

# 第3章

## 控制系统的时域分析

### 电子与电气学科世界著名学者——维纳

诺伯特·维纳(Norbert Wiener, 1894—1964)

维纳是美国数学家,控制论的创始人。1948年维纳发表《控制论》,宣告了这门新兴学科的诞生。这是他长期艰苦努力并与生理学家罗森勃吕特等人多方面合作的伟大科学成果,维纳立即从声誉有限的数学家一跃成为一位国际知名人士。

维纳是一个名副其实的神童,他三岁半开始读书,生物学和天文学的初级科学读物就成了他在科学方面的启蒙书籍。7岁时,开始深入物理学和生物学的领域,甚至超出了他父亲的知识范围。维纳于15岁时获得塔夫茨学院数学系学士学位,并于18岁获哈佛大学哲学博士学位。他先后留学于英国剑桥大学和德国哥丁根大学,在罗素、哈代、希尔伯特等著名数学家指导下研究逻辑和数学。1924年维纳升任助理教授,1929年升为副教授,由于在广义调和分析和关于陶伯定理方面的杰出成就,1932年晋升为正教授。

维纳在其50年的科学生涯中,先后涉足哲学、数学、物理学和工程学,最后转向生物学,在各个领域中都取得了丰硕成果,称得上是恩格斯颂扬过的、20世纪多才多艺和学识渊博的科学巨人。他一生发表论文240多篇,著作14部。主要著作有《控制论》(1948)、《维纳选集》(1964)。维纳还有两本自传《昔日神童》和《我是一个数学家》。他的主要成果有如下八个方面:建立维纳测度;引进巴拿赫—维纳空间;阐述位势理论;发展调和分析;发现维纳—霍普夫方法;提出维纳滤波理论;开创维纳信息论;创立控制论。

1933年,维纳由于有关陶伯定理的工作与莫尔斯分享了美国数学会五年一次的博赫尔奖。同时,他当选为美国科学院院士。1934年,维纳应邀撰写了《复域上的傅里叶



变换》。不久,他当选为美国数学会副会长。1959年,维纳从麻省理工学院退休。1964年1月,他由于“在纯粹数学和应用数学方面并且勇于深入到工程和生物科学中去的多种令人惊异的贡献及在这些领域中具有深远意义的开创性工作”荣获美国总统授予的国家科学勋章。维纳是伽金汉基金会旅欧研究员,富布赖特研究员,英、德、法等国的数学会会员,担任过中国、印度、荷兰等国的访问教授。

### 3.1 引言

系统的时域分析指对控制系统的稳定性、暂态性能以及稳态性能分析。稳定性是控制系统工作的前提,不稳定的系统没有任何工程价值。对于不同的系统,例如线性的、非线性的、定常的、时变的系统,稳定性的定义也不同,本章仅讨论线性定常单输入单输出系统的稳定性。从控制系统分析和设计的角度来说有绝对稳定性和相对稳定性,绝对稳定指系统是否稳定,一旦系统是稳定的,则人们更关心其稳定的程度,这就是相对稳定性,相对稳定性一般用稳定裕度衡量。当系统受外加作用时引起的输出随时间的变化规律,称其为系统的时域响应,分为暂态响应和稳态响应。暂态响应是指当时间趋于无穷时系统输出量趋于零的那部分时间响应,工程上一般定义暂态响应为从初始状态到达某一规定值(例如偏离终值的误差值在终值的5%或2%以内)并且以后不再超过此值的这一部分时间响应过程,它反映控制系统的快速性和阻尼程度,由于系统物体的惯性都是无法避免的,因此人们常常可以观察到暂态现象。稳态响应则是整个响应在暂态响应消失后余下的那部分响应,主要指系统输出量的最终位置,它反映控制系统的准确性或控制精度,控制系统是按照稳态误差和误差系数的计算来表示控制精度的。

本章主要分析一阶和二阶线性定常系统在典型输入信号激励下的时域响应以及对应的时域性能指标,详细介绍单输入单输出线性定常系统的稳定性判断的劳斯稳定判据,也对稳定的控制系统的稳态误差以及误差系数的分析计算做详细的叙述,介绍提高控制系统精度的一般工程方法。对高阶线性系统的分析在一定条件下可以用主导极点的模型降阶方法来近似。本章还介绍如何利用MATLAB工具分析线性系统的性能。

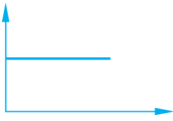
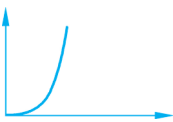
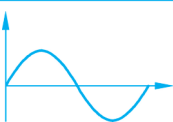
#### 3.1.1 典型输入信号

控制系统性能评价分为暂态性能指标和稳态性能指标两大类。对于同一系统,在不同的输入信号作用下会产生不同的输出响应,因此为了求解系统的时间响应,必须了解输入信号的解析表达式。然而,在一般情况下,控制系统的外加输入信号具有随机性而无法预先确定。因此,在分析和设计控制系统时,需要有一个对控制系统的性能进行比较的基准,这个基准就是系统对预先规定的具有典型意义的实验信号激励下的响应。为了评价控制系统的性能,需要选择若干个典型输入信号。另外,一个复杂的信号通常可看作是几个简单典型信号的合成。

所谓典型输入信号,是指控制系统分析与设计中常常遇到的一些输入信号,也是在数学描述上加以理想化的一些基本输入函数。选取典型信号应满足如下条件:首先,输入信号的形式应反映系统的实际输入;其次,输入信号在形式上应尽可能简单,应当是实验室或仿真可以获得以便于对系统响应进行分析的信号;另外,应选取能使系统工作在最不利情况

下的激励信号作为典型输入信号。控制系统中常用的典型输入信号有单位阶跃函数、单位斜坡(速度)函数、单位抛物线(加速度)函数、单位脉冲(冲激)函数和正弦函数等,如表 3.1 所示。

表 3.1 常用典型输入函数

| 名 称              | 时 域                        | 复 域                              | 信 号 图                                                                                |
|------------------|----------------------------|----------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------|
| 单位阶跃(unit step)  | $1(t), t \geq 0$           | $\frac{1}{s}$                    |   |
| 单位斜坡(ramp)       | $t, t \geq 0$              | $\frac{1}{s^2}$                  |   |
| 单位抛物线(parabolic) | $\frac{1}{2}t^2, t \geq 0$ | $\frac{1}{s^3}$                  |   |
| 单位脉冲(pulse)      | $\delta(t), t = 0$         | 1                                |   |
| 正弦(sinusoidal)   | $A \sin \omega t$          | $\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$ |  |

### 3.1.2 时域性能指标

稳定是系统工作的前提,只有系统是稳定的,分析系统的暂态和稳态性能以及性能指标才有意义。控制系统时域性能指标(time response specifications)分为暂态性能指标与稳态性能指标。

#### 1. 暂态性能指标

一般认为阶跃输入对系统来说是最严峻的工作状态,如果系统在阶跃函数作用下的暂态性能满足要求,那么系统在其他形式函数作用下的暂态性能也是令人满意的。为此,通常在阶跃函数作用下,测定或计算系统的暂态性能。

描述稳定的系统在阶跃函数作用下暂态过程随时间  $t$  的变化状况的指标,称为暂态性能指标。如图 3.1 所示为某一控制系统的阶跃响应,其暂态性能指标定义如下:

(1) 调节时间(settling time)  $t_s$ : 指阶跃响应到达并保持在其终值的  $\pm 5\%$  (或  $\pm 2\%$ ) 的误差带内所需时间。

(2) 峰值时间(peak time)  $t_p$ : 响应超过其终值到达第一个峰值所需时间。

(3) 上升时间(rise time)  $t_r$ : 响应从终值的  $10\%$  上升到终值的  $90\%$  所需时间。对振荡系统,工程上上升时间  $t_r$  定义为输出从零到第一次上升至终值所需时间。

(4) 超调量(peak overshoot)  $\sigma\%$ : 响应的最大峰值与终值的差与终值比的百分数,即

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - c(\infty)}{c(\infty)} \times 100\% \quad (3.1)$$

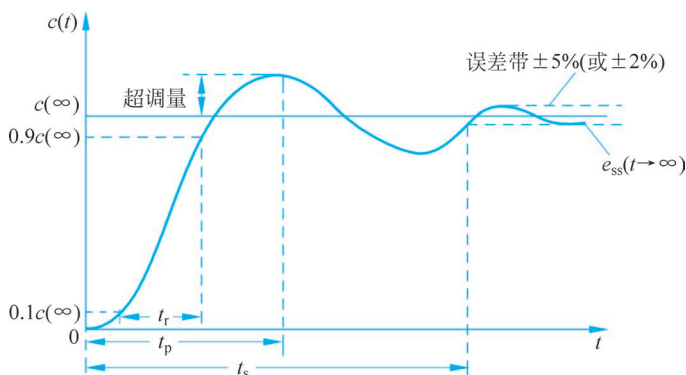


图 3.1 时域性能指标

超调量常常用来衡量控制系统的相对稳定性或阻尼程度,一般不希望控制系统有很大的超调。

在实际应用中,以上四个指标可以用来衡量控制系统的暂态特征,一般通过测量系统的阶跃响应,很容易得到这些指标。通常,用  $t_p$  或  $t_r$  评价响应速度;用  $\sigma\%$  评价系统的相对稳定程度或阻尼程度;用  $t_s$  同时反映响应速度和阻尼程度的综合性指标。除简单的一阶、二阶系统外,要精确确定这些暂态性能指标的解析表达式是很困难的。

## 2. 稳态性能指标

稳态误差  $e_{ss}$  是衡量系统控制精度或抗扰动能力的一种度量。工程上指控制系统进入稳态后( $t \rightarrow \infty$ )期望的输出与实际输出的差值,  $e_{ss}$  越小,控制精度越高。

# 3.2 控制系统时域分析

## 3.2.1 一阶系统的时域分析

可以用一阶微分方程描述的系统,称为一阶系统。一阶系统在控制工程实践中十分常见,有些高阶系统的特性,常可用一阶系统的特性近似表征。

考查如图 3.2 所示的 RC 电路,输出电压  $c(t)$  是电容器 C 两端的电压。该电路系统的数学模型为一阶常微分方程

$$T \frac{dc(t)}{dt} + c(t) = r(t)$$

其中,  $T=RC$  为时间常数,控制系统方框图如图 3.3 所示。其传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + Ts} \quad (3.2)$$

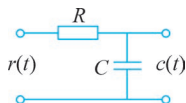


图 3.2 RC 电路

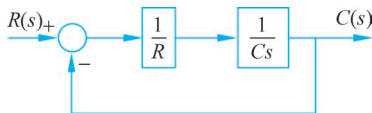


图 3.3 RC 电路方框图

## 1. 一阶系统的单位阶跃响应

当输入信号为单位阶跃信号  $r(t) = 1(t)$ ,  $t \geq 0$  时,系统的响应  $c(t)$  称为单位阶跃响应。

将单位阶跃输入的象函数  $R(s) = 1/s$  代入式(3.2), 并对输出取拉普拉斯反变换得到该一阶系统的单位阶跃响应

$$c(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad t \geq 0 \quad (3.3)$$

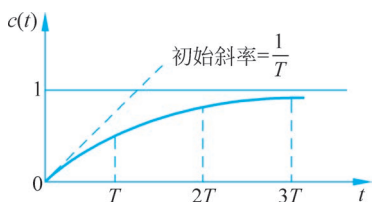


图 3.4 一阶系统单位阶跃响应

由式(3.3)绘出的系统单位阶跃响应为以指数规律上升到终值 1 的曲线, 如图 3.4 所示。其中,  $c(T) = 0.632$ ;  $c(2T) = 0.865$ ;  $c(3T) = 0.950$ ;  $c(4T) = 0.982$ 。显然按照 5% 或 2% 的误差带准则有调节时间  $t_s = (3 \sim 4)T$  (5% ~ 2% 误差带), 而  $t_p$ 、 $\sigma\%$  不存在。

综上所述, 时间常数  $T$  反映系统响应过程的快慢,  $T$  越小, 系统响应越快; 反之, 系统响应越慢。

## 2. 一阶系统的单位脉冲响应

当输入信号为单位脉冲或单位冲激信号  $r(t) = \delta(t)$  时, 系统的响应称为单位脉冲响应或单位冲激响应。因为理想单位脉冲函数的拉普拉斯变换为 1, 所以单位脉冲响应的拉普拉斯变换与系统的闭环传递函数相同, 即

$$C(s) = \Phi(s)R(s) \big|_{r(t)=\delta(t)} = \frac{1}{1 + Ts}$$

两边进行拉普拉斯反变换, 得

$$c(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (3.4)$$

由式(3.4)可知, 一阶系统的单位脉冲响应是非周期的单调递减函数, 当  $t=0$  时, 响应取最大值  $1/T$ ; 当  $t \rightarrow \infty$  时, 响应的幅值衰减为零。根据给出的误差带宽度可以求出调节时间  $t_s$ , 通常取  $t_s = (3 \sim 4)T$ 。一阶系统单位脉冲响应如图 3.5 所示。

## 3. 一阶系统的单位斜坡响应

当输入信号为单位斜坡或速度信号  $r(t) = t, t \geq 0$  时, 系统的响应称作单位斜坡响应。因为单位斜坡输入的拉普拉斯变换象函数为  $R(s) = 1/s^2$ , 所以由拉普拉斯反变换得到该一阶系统的单位斜坡时域响应表达式为

$$c(t) = (t - T) + T e^{-\frac{t}{T}} \quad (3.5)$$

式(3.5)表明, 一阶系统的单位斜坡响应可分为暂态分量和稳态分量两个部分, 其中  $T e^{-\frac{t}{T}}$  为暂态分量, 随时间的增加而逐渐衰减为零;  $(t - T)$  为稳态分量。一阶系统的单位斜坡响应如图 3.6 所示。

