样周期 $T$

香农采样定理给出了从采样信号中恢复连续信号的最低采样频率。在计算机控制系统中,完成信号恢复功能一般由零阶保持器  $G_h(s)$  来实现。零阶保持器的传递函数为

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (3-4)$$

其频率特性为

$$G_h(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} \angle -\frac{\omega T}{2} \quad (3-5)$$

从上式可以看出,零阶保持器将对控制信号产生附加相移(滞后)。对于小的采样周期  $T$ ,可把零阶保持器  $G_h(s)$  近似为

$$\begin{aligned} G_h(s) &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \approx \frac{1 - 1 + sT - \frac{(sT)^2}{2} + \dots}{s} \\ &= T \left( 1 - s \frac{T}{2} + \dots \right) \approx T e^{-s \frac{T}{2}} \end{aligned} \quad (3-6)$$

上式表明,零阶保持器  $G_h(s)$  可用半个采样周期的时间滞后环节近似。假定相位裕量可减少  $5^\circ \sim 15^\circ$ ,则采样周期应选为

$$T \approx (0.15 \sim 0.5) \frac{1}{\omega_c} \quad (3-7)$$

式中,  $\omega_c$  是连续控制系统的剪切频率。

按上式的经验法选择的采样周期相当短。因此,采用连续化设计方法,用数字控制器近似连续控制器,要有相当短的采样周期。

## 3. 将 $D(s)$ 离散化为 $D(z)$

将连续控制器  $D(s)$  离散化为数字控制器  $D(z)$  的方法有很多,如双线性变换法、后向差分法、前向差分法、冲击响应不变法、零极点匹配法、零阶保持法等。在这里,只介绍常用的双线性变换法、前向差分法和后向差分法。

### 1) 双线性变换法

由  $z$  变换的定义可知,  $z = e^{Ts}$ , 利用级数展开可得

$$z = e^{sT} = \frac{e^{\frac{sT}{2}}}{e^{-\frac{sT}{2}}} = \frac{1 + \frac{sT}{2} + \dots}{1 - \frac{sT}{2} + \dots} \approx \frac{1 + \frac{sT}{2}}{1 - \frac{sT}{2}} \quad (3-8)$$

式(3-8)称为双线性变换或塔斯廷(Tustin)近似。

为了由  $D(s)$  求  $D(z)$ , 由式(3-8)可得

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (3-9)$$

且有

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \quad (3-10)$$

式(3-10)就是利用双线性变换法由  $D(s)$  求  $D(z)$  的计算公式。

双线性变换也可从数值积分的梯形法对应得到。设积分控制规律为

$$u(t) = \int_0^t e(t) dt \quad (3-11)$$

两边求拉氏变换后可推导得出连续控制器为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s} \quad (3-12)$$

当用梯形法求积分运算可得如下算式:

$$u(k) = u(k-1) + \frac{T}{2} [e(k) + e(k+1)] \quad (3-13)$$

上式两边求  $z$  变换后可推导得出数字控制器为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{1}{\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}} = D(s) \Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} \quad (3-14)$$

## 2) 前向差分法

利用级数展开可将  $z = e^{Ts}$  写成以下形式:

$$z = e^{sT} = 1 + sT + \dots \approx 1 + sT \quad (3-15)$$

式(3-15)称为前向差分法或欧拉法的计算公式。

为了由  $D(s)$  求  $D(z)$ , 由上式可得

$$s = \frac{z-1}{T} \quad (3-16)$$

且

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} \quad (3-17)$$

式(3-17)便是利用前向差分法由  $D(s)$  求  $D(z)$  的计算公式。

前向差分法也可从数值微分中得到。设微分控制规律为

$$u(t) = \frac{de(t)}{dt} \quad (3-18)$$

两边求拉氏变换后可推导出连续控制器为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = s \quad (3-19)$$

对式(3-19)采用前向差分近似可得

$$u(k) \approx \frac{e(k+1) - e(k)}{T} \quad (3-20)$$

上式两边求  $z$  变换后可推导出数字控制器为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{T} = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{T}} \quad (3-21)$$

3) 后向差分法

利用级数展开还可将  $z = e^{sT}$  写成以下形式：

$$z = e^{sT} = \frac{1}{e^{-sT}} \approx \frac{1}{1-sT} \quad (3-22)$$

由上式可得

$$s = \frac{z-1}{Tz} \quad (3-23)$$

且有

$$D(z) = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (3-24)$$

式(3-24)便是利用后向差分法求  $D(s)$  的计算公式。

后向差分法也同样可从数值微分计算中得到。对式(3-18)采用后向差分近似可得

$$u(k) \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (3-25)$$

上式两边求  $z$  变换后可推得数字控制器为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{Tz} = D(s) \Big|_{s=\frac{z-1}{Tz}} \quad (3-26)$$

双线性变换法的优点在于它把  $s$  左半平面转换到单位圆内。如果使用双线性变换法，一个稳定的连续控制系统在变换之后仍将是稳定的，可是使用前向差分法就可能把它变换为一个不稳定的离散控制系统。

#### 4. 设计由计算机实现的控制算法

设数字控制器  $D(z)$  的一般形式为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_D} z^{-m_D}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_D} z^{-n_D}} = \frac{\sum_{i=0}^{m_D} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_D} a_i z^{-i}} \quad (3-27)$$

式中,  $n_D \geq m_D$ , 各系数  $a_i, b_i$  为实数, 且有  $n_D$  个极点和  $m_D$  个零点。

式(3-27)可改写为

$$U(z) = \sum_{i=0}^{m_D} b_i z^{-i} E(z) - \sum_{i=1}^{n_D} a_i z^{-i} U(z)$$

上式用时域的差分方程可表示为

$$u(k) = \sum_{i=0}^{m_D} b_i e(k-i) - \sum_{i=1}^{n_D} a_i u(k-i) \quad (3-28)$$

利用式(3-28)即可实现计算机编程, 因此式(3-28)称为数字控制器  $D(z)$  的控制算法。

#### 5. 校验

数字控制器  $D(z)$  设计完成并求出控制算法后, 须按图 3-2 所示的计算机控制系统检验其闭环特性是否符合设计要求, 这一步可由计算机控制系统的数字仿真计算或实验来验证, 如果满足设计要求则设计结束, 否则应修改设计。

### 3.2.2 理想数字 PID 控制器的设计

根据偏差的比例(P)、积分(I)、微分(D)进行控制(简称PID控制),是控制系统中应用最为广泛的一种控制规律。实际运行经验和理论分析都表明,利用这种控制规律对许多工业过程进行控制时,都能得到满意的效果。不过,用计算机实现PID控制,不是简单地把模拟PID控制规律数字化,而是要进一步与计算机的逻辑判断功能结合,使PID控制更加灵活,更能满足生产过程的要求。

#### 1. 理想模拟 PID 控制器算式

在工业控制系统中,理想模拟PID调节器常采用如图3-4所示的系统结构,其控制规律为

$$u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right] \quad (3-29)$$

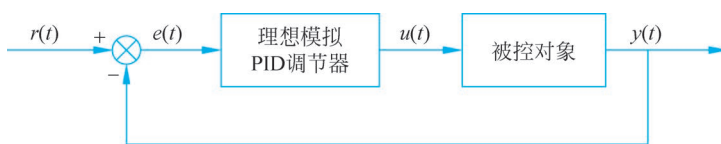


图 3-4 理想模拟 PID 控制系统

理想模拟PID调节器的传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (3-30)$$

式中,  $K_P$  为比例增益,  $K_P$  与比例带  $\delta$  呈倒数关系 ( $K_P = 1/\delta$ );  $T_I$  为积分时间常数;  $T_D$  为微分时间常数;  $u(t)$  为控制量;  $e(t)$  为偏差。

比例控制能迅速反映误差,从而减小误差,但比例控制不能消除稳态误差,比例增益加大会引起系统的不稳定。积分控制的作用是,只要系统存在误差,积分控制作用就不断地积累,输出控制量以消除误差,因而,只要有足够的时间,积分控制将能完全消除误差,但积分作用太强会使系统超调量加大,甚至使系统出现振荡。微分控制可以减小超调量,克服振荡,使系统的稳定性提高,同时加快系统的动态响应速度,减少调整时间,从而改善系统的动态性能。

#### 2. 理想数字 PID 控制器算式

在计算机控制系统中,PID控制规律的实现必须用数值逼近的方法。当采样周期相当短时,用求和代替积分、用后向差分代替微分,使模拟PID离散化为差分方程。

##### 1) 理想数字 PID 位置型控制算式

为了便于计算机实现,必须把式(3-29)变换成差分方程,为此,当  $t = kT$  时,可作如下近似

$$\int_0^t e(t) dt \approx \sum_i^k T e(i) \quad (3-31)$$

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \quad (3-32)$$

式中,  $T$  为采样周期;  $k$  为采样序号。

由式(3-29)、式(3-31)、式(3-32)可得理想数字PID位置型控制算式为

$$u(k) = K_P \left[ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right] \quad (3-33)$$

式(3-33)表示的控制算式提供了执行机构的位置  $u(k)$ , 如阀门的开度, 所以被称为理想数字 PID 位置型控制算式。

### 2) 理想数字 PID 增量型控制算式

由式(3-33)可看出, 位置型控制算式不够方便, 因为它要累加偏差  $e(i)$ , 不仅占用较多的存储单元, 而且不便于编写程序, 为此可对式(3-33)进行改进。

根据式(3-33)不难写出  $u(k-1)$  的表达式, 即

$$u(k-1) = K_P \left[ e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + T_D \frac{e(k-1) - e(k-2)}{T} \right] \quad (3-34)$$

将式(3-33)和式(3-34)相减, 即得理想数字 PID 增量型控制算式为

$$\begin{aligned} \Delta u(k) &= u(k) - u(k-1) \\ &= K_P [e(k) - e(k-1)] + K_I e(k) + \\ &\quad K_D [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \end{aligned} \quad (3-35)$$

式中,  $K_P = 1/\delta$  为比例增益;  $K_I = K_P T/T_I$  为积分系数;  $K_D = K_P T_D/T$  为微分系数。

为了编程方便, 可将理想数字 PID 增量型控制算式整理成如下形式

$$\Delta u(k) = q_0 e(k) + q_1 e(k-1) + q_2 e(k-2) \quad (3-36)$$

其中,

$$\begin{cases} q_0 = K_P \left( 1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T} \right) \\ q_1 = -K_P \left( 1 + \frac{2T_D}{T} \right) \\ q_2 = K_P \frac{T_D}{T} \end{cases} \quad (3-37)$$

## 3.2.3 实际数字 PID 控制器的设计

事实上, 无论是模拟 PID 调节器还是数字 PID 控制器, 其中的微分作用都不是理想微分, 而是实际微分(不完全微分)。因为在实际系统中, 理想微分作用难以实现, 且微分作用对生产过程和误差信号  $e(t)$  的高频扰动响应过于灵敏, 容易引起控制过程振荡, 降低调节品质。另外, 计算机对每个控制回路的输出时间是短暂的, 而执行器具有惯性, 驱动执行器动作又需要一定时间, 如果输出较大, 在短暂时间内执行器达不到应有的相应开度, 会使输出失真, 从而使理想 PID 控制算式的实际效果并不理想。所以必须使用实际数字 PID 控制算式。实际数字 PID 控制算式主要有以下两种形式。

### 1. 实际微分 PID 控制器算式

#### 1) 实际微分模拟 PID 控制器算式

实际微分模拟 PID 控制器的传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_D s}{\frac{T_D}{K_d} s + 1} \right) \quad (3-38)$$

式中,  $K_d$  是微分增益, 一般  $K_d$  取为 3~20。

## 2) 实际微分数字 PID 控制器算式

(1) 实际微分数字 PID 位置型控制算式。

由于比例积分项为

$$U_{PI}(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) E(s) \quad (3-39)$$

实际微分项为

$$U_D(s) = K_P \frac{T_D s}{\frac{T_D}{K_d} s + 1} E(s) \quad (3-40)$$

因此比例积分项的差分方程为

$$u_{PI}(k) = K_P \left[ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) \right] \quad (3-41)$$

实际微分项的差分方程为

$$u_D(k) = K_P \frac{T_D}{T_\alpha} [e(k) - e(k-1)] + \alpha u_D(k-1) \quad (3-42)$$

式中,  $T_\alpha = \frac{T_D}{K_d} + T$ ,  $\alpha = 1 - \frac{T}{T_\alpha}$ 。

根据以上容易推导得出

$$u(k) = u_{PI}(k) + u_D(k) \quad (3-43)$$

于是, 实际微分数字 PID 位置型控制算式为

$$u(k) = K_P \left\{ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) + \frac{T_D}{T_\alpha} [e(k) - e(k-1)] \right\} + \alpha u_D(k-1) \quad (3-44)$$

(2) 实际微分数字 PID 增量型控制算式。

由于

$$u(k-1) = K_P \left\{ e(k-1) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^{k-1} e(i) + \frac{T_D}{T_\alpha} [e(k-1) - e(k-2)] \right\} + \alpha u_D(k-2) \quad (3-45)$$

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (3-46)$$

因此, 实际微分数字 PID 增量型控制算式为

$$\Delta u(k) = K_P \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k) + \frac{T_D}{T_\alpha} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right\} + \alpha [u_D(k-1) - u_D(k-2)] \quad (3-47)$$

**2. 不完全微分 PID 控制器算式**

1) 不完全微分模拟 PID 控制器算式

为了使微分控制作用有效, 对于实际 PID 控制器算式, 还可以在理想 PID 控制的输出串联一阶惯性环节, 这就组成了不完全微分 PID 控制器, 如图 3-5 所示。

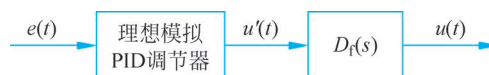


图 3-5 不完全微分 PID 控制器

一阶惯性环节  $D_f(s)$  的传递函数为

$$D_f(s) = \frac{1}{T_f s + 1} \quad (3-48)$$

由于理想模拟 PID 控制器的传递函数为

$$D'(s) = \frac{U'(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

因此图 3-5 所示的不完全微分 PID 控制器的传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{T_f s + 1} \cdot K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) = \frac{K_P (1 + T_I s + T_I T_D s^2)}{T_I s (T_f s + 1)}$$