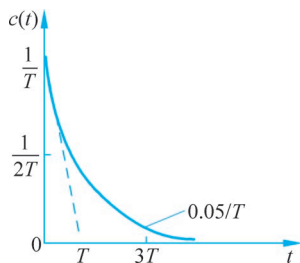


图 3.5 一阶系统单位脉冲响应

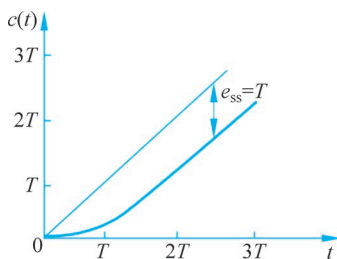


图 3.6 一阶系统单位斜坡响应

一阶系统单位斜坡响应的稳态误差  $e_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} (r(t) - c(t)) = T$ ,  $T$  越小跟踪准确度越高。

#### 4. 一阶系统的单位抛物线响应

当输入信号为单位抛物线或单位加速度信号  $r(t) = t^2/2, t \geq 0$  时, 因为单位抛物线输入信号拉普拉斯变换象函数为  $R(s) = 1/s^3$ , 所以由拉普拉斯反变换求得一阶系统的单位抛物线时域响应表达式为

$$c(t) = \frac{1}{2}t^2 - Tt + T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}}) \quad (3.6)$$

系统跟踪误差为

$$e(t) = r(t) - c(t) = Tt - T^2(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty$ , 即跟踪误差随时间增大而增大直至无穷大, 故该一阶系统不能实现对加速度输入函数的跟踪。

### 3.2.2 典型二阶系统的时域分析

如果动态系统的数学模型为二阶微分方程, 统称为二阶系统。在控制工程中, 二阶系统应用广泛, 而且许多高阶系统在一定条件下, 可以近似用二阶系统的特性来表征。因此, 二阶系统的性能分析, 在自动控制理论中有着重要的地位。

从第2章例2.4分析的位置随动系统, 其简化的数学模型为

$$T_m \frac{d^2 \theta_c}{dt^2} + \frac{d\theta_c}{dt} + K\theta_c = K\theta_r$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{\theta_c(s)}{\theta_r(s)} = \frac{K}{T_m s^2 + s + K}$$

将上式化为标准的典型二阶系统形式, 即

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.7)$$

其相应的方框图如图3.7所示, 其中, 无阻尼自然振荡

频率(undamped natural frequency)  $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{T_m}}$ , 阻尼比

(damping factor)  $\zeta = \frac{1}{2\sqrt{T_m K}}$ 。

典型二阶系统的特征方程为

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \quad (3.8)$$

于是特征根为

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_d = -\sigma \pm j\omega_d \quad (3.9)$$

其中, 特征根的实部为  $\sigma = \zeta\omega_n$ , 阻尼自然振荡频率(damped natural frequency)  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  ( $\zeta < 1$ )。

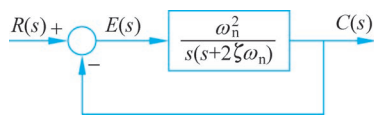


图 3.7 典型二阶系统

### 1. 典型二阶系统的单位阶跃响应

典型二阶系统特征根的性质主要取决于  $\zeta$  值的大小,  $\zeta$  值的大小决定了系统的阻尼程度。  $\zeta$  在不同范围取值时, 二阶系统的特征根在  $s$  平面上的位置不同, 典型二阶系统的时间响应对应着不同的运动规律。

#### 1) 欠阻尼 ( $0 < \zeta < 1$ )

此时典型二阶系统在左半  $s$  平面有一对共轭复根, 如图 3.8(a) 所示。当输入为单位阶跃信号  $R(s) = 1/s$  时, 由式(3.7)得到

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

两边分别取拉普拉斯反变换得

$$\begin{aligned} c(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left[ \cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d t \right] \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t + \beta), t > 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中,  $\beta = \arctan \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$  或  $\beta = \arccos \zeta$ 。

式(3.10)表明, 欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应由两部分组成: 稳态响应分量为 1, 表明典型二阶系统在单位阶跃函数作用下不存在稳态误差; 暂态分量为阻尼正弦振荡项, 其振荡频率为  $\omega_d$ 。暂态分量衰减的快慢程度取决于包络线  $1 \pm \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$  的收敛速度。

式(3.10)所对应的典型二阶系统欠阻尼情况下的单位阶跃响应如图 3.8(b) 所示。

#### 2) 无阻尼 ( $\zeta = 0$ )

此时典型二阶系统在  $s$  平面上有一对纯虚根, 即  $s_{1,2} = \pm j\omega_n$ 。

由式(3.7)并对输出取拉普拉斯反变换, 得到其单位阶跃响应为

$$c(t) = 1 - \cos\omega_n t, t \geq 0 \quad (3.11)$$

无阻尼系统的闭环极点分布和单位阶跃响应如图 3.9 所示, 其单位阶跃响应表现为等幅振荡。典型二阶系统的无阻尼响应不存在暂态过程, 在阶跃函数作用下, 系统立刻进入稳态的等幅振荡过程, 振荡频率为系统的自然振荡频率  $\omega_n$ 。

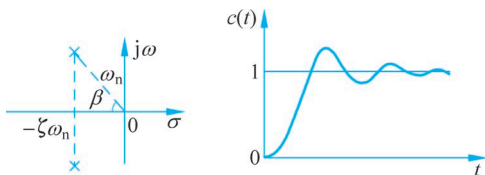


图 3.8 欠阻尼系统

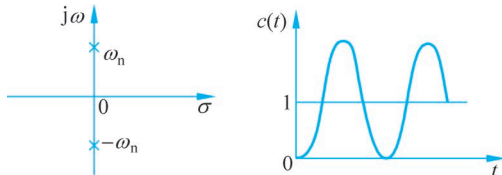


图 3.9 无阻尼系统

#### 3) 临界阻尼 ( $\zeta = 1$ )

此时典型二阶系统在左半  $s$  平面上有一对相等的负实根:  $s_{1,2} = -\omega_n$ 。于是, 用同样的计算方法得到其单位阶跃响应为

$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2} = \frac{1}{s} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2} - \frac{1}{s + \omega_n}$$

两边取拉普拉斯反变换得

$$c(t) = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t), \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

临界阻尼典型二阶系统闭环极点分布和阶跃响应如图 3.10 所示。

典型二阶系统的临界阻尼响应是按指数规律单调增加的,没有超调量。经过调节时间  $t_s$  的调节,系统进入稳态,其稳态分量等于系统的输入量,稳态误差为零。

4) 过阻尼 ( $\zeta > 1$ )

此时典型二阶系统在左半  $s$  平面上有两个不等的负实根

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1} = -\frac{\zeta}{T} \pm \frac{1}{T} \sqrt{\zeta^2 - 1} \triangleq -\frac{1}{T_1}, \quad -\frac{1}{T_2}$$

此时,系统的单位阶跃响应为

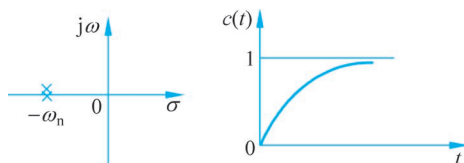
$$C(s) = \frac{\omega_n^2}{s \left(s + \frac{1}{T_1}\right) \left(s + \frac{1}{T_2}\right)}$$

$$\text{其中, } T = \frac{1}{\omega_n}, T_1 = \frac{T}{(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})}, T_2 = \frac{T}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}, T_1 > T_2$$

对应的时域响应为

$$c(t) = 1 + \frac{e^{-t/T_1}}{T_2/T_1 - 1} + \frac{e^{-t/T_2}}{T_1/T_2 - 1}, \quad t \geq 0 \quad (3.13)$$

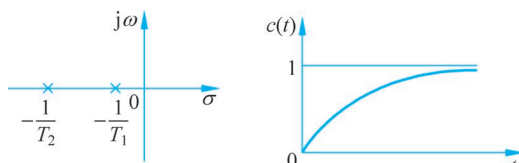
过阻尼典型二阶系统的闭环极点分布和阶跃响应如图 3.11 所示。



(a) 闭环极点分布

(b) 阶跃响应

图 3.10 临界阻尼系统



(a) 闭环极点分布

(b) 阶跃响应

图 3.11 过阻尼系统

由式(3.13)可知,过阻尼情况下,二阶系统可等效为两个惯性环节的串联,时间响应的暂态分量为两个衰减的指数项,响应的稳态分量为 1。响应曲线与临界阻尼一样,也是按指数规律单调增加的,但调节速度更慢。如果两个特征根的绝对值相差很大(3 倍以上),可以将过阻尼二阶系统简化为一阶系统近似分析。

下面以  $\zeta = 0, 0.3, 1, 1.5$  为例,用 MATLAB 解得典型二阶系统单位阶跃响应,程序为

```
clear
Wn=1;yy=[ ];t=0:0.01:12;zet=[0,0.3,1,1.5];
for z=zet
    if z==0,y=1-cos(Wn*t);
    elseif (z>0&z<1);
        Wd=Wn*sqrt(1-z^2);th=atan(sqrt(1-z^2)/z);
        y=1-exp(-z*Wn*t). * sin(Wd*t+th)/sqrt(1-z^2);
    elseif z==1,y=1-(1+Wn*t). * exp(-Wn*t);
    elseif z>1,
```

```

dd = sqrt(z^2 - 1); lam1 = -z - dd; lam2 = -z + dd;
y = 1 - 0.5 * Wn * (exp(lam1 * t)/lam1 - exp(lam2 * t)/lam2)/dd;
end
yy = [yy; y];
end
plot(t, yy), grid

```

对应的单位阶跃响应曲线如图 3.12 所示。

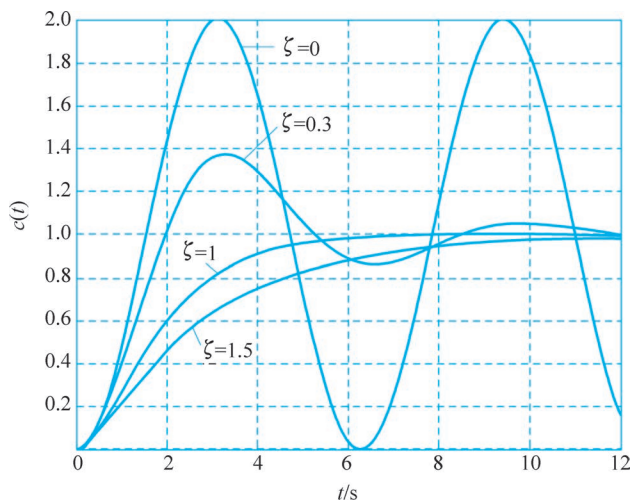


图 3.12 典型二阶系统单位阶跃响应

## 2. 欠阻尼典型二阶系统的时域性能指标

根据系统时域性能指标的定义和典型二阶系统欠阻尼单位阶跃响应的表达式,可以导出典型二阶线性常微分系统性能指标的计算式,此计算式是通过其特征参数  $\zeta$  和  $\omega_n$  表达的,但要注意的是对高阶系统很难得出精确解析的性能指标计算公式,工程上一般可采用计算机仿真技术获得。

### 1) 上升时间 $t_r$

在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应式(3.10)中,令  $c(t_r)=1$ ,解得上升时间为

$$t_r = \frac{\pi - \beta}{\omega_d} \quad (3.14)$$

其中,  $\beta = \arccos \zeta$ ,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。

由式(3.14)可见,当阻尼比  $\zeta$  一定时,阻尼角  $\beta$  不变,上升时间  $t_r$  与自然振荡频率  $\omega_n$  成反比;当自然振荡频率  $\omega_n$  一定时,随着阻尼比  $\zeta$  的减小,上升时间  $t_r$  减小。

### 2) 峰值时间 $t_p$

在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应式(3.10)中,令导数  $c'(t)|_{t=t_p} = 0$ ,即  $\sin(\omega_d t + \beta) \cos \beta - \cos(\omega_d t + \beta) \sin \beta = 0$ ,整理得

$$\sin \omega_d t = 0$$

解得第一个峰值时间为

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.15)$$

其中,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$ 。

由峰值时间公式可见,当阻尼比  $\zeta$  一定时,峰值时间  $t_p$  与自然振荡频率  $\omega_n$  成反比,随着  $\omega_n$  的增大,  $t_p$  减小;当自然振荡频率  $\omega_n$  一定时,随着阻尼比  $\zeta$  的增大,  $t_p$  增大。

### 3) 超调量 $\sigma\%$

在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应中将峰值时间  $t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$  代入式(3.10)中得输出量的最大值

$$c(t_p) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\pi + \beta)$$

又由于  $\sin(\pi + \beta) = -\sqrt{1-\zeta^2}$ , 代入上式得

$$c(t_p) = 1 + e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$$

所以由超调量定义公式得到欠阻尼二阶系统的超调量为

$$\sigma\% = \frac{c(t_p) - 1}{1} \times 100\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \times 100\% \quad (3.16)$$

由式(3.16)可知,超调量  $\sigma\%$  仅与阻尼比  $\zeta$  有关,而与自然频率  $\omega_n$  无关。当  $\zeta$  减小,则  $\sigma\%$  增大,  $t_r$ 、 $t_p$  减小;特别地,当  $\zeta=0$  时,  $\sigma\%=100\%$ , 当  $\zeta=1$  时,  $\sigma\%=0$ 。工程上一般选取  $\zeta=0.4\sim 0.8$ ,  $\sigma\%$  介于  $25\%\sim 1.5\%$  之间。当  $\zeta=0.707$  时,  $\sigma\%=4.3\%$ , 此时称为工程最佳。

### 4) 调节时间 $t_s$

计算在欠阻尼典型二阶系统的单位阶跃响应  $c(t)$  达到误差为  $\pm 0.05$  或  $\pm 0.02$  时的时间,可用包络线来计算,如图 3.13 所示。如果令  $\Delta$  代表实际响应与稳态输出之间的误差,则有

$$\Delta = \left| \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t + \beta) \right| \leq \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

于是由包络线  $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.05$  ( $\pm 0.05$  误差) 或

$\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_s} = 0.02$  ( $\pm 0.02$  误差), 解得

$$\begin{cases} t_s = -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(0.05\sqrt{1-\zeta^2}), & (5\% \text{ 误差}) \\ t_s = -\frac{1}{\zeta\omega_n} \ln(0.02\sqrt{1-\zeta^2}), & (2\% \text{ 误差}) \end{cases} \quad (3.17)$$