令

$$K_p = K_c \frac{T_1 + T_2}{T_1}, \quad T_1 = T_1 + T_2, \quad T_D = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2}, \quad T_f = \gamma T_2$$

式中,  $K_c$  为实际比例系数;  $T_1$  为实际积分时间常数;  $T_2$  为实际微分时间常数;  $\gamma$  为实际微分增益系数。

于是, 可得不完全微分 PID 控制器为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_c (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{T_1 s (\gamma T_2 s + 1)} = \frac{T_2 s + 1}{\gamma T_2 s + 1} K_c \left( 1 + \frac{1}{T_1 s} \right)$$

将该连续控制器  $D(s)$  离散化, 可得到数字 PID 控制算式, 这里不再赘述。

2) 不完全微分数字 PID 控制算式

(1) 不完全微分数字 PID 位置型控制算式。

在图 3-5 中, 因为

$$u'(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

$$T_f \frac{du(t)}{dt} + u(t) = u'(t)$$

所以

$$T_f \frac{du(t)}{dt} + u(t) = K_P \left[ e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) dt + T_D \frac{de(t)}{dt} \right]$$

对上式进行离散化, 可得不完全微分数字 PID 位置型控制算式为

$$u(k) = \sigma u(k-1) + (1-\sigma)u'(k) \quad (3-49)$$

$$u'(k) = K_P \left[ e(k) + \frac{T}{T_I} \sum_{i=0}^k e(i) + T_D \frac{e(k) - e(k-1)}{T} \right] \quad (3-50)$$

式中,  $\sigma = \frac{T_f}{T_f + T}$ 。

(2) 不完全微分数字 PID 增量型控制算式。

同样, 不完全微分数字 PID 增量型控制算式为

$$\Delta u(k) = \sigma \Delta u(k-1) + (1-\sigma) \Delta u'(k) \quad (3-51)$$

$$\begin{aligned} \Delta u'(k) &= K_P [e(k) - e(k-1)] + K_I e(k) + \\ &K_D [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \end{aligned} \quad (3-52)$$

式中,  $K_I = K_P T / T_I$  为积分系数;  $K_D = K_P T_D / T$  为微分系数。

### 3. 实际数字 PID 控制算式与理想数字 PID 控制算式的响应比较

图 3-6(a)表示理想数字 PID 位置型控制算式(3-33)在单位阶跃输入时输出的控制作用。图 3-6(b)表示实际微分数数字 PID 位置型控制算式(3-44)或不完全微分数数字 PID 位置型控制算式(3-49)在单位阶跃输入时输出的控制作用。由图 3-6(a)可见,理想 PID 位置型控制算式中的微分作用只在第一个采样周期内起作用,而且作用很强。而实际微分数数字 PID 位置型控制算式或不完全微分数数字 PID 位置型控制算式的输出,在较长时间内仍有微分作用,因此可获得较好的控制效果,如图 3-6(b)所示。

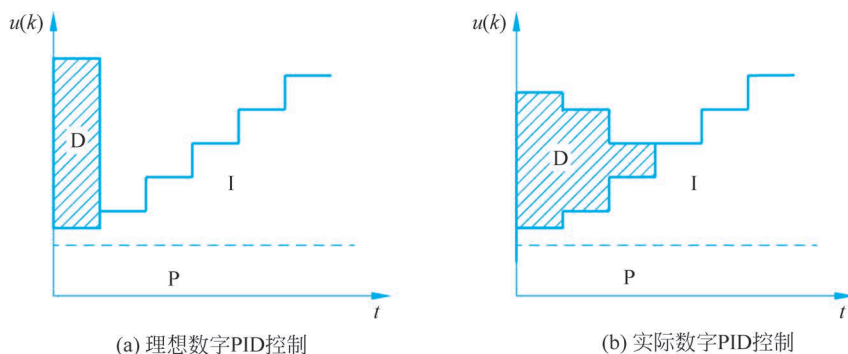


图 3-6 数字 PID 控制阶跃响应比较

### 4. 数字 PID 控制算法实现方式比较

在控制系统中,如果执行机构采用调节阀,则控制量对应阀门的开度,表征了执行机构的位置,此时控制器应采用数字 PID 位置型控制算法,如图 3-7(a)所示。如执行机构采用步进电机,每个采样周期,控制器输出的控制量相对于上次控制量有所增加,此时控制器应采用数字 PID 增量型控制算法,如图 3-7(b)所示。

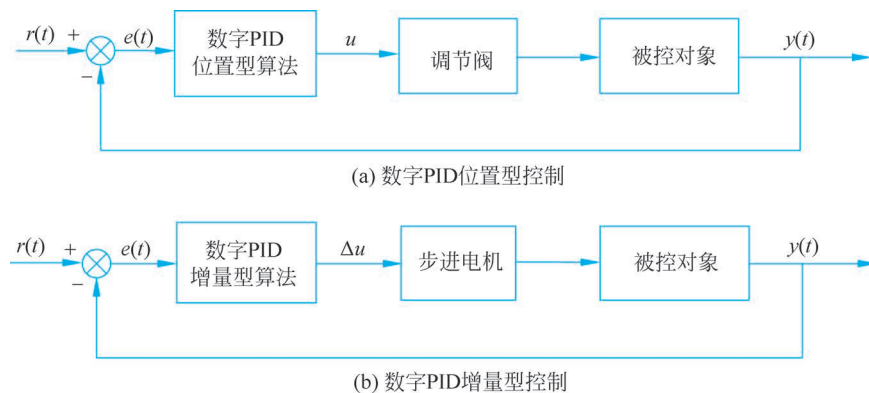


图 3-7 数字 PID 控制算法实现方式比较

增量型算法与位置型算法相比,具有以下优点。

(1) 增量型算法不需要作累加,控制量增量的确定仅与最近几次误差采样值有关,计算误差或计算精度问题对控制量的计算影响较小。而位置型算法要用到过去误差的累加值,容易产生大的累加误差。

(2) 增量型算法得出的是控制量的增量,例如阀门控制中只输出阀门开度的变化部分,

误动作影响小,必要时通过逻辑判断限制或禁止本次输出,不会严重影响系统的工作。而位置型算法的输出是控制量的全量输出,误动作影响大。

(3) 采用增量型算法,易于实现手动到自动的无冲击切换。

### 5. 实际微分数字 PID 控制算法流程

根据式(3-44)~式(3-47),可以得到化简的实际微分数字 PID 增量型控制算法、实际微分数字 PID 位置型控制算法,分别为

$$\Delta u = q'_0 e(k) + q'_1 e(k-1) + q'_2 e(k-2) + \alpha [u_D(k-1) - u_D(k-2)] \quad (3-53)$$

$$u(k) = u(k-1) + \Delta u(k) \quad (3-54)$$

$$\begin{cases} q'_0 = K_P \left( 1 + \frac{T}{T_I} + \frac{T_D}{T_\alpha} \right) \\ q'_1 = -K_P \left( 1 + \frac{2T_D}{T_\alpha} \right) \\ q'_2 = K_P \frac{T_D}{T_\alpha} \end{cases} \quad (3-55)$$

图 3-8 给出了式(3-53)所示的实际微分数字 PID 增量型控制算法流程。实际微分数字 PID 位置型控制算法流程仅需按式(3-54)进行修改即可。

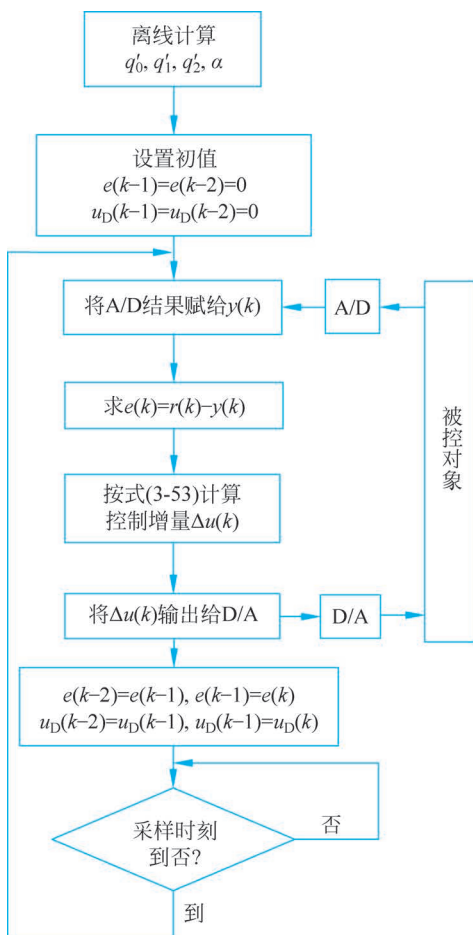


图 3-8 实际微分数字 PID 增量型控制算法流程

### 3.2.4 数字 PID 控制器的改进

如果单纯地用数字 PID 控制器模仿模拟调节器,不会获得更好的效果。只有在工程上发挥计算机运算速度快、逻辑判断功能强、编程灵活等优势,才能在控制性能上超过模拟调节器。

#### 1. 积分项的改进

在 PID 控制中,积分的作用是消除残差,为了提高控制性能,对积分项可采取以下四条改进措施。

##### 1) 积分分离

在一般的 PID 控制中,当有较大的扰动或大幅改变给定值时,由于此时有较大的偏差,以及系统有惯性和滞后,故在积分项的作用下,往往会产生较大的超调量和长时间的波动。特别对于温度、成分等变化缓慢的过程,这一现象更为严重。为此,可采用图 3-9 所示曲线 *a* 的积分分离措施,即偏差  $e(k)$  较大时,取消积分作用;当偏差  $e(k)$  较小时才将积分作用投入。亦即

当  $|e(k)| > \beta$  时,采用 PD 控制;

当  $|e(k)| \leq \beta$  时,采用 PID 控制。

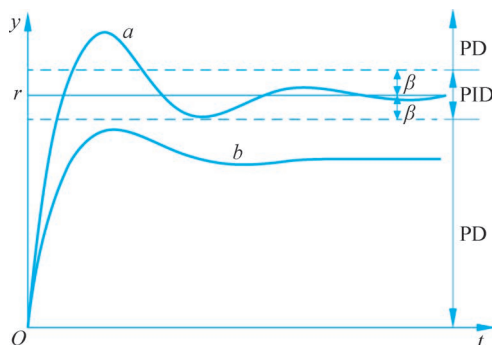


图 3-9 积分分离曲线

积分分离阈值  $\beta$  应根据具体对象及控制要求确定。若  $\beta$  值过大,达不到积分分离的目的;若  $\beta$  值过小,一旦被控量  $y(t)$  无法跳出各积分分离区,只进行 PD 控制,将会出现残差,如图 3-9 所示的曲线 *b*。为了实现积分分离,编写程序时必须从数字 PID 差分方程式中分离出积分项,进行特殊处理。

##### 2) 抗积分饱和

当长时间出现偏差或偏差较大时,计算出的控制量有可能溢出,或小于零。溢出是指计算机运算得出的控制量  $u(k)$  超出 D/A 转换器所能表示的数值范围。例如,8 位 D/A 转换器的数值范围为 00H~FFH(H 表示十六进制)。一般执行机构有两个极限位置,如调节阀全开或全关。设  $u(k)$  为 FFH 时,调节阀全开;反之, $u(k)$  为 00H 时,调节阀全关。为了提高运算精度,通常采用双字节或浮点数计算 PID 差分方程式。如果执行机构已到极限位置仍然不能消除偏差时,由于积分作用,尽管计算 PID 差分方程式所得的运算结果是继续增大或减小,但执行机构已无相应的动作,这就称为积分饱和。当出现积分饱和时,势必使超调量增加,控制品质变坏。作为防止积分饱和的办法之一,可对计算出的控制量  $u(k)$  限幅,

同时,把积分作用去掉。若以 8 位 D/A 转换器为例,则有

当  $u(k) < 00\text{H}$ , 取  $u(k) = 0$ ;

当  $u(k) > \text{FFH}$ , 取  $u(k) = 0\text{FFH}$ 。

### 3) 梯形积分

在 PID 控制器中,积分项的作用是消除稳态误差。为了保证积分作用,应提高积分项的运算精度。为此,可将矩形积分改为梯形积分,其计算公式为

$$\int_0^t e dt \approx \sum_{i=0}^k \frac{e(i) + e(i-1)}{2} T \quad (3-56)$$

### 4) 消除积分不灵敏区

由式(3-35)知,数字 PID 增量型控制算式中的积分项输出为

$$\Delta u_1(k) = K_I e(k) = K_P \frac{T}{T_I} e(k) \quad (3-57)$$

由于计算机字长的限制,当运算结果小于字长所能表示的数的精度时,计算机将此数作为“零”丢掉。从式(3-57)可知,当计算机的运行字长较短,采样周期  $T$  也短,而积分时间  $T_I$  又较长时,  $\Delta u_1(k)$  容易出现计算结果小于字长的精度而丢数,此时积分作用消失,称为积分不灵敏区。

例如,某温度控制系统,温度量程为  $0 \sim 1275^\circ\text{C}$ , D/A 转换器为 8 位,并采用 8 位字长定点运算。设  $K_P = 1$ ,  $T = 1\text{s}$ ,  $T_I = 10\text{s}$ ,  $e(k) = 50^\circ\text{C}$ , 根据式(3-57)得

$$\Delta u_1(k) = K_P \frac{T}{T_I} e(k) = \frac{1}{10} \left( \frac{255}{1275} \times 50 \right) = 1$$

这就说明,如果偏差  $e(k) < 50^\circ\text{C}$ , 则  $\Delta u_1(k) < 1$ , 计算机就将此数作为“零”丢掉,控制器就没有积分作用。只有当偏差达到  $50^\circ\text{C}$  时,才会有积分作用。这样,势必造成控制系统的残差。

为了消除积分不灵敏区,通常采用以下措施。

(1) 增加 D/A 和 A/D 转换器位数,加长运算字长,从而可以提高运算精度。

(2) 当积分项  $\Delta u_1(k)$  连续  $n$  次出现小于输出精度  $\epsilon$  的情况时,不要把它们作为“零”舍掉,而是把它们累加,即

$$S_1 = \sum_{i=1}^n \Delta u_1(i) \quad (3-58)$$

直到累加值  $S_1$  大于  $\epsilon$  时才输出  $S_1$ , 同时把累加单元清零,其程序流程如图 3-10 所示。

## 2. 微分项的改进

为了避免给定值的升降给控制系统带来冲击,如超调量过大、调节阀动作剧烈,可采用如图 3-11 所示的微分先行 PID 控制算法。它和理想 PID 控制的不同之处在于,只对被控量  $y(t)$  微分,不对偏差  $e(t)$  微分,即对给定值  $r(t)$  无微分作用。被控量微分 PID 控制算法称为微分先行 PID 控制算法,该算法对给定值频繁升降的系统有效。图中,  $\gamma$  为微分增益系数。