当  $\zeta$  较小时,  $\sqrt{1-\zeta^2} \approx 1$ , 于是式(3.17)近似为

$$t_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad (5\% \text{ 误差}) \quad \text{或} \quad t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (2\% \text{ 误差}) \quad (3.18)$$

由调节时间公式(3.18)看出,调节时间与闭环极点的实部  $\zeta\omega_n$  数值成反比,意味着极点离虚轴之间的距离越远,系统的调节时间就越短,响应越快;或者说当  $\omega_n$  一定时,随着阻尼比  $\zeta$  增大,调节时间  $t_s$  减小,这与  $t_r$ 、 $t_p$  随着  $\zeta$  的增大而增大刚好相反。

综上所述,快速性与系统的阻尼程度之间的性能指标是有矛盾的,设计控制系统时应折

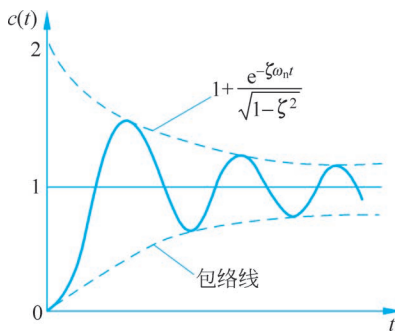


图 3.13 欠阻尼二阶系统的包络线

中考虑。

5) 振荡次数  $N$

定义振荡次数

$$N = \frac{t_s}{T_d} \quad (3.19)$$

其中,典型二阶系统的阻尼振荡周期时间为  $T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$ ,  $t_s \approx \frac{3 \sim 4}{\zeta \omega_n}$ , 考虑到  $\sigma\% = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}$ , 代入式(3.19)得到

$$N \approx -\frac{(3 \sim 4)/2}{\ln \sigma\%}$$

当  $\zeta = 0.707 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  时,如果误差带取 2%,则  $N = -\frac{4/2}{\ln \sigma} = 2$  次,或如果误差带取 5%,则

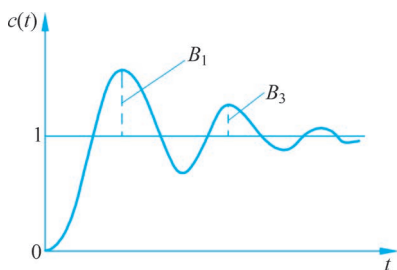


图 3.14 衰减比

$N = -\frac{3/2}{\ln \sigma} = 1.5$  次。意味着工程控制中如果调整控制系统振荡次数为 1.5~2 次,此时,认为控制系统有比较好的暂态性能和稳态性能。

工程设计中也常常设计控制系统的衰减比  $n = \frac{B_1}{B_3} = 4:1$ ,或衰减率  $\eta = \frac{B_1 - B_3}{B_1} = 0.75$ ,如图 3.14 所示,此时,也认为控制系统有比较好的暂态性能和稳态性能。这一点在后续过程控制课程中会进一步学到。

### 3. 典型二阶系统系统的单位脉冲响应

1) 单位脉冲响应

典型二阶系统在单位脉冲信号激励下的输出称为单位脉冲响应。

由于  $\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}$ ,  $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ , 所以典型二阶系统的单位脉冲响应的拉普拉斯变换与其闭环传递函数相同,于是有

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[s \cdot G(s) \frac{1}{s}\right] = \frac{dh(t)}{dt} \quad (3.20)$$

其中,  $g(t)$  为单位脉冲响应,  $h(t)$  为单位阶跃响应。式(3.20)说明线性定常系统的单位脉冲响应必为单位阶跃响应函数对时间的导数。于是得到以下几种情况下的单位脉冲响应:

(1) 当为欠阻尼  $0 \leq \zeta < 1$  时,典型二阶系统的单位脉冲响应为式(3.10)的导数,即

$$g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin \omega_d t \quad (3.21a)$$

其中,  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$ 。

(2) 当为临界阻尼  $\zeta = 1$  时,典型二阶系统的单位脉冲响应为式(3.12)的导数,即

$$g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t} \quad (3.21b)$$

(3) 当为过阻尼  $\zeta > 1$  时,典型二阶系统的单位脉冲响应为式(3.13)的导数,即

$$g(t) = \frac{e^{-t/T_1}}{T_1 - T_2} + \frac{e^{-t/T_2}}{T_2 - T_1} \quad (3.21c)$$

不同阻尼比情况的单位脉冲响应如图 3.15(a)所示。

## 2) 性能指标

下面进一步讨论欠阻尼典型二阶系统( $0 < \zeta < 1$ )的性能指标:

在欠阻尼  $0 \leq \zeta < 1$  典型二阶系统的单位脉冲响应公式(3.21a)中,令  $g(t) = 0$ ,得  $\sin \omega_d t = 0$ ,此时对应的第一个过零点时刻为

$$t = \frac{\pi}{\omega_d} = t_p \quad (3.22)$$

即欠阻尼典型二阶系统单位脉冲响应的第一个过零点时间即为欠阻尼典型二阶系统单位阶跃响应的峰值时间  $t_p$ 。

欠阻尼典型二阶系统单位脉冲响应的第一个波头面积为欠阻尼典型二阶系统单位阶跃响应的超调量  $\sigma\%$  加 1,如图 3.15(b)所示,用式(3.23)表示为

$$S = \int_0^{t_p} g(t) dt = 1 + e^{-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 1 + \sigma\% \quad (3.23)$$

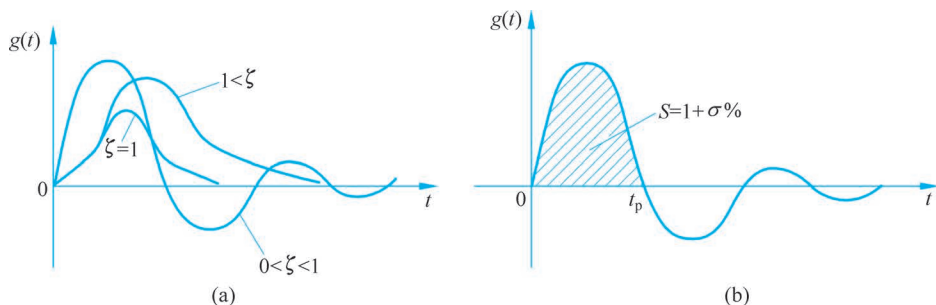


图 3.15 典型二阶欠阻尼系统单位脉冲响应与性能指标

**例 3.1** 某一闭环控制系统如图 3.16(a)所示,其单位脉冲响应如图 3.16(b)所示。试计算控制器增益  $K$  和速度微分系数  $\tau$ ,并计算恒速输入( $1.5^\circ/\text{s}$ ,即  $\theta_r = 1.5t^\circ$ )时的  $e_{ss}$ 。

本题作为思考题请读者自行完成。

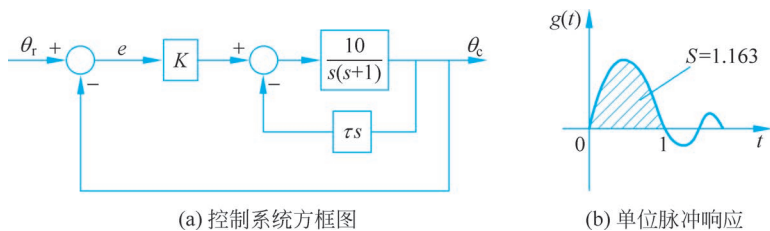


图 3.16 例 3.1 图

**例 3.2** 已知某系统的单位脉冲响应为  $g(t)$ ,如图 3.17 所示。

(1) 求该系统的传递函数;

(2) 若输入信号为  $r = \sin 2\pi t, (t \geq 0)$ ,求系统的输出响应  $c(t)$ 。

**解** 前面已经学习了如果已知系统的阶跃响应  $h(t)$ ,可得系统的

脉冲响应为  $g(t) = \frac{dh(t)}{dt}$ ,如果已知系统的单位脉冲响应  $g(t)$ ,

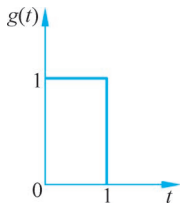


图 3.17 单位脉冲响应

可以由卷积积分公式计算在任意输入激励下的响应,即

$$c(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau$$

$$(1) \text{ 计算系统的传递函数 } G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-st}dt = \int_0^1 e^{-st}dt = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

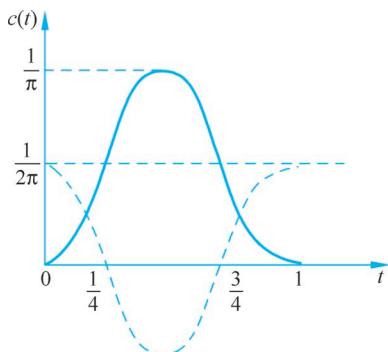


图 3.18 例 3.2 图响应

$$(2) \text{ 利用卷积公式 } c(t) = \int_0^t g(t-\tau)r(\tau)d\tau, \text{ 当}$$

$t \leq 1$  时

$$c(t) = \int_0^t \sin 2\pi(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2\pi}[1 - \cos 2\pi t]$$

当  $t > 1$  时

$$c(t) = \int_0^1 \sin 2\pi(t-\tau)d\tau = 0$$

$c(t)$  的最大值为  $\frac{1}{\pi}$ , 稳态值为 0。当  $t \geq 1$  时, 系统进

入稳态, 该系统的正弦信号响应如图 3.18 的实线所示。

### 3.2.3 高阶系统的时域分析

在自动控制理论中, 数学模型用三阶或三阶以上微分方程描述的控制系统, 称为高阶系统。由于高阶微分方程求解的复杂性, 高阶系统精确的时域分析和解析的性能指标计算是比较困难的。在系统时域分析中, 主要对高阶系统做定性分析, 或者应用所谓闭环主导极点的概念, 把一些高阶系统简化为低阶系统, 实现对其时间响应性能的近似估计。高阶系统精确的时间响应及其性能指标的计算, 可借助 MATLAB 等仿真工具计算和实现。

#### 1. 高阶系统的单位阶跃响应

一个  $n$  阶线性常微分方程系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{M(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1s + b_0}{a_ns^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0}$$

$$= \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i)}, m \leq n \quad (3.24)$$

当输入为单位阶跃  $r(t) = 1(t) (t > 0)$  即  $R(s) = 1/s$  时, 由式(3.24)将系统的输出改写为

$$C(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s \prod_{j=1}^q (s - s_j) \prod_{k=1}^r (s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2)}$$

其中,  $q + 2r = n$ ; 它有  $q$  个实极点,  $r$  对共轭复数极点。

将上式展开成部分分式形式, 并设  $0 < \zeta_k < 1$ , 可得

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \sum_{j=1}^q \frac{A_j}{s - s_j} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\zeta_k \omega_k s + \omega_k^2}$$

其中,  $A_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sC(s) = \frac{b_0}{a_0}$ ;  $A_j = \lim_{s \rightarrow s_j} (s - s_j)C(s)$ ;  $B_k$  和  $C_k$  是与  $C(s)$  在闭环复数极点  $s_{1,2} = -\zeta_k \omega_k \pm j\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}$  处的留数有关的常系数。

对  $C(s)$  取拉普拉斯反变换, 并设系统初始条件为零, 得到高阶线性定常系统的单位阶跃响应的时间表达式为

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(s)] = A_0 + \sum_{j=1}^q A_j e^{s_j t} + \sum_{k=1}^r B_k e^{-\zeta_k \omega_k t} \cos(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) + \sum_{k=1}^r \frac{C_k - B_k \zeta_k \omega_k}{\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\zeta_k \omega_k t} \sin(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t) \quad (3.25)$$

在  $c(t)$  的表达式中, 第一项是其阶跃响应的稳态分量, 对单位反馈控制系统, 该分量等于系统阶跃输入信号的幅值。第二项是与系统的实极点对应的  $q$  个暂态分量之和, 各分量均具有与一阶系统类似的时间响应, 即按指数规律单调变化的响应。最后两项是与系统的共轭复数极点对应的  $r$  个暂态分量之和, 各分量均具有与二阶系统类似的动态过程, 即按指数规律变化的振荡形式。

显然, 如果所有闭环极点都位于左半  $s$  平面, 则系统时间响应的各暂态分量都将随时间的增长而趋于零, 这时系统是稳定的, 其稳态值为  $A_0$ ; 同时, 对于稳定的高阶系统, 闭环极点负实部的绝对值越大, 其对应的暂态分量衰减得越快, 反之, 则衰减越慢。

## 2. 高阶系统二阶近似问题

这是一个主导极点(dominant poles)或模型降阶问题。在稳定的高阶系统中, 对于其时间响应起主导作用的闭环极点, 称为主导极点; 相应地, 其他闭环极点称为非主导极点。

设一个  $n$  阶线性定常系统的闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0} = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

如果  $p_i$  是单极点, 则单位阶跃响应为

$$c(t) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t} \quad (3.26)$$

其中,  $A_0 = sC(s)|_{s=0}$ ,  $A_i = (s - p_i)C(s)|_{s=p_i}$ 。

分析:

(1) 如果  $\Phi(s)$  中某一零点  $z_r$  与某一极点  $p_k$  相距很近, 即

$$|p_k - z_r| \ll |p_i - z_j|$$

其中,  $i = 1 \cdots n$ ,  $j = 1 \cdots m$ , 且  $(i, j) \neq (k, r)$ , 则

$$A_k = (s - p_k)C(s)|_{s=p_k} = \frac{K(p_k - z_1) \cdots (p_k - z_r) \cdots (p_k - z_m)}{(p_k)(p_k - p_1) \cdots (p_k - p_n)}$$

$$A_i = \frac{K(p_i - z_1) \cdots (p_i - z_r) \cdots (p_i - z_m)}{(p_i)(p_i - p_1) \cdots (p_i - p_n)}$$