## 3. 时间最优 PID 控制

最大值原理是庞特里亚金(Pontryagin)于 1956 年提出的一种最优控制理论,最大值原理也叫快速时间最优控制原理,它是研究满足约束条件下获得允许控制的方法。用最大值

原理可以设计出控制变量只在  $u(t) \leq 1$  范围内取值的时间最优控制系统。而在工程上, 设  $u(t) \leq 1$  都只取  $\pm 1$  两个值, 而且依照一定法则加以切换, 使系统从一个初始状态转换到另一个状态所经历的过渡时间最短, 这种类型的最优切换系统, 称为开关控制 (Bang-Bang 控制) 系统。

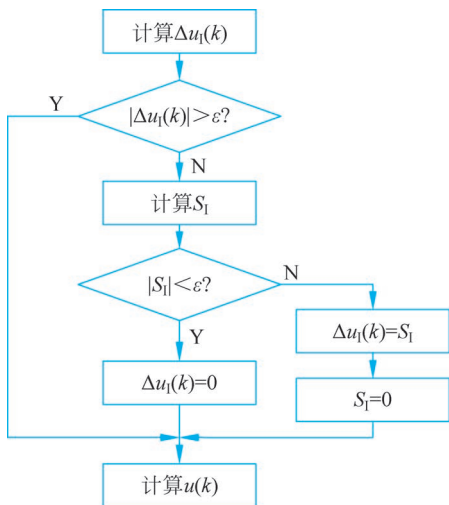


图 3-10 消除积分不灵敏区程序流程

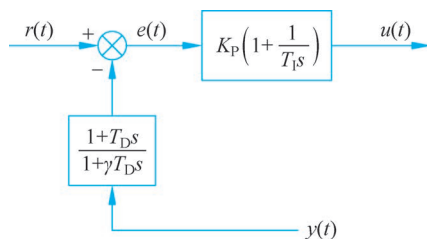


图 3-11 微分先行 PID 控制算法

在工业控制应用中, 最有发展前途的是 Bang-Bang 控制与反馈控制相结合的系统, 这种控制方式在给定值升降时特别有效, 具体形式为

$$|e(k)| = |r(k) - y(k)| \begin{cases} > \alpha, & \text{Bang-Bang 控制} \\ \leq \alpha, & \text{PID 控制} \end{cases}$$

时间最优位置随动系统理论上应采用 Bang-Bang 控制, 但 Bang-Bang 控制很难保证足够高的定位精度, 因此对于高精度的快速伺服系统, 宜采用 Bang-Bang 控制和线性控制相结合的方式, 在定位线性控制段采用数字 PID 控制就是可选的方案之一。

#### 4. 带死区的 PID 控制算法

在计算机控制系统中, 某些系统为了避免控制动作过于频繁, 以消除由于频繁动作所引起的振荡, 有时采用带死区的 PID 控制系统, 如图 3-12 所示, 相应的算式为

$$P(k) = \begin{cases} e(k), & \text{当 } |r(k) - y(k)| = |e(k)| > \epsilon \\ 0, & \text{当 } |r(k) - y(k)| = |e(k)| \leq \epsilon \end{cases}$$

在图 3-12 中, 死区  $\epsilon$  是一个可调参数, 其具体数值可根据实际被控对象由实验确定。 $\epsilon$  值太小时, 会使调节过于频繁, 达不到稳定被调节对象的目的; 如果  $\epsilon$  取得太大, 则系统将产生很大的滞后; 当  $\epsilon = 0$  时, 即为常规 PID 控制。

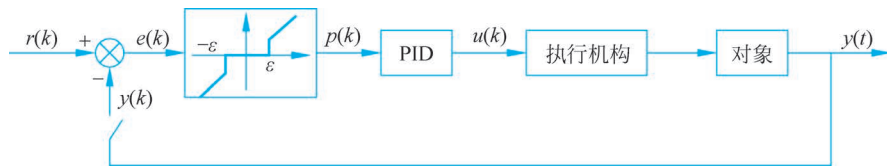


图 3-12 带死区的 PID 控制系统框图

该系统实际是一个非线性控制系统。即当偏差绝对值  $|e(k)| \leq \epsilon$  时,  $P(k)$  为 0; 当  $|e(k)| > \epsilon$  时,  $P(k) = e(k)$ , 输出值  $u(k)$  以 PID 运算结果输出。

### 3.2.5 数字 PID 控制器的参数整定

#### 1. 采样周期的选择

##### 1) 采样周期的上下限

香农采样定理给出了采样周期的上限。根据采样定理, 采样周期应满足

$$T \leq \pi / \omega_{\max}$$

式中,  $\omega_{\max}$  为被采样信号的上限角频率。采样周期的下限为计算机执行控制程序和输入输出所耗费的时间, 系统的采样周期只能在  $T_{\min}$  与  $T_{\max}$  之间选择。采样周期  $T$  既不能太大也不能太小,  $T$  太小时, 一方面增加了微型计算机的负担, 不利于发挥计算机的功能; 另一方面两次采样间的偏差变化太小, 数字控制器的输出值变化不大。因此, 采样周期  $T$  应在  $T_{\min}$  和  $T_{\max}$  之间, 即

$$T_{\min} \leq T \leq T_{\max}$$

若选择采样周期在  $T$  与  $T_{\max}$  之间, 则系统可以稳定工作, 但控制质量较差。若采样周期选择在  $T_{\min}$  与  $T$  之间, 满足采样定理, 可得到较好的控制质量。

##### 2) 其他因素

在选择采样周期时还要考虑以下因素。

(1) 给定值的变化频率。加到被控对象上的给定值变化频率越高, 采样频率应越高, 使给定值的改变可以迅速得到反应。

(2) 被控对象的特性。若被控对象是慢速的热工或化工对象时, 采样周期一般取得较大; 若被控对象是较快速的系统时, 采样周期应取得较小。

(3) 执行机构的类型。若执行机构动作惯性大, 采样周期也应大一些, 否则执行机构来不及反应数字控制器输出值的变化。

(4) 控制算法的类型。当采用 PID 算式时, 积分作用和微分作用与采样周期  $T$  的选择有关。如果选择的采样周期  $T$  太小, 将使微分积分作用不明显。因为当  $T$  小到一定程度后, 由于受计算精度的限制, 偏差  $e(k)$  始终为零。另外, 各种控制算法也需要计算时间。

(5) 控制的回路数。控制的回路数  $n$  与采样周期  $T$  有下列关系

$$T \geq \sum_{j=1}^n T_j$$

式中,  $T_j$  指第  $j$  回路控制程序执行时间和输入输出时间。

#### 2. 按简易工程法整定 PID 参数

在连续控制系统中, 模拟调节器的参数整定方法较多, 但简单易行的方法还是简易工程法。这种方法最大的优点在于, 整定参数时不必依赖被控对象的数学模型。一般情况下, 难以准确得到数学模型。简易工程整定法是由经典的频率法化简而来的, 虽然稍微粗糙一点, 但是简单易行, 适于现场应用。

##### 1) 扩充临界比例度法

扩充临界比例度法是对模拟调节器中使用的临界比例度法的扩充。整定数字控制器参数的步骤如下。

(1) 选择一个足够短的采样周期。即选择采样周期为被控对象纯滞后时间的十分之一以下。

(2) 用选定的采样周期使系统工作。数字控制器去掉积分作用和微分作用,只保留比例作用。然后逐渐减小比例度  $\delta (\delta = 1/K_P)$ ,直到系统发生持续等幅振荡。记下使系统发生振荡的临界比例度  $\delta_k$  及系统的临界振荡周期  $T_k$ 。

(3) 选择控制度。控制度就是以模拟调节器为基准,将数字控制器的控制效果与模拟调节器的控制效果相比较。控制效果的评价函数通常用误差平方积分  $\int_0^\infty e^2(t)dt$  表示。

$$\text{控制度} = \frac{\left[ \int_0^\infty e^2(t)dt \right]_{\text{DDC}}}{\left[ \int_0^\infty e^2(t)dt \right]_{\text{模拟}}}$$

实际应用中并不需要计算出两个误差平方积分,控制度仅表示控制效果的物理概念。例如,当控制度为 1.05 时,就是指数字控制器与模拟调节器控制效果相当;控制度为 2.0 时,是指数字控制器比模拟调节器控制效果差。

(4) 根据选定的控制度,查表 3-1,求得  $T$ 、 $K_P$ 、 $T_I$ 、 $T_D$  的值。

表 3-1 按扩充临界比例度法整定参数

控制度	控制规律	$T$	$K_P$	$T_I$	$T_D$
1.05	PI	$0.03T_k$	$0.53\delta_k$	$0.88T_k$	
	PID	$0.014T_k$	$0.63\delta_k$	$0.49T_k$	$0.14T_k$
1.2	PI	$0.05T_k$	$0.49\delta_k$	$0.91T_k$	
	PID	$0.043T_k$	$0.47\delta_k$	$0.47T_k$	$0.16T_k$
1.5	PI	$0.14T_k$	$0.42\delta_k$	$0.99T_k$	
	PID	$0.09T_k$	$0.34\delta_k$	$0.43T_k$	$0.20T_k$
2.0	PI	$0.22T_k$	$0.36\delta_k$	$1.05T_k$	
	PID	$0.16T_k$	$0.27\delta_k$	$0.40T_k$	$0.22T_k$

### 2) 扩充响应曲线法

与在模拟控制系统中可用响应曲线法代替临界比例度法一样,在数字控制系统中也可以用扩充响应曲线法代替扩充临界比例度法。用扩充响应曲线法整定  $T$ 、 $K_P$ 、 $T_I$ 、 $T_D$  的步骤如下。

(1) 数字控制器不接入控制系统,让系统处于手动操作状态下,将被调量调节到给定值附近,并使之稳定。然后突然改变给定值,给对象一个阶跃输入信号。

(2) 用记录仪表记录被调量在阶跃输入下的整个变化过程曲线,如图 3-13 所示。

(3) 在曲线最大斜率处作切线,求得滞后时间  $\tau$ 、被控对象时间常数  $T_\tau$  以及它们的比值  $T_\tau/T$ 。查表 3-2,即可得数字控制器的  $K_P$ 、 $T_I$ 、 $T_D$  及采样周期  $T$ 。

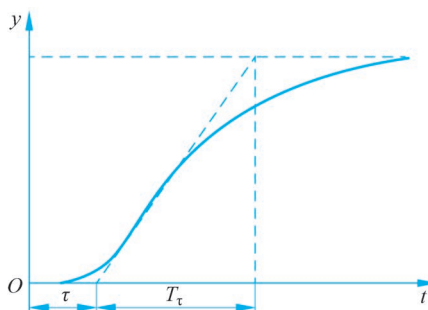


图 3-13 被调量在阶跃输入下的变化过程曲线

表 3-2 按扩充响应曲线整定参数

控制度	控制规律	$T$	$K_p$	$T_I$	$T_D$
1.05	PI	$0.1\tau$	$0.84T_\tau/\tau$	$0.34\tau$	
	PID	$0.05\tau$	$1.15T_\tau/\tau$	$2.0\tau$	$0.45\tau$
1.2	PI	$0.2\tau$	$0.78T_\tau/\tau$	$3.6\tau$	
	PID	$0.16\tau$	$1.0T_\tau/\tau$	$1.9\tau$	$0.55\tau$
1.5	PI	$0.5\tau$	$0.68T_\tau/\tau$	$3.9\tau$	
	PID	$0.34\tau$	$0.85T_\tau/\tau$	$1.62\tau$	$0.65\tau$
2.0	PI	$0.8\tau$	$0.57T_\tau/\tau$	$4.2\tau$	
	PID	$0.6\tau$	$0.6T_\tau/\tau$	$1.5\tau$	$0.82\tau$

### 3) 归一参数整定法

除了一般的扩充临界比例度法,Roberts P D 在 1974 年提出了一种简化扩充临界比例度法。由于该方法只需整定一个参数,故称它为归一参数整定法。

已知 PID 增量型控制的算式为

$$\Delta u(k) = K_p \left\{ e(k) - e(k-1) + \frac{T}{T_I} e(k) + \frac{T_D}{T} [e(k) - 2e(k-1) + e(k-2)] \right\}$$

如令  $T = 0.1T_k$ 、 $T_I = 0.5T_k$ 、 $T_D = 0.125T_k$ , 式中,  $T_k$  为纯比例作用下的临界振荡周期, 则

$$\Delta u(k) = K_p [2.45e(k) - 3.5e(k-1) + 1.25e(k-2)]$$

这样, 整个问题便简化为只要整定一个参数  $K_p$ 。改变  $K_p$ , 观察控制效果, 直到满意为止。该方法为实现简易的自整定控制带来方便。

### 3. 优选法

由于实际生产过程错综复杂, 参数千变万化, 因此, 确定被调对象的动态特性并非容易之事。有时即使能找出来, 不仅计算麻烦、工作量大, 而且其结果与实际相差较远。因此, 目前应用最多的还是经验法。即根据具体的调节规律、不同调节对象的特征, 经过闭环实验, 反复凑试, 找出最佳调节参数。经验法的一种为优选法, 可用优选法对自动调节参数进行整定。

优选法是根据经验, 先把其他参数固定, 然后用 0.618 法对其中某一参数进行优选, 待选出最佳参数后, 再换另一个参数进行优选, 直到把所有的参数优选完毕为止。最后根据  $T$ 、 $K_p$ 、 $T_I$ 、 $T_D$  诸参数优选的结果取一组最佳值。

### 4. 凑试法确定 PID 参数

增大比例系数  $K_p$  一般将加快系统的响应, 在有静差的情况下有利于减小静差。但过大的比例系数会使系统有较大的超调量, 并产生振荡, 使稳定性变坏。增加积分时间  $T_I$  有利于减小超调量, 减小振荡, 使系统更加稳定, 但系统静差的消除将随之减慢。增加微分时间  $T_D$  亦有利于加快系统响应, 使超调量减小, 稳定性增加, 但系统对扰动的抑制能力减弱, 对扰动有较敏感的反应。

在凑试时, 可参考以上参数对控制过程的影响趋势, 对参数实行先比例、后积分、再微分的整定步骤。

(1) 首先只整定比例部分。即将比例系数由小变大, 并观察相应的系统响应, 直到得到

反应快、超调量小的响应曲线。如果系统没有静差或静差已小到允许范围内,并且响应曲线已属满意,那么只需用比例调节器即可,最优比例系数可由此确定。

(2) 在比例调节的基础上,若系统的静差不能满足设计要求,则须加入积分环节。整定时首先置积分时间  $T_I$  为一较大值,并将经第一步整定得到的比例系数略微缩小(如缩小为原值的 80%),然后减少积分时间,在保持系统良好动态性能的情况下,使静差得到消除。在此过程中,可根据响应曲线的好坏反复改变比例系数与积分时间,以期得到满意的控制过程与整定参数。

(3) 若使用比例积分调节器消除了静差,但动态过程经反复调整仍不能满意,则可加入微分环节,构成比例积分微分调节器。在整定时,可先置微分时间  $T_D$  为零。在第(2)步整定的基础上,增加  $T_D$ ,同时相应地改变比例系数和积分时间,逐步凑试,以获得满意的调节效果和整定参数。

### 5. PID 控制参数的自整定法

被控对象大多用近似一阶惯性加纯滞后环节来表示,其传递函数为  $G(s) = \frac{K e^{-\tau s}}{T_\tau s + 1}$ ,对于典型 PID 控制器  $D(s) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$ ,有齐格勒-尼科尔斯(Ziegler-Nichols)整定公式

$$\begin{cases} K_P = \frac{1.2 T_\tau}{K \tau} \\ T_I = 2\tau \\ T_D = 0.5\tau \end{cases} \quad (3-59)$$

实际应用时,通常根据阶跃响应曲线(图 3-14),人工测量出参数  $K$ 、 $T_\tau$ 、 $\tau$ ,然后按式(3-59)计算  $K_P$ 、 $T_I$ 、 $T_D$ 。用计算机辅助设计,一是可以用模式辨识的方法辨识这些特征参数;二是可用曲线拟合的方法将阶跃响应数据拟合成近似的一阶惯性加纯滞后环节

模型。参数自整定就是在被控对象特性发生变化后,立即使 PID 控制参数随之作相应的调整,使得 PID 控制器具有一定的“自调整”或“自适应”能力。在此引入特征参数法描述 PID 参数的自整定技术。

特征参数法就是抽取被控对象的某些特征参数,以其为依据自动整定 PID 控制参数。基于被控对象参数的 PID 控制参数自整定法的首要工作是,在线辨识被控对象某些特征参数,比如临界增益  $K$  和临界周期  $T$ (频率  $\omega = 2\pi/T$ )。这种在线辨识特征参数占用较少的计算机软硬件资料,在工业中应用比较方便。典型的有齐格勒-尼科尔斯提出的临界振荡法,在此基础上 Åsröm K J 又进行了改进,采用具有滞环的继电器非线性反馈控制系统,如图 3-15 所示。其中继电器非线性特性的幅值为  $d$ ,滞环宽度为  $h$ ,继电器输出为周期性的对称方波。

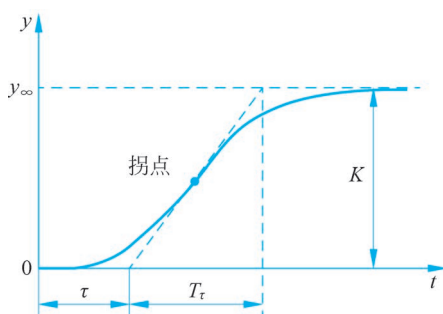


图 3-14 阶跃响应曲线

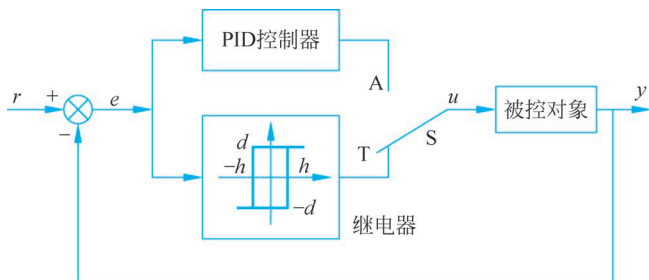


图 3-15 采用具有滞环继电器非线性反馈控制系统

首先通过人工控制使系统进入稳定工况,然后将整定开关 S 接通 T,获得极限环,使被控量  $y$  出现临界等幅振荡。其振荡幅度为  $a$ ,振荡周期即为临界周期  $T_k$ ,临界增益为  $K = 4d/\pi a$ 。一旦获得  $T_k$  和  $\delta_k$  ( $\delta_k = 1/K$ ),再根据表 3-1 即可求得 PID 控制器的整定参数。最后,将整定开关 S 接通 A,使 PID 控制器投入正常运行。

该方法简单、概念清楚。但是,有时噪声干扰会给被控量  $y$  的采样值带来误差,从而影响  $T$  和  $K$  的精度,使其因为系统干扰太大,不存在稳定的极限环。

### 3.3 数字控制器的离散化设计技术

数字控制器的连续化设计技术,是立足于连续控制系统控制器的设计,然后在计算机上进行数字模拟实现的,在被控对象的特性不太清楚的情况下,人们可以充分利用技术成熟的连续化设计技术(如 PID 控制器的设计技术),并把它移植到计算机上予以实现,以达到满意的控制效果。但是连续化设计技术要求相当短的采样周期,因此只能实现较简单的控制算法。由于控制任务的需要,当所选择的采样周期比较大或对控制质量要求比较高时,必须从被控对象的特性出发,直接根据计算机控制理论(采样控制理论)设计数字控制器,这类方法称为离散化设计方法。离散化设计技术比连续化设计技术更具有一般意义,它完全根据采样控制系统的特点进行分析和综合,并导出相应的控制规律和算法。

#### 3.3.1 数字控制器的离散化设计步骤

在图 3-16 所示的计算机控制系统框图中, $G_c(s)$  是被控对象的连续传递函数, $D(z)$  是数字控制器的脉冲传递函数, $G_h(s)$  是零阶保持器的传递函数, $T$  为采样周期。

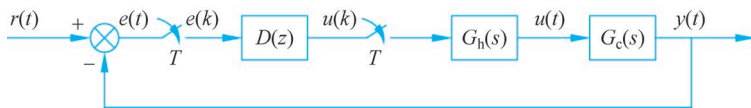


图 3-16 计算机控制系统框图

定义广义被控对象为

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = Z[G_h(s)G_c(s)] = Z\left[\frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_c(s)\right] \quad (3-60)$$

可得图 3-16 对应的闭环脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (3-61)$$

由上式可求得

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \quad (3-62)$$

设数字控制器  $D(z)$  的一般形式为

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{m_D} z^{-m_D}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_D} z^{-n_D}} = \frac{\sum_{i=0}^{m_D} b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{n_D} a_i z^{-i}} \quad (3-63)$$

式中,  $n_D \geq m_D$ , 各系数  $a_i, b_i$  为实数, 且有  $n_D$  个极点和  $m_D$  个零点。

数字控制器的输出  $U(z)$  为

$$U(z) = \sum_{i=0}^{m_D} b_i z^{-i} E(z) - \sum_{i=1}^{n_D} a_i z^{-i} U(z) \quad (3-64)$$

因此, 数字控制器  $D(z)$  的计算机控制算法为

$$u(k) = \sum_{i=0}^{m_D} b_i e(k-i) - \sum_{i=1}^{n_D} a_i u(k-i) \quad (3-65)$$

按照式(3-65), 就可编写控制算法程序。

若已知  $G_c(s)$ , 且可根据控制系统性能指标要求构造  $\Phi(z)$ , 则可由式(3-60)和式(3-62)求得  $D(z)$ 。由此可得出数字控制器的离散化设计步骤如下。

(1) 根据控制系统的性能指标要求和其他约束条件, 确定所需的闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$ 。

(2) 根据式(3-60)求广义对象的脉冲传递函数  $G(z)$ 。

(3) 根据式(3-62)求数字控制器  $D(z)$ 。当然, 也可以直接在  $z$  域中, 利用离散系统的  $w$  变换设计法(频率特性法)和根轨迹法求取  $D(z)$ 。同样, 关于控制系统设计  $D(z)$  的各种方法可参考有关自动控制原理方面的资料, 这里不再讨论。

(4) 根据式(3-63)求控制量  $u(k)$  的递推计算式(3-65), 方法与数字控制器的连续化设计步骤相同。

(5) 校验。数字控制器  $D(z)$  设计完成并求出控制算法  $u(k)$  后, 须按图 3-16 所示的计算机控制系统检验其闭环特性是否符合设计要求, 这一步可由计算机控制系统的数字仿真计算或实验来验证, 如果满足设计要求则设计结束, 否则应修改设计。

### 3.3.2 最少拍控制器的设计

在数字随动控制系统中, 要求闭环控制系统必须满足稳定性、快速性、准确性, 即闭环控制系统在渐近稳定的基础上, 输出值尽快地准确跟踪给定值的变化。对于计算机控制系统, 一个采样周期称为一拍。最少拍控制(Deadbeat Control)也称为有限拍控制或无差拍控制, 是满足稳、快、准要求的一种离散化设计方法。

最少拍控制就是闭环系统对于某种特定的输入, 能在最少的几个采样周期内输出达到采样时刻无偏差的稳态, 且闭环脉冲传递函数具有以下形式

$$\Phi(z) = \phi_1 z^{-1} + \phi_2 z^{-2} + \cdots + \phi_N z^{-N} \quad (3-66)$$

式中,  $N$  是可能情况下的最小正整数;  $\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_N$  为系数。这一形式表明闭环系统的脉冲响应在  $N$  个采样周期 ( $N$  拍) 后变为零, 从而意味着系统在  $N$  拍之内达到稳态且稳态误差为零。

### 1. 按照准确性和快速性的要求确定闭环脉冲传递函数 $\Phi(z)$

由图 3-16 可知, 误差  $E(z)$  的脉冲传递函数为

$$\Phi_e(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{R(z) - Y(z)}{R(z)} = 1 - \Phi(z) \quad (3-67)$$

式中,  $E(z)$  为误差信号  $e(t)$  的  $z$  变换;  $R(z)$  为输入量  $r(t)$  的  $z$  变换;  $Y(z)$  为输出量  $y(t)$  的  $z$  变换。于是误差  $E(z)$  为

$$E(z) = R(z)\Phi_e(z) \quad (3-68)$$

对于典型输入函数

$$r(t) = \frac{1}{(q-1)!} t^{q-1} \quad (3-69)$$

对应的  $z$  变换为

$$R(z) = \frac{B_r(z)}{(1-z^{-1})^q} \quad (3-70)$$

式中,  $B_r(z)$  是不包含  $(1-z^{-1})$  因子的关于  $z^{-1}$  的多项式。当  $q$  分别等于 1、2、3 时, 对应的典型输入为单位阶跃、单位速度、单位加速度输入函数。

为了满足闭环控制系统准确性的要求, 根据  $z$  变换的终值定理, 系统的稳态误差为

$$\begin{aligned} e(\infty) &= \lim_{z \rightarrow 1} [(1-z^{-1})E(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} [(1-z^{-1})R(z)\Phi_e(z)] \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1-z^{-1}) \frac{B_r(z)}{(1-z^{-1})^q} \Phi_e(z) \right] \end{aligned} \quad (3-71)$$

由于  $B_r(z)$  中没有  $(1-z^{-1})$  因子, 因此要使稳态误差  $e(\infty)$  为零, 必须有

$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z) = (1-z^{-1})^q F(z) \quad (3-72)$$

即有

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 1 - (1-z^{-1})^q F(z) \quad (3-73)$$

式中,  $F(z)$  是关于  $z^{-1}$  的待定系数多项式。显然, 为了使  $\Phi(z)$  能够实现,  $F(z)$  中的首项应取为 1, 即

$$F(z) = 1 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots + f_p z^{-p} \quad (3-74)$$

可以看出,  $\Phi(z)$  具有  $z^{-1}$  的最高幂次为  $N = p + q$ , 这表明系统闭环输出响应在采样点的值经  $N$  拍可达到稳态。

为了满足闭环控制系统快速性的要求, 特别当  $p = 0$ , 即  $F(z) = 1$  时, 系统在采样点的输出可在最少拍  $N_{\min} = q$  内达到稳态, 即为最少拍控制。因此最少拍控制器设计时选择  $\Phi(z)$  为

$$\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z) = 1 - (1-z^{-1})^q \quad (3-75)$$

即

$$\Phi_e(z) = (1-z^{-1})^q$$

由式(3-62)可知,最少拍控制器  $D(z)$  为

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} = \frac{1 - (1 - z^{-1})^q}{G(z)(1 - z^{-1})^q} \quad (3-76)$$

## 2. 典型输入下的最少拍控制系统分析

### 1) 单位阶跃输入( $q=1$ )

输入函数  $r(t)=1(t)$ , 其  $z$  变换和拉普拉斯变换分别为

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

由式(3-75)可知

$$\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^q = z^{-1}$$

因而有

$$\begin{aligned} E(z) &= R(z)\Phi_e(z) = R(z)[1 - \Phi(z)] = \frac{1}{1 - z^{-1}}(1 - z^{-1}) = 1 \\ &= 1 \cdot z^0 + 0 \cdot z^{-1} + 0 \cdot z^{-2} + \dots \end{aligned}$$

进一步求得

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}}z^{-1} = z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

以上两式说明,只需一拍(一个采样周期)输出就能跟踪输入,误差为零,过渡过程结束。

### 2) 单位速度输入( $q=2$ )

输入函数  $r(t)=t$ , 其  $z$  变换和拉普拉斯变换分别为

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}, \quad R(s) = \frac{1}{s^2}$$

由式(3-75)可知

$$\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^2 = 2z^{-1} - z^{-2}$$

且有

$$E(z) = R(z)\Phi_e(z) = R(z)[1 - \Phi(z)] = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) = Tz^{-1}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \dots$$