显然,  $|A_k| \ll |A_i|$ 。这表明如果系统传递函数中有一零点离某一极点很近, 则该极点对

应的响应成分所占比重很小,好像该极点被离它很近的零点“抵消”。如果  $z_r$  与  $p_k$  重合,则  $A_k=0$ 。

综上所述,如果系统传递函数中某个极点与某个零点相距很近,则在控制系统分析和设计中可以去掉该对零极点,相当于系统阶次降低了,以便简化分析和设计控制系统。

(2) 如果  $\Phi(s)$  中某一极点  $p_k$  距离原点很远,即

$$|p_k| \gg |p_i|, |p_k| \gg |z_j|, \quad i=1 \cdots n, j=1 \cdots m, i \neq k$$

则有

$$|p_k - p_i| \approx |p_k|, \quad i=1 \cdots n, i \neq k$$

$$|p_k - z_j| \approx |p_k|, \quad j=1 \cdots m$$

此时

$$A_k = (s - p_k)C(s) \Big|_{s=p_k} = \frac{K(p_k - z_1) \cdots (p_k - z_r) \cdots (p_k - z_m)}{(p_k)(p_k - p_1) \cdots (p_k - p_n)}$$

$$\approx \frac{K(p_k)^m}{(p_k)^n} = K \frac{1}{(p_k)^{n-m}} \rightarrow 0$$

显然  $A_k$  与  $A_i = \frac{K(p_i - z_1) \cdots (p_i - z_r) \cdots (p_i - z_m)}{(p_i)(p_i - p_1) \cdots (p_i - p_n)}$  相比,当  $n > m$  时,有  $|A_k| \ll |A_i|$ 。

这表明,远离原点的极点所对应的响应影响很小。零极点分布对暂态响应的影响如图 3.19 所示,距虚轴最近且近邻无零点的系统极点,其对应的暂态响应分量衰减最慢,幅值也大,对系统起主导作用,这样的极点称为主导极点。引入主导极点概念后,可将高阶系统近似为低阶(二阶或一阶)系统。模型降阶是一复杂问题,有关一些标准的方法可以参考其他文献资料。

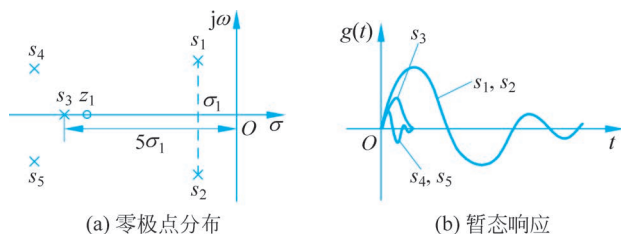


图 3.19 零极点分布对暂态响应的影响

### 3.2.4 MATLAB 分析控制系统时域响应

**例 3.3** 飞机滚转控制系统,如图 3.20 所示,试用 MATLAB 的 Simulink 计算其单位阶跃响应。

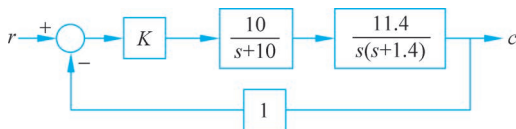


图 3.20 飞机滚转控制系统

**解** 用 MATLAB-Simulink 编程如图 3.21 所示。如果  $K=0.1$ , 对应的仿真结果如图 3.22 所示。

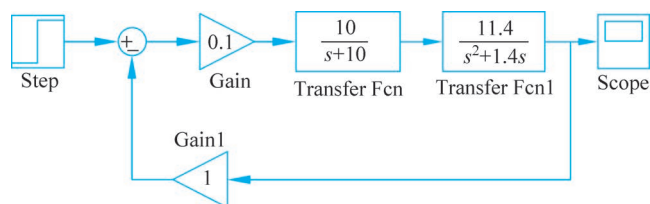


图 3.21 飞机滚转控制系统 Simulink 模型

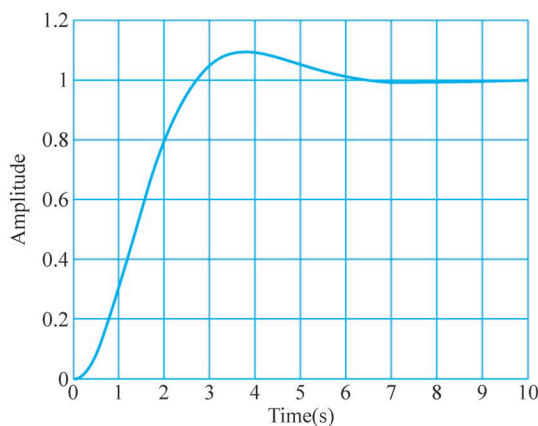


图 3.22 飞机滚转控制系统仿真结果

**例 3.4** 磁盘驱动读写系统,如图 3.23 所示,试设计放大器增益  $K_a$ ,使系统满足如下要求:  $\sigma\% < 5\%$ ,  $t_s \leq 250\text{ms}$ ,单位阶跃扰动下的响应最大值  $\leq 5 \times 10^{-3}$ 。

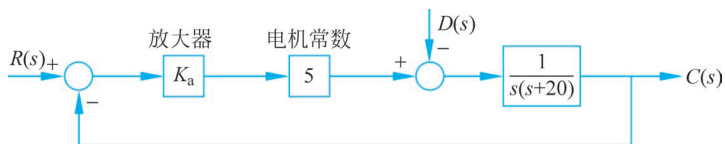


图 3.23 磁盘驱动读写系统

**解** 当  $K_a = 30$  或  $K_a = 60$  时,系统单位阶跃响应的 MATLAB 程序为

```
clear
Ka = 30;
t = [0:0.01:1];
nc = [Ka * 5]; dc = [1]; sysc = tf(nc, dc);
ng = [1]; dg = [1 20 0]; sysg = tf(ng, dg);
sys = series(sysc, sysg);
sys1 = feedback(sys, [1]);
Ka = 60;
nc = [Ka * 5]; dc = [1]; sysc = tf(nc, dc);
ng = [1]; dg = [1 20 0]; sysg = tf(ng, dg);
sys = series(sysc, sysg);
sys2 = feedback(sys, [1]);
step(sys1, sys2, ' -- ');
legend('Ka = 30', 'Ka = 60');
grid
```

得到系统在单位阶跃信号作用下的仿真结果如图 3.24 所示。

当  $K_a = 30$  或  $K_a = 60$  时,系统在单位阶跃扰动下的 MATLAB 程序如下:

```

clear
Ka = 30;
t = [0:0.01:1];
nc = [Ka * 5]; dc = [1]; sysc = tf(nc, dc);
ng = [1]; dg = [1 20 0]; sysg = tf(ng, dg);
sys1 = feedback(sysg, sysc);
sys1 = - sys1;
Ka = 60; nc = [Ka * 5]; dc = [1]; sysc = tf(nc, dc);
ng = [1]; dg = [1 20 0]; sysg = tf(ng, dg);
sys2 = feedback(sysg, sysc);
sys2 = - sys2;
step(sys1, sys2, ' -- ');
legend('Ka = 30', 'Ka = 60');
grid

```

得到系统在单位阶跃扰动下仿真结果如图 3.25 所示。

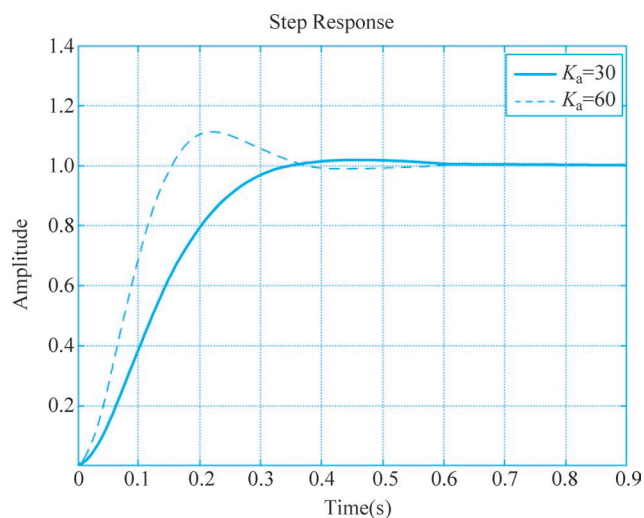


图 3.24 例 3.4 单位阶跃响应

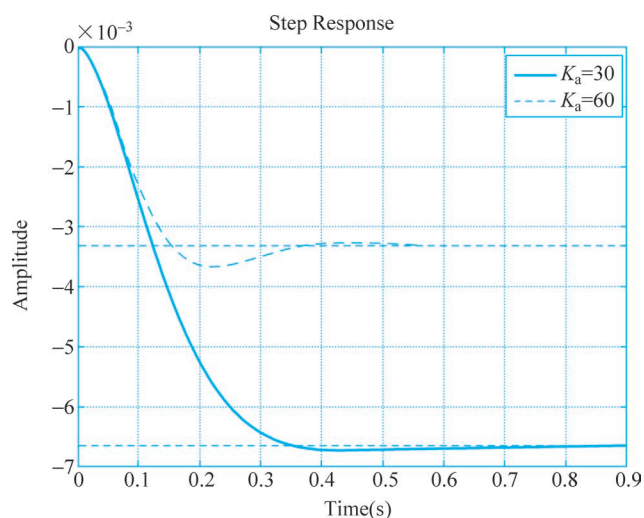


图 3.25 例 3.4 单位阶跃扰动的影响

由仿真结果可得：当  $K_a=30$  时，系统的超调量  $\sigma\%=1.2\%$ ，调节时间  $t_s=0.4$ ，在单位阶跃扰动下的最大输出  $c_d(t)_{\max}=-6.6\times 10^{-3}$ 。

当  $K_a=60$  时，系统的超调量  $\sigma\%=10.8\%$ ，调节时间  $t_s=0.4$ ，在单位阶跃扰动下的最大输出  $c_d(t)_{\max}=-3.7\times 10^{-3}$ 。

如果不满足性能指标要求，可以再进行微调即可满足设计要求。

**例 3.5** 对于例 3.4 中的系统，求  $K_a=60$  时的单位脉冲响应。

**解** MATLAB 仿真程序为

```
clear
Ka = 60;
t = [0:0.01:1];
nc = [Ka * 5]; dc = [1]; sysc = tf(nc, dc);
ng = [1]; dg = [1 20 0]; sysg = tf(ng, dg);
sys1 = series(sysc, sysg);
sys = feedback(sys1, [1]);
impulse(sys, t);
grid
```

系统仿真结果如图 3.26 所示。

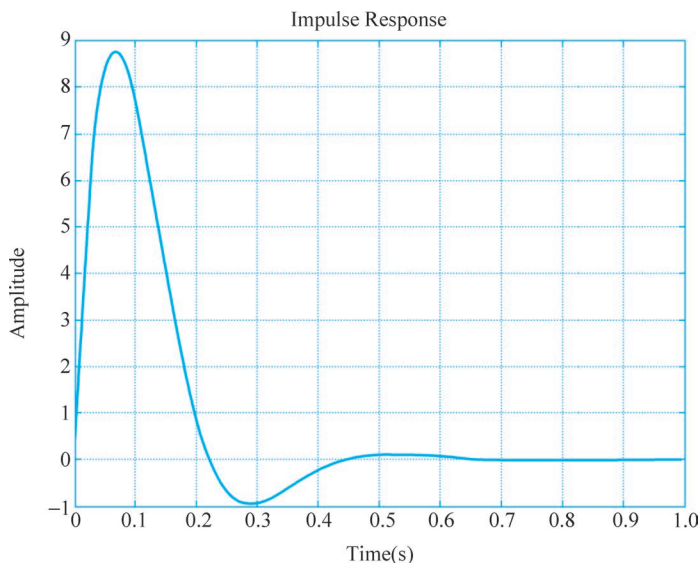


图 3.26 磁盘驱动读写系统的脉冲响应

**例 3.6** 对于例 3.4 中的系统，求  $K_a=60$  时，系统在如图 3.27 所示输入函数作用下的响应。

**解** 由图 3.27 可得输入函数： $u(t)=r(t)-r(t-1)-r(t-2)+r(t-3)$  系统的 Simulink 仿真程序如图 3.28(a) 所示；仿真结果如图 3.28(b) 所示。

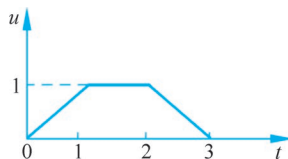
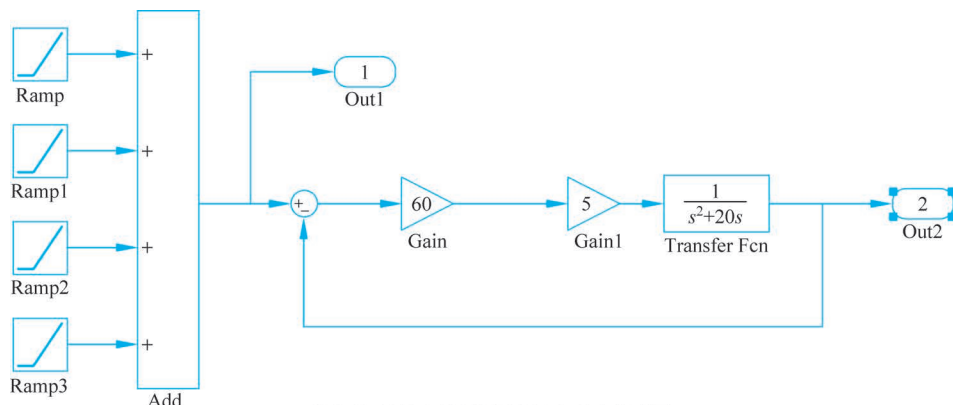


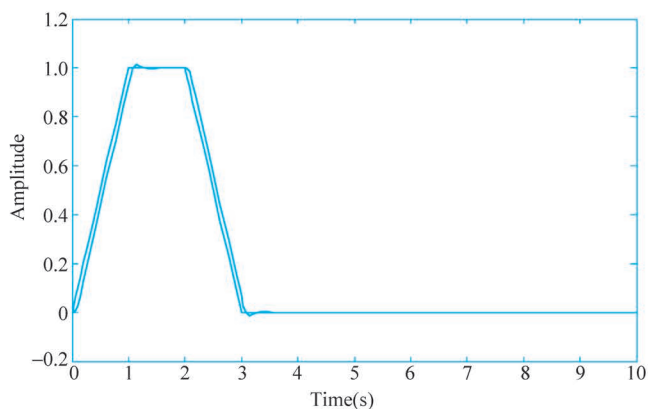
图 3.27 输入函数

**例 3.7** 用 MATLAB 命令计算任意输入响应。

**解** 使用 MATLAB “lsim” 命令可以计算系统在任意输入激励下的响应。例如考查系统  $G(s)=\frac{3}{s+1}$  在正弦输入信号  $r(t)=2\sin(10t)$  作用下的响应，MATLAB 程序如下：



(a) 磁盘驱动读写系统的任意输入响应仿真图



(b) 输入和输出信号

图 3.28 例 3.6 题仿真程序及结果

```
h = tf([3],[1 1]);
t = 0:0.01:5;
r = 2 * sin(10 * t);
lsim(h,r,t)
```