以上两式说明,只需二拍(两个采样周期)输出就能跟踪输入,达到稳态。

### 3) 单位加速度输入( $q=3$ )

单位加速度输入  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ , 其  $z$  变换和拉普拉斯变换分别为

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1}(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}, \quad R(s) = \frac{1}{s^3}$$

根据式(3-75),有

$$\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^3 = 3z^{-1} - 3z^{-2} + z^{-3}$$

同理,有

$$E(z) = \frac{1}{2}T^2 z^{-1} + \frac{1}{2}T^2 z^{-2}$$

上式说明,只需三拍(三个采样周期)输出就能跟踪输入,达到稳态。

### 3. 最少拍控制器的局限性

1) 最少拍控制器对典型输入的适应性差

最少拍控制器的设计是使系统对某一典型输入的响应为最少拍,但对于其他典型输入不一定为最少拍,甚至会引起大的超调量和静差。例如,当  $\Phi(z)$  按等速输入设计时有  $\Phi(z) = 1 - (1 - z^{-1})^2 = 2z^{-1} - z^{-2}$ 。

三种不同输入对应的输出如下。

(1) 阶跃输入时,  $r(t) = 1(t)$ , 则

$$R(z) = 1/(1 - z^{-1})$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{2z^{-1} - z^{-2}}{1 - z^{-1}} = 2z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots$$

(2) 等速输入时,  $r(t) = t$ , 则

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}$$

$$Y(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} (2z^{-1} - z^{-2}) = 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + 4Tz^{-4} + \dots$$

(3) 等加速度输入时,  $r(t) = \frac{1}{2}t^2$ , 则

$$R(z) = \frac{T^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{T^2 z^{-1} (1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})^3} (2z^{-1} - z^{-2}) \\ = T^2 z^{-2} + 3.5T^2 z^{-3} + 7T^2 z^{-4} + 11.5T^2 z^{-5} + \dots$$

对于上述 3 种情况,进行  $z$  反变换后得到的输出序列如图 3-17 所示。从图中可见,阶跃输入时,超调量严重(达 100%),等加速度输入时有静差。

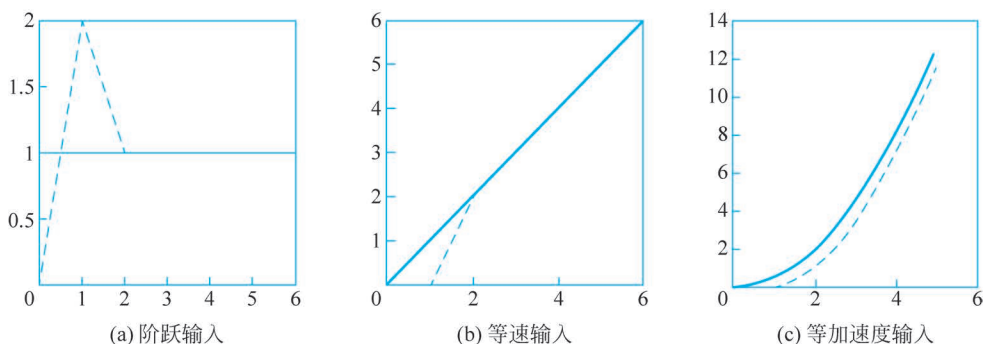


图 3-17 按等速输入设计的最少拍控制器对不同输入响应

一般来说,针对一种典型的输入函数  $R(z)$  设计得到的系统的闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$ ,用于次数较低的输入函数  $R(z)$  时,系统将出现较大的超调量,响应时间也会增加,但稳态时在采样时刻的误差为零。反之,当一种典型的最少拍特性用于次数较高的输入函数时,输出将不能完全跟踪输入以致产生稳态误差。由此可见,一种典型的最少拍闭环脉冲传

递函数  $\Phi(z)$  只适应一种特定的输入,而不能适应于各种输入。

### 2) 最少拍控制器的可实现性问题

设图 3-16 和式(3-60)所示的广义对象的脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3-77)$$

若用  $\deg A(z)$  和  $\deg B(z)$  分别表示  $A(z)$  和  $B(z)$  的阶数,显然有

$$\deg A(z) > \deg B(z) \quad (3-78)$$

设数字控制器  $D(z)$  为

$$D(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (3-79)$$

要使  $D(z)$  物理上是可实现的,则必须要求

$$\deg P(z) \geq \deg Q(z) \quad (3-80)$$

上式的含义是:要产生  $k$  时刻的控制量  $u(k)$ ,最多只能利用直到  $k$  时刻的误差  $e(k), e(k-1), \dots$  以及过去时刻的控制量  $u(k-1), u(k-2), \dots$ 。

闭环系统的脉冲传递函数为

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} = \frac{B(z)Q(z)}{A(z)P(z) + B(z)Q(z)} = \frac{B_m(z)}{A_m(z)} \quad (3-81)$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \deg A_m(z) - \deg B_m(z) &= \deg[A(z)P(z) + B(z)Q(z)] - \deg[B(z)Q(z)] \\ &= \deg[A(z)P(z)] - \deg[B(z)Q(z)] \\ &= \deg A(z) - \deg B(z) + \deg P(z) - \deg Q(z) \end{aligned} \quad (3-82)$$

所以

$$\deg A_m(z) - \deg B_m(z) \geq \deg A(z) - \deg B(z) \quad (3-83)$$

式(3-83)给出了为使  $D(z)$  物理上可实现时  $\Phi(z)$  应满足的条件,该条件的物理意义是,若  $G(z)$  的分母比分子高  $N$  阶,则确定  $\Phi(z)$  时分母必须至少比分子高  $N$  阶。

设给定连续被控对象有  $d$  拍的纯滞后,即纯滞后时间  $\tau = dT$ ,  $T$  为采样周期,对应于图 3-16 和式(3-77)的广义对象脉冲传递函数为

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} \quad (3-84)$$

则所设计的闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$  中必须含有纯滞后,且滞后时间至少要等于被控对象的滞后时间。否则系统的响应超前于被控对象的输入,这实际上是实现不了的。

### 3) 最少拍控制的稳定性问题

在前面讨论的设计过程中,对  $G(z)$  并没有提出限制条件。实际上,只有当  $G(z)$  是稳定的(即在  $z$  平面单位圆上和圆外没有极点),且不含有纯滞后环节时,式(3-75)才成立。如果  $G(z)$  不满足稳定条件,则需对设计原则作相应的限制。

由式

$$\Phi(z) = \frac{D(z)G(z)}{1 + D(z)G(z)} \quad (3-85)$$

可以看出,  $D(z)$  和  $G(z)$  总是成对出现的,但却不允许它们的零点、极点互相对消。这是因

为,简单地利用  $D(z)$  的零点去对消  $G(z)$  中的不稳定极点,虽然从理论上可以得到一个稳定的闭环系统,但是这种稳定是建立在零极点完全对消的基础上的。当系统的参数产生漂移,或辨识的参数有误差时,这种零极点对消不可能准确实现,从而将引起闭环系统不稳定。上述分析说明,在单位圆外或圆上  $D(z)$  和  $G(z)$  不能对消零极点,但并不意味含有这种现象的系统不能补偿成稳定的系统,只是在选择  $\Phi(z)$  时必须加一个约束条件,这个约束条件称为稳定性条件。

### 3.3.3 最少拍有纹波控制器的设计

在图 3-16 所示的系统中,被控对象的传递函数为

$$G_c(s) = G'_c(s)e^{-\tau s} \quad (3-86)$$

式中,  $G'_c(s)$  是不含滞后部分的传递函数;  $\tau$  为纯滞后时间。

若令

$$d = \tau/T \quad (3-87)$$

则有

$$\begin{aligned} G(z) &= Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_c(s) \right] = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G'_c(s) e^{-\tau s} \right] \\ &= z^{-d} \cdot Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G'_c(s) \right] = z^{-d} \cdot \frac{B(z)}{A(z)} \end{aligned} \quad (3-88)$$

式中,当连续被控对象  $G_c(s)$  中不含纯滞后时,  $d=0$ ; 当  $G_c(s)$  中含有纯滞后时,  $d \geq 1$ , 即有  $d$  拍的纯滞后。一般通过选择合适采样周期  $T$ , 可以使  $d$  为自然数(非负整数)。

设  $A(z)$  的阶次为  $n$ ,  $B(z)$  的阶次为  $m$ ,  $n \geq m$ , 于是,上式可改写为

$$G(z) = z^{-d} \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^{-(d+n-m)} (c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_m z^{-m})}{d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_n z^{-n}} \quad (3-89)$$

设  $G(z)$  有  $u$  个零点  $b_1, b_2, \cdots, b_u$  和  $v$  个极点  $a_1, a_2, \cdots, a_v$  在  $z$  平面的单位圆外和圆上,  $G'(z)$  是  $G(z)$  中不含单位圆外和圆上的零极点部分, 则广义对象的传递函数可表示为

$$G(z) = \frac{z^{-(d+n-m)} \prod_{i=1}^u (1 - b_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^v (1 - a_i z^{-1})} G'(z) \quad (3-90)$$

于是,有

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \cdot \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} = \frac{\prod_{i=1}^v (1 - a_i z^{-1})}{z^{-(d+n-m)} G'(z) \prod_{i=1}^u (1 - b_i z^{-1})} \cdot \frac{\Phi(z)}{\Phi_e(z)} \quad (3-91)$$

$$e(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1}) R(z) \Phi_e(z)] = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (1 - z^{-1}) \frac{B_r(z)}{(1 - z^{-1})^q} \Phi_e(z) \right] \quad (3-92)$$

由以上两式可以看出,为了避免使  $G(z)$  在单位圆外和圆上的零点、极点与  $D(z)$  的极点、零点对消,同时又能实现对系统的补偿,且  $e(\infty) = 0$ , 则按稳定性、快速性和准确性要求选择最少拍控制系统的闭环脉冲传递函数时必须满足下面的约束条件。

### 1. $\Phi_e(z)$ 零点的选择

根据式(3-91)、式(3-92),  $\Phi_e(z)$  的零点中必须包含  $G(z)$  在  $z$  平面单位圆外与圆上的所有极点和  $(1-z^{-1})^q$ , 即

$$\Phi_e(z) = \left[ \prod_{i=1}^v (1 - a_i z^{-1}) \right] (1 - z^{-1})^q F_1(z) \quad (3-93)$$

式中,  $F_1(z)$  是关于  $z^{-1}$  的待定多项式, 且不含  $G(z)$  中的不稳定极点  $a_i$ 。为了使  $\Phi_e(z)$  能够实现,  $F_1(z)$  应具有以下形式

$$F_1(z) = 1 + f_{11}z^{-1} + f_{12}z^{-2} + \cdots + f_{1k}z^{-k} \quad (3-94)$$

式中,  $f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1k}$  为待定系数。当  $k=0$  时,  $F_1(z)=1$ 。

实际上, 若  $G(z)$  有  $j$  个极点在单位圆上, 即在  $z=1$  处, 则由式(3-71)和式(3-72)可知,  $\Phi_e(z)$  的选择方法应对式(3-93)进行修改, 可按以下方法确定  $\Phi_e(z)$ 。

(1) 若  $j \leq q$ , 则

$$\Phi_e(z) = \left[ \prod_{i=1}^{v-j} (1 - a_i z^{-1}) \right] (1 - z^{-1})^q F_1(z) \quad (3-95)$$

(2) 若  $j > q$ , 则

$$\Phi_e(z) = \left[ \prod_{i=1}^{v-j} (1 - a_i z^{-1}) \right] (1 - z^{-1})^j F_1(z) \quad (3-96)$$

### 2. $\Phi(z)$ 零点的选择

根据式(3-91)、式(3-92),  $\Phi(z)$  的零点中必须包含  $G(z)$  在  $z$  平面单位圆外与圆上的所有零点和  $z^{-(d+n-m)}$ , 即  $\Phi(z)$  必须满足的约束条件为

$$\Phi(z) = z^{-(d+n-m)} \left[ \prod_{i=1}^u (1 - b_i z^{-1}) \right] F_2(z) \quad (3-97)$$

式中,  $F_2(z)$  是关于  $z^{-1}$  的待定多项式, 且不含  $G(z)$  中的不稳定零点  $b_i$ 。  $F_2(z)$  具有以下形式

$$F_2(z) = f_{20} + f_{21}z^{-1} + f_{22}z^{-2} + \cdots + f_{2p}z^{-p} \quad (3-98)$$

式中,  $f_{20}, f_{21}, \dots, f_{2p}$  为待定系数。

### 3. 待定多项式 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 阶次的确定

1)  $k$  值的求取

(1) 根据  $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$  恒等成立, 可得  $\Phi_e(z)$  和  $\Phi(z)$  关于  $z^{-1}$  的多项式阶次相同且方程两边对应项系数相等。

(2) 对于最少拍控制, 式(3-94)中的  $k$  是使  $\Phi_e(z)$  与  $1 - \Phi(z)$  阶次相同且对应项系数相等的最小值, 以此求  $k$  值。可以先选  $k=0$  (如不满足要求, 可再选  $k=1, k$  不断递增, 直至满足要求)。

2)  $p$  值的求取

因为式(3-97)与式(3-95)或与式(3-96)关于  $z^{-1}$  的阶次相同, 所以

(1) 若  $G(z)$  中有  $j$  个极点在单位圆上, 当  $j \leq q$  时, 式(3-98)的  $p$  值为

$$p = q + v - j - u - d - n + m + k \quad (3-99)$$

(2) 若  $G(z)$  中有  $j$  个极点在单位圆上, 当  $j > q$  时, 式(3-98)的  $p$  值为

$$p = v - u - d - n + m + k \quad (3-100)$$

#### 4. $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 中待定系数的确定

1) 方法一

$F_1(z)$  和  $F_2(z)$  的阶次确定以后, 先根据式(3-93)写出  $\Phi_e(z)$  的表达式, 再根据式(3-97)写出  $\Phi(z)$  的表达式, 然后, 利用恒等式  $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$  两边关于  $z^{-1}$  的指数项系数相等的方法求  $F_1(z)$  和  $F_2(z)$  中的待定系数。