得到系统输出响应为图 3.29。

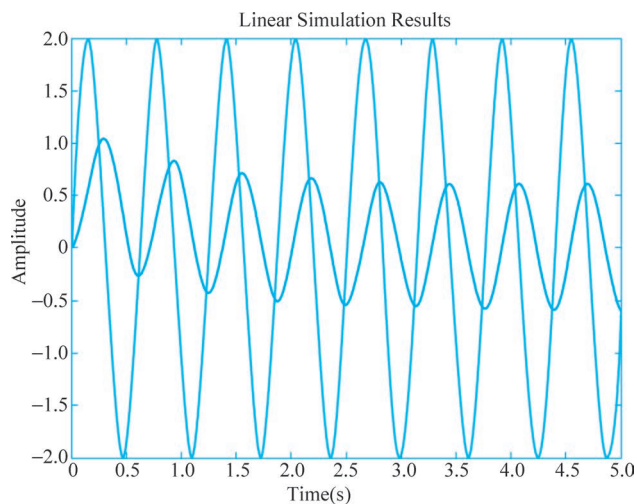


图 3.29 例 3.7 系统的正弦输入响应

### 3.3 线性定常系统的稳定性分析

#### 3.3.1 稳定性定义及线性定常系统稳定的充分必要条件

控制系统的稳定性是相当重要的,不稳定的系统是没有意义的。但对于不同的系统,如线性的、非线性的、定常的、时变的系统而言,稳定性的定义也是不同的。本节只讨论 SISO 线性连续时间定常系统的稳定性。

##### 1. 有界输入、有界输出(BIBO)稳定性

如果某系统在一个有界输入或扰动作用下其响应也是有界的,称该系统是有界输入有界输出(BIBO)稳定的,简称系统稳定。

假设在零初始条件下,线性定常系统的输入、输出和单位脉冲响应分别为  $r(t)$ ,  $c(t)$ ,  $g(t)$ 。由卷积公式,得

$$c(t) = \int_0^{\infty} r(t-\tau)g(\tau)d\tau \quad (3.27)$$

方程两边同取绝对值,即

$$|c(t)| = \left| \int_0^{\infty} r(t-\tau)g(\tau)d\tau \right|$$

则

$$|c(t)| \leq \int_0^{\infty} |r(t-\tau)| |g(\tau)| d\tau$$

当输入  $r(t)$  有界时,  $|r(t)| \leq M$ , 其中,  $M$  是有界的正实数。则

$$|c(t)| \leq M \int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau$$

显然,对于任意正实数  $Q$ ,如果有下式成立

$$\int_0^{\infty} |g(\tau)| d\tau \leq Q < \infty \quad (3.28)$$

则  $|c(t)|$  必为有界,这就意味着单位脉冲响应曲线的绝对值  $|g(\tau)|$  对时间  $\tau$  的面积必须为有限值,即响应曲线是收敛的,称为系统是 BIBO 稳定的,或稳定的;否则,系统不是 BIBO 稳定的,称为不稳定。

下面进一步考查线性定常系统特征方程的根和稳定性之间的关系。

因为传递函数为

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \quad (3.29)$$

对该方程两边取绝对值,可以得到

$$|G(s)| = \left| \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt \right| \leq \int_0^{\infty} |g(t)| |e^{-st}| dt \quad (3.30)$$

又因为复变量  $s = \sigma \pm j\omega$ ,  $\sigma$  为  $s$  的实部,所以  $|e^{-st}| = |e^{-\sigma t}|$ 。另外,假设  $s = \sigma \pm j\omega$  是  $G(s)$  的极点,根据传递函数的性质知道,则  $G(s)|_{s=\sigma \pm j\omega} \rightarrow \infty$ , 于是式(3.30)可写成

$$\infty \leq \int_0^{\infty} |g(t)| |e^{-\sigma t}| dt \quad (3.31)$$

如果特征方程至少有一个根在右半  $s$  复平面,或在虚轴  $j\omega$  轴上,则  $\sigma \geq 0$ , 即  $|e^{-\sigma t}| \leq 1 = M$ , 于是式(3.31)可以写成

$$\infty \leq \int_0^{\infty} M |g(t)| dt = \int_0^{\infty} |g(t)| dt \quad (3.32)$$

显然不满足 BIBO 稳定条件。因此,要满足 BIBO 稳定,则特征方程的根都必须位于左半  $s$  复平面。

## 2. 线性定常连续时间系统的零输入和渐近稳定性

对线性定常连续时间系统,完全由初始条件  $c^{(i)}(0)$  产生的零输入响应  $c(t)$ ,若当  $t$  趋于无穷时  $c(t)$  等于 0,则我们称该系统是零输入稳定的,简称稳定,或渐近稳定的;反之,则称系统是不稳定的。

设线性定常系统在给定  $r(t)$ 、扰动  $f(t)$  及初值  $c^{(i)}(0)$  作用下的响应为

$$C(s) = \frac{M(s)}{D(s)}R(s) + \frac{M_f(s)}{D(s)}F(s) + \frac{M_0(s)}{D(s)} \quad (3.33)$$

例如对于某线性定常系统  $c'' + 3c' + 2c = 5r$ ,初始条件为  $c(0) = -1, c'(0) = 2$ ,则系统在输入信号  $r$  和初始条件激励下的输出为

$$C(s) = \frac{M(s)}{D(s)}R(s) + \frac{M_0(s)}{D(s)} = \frac{5}{s^2 + 3s + 2}R(s) + \frac{-(s+1)}{s^2 + 3s + 2}$$

强迫响应                      自由响应

该系统的特征方程为  $D(s)=0$ ,本例给定的线性定常系统的特征方程为

$$D(s) = s^2 + 3s + 2 = 0$$

特征方程的特征根为  $p_1 = -1, p_2 = -2$ 。如果输入为单位阶跃信号,即  $r(t) = 1(t)$ ,则该系统的单位阶跃响应为

$$c(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

所以线性定常系统的稳定性仅取决于系统自身的固有特性,即特征方程的特征根,而与外界输入无关。为此可取  $r(t) = f(t) = 0$ ,考查系统的零输入响应:  $C(s) = \frac{M_0(s)}{D(s)}$ 。两边分别取拉氏反变换得

$$c(t) = \sum_{i=1}^q C_i e^{\lambda_i t} + \sum_{i=1}^{n-q} e^{\sigma_i t} (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t) \quad (3.34)$$

其中,  $\lambda_i$  是系统特征方程的单实根部分,  $\sigma_i = \text{Re}(p_i)$  是特征方程共轭复根的实部。由式(3.34)可以看出:

(1) 如果线性定常系统  $\text{Re}(p_i) < 0 (i=1 \cdots n)$ ,即所有特征根均具有负实部或均在左半  $s$  平面时,则有  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = 0$ ,称该线性定常系统是零输入稳定的,也简称渐近稳定的或稳定的。

(2) 如果线性定常系统有一个或一个以上特征根具有正实部;或如果有部分特征根在虚轴上,即  $\sigma_i = 0$  (指重的纯虚根),而其余的特征根即使均在左半  $s$  平面,也有  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) \rightarrow \infty$ ,则

称该系统是不稳定的。例如,某闭环系统的传递函数为  $\Phi(s) = \frac{1}{(s^2 + 2)^2 (s + 8)}$ ,则该系统

是不稳定的。请读者用 MATLAB 验证。

(3) 如果有部分特征根在虚轴上,即  $\sigma_i = 0$  (指单的重纯虚根,而不是重的纯虚根),而其余的特征根均在左半  $s$  平面,则系统处于临界状态,此时  $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = C$  (常数),系统的稳态响应为

等幅振荡,系统处于临界稳定或临界不稳定状态。例如,某闭环系统的传递函数为  $\Phi(s) = \frac{10(s-1)}{(s^2+2)(s+2)}$ , 则该系统为临界状态,请读者用 MATLAB 验证。

综上所述,线性定常系统稳定的充要条件是其全部特征根应满足  $\text{Re}(p_i) < 0, (i=1 \cdots n)$  或全部特征根均在左半  $s$  平面。对于线性定常系统, BIBO、零输入和渐近稳定性均要求特征方程所有的特征根均位于复平面的左半平面。

线性系统的稳定性仅取决于系统自身的固有性能,而与外界条件无关;而非线性系统的稳定性相当复杂,可能与初值和外加激励有关,也可能出现稳定的自激振荡现象。

### 例 3.8 考查非线性系统的稳定性

$$\frac{dc(t)}{dt} + c(t)(c(t) - 1) = 0, \quad c(0) = C_0$$

**解** 当系统初值  $C_0 > 0$  时,其解为  $c(t) = \frac{1}{1 - \left(1 - \frac{1}{C_0}\right)e^{-t}}$ , 系统是稳定的。

当  $C_0 < 0$  时,其解为  $c(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4C_0(1 - C_0)}e^t}{2}$ ,

系统是不稳定的。

$C_0$  取不同值时,  $c(t)$  的解如图 3.30 所示。由图可知,对于不同的初始条件,非线性系统解的形式有很大的差别,即非线性系统的时域响应与初值有关,这一点与线性系统不同。

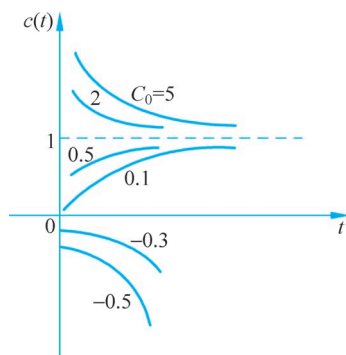


图 3.30 例 3.8 的非线性系统的解

## 3.3.2 线性定常系统与劳斯稳定判据

从以上分析知道,根据线性定常系统稳定的充要条件判别系统的稳定性,需要计算出系统全部的特征根,对于高阶系统,用手工求解特征根的工作量很大。劳斯和赫尔维茨分别在 1877 年和 1895 年提出了一种无须求解特征根,只需根据系统特征方程的系数,即可判别控制系统稳定性的方法,称为劳斯-赫尔维茨判据,该判据仅对 SISO 线性定常系统适用。

### 1. 线性定常系统稳定的必要条件

设线性定常系统的特征方程为

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (a_n > 0) \quad (3.35)$$

为了方便起见,这里只考虑单根的情况,如果系统稳定,则所有  $p_i < 0$ ,特征多项式改为

$$D(s) = a_n (s - p_1) \cdots (s - p_n)$$

所以特征多项式  $D(s)$  的全部系数为正,因此在判断系统稳定性时,先考查特征方程系数,若特征方程中有负数或零(缺项),则该系统是不稳定的。如果特征方程的系数  $a_i > 0$ ,则还要进一步判别。也就是说线性定常系统稳定,则特征方程的系数一定均为大于零,反之如果线性定常系统特征方程的系数均大于零,则控制系统不一定是稳定的。这就是线性定常系统稳定的必要条件。

### 2. 劳斯稳定判据

设线性定常系统的特征方程为

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

根据特征方程建立劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \cdots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \cdots \\ s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \\ s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^2 & e_1 & e_2 & \\ s^1 & f_1 & & \\ s^0 & g_1 & & \end{array}$$

其中,第一行和第二行是由特征方程的各项系数构造的表头,以后各行的数值按如下规律逐行计算

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{n-1}} (a_{n-1} a_{n-2} - a_n a_{n-3}) \\ b_2 &= -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{n-1}} (a_{n-1} a_{n-4} - a_n a_{n-5}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

一直计算到某个  $b_i$  为 0。

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1} (b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2) \\ c_2 &= -\frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1} (b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

以此类推。

计算时,为简化运算,可用一正数去乘或除某一行各项系数,不改变稳定性结论,若劳斯表第一列各数均为正数,则控制系统是稳定的。若第一列有负数,则控制系统是不稳定的,且符号改变的次数表示系统在右半  $s$  平面根的个数。

**例 3.9** 已知某系统的特征方程为  $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + 5s + 2 = 0$ , 试用劳斯稳定判据判断系统的稳定性。

**解** 该系统的劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^4 & 3 & & 5 & 2 \\ s^3 & 10 & & 5 & \\ s^2 & \frac{(50-15)}{10} = 3.5 & & \frac{(20-0)}{10} = 2 & \\ s^1 & \frac{(3.5 \times 5 - 10 \times 2)}{3.5} = -\frac{2.5}{3.5} & & & \\ s^0 & 2 & & & \end{array}$$

显然,第一列符号改变两次,说明该系统有两个特征根在右半  $s$  平面,系统不稳定。实际上,可以通过 MATLAB 的 Root 命令求解系统特征方程的根

```
p = [3 10 5 5 2];
roots(p)

ans =
    -2.93
    0.0222 + 0.7142i
    0.0222 - 0.7142i
    -0.4453
```

得到系统的特征根为  $-2.93, 0.0222 \pm 0.7142i, -0.4453$ , 因为在右半  $s$  平面有一对共轭复根, 所以该系统不稳定, 这与用劳斯稳定判据判断的结果一致。

当应用劳斯稳定判据分析线性定常系统的稳定性时, 有时会遇到以下两种特殊情况, 使得劳斯表中的计算无法进行到底, 因此需要进行相应的数学处理, 处理的原则是不影响劳斯稳定判据的判别结果。

1) 劳斯表某行第一列系数为 0, 而该行其余项中某些项不为零情况

此时计算劳斯表的下一行时可用小正数  $\epsilon$  代替 0 继续进行计算和判断。

**例 3.10** 已知某系统的特征方程为  $s^4 + 2s^3 + s^2 + 2s + 1 = 0$ , 试用劳斯稳定判据判断系统的稳定性。

**解** 由该系统的特征方程列写系统的劳斯表为

$$\begin{array}{cccc}
 s^4 & 1 & & 1 & 1 \\
 s^3 & 2 & & 2 & \\
 s^2 & \epsilon (\neq 0) & & 1 & \\
 s^1 & 2 - \frac{2}{\epsilon} (\rightarrow -\infty) & & & \\
 s^0 & 1 & & & 
 \end{array}$$

显然, 劳斯表第一列出现了负的数值, 并且系数的符号改变了两次, 所以该系统有两个特征根在右半  $s$  平面, 系统是不稳定的。用 MATLAB 求解系统的特征根为  $-1.8832, 0.2071 \pm 0.978i, -0.53$ , 看出有一对位于右半  $s$  平面的共轭复根, 系统不稳定。这与劳斯稳定判据的结果一致。

2) 某行每一项的系数都为 0

这种情况表明特征方程中存在一些绝对值相同但符号相异的特征根。例如, 两个大小相等但符号相反的实根和(或)一对共轭纯虚根, 或者是对称于原点的两对共轭复根, 如  $s = -1 \pm j$  和  $s = 1 \pm j$ 。

当劳斯表中出现全零行时, 可以用全零行上面一行各项系数构造辅助多项式  $A(s)$ , 求辅助函数  $A(s)$  关于  $s$  的一阶导数, 用所求得多项式  $\frac{dA(s)}{ds}$  的各项系数代替全零行的元, 继续进行劳斯表的列写。辅助方程的次数通常为偶数, 它表明出现数值相同但符号相异的根数, 所有那些数值相同但符号相异的根, 均可由辅助方程求得。

**例 3.11** 已知某系统的特征方程为  $s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16 = 0$ , 试用劳斯稳定判据判定系统的稳定性。

**解** 由特征方程列写劳斯表为

$$\begin{array}{cccc} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 1 & 6 & 8 & \text{(注:该行已除2)} \\ s^4 & 1 & 6 & 8 & \\ s^3 & 0 & 0 & & \end{array}$$

由于  $s^3$  行出现全零行,故用  $s^4$  行系数构造如下的辅助方程

$$A(s) = s^4 + 6s^2 + 8 = 0$$

求辅助方程对  $s$  的导数,得导数方程

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s^3 + 12s = 0$$

把  $\frac{dA(s)}{ds}$  方程的系数代入全零行继续按劳斯表的计算原则进行计算,得

$$\begin{array}{cccc} s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\ s^5 & 1 & 6 & 8 & \text{(注:该行已除2)} \\ s^4 & 1 & 6 & 8 & \\ s^3 & 1 & 3 & \text{(注: } dA/ds=0 \text{ 的系数已除4)} & \\ s^2 & 3 & 8 & & \\ s^1 & \frac{1}{3} & & & \\ s^0 & 8 & & & \end{array}$$

看出劳斯表第一列无符号改变,但由于辅助方程  $s^4 + 6s^2 + 8 = 0$  的根  $s = \pm j\sqrt{2}$ ,  $s = \pm j2$  在虚轴上,所以系统处于临界状态。

实际上可以解出该系统特征方程的全部特征根为  $\pm 2i, \pm\sqrt{2}i, -1 \pm i$ 。

### 3.3.3 劳斯稳定判据的应用

劳斯稳定判据不仅可判断线性定常系统的绝对稳定性,而且还可确定系统的相对稳定或稳定裕度。

**例 3.12** 已知某控制系统如图 3.31 所示,试用劳斯稳定判据确定使系统稳定的  $K$  的取值范围;若要求系统的特征根具有  $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < -1$  的稳定裕度,  $K$  的取值范围又为多少?

**解** 因为闭环系统的特征方程为

$$s(s+10)(s+4) + 40K = s^3 + 14s^2 + 40s + 40K = 0$$

劳斯表为

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 40 \\ s^2 & 14 & 40K \\ s^1 & \frac{40}{14}(14-K) & \\ s^0 & 40K & \end{array}$$

显然,要保证劳斯表的第一列全为正数,即控制系统是稳定的,则要求增益  $K$  的取值范围为

$0 < K < 14$ 。

要使该系统具有  $\sigma_1 = 1$  的稳定裕度,如图 3.32 所示的阴影部分,利用坐标平移,可令  $s = s_1 - 1$  代入原特征方程中化简得

$$s_1^3 + 11s_1^2 + 15s_1 + (40K - 27) = 0$$

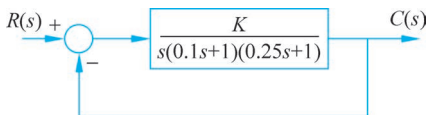


图 3.31 例 3.12 图

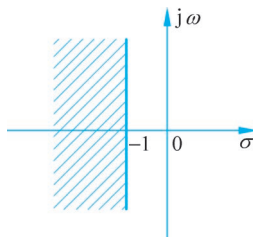


图 3.32 相对稳定区域

这样就可以利用劳斯稳定判据分析  $s_1$  平面(相当于  $s = -1$  垂线)右半部根的情况,重新列写劳斯表得

$$\begin{array}{rcl} s_1^3 & 1 & 15 \\ s_1^2 & 11 & 40K - 27 \\ s_1^1 & \frac{192 - 40K}{11} & \\ s_1^0 & 40K - 27 & \end{array}$$

要保证劳斯表的第一列全部大于 0,即  $K$  的取值范围应为  $0.675 < K < 4.8$ ,此时该系统具有  $\sigma_1 = 1$  的稳定裕度。

可见,稳定裕度要求越大,所允许的比例增益  $K$  将越小。由本例也得到一个重要结论,就是通常系统的比例增益  $K$  越大,则对控制系统稳定性越不利。

### 3.4 控制系统的稳态误差分析

通常系统的控制目标之一就是要求系统输出的稳态响应要精确跟踪期望的输出信号,系统的稳态误差(steady-state errors)  $e_{ss}$  是控制系统精度(准确度)的一种度量,常称为稳态性能。在控制系统分析与设计中,稳态误差是一项重要的技术指标,要求稳态误差最小化,或保持在某个可以接受的范围内,同时暂态响应也必须满足一套相应的性能指标要求。显然,只有当系统稳定时,研究稳态误差才有意义。本节主要讨论线性控制系统由系统结构、输入作用形式和类型所产生的稳态误差,即原理性稳态误差的计算方法,其中包括系统类型与稳态误差的关系。

#### 3.4.1 误差定义及稳态误差

通常控制系统误差(errors)存在两种定义方法,典型控制系统的结构如图 3.33 所示。

**定义 3.1** 系统输出量的期望值  $c_{\text{req}}(t)$  与实际输出值  $c(t)$  之差,用公式表示为

$$e'(t) = c_{\text{req}}(t) - c(t) = \frac{r(t)}{f} - c(t) \quad (3.36)$$

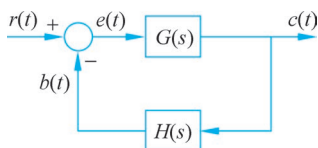


图 3.33 典型控制系统误差定义图

式中,期望的输出或参考信号  $c_{\text{req}}(t)$  就是  $c(t)$  所要跟踪的信号,  $f$  相当于反馈通道的传递函数  $H(s)$ , 这里的  $f$  看成比例常数。该定义物理意义明确,但这种以输出端定义的误差便于计算,因为在系统结构图中不便于标出实际误差  $e'(t)$  信号。

**定义 3.2** 按照图 3.33 所示的输入端定义为

$$e(t) = r(t) - b(t) = r(t) - f \cdot c(t) \quad (3.37)$$

该定义便于理论分析,但物理意义较模糊。如果为单位反馈控制系统,则输出的期望值就是输入信号,因而此时两种方法误差的定义是一致的。如果为非单位反馈控制系统,则由式(3.36)和式(3.37)知道,从输出端定义的实际误差  $e'(t)$  等于从输入端定义的理论误差  $e(t)$  除以反馈增益  $f$ , 即  $e'(t) = e(t)/f$ 。本节的误差定义如未加说明,均按照定义 3.2 计算。

**定义 3.3** 稳定的系统在输入量或扰动作用下,进入稳态后的误差,称为稳态误差  $e_{\text{ss}}$  (steady-state errors), 记为

$$e_{\text{ss}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) \quad (3.38)$$

对图 3.33 所示的系统,采用  $e(t)$  作为误差,可求出系统误差传递函数为

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)} = \frac{1}{1 + G_0(s)} \quad (3.39)$$

其中,  $G_0(s) = G(s)H(s)$  称为系统的开环传递函数。

由复变函数理论知道,如果  $E(s)$  除在原点处有唯一的极点外,在右半平面及虚轴上解析,也就是说,如果  $sE(s)$  没有极点位于虚轴或位于右半  $s$  平面,则可根据拉普拉斯变换终值定理计算稳态误差  $e_{\text{ss}}$ , 即

$$e_{\text{ss}} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_0(s)} \quad (3.40)$$

显然,  $e_{\text{ss}}$  取决于输入信号  $R(s)$  的类型及开环系统结构  $G_0(s)$ 。

### 3.4.2 稳态误差的计算

为便于稳态误差  $e_{\text{ss}}$  的计算,一般可将系统开环传递函数表示为时间常数形式

$$G_0(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (T_j s + 1)}{s^\gamma \prod_{i=1}^n (T_i s + 1)} \quad (3.41)$$

式中,  $K$  为系统的开环增益,  $T_i$ 、 $T_j$  为时间常数,  $\gamma$  为开环系统  $G_0(s)$  在坐标原点处极点的个数(积分环节数), 又称系统类型。系统类型的分类方法, 是以  $\gamma$  的数值多少来划分的:  $\gamma=0$ , 称为 0 型系统;  $\gamma=1$ , 称为 I 型系统;  $\gamma=2$ , 称为 II 型系统。当  $\gamma>2$  时, 除采用复合控制外, 要使控制系统稳定是相当困难的, 即控制精度与稳定性有矛盾。所以 III 型及以下的系统在实际控制系统中几乎是不使用的。

由式(3.40)和式(3.41), 可得系统的稳态误差计算式为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{\lim_{s \rightarrow 0} [s^{\gamma+1} R(s)]}{K + \lim_{s \rightarrow 0} s^{\gamma}} \quad (3.42)$$

### 1. 单位阶跃输入作用

当系统的输入信号为单位阶跃  $r=1(t)$  即  $R(s)=1/s$  作用时,由式(3.42)求得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + k_p} \quad (3.43)$$

其中,  $k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma}}$ , 称为系统的静态位置误差系数。

当  $\gamma=0$  时,即开环传递函数中无积分环节,此时  $K=k_p$ , 所以稳态误差  $e_{ss} = \frac{1}{1+K}$  = 常数,不为 0,如图 3.34(a)所示;当  $\gamma \geq 1$ ,即开环传递函数中有积分环节,则稳态误差  $e_{ss} = 0 (k_p = \infty)$ ,如图 3.34(b)所示。

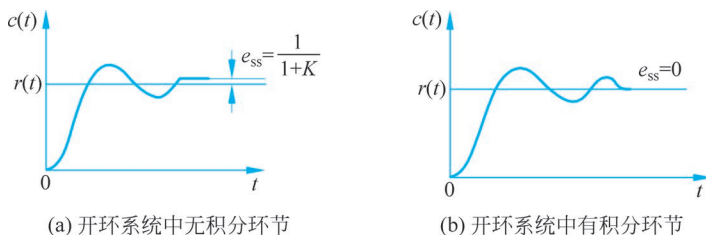


图 3.34 单位阶跃响应的稳态误差

### 2. 单位斜坡输入作用

当系统的输入信号为单位斜坡(或速度)  $r=t$  即  $R(s)=1/s^2$  作用时,由式(3.42)得系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{1}{s^2}}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s)} = \frac{1}{k_v} \quad (3.44)$$

其中,  $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma-1}}$ , 称为系统静态速度误差系数,单位为  $s^{-1}$ 。由式(3.44)得各型系统在单位斜坡输入作用下的稳态误差和静态速度误差系数为

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty, & \gamma = 0 \\ \frac{1}{K} = \frac{1}{k_v}, & \gamma = 1 \\ 0, & \gamma \geq 2 \end{cases}, \quad k_v = \begin{cases} 0, & \gamma = 0 \\ K, & \gamma = 1 \\ \infty, & \gamma \geq 2 \end{cases}$$

各型系统在单位斜坡输入作用下的时间响应如图 3.35 所示。

### 3. 单位抛物线输入作用

当系统的输入信号为单位抛物线(或加速度)  $r=t^2/2$  即  $R(s)=1/s^3$  作用时,由式(3.42)得到系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s^2 G_0(s)} = \frac{1}{k_a} \quad (3.45)$$

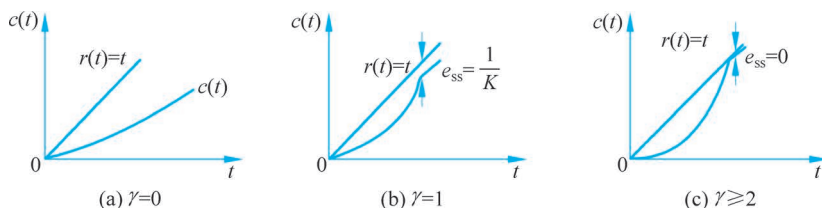


图 3.35 单位斜坡输入作用下的响应及稳态误差

其中,  $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K}{s^{\gamma-2}}$ , 称为系统的静态加速度误差系数, 单位为  $s^{-2}$ , 由式(3.45)得

各型系统在单位抛物线(或加速度)输入作用下的稳态误差和静态加速度误差系数分别为

$$e_{ss} = \begin{cases} \infty, & \gamma = 0, 1 \\ \frac{1}{K}, & \gamma = 2 \\ 0, & \gamma \geq 3 \end{cases}, \quad k_a = \begin{cases} 0, & \gamma = 0, 1 \\ K, & \gamma = 2 \\ \infty, & \gamma \geq 3 \end{cases}$$