以上给出了确定  $\Phi(z)$  时必须满足的约束条件。根据此约束条件, 可求得最少拍控制器为

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} = \begin{cases} \frac{F_2(z)}{G'(z)(1 - z^{-1})^{q-j} F_1(z)}, & j \leq q \\ \frac{F_2(z)}{G'(z) F_1(z)}, & j > q \end{cases} \quad (3-101)$$

2) 方法二

根据式(3-93)、式(3-97),  $\Phi_e(z)$  和  $\Phi(z)$  也可以采用以下方法求解, 也就是求  $F_1(z)$  和  $F_2(z)$  的另一种方法。

对于单位负反馈控制系统,  $\Phi(z) = 1 - \Phi_e(z)$ 。由准确性要求  $e(\infty) = 0$  可知, 式(3-93)中的  $\Phi_e(z)$  含有  $(1 - z^{-1})^q$ , 从而使  $\Phi_e(1) = \Phi_e'(1) = \Phi_e''(1) = \dots = \Phi_e^{(q-1)}(1) = 0$ , 即  $\Phi(1) = 1, \Phi'(1) = \Phi''(1) = \dots = \Phi^{(q-1)}(1) = 0$ , 由此可以得到  $q$  个方程。由稳定性要求可知, 式(3-93)中  $\Phi_e(z)$  含有  $\prod_{i=1}^v (1 - a_i z^{-1})$ , 故  $\Phi_e(a_i) = 0$ , 因此,  $\Phi(a_i) = 1$ , 又可以得到  $v$  个方程。

根据准确性和稳定性要求, 对于式(3-97)的  $\Phi(z)$ , 由  $q + v$  个方程联立形成以下方程组

$$\begin{cases} \Phi(1) = 1 \\ \Phi'(1) = \left. \frac{d\Phi(z)}{dz} \right|_{z=1} = 0 \\ \dots \\ \Phi^{(q-1)}(1) = \left. \frac{d^{q-1}\Phi(z)}{dz^{q-1}} \right|_{z=1} = 0 \\ \Phi(a_i) = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, v) \end{cases} \quad (3-102)$$

由以上方程组可求解式(3-97)中  $\Phi(z)$  的表达式。

当  $G(z)$  有  $j$  个极点在单位圆上, 即在  $z = 1$  处, 以上方程组中的第 1 个方程与后面  $v$  个方程在  $z = 1$  处有  $j$  个重复, 因此, 上面的方程组少于  $q + v$  个方程。根据闭环控制系统快速性和最少拍控制要求,  $\Phi(z)$  的项数应该最少, 即  $\Phi(z)$  (也就是  $\Phi_e(z)$ ) 应降阶处理, 再结合式(3-92)中  $e(\infty) = 0$ , 于是, 上述方程组中应减少的方程个数为  $\max\{j, q\}$ 。

根据上述方法求得  $\Phi(z)$  后, 可由  $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$  进一步求得  $\Phi_e(z)$ , 从而求出数字控制器  $D(z)$ 。

仅根据上述约束条件设计的最少拍控制系统, 只保证了在最少几个采样周期后系统

的响应在采样点时的稳态误差为零,而不能保证任意两个采样点之间的稳态误差为零。这种控制系统输出信号  $y(t)$  有纹波存在,故称为最少拍有纹波控制系统,式(3-101)的控制器为最少拍有纹波控制器。 $y(t)$  的纹波在采样点上观测不到,要用修正  $z$  变换方能计算得出两个采样点之间的输出值,这种纹波称为**隐蔽振荡(Hidden Oscillations)**。

**例 3-1** 在图 3-18 所示的计算机控制系统中,被控对象的传递函数和零阶保持器的传递函数分别为  $G_c(s) = \frac{10}{s(s+1)}$  和  $G_h(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$ 。采样周期  $T=1s$ ,试针对单位速度输入函数设计最少拍有纹波控制系统,画出数字控制器和系统的输出波形。

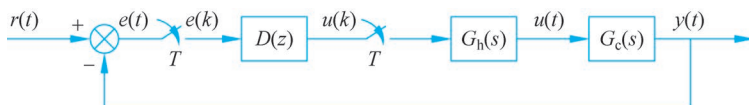


图 3-18 例 3-1 计算机控制系统框图

**解** 首先求取广义对象的脉冲传递函数为

$$\begin{aligned} G(z) &= Z \left[ \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{10}{s(s+1)} \right] = (1-z^{-1}) Z \left[ \frac{10}{s^2(s+1)} \right] \\ &= 10(1-z^{-1}) Z \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right] \\ &= 10(1-z^{-1}) \left[ \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-0.3679z^{-1}} \right] \\ &= \frac{3.679z^{-1}(1+0.718z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-0.3679z^{-1})} \end{aligned}$$

上式中,  $d=0, n=2, m=1, q=2, u=0, v=1, j=1$ , 且  $j < q$ 。

根据式(3-95)、式(3-97),可得

$$\Phi_e(z) = \left[ \prod_{i=1}^{v-j} (1-a_i z^{-1}) \right] (1-z^{-1})^q F_1(z) = (1-z^{-1})^2 F_1(z)$$

$$\Phi(z) = z^{-(d+n-m)} \left[ \prod_{i=1}^u (1-b_i z^{-1}) \right] F_2(z) = z^{-1} F_2(z)$$

根据式(3-94)选择  $k=0$  (如不满足要求,  $k$  可不断递增直至满足要求), 则

$$F_1(z) = 1$$

依式(3-98), 有

$$F_2(z) = f_{20} + f_{21} z^{-1}$$

于是, 有

$$\Phi_e(z) = \left[ \prod_{i=1}^{v-j} (1-a_i z^{-1}) \right] (1-z^{-1})^q F_1(z) = (1-z^{-1})^2$$

$$\Phi(z) = z^{-(d+n-m)} \left[ \prod_{i=1}^u (1-b_i z^{-1}) \right] F_2(z) = z^{-1} (f_{20} + f_{21} z^{-1})$$

因要使方程

$$\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$$

恒等成立, 必须使上式两边  $\Phi_e(z)$  和  $1 - \Phi(z)$  关于  $z^{-1}$  的多项式阶次相同且方程两边对应

项系数相等,即

$$(1 - z^{-1})^2 = 1 - z^{-1}(f_{20} + f_{21}z^{-1})$$

且

$$\begin{cases} f_{20} = 2 \\ f_{21} = -1 \end{cases}$$

故

$$\Phi(z) = 2z^{-1} - z^{-2}$$

$$\Phi_e(z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2}$$

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} = \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})(2z^{-1} - z^{-2})}{3.679z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})(1 - z^{-1})^2} \\ &= \frac{0.5434(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.718z^{-1})} \end{aligned}$$

进一步利用多项式的长除法求得

$$E(z) = \Phi_e(z)R(z) = (1 - z^{-1})^2 \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = z^{-1}$$

$$Y(z) = R(z)\Phi(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2}(2z^{-1} - z^{-2}) = 2z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + \dots$$

$$\begin{aligned} U(z) &= E(z)D(z) = z^{-1} \frac{0.5434(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.718z^{-1})} \\ &= 0.54z^{-1} - 0.32z^{-2} + 0.40z^{-3} - 0.12z^{-4} + 0.25z^{-5} + \dots \end{aligned}$$

由此,可画出数字控制器和系统的输出波形,见图 3-19。

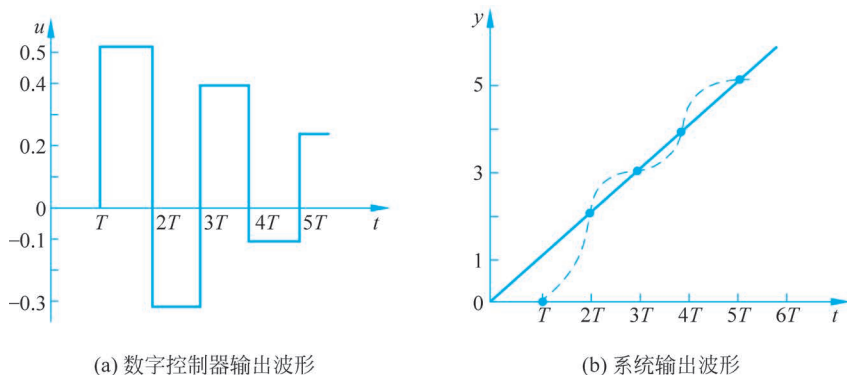


图 3-19 有纹波控制器输出序列波形

### 3.3.4 最少拍无纹波控制器的设计

按最少拍有纹波系统设计的控制器,其系统的输出值跟踪输入值后,在非采样点有纹波存在。原因在于数字控制器的输出序列  $u(k)$  经过若干拍后,不是常值或零,而是振荡收敛的。非采样时刻的纹波现象不仅造成非采样时刻有偏差,而且会浪费执行机构的功率,增加机械磨损,因此必须消除。

### 1. 设计最少拍无纹波控制器的必要条件

无纹波系统要求系统的输出信号在采样点之间不出现纹波,必须满足:

- (1) 对阶跃输入,当  $t \geq NT$  时,有  $y(t) = \text{常数}$ ;
- (2) 对速度输入,当  $t \geq NT$  时,有  $\dot{y}(t) = \text{常数}$ ;
- (3) 对加速度输入,当  $t \geq NT$  时,有  $\ddot{y}(t) = \text{常数}$ 。

这样,被控对象  $G_c(s)$  必须有能给出与系统输入  $r(t)$  相同且平滑的输出  $y(t)$ 。如果针对速度输入函数进行设计,那么稳态过程中  $G_c(s)$  的输出也必须是速度函数,为了产生这样的速度输出函数,  $G_c(s)$  中必须至少有一个积分环节使得控制信号  $u(k)$  为常值(包括零)时,  $G_c(s)$  的稳态输出是所要求的速度函数。同理,若针对加速度输入函数设计的无纹波控制器,则  $G_c(s)$  中必须至少有两个积分环节。因此,设计最少拍无纹波控制器时,  $G_c(s)$  中必须含有足够的积分环节,以保证  $u(t)$  为常数时,  $G_c(s)$  的稳态输出完全跟踪输入,且无纹波。

### 2. 最少拍无纹波系统确定 $\Phi(z)$ 的约束条件

要使系统的稳态输出无纹波,就要求稳态时的控制信号  $u(k)$  为常数或零。控制信号  $u(k)$  的  $z$  变换为

$$\begin{aligned} U(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k} \\ &= u(0) + u(1)z^{-1} + \cdots + u(l)z^{-l} + u(l+1)z^{-(l+1)} + \cdots \end{aligned} \quad (3-103)$$

如果系统经过  $l$  个采样周期达到稳态,无纹波系统要求  $u(l) = u(l+1) = u(l+2) = \cdots = \text{常数或零}$ 。

设广义对象  $G(z)$  含有  $d$  个采样周期的纯滞后:

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} z^{-d} \quad (3-104)$$

而

$$U(z) = \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z)} R(z)$$

将式(3-104)代入上式,得

$$U(z) = \frac{\Phi(z)}{z^{-d} B(z)} A(z) R(z) = \Phi_u(z) R(z) \quad (3-105)$$

其中

$$\Phi_u(z) = \frac{\Phi(z)}{z^{-d} B(z)} A(z)$$

由式(3-89)知

$$G(z) = z^{-d} \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z^{-(d+n-m)} (c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_m z^{-m})}{d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_n z^{-n}}$$

可得

$$\Phi_u(z) = \frac{\Phi(z)}{z^{-d} B(z)} A(z) = \frac{\Phi(z) (d_0 + d_1 z^{-1} + \cdots + d_n z^{-n})}{z^{-(d+n-m)} (c_0 + c_1 z^{-1} + \cdots + c_m z^{-m})} \quad (3-106)$$

要使控制信号  $u(k)$  在稳态过程中为常数或零,那么  $\Phi_u(z)$  只能是关于  $z^{-1}$  的有限多项式。因此式(3-106)中的  $\Phi(z)$  必须包含  $G(z)$  的所有零点和  $z^{-(d+n-m)}$ 。这样,最少拍有

纹波系统设计时确定  $\Phi(z)$  的式(3-97)应修改。于是,最少拍无纹波系统确定  $\Phi(z)$  的约束条件为

$$\Phi(z) = z^{-(d+n-m)} \left[ \prod_{i=1}^{\omega} (1 - b_i z^{-1}) \right] F_2(z) \quad (3-107)$$

式中,  $\omega$  为  $G(z)$  的所有零点数 ( $\omega = m$ );  $b_1, b_2, \dots, b_{\omega}$  为  $G(z)$  的所有零点;  $F_2(z)$  是关于  $z^{-1}$  的多项式,且不含  $G(z)$  中的不稳定零点  $b_i$ 。

$F_2(z)$  具有以下形式

$$F_2(z) = f_{20} + f_{21} z^{-1} + f_{22} z^{-2} + \dots + f_{2p} z^{-p} \quad (3-108)$$

式中,  $f_{20}, f_{21}, \dots, f_{2p}$  为待定系数。

### 3. 多项式 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 中阶次的确定

1)  $k$  值的求取

(1) 因  $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$  恒等成立,故  $\Phi_e(z)$  和  $\Phi(z)$  关于  $z^{-1}$  的多项式阶次相同且方程两边对应项系数相等。

(2) 对于最少拍控制,式(3-94)中的  $k$  是使  $\Phi_e(z)$  与  $1 - \Phi(z)$  阶次相同且对应项系数相等时的最小值,以此求取  $k$  值。可以先选  $k=0$  (如不满足要求,可再选  $k=1, k$  不断递增,直至满足要求)。

2)  $p$  值的求取

因式(3-107)与式(3-95)或与式(3-96)关于  $z^{-1}$  的阶次相同,故有

(1) 若  $G(z)$  中有  $j$  个极点在单位圆上,当  $j \leq q$  时,有

$$p = q + v - j - \omega - d - n + m + k \quad (3-109)$$

(2) 若  $G(z)$  中有  $j$  个极点在单位圆上,当  $j > q$  时,有

$$p = v - \omega - d - n + m + k \quad (3-110)$$

### 4. $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 中待定系数的确定

1) 方法一

$F_1(z)$  和  $F_2(z)$  的阶次确定以后,利用恒等式  $\Phi_e(z) = 1 - \Phi(z)$  两边关于  $z^{-1}$  的指数项系数相等的方法求  $F_1(z)$  和  $F_2(z)$  中的待定系数。