各型系统在单位抛物线(或加速度)输入作用下的时间响应如图 3.36 所示。

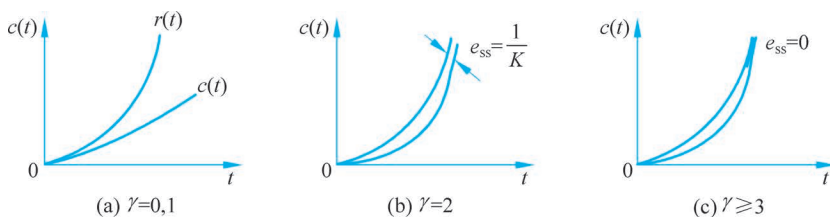


图 3.36 单位抛物线输入作用下的响应及稳态误差

若系统的输入为

$$r(t) = R_0 1(t) + R_1 t + \frac{1}{2} R_2 t^2$$

则不难计算出系统的稳态误差为

$$e_{ss} = \frac{R_0}{1+k_p} + \frac{R_1}{k_v} + \frac{R_2}{k_a}$$

**例 3.13** 如图 3.37 所示, 系统输入  $r(t)=1(t)$ , 试分别确定当  $K_h$  为 1 和 0.1 时, 系统输出端的稳态误差  $e'_{ss}$ 。

**解** 由系统方框图 3.37 可得系统的开环传递函数为  $G_0(s) = \frac{10K_h}{s+1}$ , 所以该系统为 0 型系统, 系统的静态位置误差系数和稳态误差分别为

$$k_p = K = 10K_h, \quad e_{ss} = \frac{1}{1+10K_h}$$

可以将图 3.37 结构等效变换为图 3.38, 这样  $R'$  代表期望的输出量, 因而  $E'$  相当于从系统输出端定义的非单位反馈系统的误差, 由图 3.37 和图 3.38 不难证明, 从输入端定义的理论误差  $E$  和从输出端定义的误差  $E'$  之间存在如下关系:  $E'(s) = \frac{E(s)}{H(s)}$ , 这里  $H(s) = K_h$  为常数, 于是得

$$e'_{ss} = \frac{e_{ss}}{K_h}$$

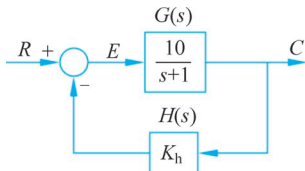


图 3.37 例 3.13 方框图

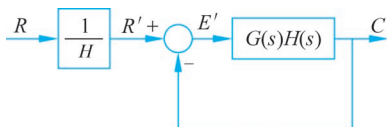


图 3.38 例 3.13 等效单位反馈系统

当  $K_h=1$  时,单位反馈系统的稳态误差为

$$e'_{ss} = e_{ss} = \frac{1}{1+10K_h} = \frac{1}{11}$$

当  $K_h=0.1$  时,非单位反馈系统的输出端稳态误差为

$$e'_{ss} = \frac{e_{ss}}{K_h} = \frac{1}{K_h(1+10K_h)} = 5$$

此时,系统输出量的期望值为  $r'(t) = \frac{r(t)}{K_h} = 10$ ,显然有一个 5 的稳态差值。

当  $K_h$  为 1 和 0.1 时,系统的阶跃响应分别如图 3.39 所示。

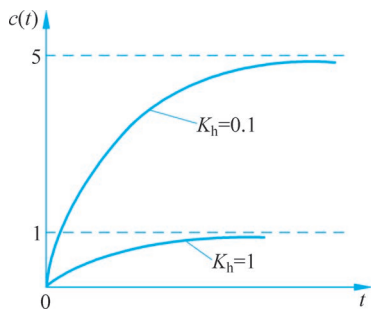


图 3.39 例 3.13 的解

**例 3.14** 已知位置随动控制系统如图 3.40 所示,求系统在  $\theta_r$  输入作用下系统的稳态误差,其中负载扰动  $M_c=0$ 。

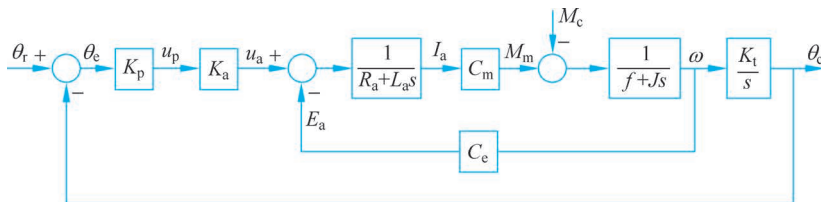
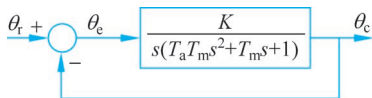


图 3.40 位置随动控制系统

**解** 忽略电机黏性摩擦系数  $f$ ,系统方框图简化为图 3.41。图中,  $T_a = L_a/R_a$  为电磁时间常数,  $T_m = \frac{JR_a}{C_m C_e}$  为机电时间常数,  $K = \frac{K_p K_a K_t}{C_e}$  为开环放大倍数。

图 3.41 忽略  $f$  后的随动系统简化图

稳态误差的定性分析:

(1) 假设输入  $\theta_r$  为常数,如果系统稳态时  $\theta_c$  也为常数,则电机转速  $\omega=0$ ,也就是

$$M_m - M_c = J \frac{d\omega}{dt} = 0$$

当  $M_c=0$  时,电机电磁力矩  $M_m=0$ ,进一步得到  $I_a=0 \rightarrow u_a=0$ ,于是  $u_p=0, \theta_e=0$ ,所以  $\theta_c=\theta_r$ ,系统没有稳态或静态误差,即 I 型系统能完全复现阶跃输入信号。

(2) 假设输入  $\theta_r = vt$  为匀速运动,如果系统稳态时  $\theta_c$  也匀速转动,则  $\omega$  为常数,由于  $M_c=0$ ,所以  $M_m(I_a)=0$ ,进一步可得  $u_a$  为常数,  $\theta_e$  也为常数,所以稳态时存在恒定的稳态

误差  $e_{ss}$ ; 当比例增益  $K$  增大时, 稳态误差  $e_{ss}$  减小。即 I 型系统能跟踪阶跃输入信号, 但为有差的。

(3) 假定输入  $\theta_r = \frac{a}{2}t^2$  为加速运动, 同样, 如果设稳态时  $\theta_c$  以同一加速度旋转, 则  $\omega = ct$ , 电机转速做匀速变化。根据  $M_m - M_c = J \frac{d\omega}{dt}$ , 又因为  $M_c = 0$ , 所以  $M_m$  为常数,  $I_a$  也为常数, 进一步可得到  $u_a = c't$  作匀速变化, 从而  $\theta_c = \alpha t$  匀速变化。这就是说角差愈来愈大, 即 I 型系统输出不能复现加速度输入信号。

**例 3.15** 某单位负反馈系统的前向通道传递函数为  $G(s) = \frac{10}{s+1}$ , 求该系统在单位阶跃信号作用下的稳态误差。

**解** MATLAB 程序如下:

```
syms t s GH R E essrp;
GH = 10/(s+1);
r = sym('1 * 1(t)');
R = laplace(r);
E = R/(1 + GH);          % 闭环系统的误差传递函数
essrp = limit(s * E, s, 0)
```

结果为

```
essrp =
1/11
```

**例 3.16** 某单位负反馈系统的前向通道传递函数为  $G(s) = \frac{10(2s+1)}{s^2+s}$ , 求该系统在单位速度信号作用下的稳态误差。

**解** MATLAB 程序如下:

```
syms t s GH R E essrp;
GH = 10 * (2 * s + 1) / (s^2 + s);
r = sym('t * 1(t)');          % 单位速度信号
R = laplace(r);
E = R/(1 + GH);
essrp = limit(s * E, s, 0)
```

运行结果为

```
essrp =
1/10
```

### 3.4.3 扰动作用下的稳态误差

系统方框图如图 3.42 所示, 设输入  $r(t) = 0$ , 得出在扰动  $d(t)$  作用下系统的方框图如图 3.43 所示。

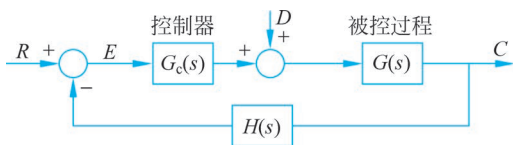


图 3.42 带有扰动的控制系统

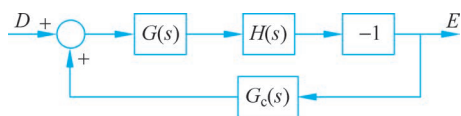


图 3.43 扰动作用下变换后的方框图

由图 3.43 得到

$$E(s) = -\frac{G(s)H(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}D(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{sG(s)H(s)}{1 + G_c(s)G(s)H(s)}D(s) \quad (3.46)$$

如果

$$G_c(s) = \frac{K_c \prod_{i=1}^m (\tau_{1i}s + 1)}{s^\gamma \prod_{i=1}^n (T_{1i}s + 1)}, \quad G(s)H(s) = \frac{K \prod_{i=1}^l (\tau_{2i}s + 1)}{s^\mu \prod_{i=1}^q (T_{2i}s + 1)}$$

且扰动  $d(t) = 1(t)$ , 即  $D(s) = 1/s$ , 则

$$e_{ss} = -\lim_{s \rightarrow 0} \frac{Ks^\gamma}{s^{\gamma+\mu} + K_c K} \quad (3.47)$$

(1) 如果控制器无积分环节(相当于扰动点前无积分环节  $\gamma=0$ )。则

$$e_{ss} = \begin{cases} -\frac{K}{1 + K_c K}, & \mu = 0 \\ -\frac{1}{K_c}, & \mu > 0 \end{cases}$$

上式表明如扰动前无积分环节, 则在阶跃扰动作用下控制系统存在稳态误差  $e_{ss}$ 。随着  $K_c$  增大, 稳态误差  $e_{ss}$  减小, 但  $e_{ss} \neq 0$ , 且随着  $K_c$  增大, 系统的稳定性变差。

(2) 如果扰动点前有积分环节或控制器中有积分环节, 则在阶跃扰动  $d(t) = 1(t)$  作用下系统的稳态误差  $e_{ss} = 0$ 。所以说积分控制可以提高系统控制精度。

**例 3.17** 图 3.44 所示的液位控制系统, 其方框图如图 3.45 所示。试分析系统在扰动  $d(t) = D_0 \cdot 1(t)$  作用下的稳态误差  $e_{ss}$ 。

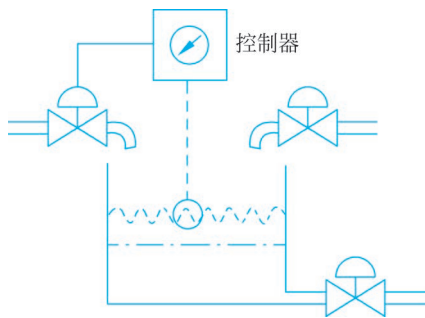


图 3.44 液位控制系统

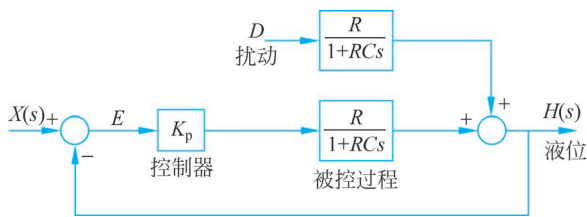


图 3.45 液位控制系统方框图

**解** 考查扰动对系统的影响, 假设输入  $x(t) = 0$ , 由系统方框图 3.45 可得液位为

$$H(s) = \frac{K_p R}{1 + RCs} E(s) + \frac{R}{1 + RCs} D(s)$$

又因为

$$E(s) = -H(s) = -\frac{K_p R}{1 + RCs} E(s) - \frac{R}{1 + RCs} D(s)$$

所以

$$E(s) = -\frac{R}{1 + K_p R + RCs} D(s)$$

而  $D(s) = D_0/s$ , 于是通过部分分式展开得

$$E(s) = \frac{RD_0}{1 + K_p R} \left( \frac{1}{s + \frac{1 + K_p R}{RC}} \right) - \frac{RD_0}{1 + K_p R} \cdot \frac{1}{s}$$

由拉普拉斯反变换得

$$e(t) = \frac{RD_0}{1 + K_p R} \left[ \exp\left(-\frac{1 + K_p R}{RC}t\right) - 1 \right]$$

于是

$$e(\infty) = -\frac{RD_0}{1 + K_p R}$$

所以增加控制器比例增益  $K_p$ , 可以使得系统的稳态误差  $e_{ss}$  减小, 但  $e_{ss}$  不会等于 0。在实际系统中,  $K_p$  增大, 系统可能不稳定(因为原系统为高阶系统, 该系统数学模型是忽略了小时间常数情况下得到的)。

如果控制器有积分环节, 假设  $G_c(s) = K/s$ , 则

$$E(s) = -\frac{Rs}{RCs^2 + s + KR} D(s)$$

当  $D(s) = D_0/s$  时, 有

$$e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = 0$$

积分控制器消除了由阶跃扰动造成的稳态误差。

### 3.4.4 减小或消除稳态误差的措施

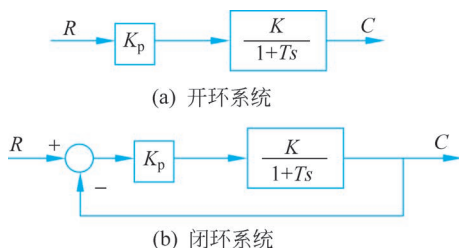
为了提高系统控制精度, 通常可以采用以下措施:

- (1) 增大控制器的开环增益  $K_p$ , 但要注意系统的稳定性。
- (2) 控制器要设置积分环节, 但积分环节数不能太多, 以免对稳定性不利。
- (3) 闭环控制系统性能要优于开环控制。

如图 3.46(a) 所示的开环系统, 设  $r(t) = 1(t)$ , 则

$$E(s) = R(s) - C(s) = [1 - G_0(s)]R(s)$$

其中, 开环传递函数  $G_0(s) = \frac{K_p K}{1 + Ts}$ , 由此系统的稳态误差为



$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} [1 - G_0(s)] = 1 - K_p K \quad (3.48)$$