2) 方法二

最少拍无纹波系统的  $\Phi_e(z)$  和  $\Phi(z)$  也可像最少拍有纹波系统设计一样,采用对式(3-102)求导的方法求解,这里不再赘述。

### 5. 调整时间的增加

无纹波系统的调整时间要增加若干拍,增加的拍数等于  $G(z)$  在单位圆内的零点个数。

**例 3-2** 在例 3-1 中,广义对象为 ( $T=1s$ )

$$G(z) = \frac{3.679z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}$$

试针对单位速度输入函数,设计最少拍无纹波系统,并绘出数字控制器和系统的输出波形图。

**解** 在例 3-1 中,由  $G(z)$  和  $G_c(s)$  的表达式可知,满足无纹波设计的必要条件,且  $d=0, n=2, m=1, q=2, \omega=1, v=1, j=1, j < q$ 。

根据式(3-94),选择  $k=0$  时,按式(3-95)写出  $\Phi_e(z)$  和按式(3-107)写出  $\Phi(z)$  的表达式

式,很容易验证  $1 - \Phi(z) \neq \Phi_e(z)$ , 因此,根据式(3-94)只能选择最小的  $k$  为  $k=1$ 。

选择  $k=1$  (如不满足要求,  $k$  可不断递增直至满足要求), 则由式(3-94)得

$$F_1(z) = 1 + f_{11}z^{-1}$$

对于  $k=1$ , 由式(3-95)得

$$\begin{aligned}\Phi_e(z) &= \left[ \prod_{i=1}^{v-j} (1 - a_i z^{-1}) \right] (1 - z^{-1})^q F_1(z) \\ &= (1 - z^{-1})^2 (1 + f_{11}z^{-1}) = 1 + (f_{11} - 2)z^{-1} + \\ &\quad (1 - 2f_{11})z^{-2} + f_{11}z^{-3}\end{aligned}$$

依式(3-108)、式(3-109)有

$$F_2(z) = f_{20} + f_{21}z^{-1}$$

由式(3-107)得

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= z^{-(d+n-m)} \left[ \prod_{i=1}^{\omega} (1 - b_i z^{-1}) \right] F_2(z) \\ &= z^{-1} (1 + 0.718z^{-1}) (f_{20} + f_{21}z^{-1}) = f_{20}z^{-1} + \\ &\quad (f_{21} + 0.718f_{20})z^{-2} + 0.718f_{21}z^{-3}\end{aligned}$$

因有恒等式

$$1 - \Phi(z) = \Phi_e(z)$$

故

$$\begin{aligned}1 - f_{20}z^{-1} - (f_{21} + 0.718f_{20})z^{-2} - 0.718f_{21}z^{-3} &= 1 + (f_{11} - 2)z^{-1} + (1 - 2f_{11})z^{-2} + f_{11}z^{-3} \\ \begin{cases} f_{11} - 2 = -f_{20} \\ 1 - 2f_{11} = -(f_{21} + 0.718f_{20}) \\ f_{11} = -0.718f_{21} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} f_{11} = 0.592 \\ f_{20} = 1.408 \\ f_{21} = -0.825 \end{cases}\end{aligned}$$

于是

$$\Phi(z) = (1 + 0.718z^{-1})(1.408z^{-1} - 0.825z^{-2})$$

$$\Phi_e(z) = (1 - z^{-1})^2 (1 + 0.592z^{-1})$$

$$D(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} = \frac{0.272(1 - 0.3679z^{-1})(1.408 - 0.825z^{-1})}{(1 - z^{-1})(1 + 0.592z^{-1})}$$

利用多项式的长除法可求得

$$\begin{aligned}Y(z) = R(z)\Phi(z) &= \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} (1 + 0.718z^{-1})(1.408z^{-1} - 0.825z^{-2}) \\ &= 1.41z^{-2} + 3z^{-3} + 4z^{-4} + 5z^{-5} + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}U(z) &= \frac{Y(z)}{G(z)} = \frac{R(z)\Phi(z)}{G(z)} \\ &= \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \cdot (1 + 0.718z^{-1})(1.408z^{-1} - 0.825z^{-2}) \cdot \\ &\quad \frac{(1 - z^{-1})(1 - 0.3679z^{-1})}{3.679z^{-1}(1 + 0.718z^{-1})} \\ &= 0.38z^{-1} + 0.02z^{-2} + 0.09z^{-3} + 0.09z^{-4} + \dots\end{aligned}$$

数字控制器和系统的输出波形如图 3-20 所示。

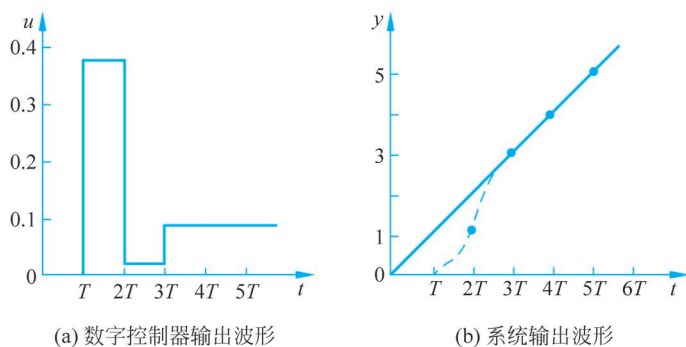


图 3-20 无纹波控制器输出序列波形图

比较例 3-1 和例 3-2 的输出序列波形图,可以看出,有纹波系统的调整时间为两个采样周期,无纹波系统的调整时间为三个采样周期,无波纹系统的调整时间比有纹波系统增加一拍,因为  $G(z)$  在单位圆内有一个零点。

### 3.4 纯滞后控制技术

在工业过程(如热工、化工)控制中,由于物料、能量或信号的传输延迟,许多被控对象具有纯滞后性质,这种纯滞后性质与惯性不同,常引起系统产生超调量或者振荡。早在 20 世纪 50 年代,国外就对工业生产过程中纯滞后现象进行了深入的研究。

#### 3.4.1 连续化设计技术——施密斯预估控制

施密斯(Smith)提出了一种纯滞后补偿模型,但由于模拟仪表不能实现这种补偿,致使这种方法在工程中无法实现。现在人们利用计算机可以方便地实现纯滞后补偿。

##### 1. 施密斯预估控制原理

在图 3-21 所示带纯滞后环节的控制系统中, $D(s)$  表示控制器的传递函数,用于校正  $G_P(s)$  部分; $G_P(s)e^{-\tau s}$  表示被控对象的传递函数, $G_P(s)$  为被控对象中不包含纯滞后部分的传递函数, $e^{-\tau s}$  为被控对象纯滞后部分的传递函数。

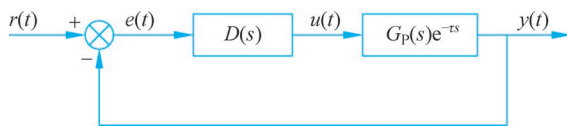


图 3-21 带纯滞后环节的控制系统

施密斯预估控制原理:与  $D(s)$  并接一补偿环节,用来补偿被控对象中的纯滞后部分。这个补偿环节称为预估器,其传递函数为  $G_P(s)(1 - e^{-\tau s})$ ,  $\tau$  为纯滞后时间,补偿后的系统框图如图 3-22 所示。

由施密斯预估器和控制器  $D(s)$  组成的补偿回路称为纯滞后补偿器,其传递函数为  $D'(s)$ ,即

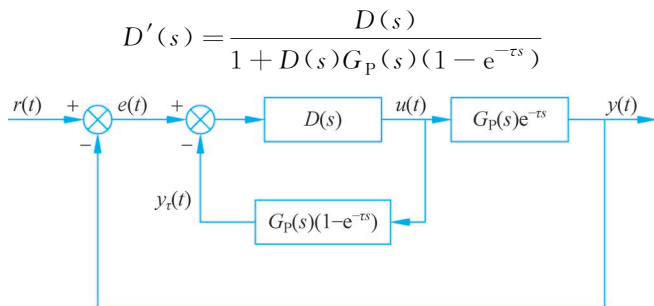


图 3-22 带施密斯预估器的控制系统

经补偿后的系统闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{D'(s)G_P(s)e^{-\tau s}}{1 + D'(s)G_P(s)e^{-\tau s}} = \frac{D(s)G_P(s)}{1 + D(s)G_P(s)}e^{-\tau s} \quad (3-111)$$

式(3-111)说明,经补偿后,消除了纯滞后部分对控制系统的影响,因为式中的  $e^{-\tau s}$  在闭环控制回路之外,不影响系统的稳定性,拉氏变换的位移定理说明,  $e^{-\tau s}$  仅将控制作用在时间坐标上推移了一个时间  $\tau$ ,控制系统的过渡过程及其他性能指标都与对象特性为  $G_P(s)$  时完全相同。

### 2. 具有纯滞后补偿的数字控制系统

由图 3-23 可见,具有纯滞后补偿的数字控制系统由两部分组成:一部分是数字 PID 控制器(由  $D(s)$  离散化得到);另一部分是施密斯预估器。

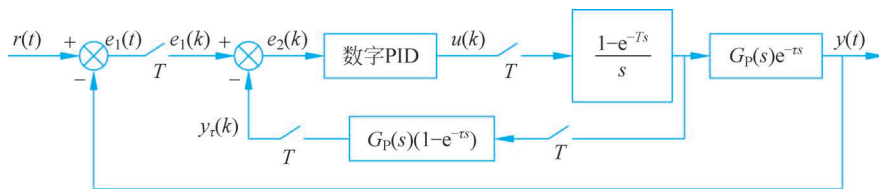


图 3-23 具有纯滞后补偿的数字控制系统

#### 1) 施密斯预估器

滞后环节使信号延迟,为此,在计算机内存中专门设定  $N + 1$  个单元作为存储信号  $m(k)$  的历史数据,  $N$  由下式决定:

$$N = \tau / T$$

式中,  $\tau$  为纯滞后时间;  $T$  为采样周期。

施密斯预估器的输出可按图 3-24 所示的顺序计算。图中,  $u(k)$  是 PID 数字控制器的输出,  $y_\tau(k)$  是施密斯预估器的输出。从图中可知,必须先计算传递函数  $G_P(s)$  的输出  $m(k)$  后,才能计算预估器的输出:

$$y_\tau(k) = m(k) - m(k - N)$$

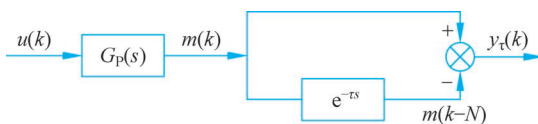


图 3-24 施密斯预估器方框图

每采样一次,把  $m(k)$  记入 0 单元,同时把 0 单元原来存放的数据移到 1 单元,1 单元原来存放的数据移到 2 单元……以此类推。从单元  $N$  输出的信号,就是滞后  $N$  个采样周期的  $m(k-N)$  信号。

许多工业对象可近似用一阶惯性环节和纯滞后环节的串联表示:

$$G_c(s) = G_P(s)e^{-\tau s} = \frac{K_f}{1 + T_f s} e^{-\tau s}$$

式中,  $K_f$  为被控对象的放大系数;  $T_f$  为被控对象的时间常数;  $\tau$  为纯滞后时间。

预估器的传递函数为

$$G_\tau(s) = G_P(s)(1 - e^{-\tau s}) = \frac{K_f}{1 + T_f s} (1 - e^{-\tau s})$$

## 2) 纯滞后补偿控制算法步骤

纯滞后补偿控制算法步骤如下。

(1) 计算反馈回路的偏差  $e_1(k)$

$$e_1(k) = r(k) - y(k)$$

(2) 计算纯滞后补偿器的输出  $y_\tau(k)$

$$\frac{Y_\tau(s)}{U(s)} = G_P(s)(1 - e^{-\tau s}) = \frac{K_f(1 - e^{-NT_s})}{T_f s + 1}$$

化简成微分方程式,则可写成

$$T_f \frac{dy_\tau(t)}{dt} + y_\tau(t) = K_f [u(t) - u(t - NT)]$$

利用后向差分代替微分,上式相应的差分方程为

$$y_\tau(k) = ay_\tau(k-1) + b[u(k) - u(k-N)] \quad (3-112)$$

式中,  $a = \frac{T_f}{T_f + T}$ ;  $b = K_f \frac{T}{T_f + T}$ 。式(3-112)称为施密斯预估控制算式。

(3) 计算偏差  $e_2(k)$

$$e_2(k) = e_1(k) - y_\tau(k)$$

(4) 计算控制器的输出  $u(k)$ 。

当控制器采用 PID 控制算法时,则

$$\begin{aligned} u(k) &= u(k-1) + \Delta u(k) \\ &= u(k-1) + K_P [e_2(k) - e_2(k-1)] + K_I e_2(k) + \\ &\quad K_D [e_2(k) - 2e_2(k-1) + e_2(k-2)] \end{aligned}$$

式中,  $K_P$  为 PID 控制的比例系数;  $K_I = K_P T / T_I$  为积分系数;  $K_D = K_P T_D / T$  为微分系数。

## 3.4.2 离散化设计技术——达林算法

### 1. 数字控制器 $D(z)$ 的形式

被控对象  $G_c(s)$  是带有纯滞后的一阶或二阶惯性环节,即

$$G_c(s) = \frac{K}{1 + T_1 s} e^{-\tau s} \quad (3-113)$$

或

$$G_c(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)} e^{-\tau s} \quad (3-114)$$

式中,  $\tau$  为纯滞后时间;  $T_1$ 、 $T_2$  为时间常数;  $K$  为放大系数。

达林(Dahlin)算法的设计目标是使整个闭环系统所期望的传递函数  $\Phi(s)$  相当于一个延迟环节和一个惯性环节串联, 即

$$\Phi(s) = \frac{1}{T_\tau s + 1} e^{-\tau s} \quad (3-115)$$

并期望整个闭环系统的纯滞后时间和被控对象  $G_c(s)$  的纯滞后时间  $\tau$  相同。式(3-115)中  $T_\tau$  为闭环系统的时间常数, 纯滞后时间  $\tau$  与采样周期  $T$  有整数倍关系。

$$\tau = NT \quad (N = 1, 2, 3, \dots)$$

由计算机组成的控制系统如图 3-16 所示。用脉冲传递函数近似法求得与  $\Phi(s)$  对应的闭环脉冲传递函数  $\Phi(z)$  为

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{e^{-\tau s}}{T_\tau s + 1} \right]$$

代入  $\tau = NT$ , 并进行  $z$  变换, 得

$$\Phi(z) = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau}) z^{-N-1}}{1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1}} \quad (3-116)$$

由式(3-62)有

$$\begin{aligned} D(z) &= \frac{1}{G(z)} \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \\ &= \frac{1}{G(z)} \frac{z^{-N-1} (1 - e^{-T/T_\tau})}{1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1} - (1 - e^{-T/T_\tau}) z^{-N-1}} \end{aligned} \quad (3-117)$$

假若已知被控对象的脉冲传递函数  $G(z)$ , 就可由式(3-117)求出数字控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ 。

(1) 被控对象为带纯滞后的一阶惯性环节, 其脉冲传递函数为

$$G(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K e^{-\tau s}}{T_1 s + 1} \right]$$

代入  $\tau = NT$ , 得

$$G(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K e^{-\tau s}}{T_1 s + 1} \right] = K z^{-N-1} \frac{1 - e^{-T/T_1}}{1 - e^{-T/T_1} z^{-1}} \quad (3-118)$$

将式(3-118)代入式(3-117)得到数字控制器为

$$D(z) = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau})(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})}{K(1 - e^{-T/T_1})[1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1} - (1 - e^{-T/T_\tau}) z^{-N-1}]}$$

(2) 被控对象为带纯滞后的二阶惯性环节, 其脉冲传递函数为

$$G(z) = Z \left[ \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \cdot \frac{K e^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \right]$$

代入  $\tau = NT$ , 并进行  $z$  变换, 得到

$$G(z) = \frac{K(C_1 + C_2 z^{-1})z^{-N-1}}{(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})} \quad (3-119)$$

其中

$$\begin{cases} C_1 = 1 + \frac{1}{T_2 - T_1}(T_1 e^{-T/T_1} - T_2 e^{-T/T_2}) \\ C_2 = e^{-T(1/T_1 + 1/T_2)} + \frac{1}{T_2 - T_1}(T_1 e^{-T/T_2} - T_2 e^{-T/T_1}) \end{cases} \quad (3-120)$$

将式(3-119)代入式(3-117)得

$$D(z) = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau})(1 - e^{T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})}{K(C_1 + C_2 z^{-1})[1 - e^{T/T_\tau} z^{-1} - (1 - e^{-T/T_\tau})z^{-N-1}]} \quad (3-121)$$

## 2. 振铃现象及其消除

所谓振铃(Ringing)现象,是指数字控制器的输出以二分之一采样频率大幅衰减的振荡。这与快速有纹波系统中的纹波是不一样的。纹波是由于控制器输出一直振荡,使系统的输出一直有纹波。而振铃现象中的振荡是衰减的。由于被控对象中惯性环节具有低通特性,使得这种振荡对系统的输出几乎无任何影响。但是振铃现象却会增加执行机构的磨损,在有交互作用的多参数控制系统中,振铃现象还有可能影响系统的稳定性。

### 1) 振铃现象的分析

如图 3-16 所示,系统的输出  $Y(z)$  和数字控制器的输出  $U(z)$  有下列关系:

$$Y(z) = U(z)G(z)$$

系统的输出  $Y(z)$  和输入函数  $R(z)$  有下列关系:

$$Y(z) = R(z)\Phi(z)$$

由上面两式得到数字控制器的输出  $U(z)$  与输入函数  $R(z)$  之间的关系:

$$\frac{U(z)}{R(z)} = \frac{\Phi(z)}{G(z)} \quad (3-122)$$

令

$$\Phi_u(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} \quad (3-123)$$

显然可由式(3-122)得到

$$U(z) = \Phi_u(z)R(z)$$

$\Phi_u(z)$  表达了数字控制器的输出与输入函数在闭环时的关系,是分析振铃现象的基础。

对于单位阶跃输入函数  $R(z) = 1/(1 - z^{-1})$ , 含有极点  $z = 1$ , 如果  $\Phi_u(z)$  的极点在  $z$  平面的负实轴上, 且与  $z = -1$  点相近, 那么数字控制器的输出序列  $u(k)$  中将含有这两种幅值相近的瞬态项, 而且瞬态项的符号在不同时刻是不相同的。当两瞬态项符号相同时, 数字控制器的输出控制作用加强, 符号相反时, 输出控制作用减弱, 从而造成数字控制器的输出序列大幅波动。分析  $\Phi_u(z)$  在  $z$  平面负实轴上的极点分布情况, 就可得出振铃现象的有关结论。下面分析带纯滞后的一阶或二阶惯性环节系统中的振铃现象。

### (1) 带纯滞后的一阶惯性环节

被控对象为带纯滞后的一阶惯性环节时, 其脉冲传递函数  $G(z)$  为式(3-118), 闭环系统的期望传递函数为式(3-116), 将  $G(z)$  和  $\Phi(z)$  代入式(3-123), 有

$$\Phi_u(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau})(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})}{K(1 - e^{-T/T_1})(1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1})} \quad (3-124)$$

求得极点  $z = e^{-T/T_\tau}$ , 显然  $z$  永远是大于零的。故得出结论: 在带纯滞后的一阶惯性环节组成的系统中, 数字控制器输出对输入的脉冲传递函数不存在负实轴上的极点, 这种系统不存在振铃现象。

### (2) 带纯滞后的二阶惯性环节

被控对象为带纯滞后的二阶惯性环节时, 其脉冲传递函数  $G(z)$  为式(3-119), 闭环系统的期望传递函数  $\Phi(z)$  仍为式(3-116), 把  $G(z)$  和  $\Phi(z)$  代入式(3-123)后有

$$\Phi_u(z) = \frac{\Phi(z)}{G(z)} = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau})(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})}{KC_1(1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1})\left(1 + \frac{C_2}{C_1} z^{-1}\right)} \quad (3-125)$$

式(3-125)有两个极点, 第一个极点在  $z = e^{-T/T_\tau}$ , 不会引起振铃现象; 第二个极点在  $z = -\frac{C_2}{C_1}$ 。由式(3-120), 在  $T \rightarrow 0$  时, 有

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left[ -\frac{C_2}{C_1} \right] = -1$$

说明可能出现负实轴上有与  $z = -1$  相近的极点, 这一极点将引起振铃现象。

### 2) 振铃幅度

振铃幅度(Ringing Amplitude, RA)用来衡量振铃强烈的程度。为了描述振铃强烈的程度, 应找出数字控制器输出量的最大值  $u_{\max}$ 。由于这一最大值与系统参数的关系难于用解析式描述, 所以常用单位阶跃作用下数字控制器第 0 次输出量与第 1 次输出量的差值来衡量振铃现象强烈的程度。

由式(3-123),  $\Phi_u(z) = \Phi(z)/G(z)$  是  $z$  的有理分式, 写成一般形式为

$$\Phi_u(z) = \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \quad (3-126)$$

在单位阶跃输入函数的作用下, 数字控制器输出量的  $z$  变换为

$$\begin{aligned} U(z) = R(z)\Phi_u(z) &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \cdot \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots} \\ &= \frac{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots}{1 + (a_1 - 1)z^{-1} + (a_2 - a_1)z^{-2} + \dots} \\ &= 1 + (b_1 - a_1 + 1)z^{-1} + \dots \end{aligned}$$

所以

$$RA = 1 - (b_1 - a_1 + 1) = a_1 - b_1 \quad (3-127)$$

对于带纯滞后的二阶惯性环节组成的系统, 其振铃幅度由式(3-125)可得

$$RA = \frac{C_2}{C_1} - e^{-T/T_\tau} + e^{-T/T_1} + e^{-T/T_2} \quad (3-128)$$

根据式(3-120)及式(3-128), 当  $T \rightarrow 0$  时, 可得

$$\lim_{T \rightarrow 0} RA = 2$$

### 3) 振铃现象的消除

有两种方法可用来消除振铃现象。第一种方法是先找出  $D(z)$  中引起振铃现象的因子 ( $z = -1$  附近的极点), 然后令其中的  $z = 1$ , 根据终值定理, 这样处理不影响输出量的稳态值。处理方法如下。

在带纯滞后的二阶惯性环节系统中, 数字控制器  $D(z)$  为

$$D(z) = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau})(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})}{K(C_1 + C_2 z^{-1})[1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1} - (1 - e^{-T/T_\tau}) z^{-N-1}]}$$

其极点  $z = -\frac{C_2}{C_1}$  将引起振铃现象。令极点因子  $(C_1 + C_2 z^{-1})$  中的  $z = 1$ , 就可消除这个振铃极点。

由式(3-120)得

$$C_1 + C_2 = (1 - e^{-T/T_1})(1 - e^{-T/T_2})$$

消除振铃极点  $z = -C_2/C_1$  后, 有

$$D(z) = \frac{(1 - e^{-T/T_\tau})(1 - e^{-T/T_1} z^{-1})(1 - e^{-T/T_2} z^{-1})}{K(1 - e^{-T/T_1})(1 - e^{-T/T_2})[1 - e^{-T/T_\tau} z^{-1} - (1 - e^{-T/T_\tau}) z^{-N-1}]}$$

这种消除振铃现象的方法虽然不影响输出稳态值, 但却改变了数字控制器的动态特性, 将影响闭环系统的瞬态性能。

第二种方法是从保证闭环系统的特性出发, 选择合适的采样周期  $T$  及系统闭环时间常数  $T_\tau$ , 使得数字控制器的输出避免产生强烈的振铃现象。从式(3-128)可以看出, 带纯滞后的二阶惯性环节组成的系统中, 振铃幅度与被控对象的参数  $T_1$ 、 $T_2$  有关, 与闭环系统期望的时间常数  $T_\tau$  以及采样周期  $T$  有关。通过选择适当  $T$  和  $T_\tau$ , 可以把振铃幅度抑制在最低限度以内。有的情况下, 系统闭环时间常数  $T_\tau$  作为控制系统的性能指标被首先确定了, 但仍可通过式(3-128)选择采样周期  $T$  来抑制振铃现象。

### 3. 达林算法的设计步骤

在具有纯滞后的系统中直接设计数字控制器所考虑的主要性能是控制系统不允许产生超调并要求系统稳定。系统设计中一个值得注意的问题是振铃现象。考虑振铃现象影响时设计数字控制器的一般步骤如下。

(1) 根据系统的性能, 确定闭环系统的参数  $T_\tau$ , 给出振铃幅度的指标。

(2) 由式(3-128)确定的振铃幅度与采样周期  $T$  的关系, 解出给定振铃幅度下对应的采样周期, 如果  $T$  有多解, 则选择较大的采样周期。

(3) 确定纯滞后时间  $\tau$  与采样周期  $T$  之比  $(\tau/T)$  的最大整数  $N$ 。

(4) 求广义对象的脉冲传递函数  $G(z)$  及闭环系统的脉冲传递函数  $\Phi(z)$ 。

(5) 求数字控制器的脉冲传递函数  $D(z)$ 。

## 习题与思考题

1. 数字控制器的连续化设计步骤是什么?
2. 某系统的连续控制器设计为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s}$$

试用双线性变换法、前向差分法、后向差分法分别求数字控制器  $D(z)$ ，并分别给出三种方法对应的递推控制算法。

3. 什么是数字 PID 位置型控制算法和增量型控制算法？试比较它们的优缺点。
4. 已知模拟调节器的传递函数为

$$D(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1 + 0.17s}{1 + 0.085s}$$

试写出相应数字控制器的位置型和增量型控制算式，设采样周期  $T = 0.2s$ 。

5. 什么叫积分饱和？它是怎样引起的？如何消除？
6. 选择采样周期需要考虑哪些因素？
7. 试叙述试凑法、扩充临界比例度法、扩充响应曲线法整定 PID 参数的步骤。
8. 数字控制器的离散化设计步骤是什么？
9. 对于单位负反馈系统，已知被控对象的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{10}{s(0.1s + 1)}$$

采样周期  $T = 1s$ ，采用零阶保持器。要求：

- (1) 针对单位阶跃输入信号设计最少拍有纹波系统的  $D(z)$ ，并计算输出响应  $y(k)$ 、控制信号  $u(k)$  和误差  $e(k)$  序列，画出它们对时间变化的波形；
  - (2) 针对单位速度输入信号设计最少拍无纹波系统的  $D(z)$ ，并计算输出响应  $y(k)$ 、控制信号  $u(k)$  和误差  $e(k)$  序列，画出它们对时间变化的波形。
10. 对于单位负反馈系统，已知被控对象的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{6}{s(s + 2)} e^{-2s}$$

采样周期  $T = 1s$ ，采用零阶保持器。要求：

针对单位速度输入信号设计最少拍无纹波系统的  $D(z)$ ，并计算输出响应  $y(k)$ 、控制信号  $u(k)$  和误差  $e(k)$  序列，画出它们对时间变化的波形。

11. 对于单位负反馈系统，被控对象的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{s^2}$$

采样周期  $T = 1s$ ，采用零阶保持器，针对单位速度输入函数，按以下要求设计：

- (1) 用最少拍无纹波系统的设计方法，设计  $\Phi(z)$  和  $D(z)$ ；
  - (2) 求出数字控制器输出序列  $u(k)$  的递推形式；
  - (3) 画出采样瞬间数字控制器的输出和系统的输出曲线。
12. 已知被控对象的传递函数为

$$G_c(s) = \frac{1}{s + 1} e^{-s}$$

采样周期  $T = 1s$ 。要求：

- (1) 对于单位负反馈系统，试用达林算法设计数字控制器  $D(z)$ ，并求取  $u(k)$  的递推形式。

(2) 请按图 3-25 所示结构,采用施密斯预估控制,求控制器的输出  $u(k)$ 。

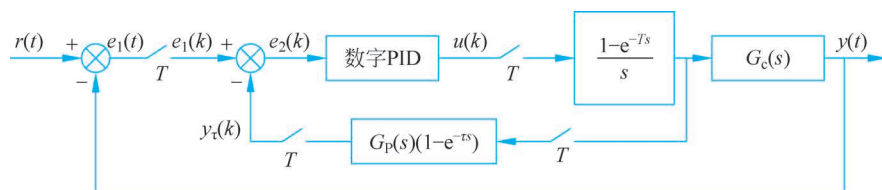


图 3-25 具有纯滞后补偿的控制系统