如果  $G_0(0) \neq 1$ , 则  $e_{ss} \neq 0$ 。

将图 3.46(a) 的开环系统接成如图 3.46(b) 所示的闭环系统, 得误差为

$$E(s) = \frac{1}{1 + G_0(s)} R(s)$$

图 3.46 开环与闭环系统控制精度对比

当  $R(s) = 1/s$  时,有

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + K_p K} \quad (3.49)$$

如果  $K_p$  增大,则  $e_{ss}$  减小,但  $e_{ss} \neq 0$ 。

设  $K_p$  为常数,如果被控过程参数发生下列变化,即  $\frac{K + \Delta K}{1 + Ts}$ ,例如  $K = 10, \Delta K = 1$ ,即  $\frac{\Delta K}{K} = 0.1$ ,相当于比例增益变化了 10%。对开环系统有

$$e_{ss} = 1 - \frac{1}{K} (K + \Delta K) = 1 - 1.1 = -0.1 \text{ (假设比例控制按照 } K_p = \frac{1}{K} \text{ 来定标)}$$

对闭环系统,设  $K_p = \frac{100}{K}$ ,则

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + \frac{100}{K} (K + \Delta K)} = \frac{1}{1 + 110} = 0.009$$

所以,环境发生变化、元件产生老化均会影响系统的稳态特性,但闭环系统比开环系统有优越的控制精度。

(4) 采用串级控制抑制内回路扰动。

某串级直流电机调速控制系统的方框图如图 3.47 所示,  $G_{c1}(s)$  和  $G_{c2}(s)$  分别表示主调节器和副调节器。  $G_1(s)$  和  $G_2(s)$  为直流电机的传递函数数学模型。

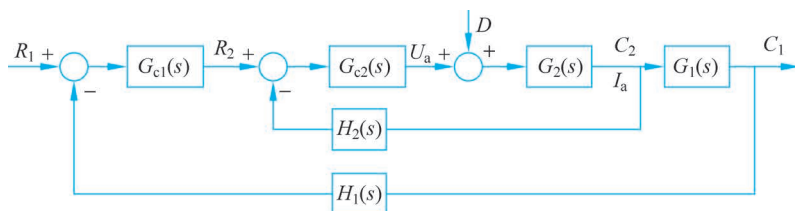


图 3.47 串级直流电机调速控制系统

若将副回路视为一个等效环节  $G'_2(s)$ ,则有

$$G'_2(s) = \frac{C_2(s)}{R_2(s)} = \frac{G_{c2}(s)G_2(s)}{1 + G_{c2}(s)G_2(s)H_2(s)}$$

在副回路中,扰动  $D(s)$  对  $C_2(s)$  的闭环传递函数为

$$G_d(s) = \frac{C_2(s)}{D(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_{c2}(s)G_2(s)H_2(s)}$$

比较  $G'_2(s)$  与  $G_d(s)$  可见,必有  $G_d(s) = \frac{G'_2(s)}{G_{c2}(s)}$ 。于是串级控制系统的等效结构图如图 3.48 所示。

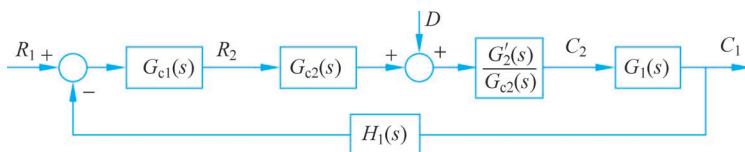


图 3.48 串级控制系统等效结构图

为此,有

$$\frac{C_1(s)}{R_1(s)} = \frac{G_{c1}(s)G'_2(s)G_1(s)}{1 + G_{c1}(s)G'_2(s)G_1(s)H_1(s)}$$

$$\frac{C_1(s)}{D(s)} = \frac{(G'_2(s)/G_{c2}(s))G_1(s)}{1 + G_{c1}(s)G'_2(s)G_1(s)H_1(s)}$$

对一个理想控制系统,总期望扰动对输出无影响,即  $\frac{C_1(s)}{D(s)} \rightarrow 0$  (反映抗干扰能力),而输出能很好地跟踪参考输入信号,即  $\frac{C_1(s)}{R_1(s)} \rightarrow 1$  (反映系统跟踪输入的能力),为此串级控制抑制扰动  $D(s)$  的能力可用下式表示

$$\frac{C_1(s)/R_1(s)}{C_1(s)/D(s)} = G_{c1}(s) \cdot G_{c2}(s) \quad (3.50)$$

若主、副调节器均采用比例调节器,其增益分别为  $K_{p1}$  和  $K_{p2}$ ,则式(3.50)写为

$$\frac{C_1(s)/R_1(s)}{C_1(s)/D(s)} = K_{p1} \cdot K_{p2} \quad (3.51)$$

式(3.51)表明,主调节器、副调节器的总增益越大,则串级控制系统抗干扰能力越强。一般  $K_{p2} > 1$ ,即  $K_{p1} \cdot K_{p2} > K_{p1}$ ,所以串级控制比单回路控制系统抗扰能力强,这意味着控制精度高。

(5) 采用复合控制。

如图 3.49 所示的按照扰动补偿的复合控制系统,由系统方框图可得扰动作用下的输出为

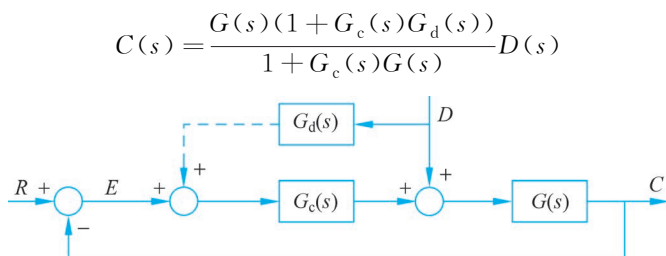


图 3.49 按扰动补偿复合控制系统

在扰动作用下误差为  $E(s) = -C(s)$ ,显然,如果选  $G_d(s) = -1/G_c(s)$ ,可使  $C(s) = 0$ ,  $E(s) = 0$ ,实现了对扰动误差的全补偿。

### 3.5 小结

时域分析法是一种直接在时间域上通过对系统在典型和任意输入信号作用下的时域响应来分析系统性能的方法,可以提供系统时间响应的全部信息,具有对系统性能指标分析直观、准确的优点。众所周知,动态系统的时间响应分为暂态响应和稳态响应,本章主要研究线性连续时间控制系统的时域分析,也就是系统的稳定性、暂态响应和稳态响应分析与计算。

暂态响应的性能指标主要有上升时间、峰值时间、调节时间和超调量等,还可以由阻尼比、无阻尼自然振荡频率和时间常数等参数来刻画。当系统的数学模型是一阶和典型二阶线性定常系统时,我们可以得到这些性能指标和系统参数之间的解析表达式。对于非典型二阶系统和更高阶系统,则很难得出系统时域响应的解析解,亦很难得到性能指标和系统参数之间的解析表达式。

控制系统稳定是系统工作的前提,本章定义了连续时间线性定常系统稳定性的概念,指出线性定常控制系统的稳定性和系统特征方程的特征根相关。如果一个连续时间定常系统是稳定的,则它的特征方程的根必须均在 $s$ 复平面的左半部。劳斯稳定判据可以不用计算特征方程的根,只需通过特征方程的系数就可以分析单输入单输出线性定常系统的稳定性。

在控制系统稳定的前提下,稳态误差是衡量时间趋于无穷时系统准确度的指标。反馈系统在阶跃、斜坡、抛物线输入信号下相应的稳态误差分别由静态误差系数 $k_p$ 、 $k_v$ 、 $k_a$ 和系统类型来刻画,拉普拉斯变换的终值定理是稳态误差计算的基础。

通常系统的稳态精度与动态性能在对系统的类型和开环增益的要求上是自相矛盾的,要解决这一矛盾,除在系统中设计合适的控制器外,根据性能指标要求还可以采用复合控制和串级控制结构。

MATLAB 为控制系统的时域分析和精确时域性能指标计算带来了极大的便利。

## 关键术语和概念

**暂态响应(transient response):** 作为时间函数的系统响应,一般指系统输出量当时间趋于无穷时趋于零的那部分时间响应。

**稳态误差(steady-state error):** 指系统瞬态响应消失后,偏离预期响应的持续差值。

**性能指标(performance index):** 系统性能的定量度量。

**设计指标(design specifications):** 指一组规定的性能指标值。

**测试输入信号(test input signal):** 足以对系统响应性能进行典型测试的输入信号。

**超调量(overshoot):** 指系统输出响应超过预期响应的部分。(本书中,超调量百分数有时也简称为超调量,它是实际超调量的 100 倍。读者可根据上下文确定“超调量”的具体含义。)

**峰值时间(peak time):** 系统对阶跃输入开始响应并上升到峰值所需的时间。

**上升时间(rise time):** 系统对阶跃输入的响应从某一时刻到输入幅值的一定百分比所需的时间。上升时间 $t_r$ 一般用输出从阶跃输入的 10% 上升到 90% 所需的时间来度量。在工程上对欠阻尼系统,可用系统响应从开始到输入幅值 100% 所需的时间来度量。

**调节时间(settling time):** 指系统输出达到并维持在输入幅值的某个百分比范围内所需的时间。

**阻尼比(damping ratio):** 阻尼强度的度量标准,为二阶无量纲参数。

**阻尼振荡(damped oscillation):** 指幅值随时间而衰减的振荡。

**自然振荡频率(natural frequency):** 当阻尼系数为零时,由共轭复极点引起的振荡频率。

**临界阻尼(critical damping):** 指阻尼介于过阻尼和欠阻尼之间的边界情形。

**主导极点(dominant poles):** 对系统瞬态响应起主导作用的特征根。

**稳定性(stability)**: 一种重要的系统性能。如果其传递函数的所有极点都具有负实部, 则系统是稳定的。

**稳定系统(stable system)**: 在有界输入作用下, 其输出响应也有界的动态系统。

**劳斯稳定判据(Routh criterion)**: 通过研究闭环系统的特征方程的系数来确定系统稳定性的判据。该判据指出: 特征方程的正实部根的个数同劳斯判定表第一列中系数的符号改变的次数相等。

**辅助多项式(auxiliary polynomial)**: 劳斯判定表中零元素行的上面一行的多项式。

**相对稳定性(relative stability)**: 由特征方程的每个或每对根的实部度量的系统稳定特性。

**系统型数(type number)**: 传递函数  $G(s)$  在原点的极点个数  $N$ 。其中  $G(s)$  是前向通路传递函数。

**静态速度误差系数  $k_v$  (velocity error constant)**: 可用  $\lim_{s \rightarrow 0} |sG(s)|$  来估计的常数。系统对坡度为  $A$  的斜坡输入的稳态跟踪误差为  $A/k_v$ 。

## 拓展您的事业——自动化学科

自动化学科是电子电气工程师的另一个重要领域。所谓的自动控制指没有人为的干预由机器或控制设备按照各生产工艺期望的要求自动地对被控过程进行控制。显然, 自动化学科主要服务于电力、交通、石油化工、冶金、机械制造业、市政给排水、通信等行业。自动化在我们的日常生活中起着非常重要的作用, 家用电子电气设备(供热系统和空调系统等)、开关控制恒温器、洗衣机和烘干机、机动车的路线控制器、电梯、交通指挥灯等都利用控制系统的功能。在兵器工业、宇航及空间技术领域, 火箭、导弹、宇宙飞船的精确导航、航天飞机的操作模式以及对宇宙空间站的地面遥控等, 所有这些都要求有自动控制的知识。在汽车等制造业范围内, 批量的生产流水线越来越多地用机器人来完成, 机器人则是一个可编程控制系统, 可以长期不知疲劳地工作。总之, 凡是有机电设备或装置的地方都离不开自动控制系统。

自动化学科汇集了电路基础、电子电气技术、电子仪器仪表、计算机技术、通信系统的知识, 它并不是限制在任何一个专门的工程学科内, 甚至在经济管理行业也离不开自动调节原理。为此, 被称为万金油专业。在自动化学科中对工程师的基本要求是有信息学科扎实的基础理论和专业技能以及对其他各专业学科有全面的了解。

除上述各工业行业外, 国外德国西门子(Siemens)、美国通用电气 GE、瑞士 ABB、法国施耐德(Schneider)、罗克韦尔自动化(Rockwell)、欧姆龙自动化(OMRON)、松下电气(Panasonic)、美国国家仪器公司(NI)等跨国公司, 国内电信移动、华为、中信、航空服务业等企事业单位每年都需要自动化学科专业毕业生。

## 习题

3.1 设系统的微分方程式为  $0.04c''(t) + 0.24c'(t) + c(t) = r(t)$ , 试求系统的单位脉冲响应和单位阶跃响应。

3.2 已知系统的脉冲响应  $g(t) = 0.1(1 - e^{-t/3})$ , 试求系统的传递函数  $\Phi(s)$ 。

3.3 设图 P3.1 是简化的飞行控制系统结构图, 试选择参数  $K_p$  和  $K_t$ , 使典型二阶系统的  $\omega_n = 6, \zeta = 1$ 。

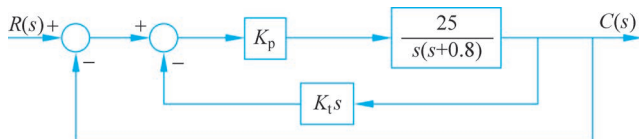


图 P3.1 题 3.3 图

3.4 已知线性控制系统的单位阶跃响应如图 P3.2 所示。求相应的二阶典型系统的传递函数。

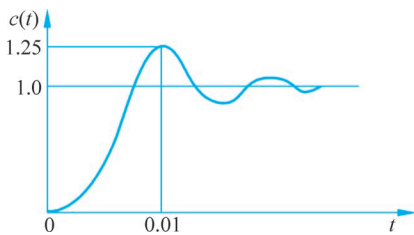


图 P3.2 题 3.4 图

3.5 已知图 P3.3 中的控制系统, 试求  $K_p$  和  $K_t$  的值, 使得输出的最大超调大约是 4.3%, 上升时间  $t_r$  大约为 0.2s。要求用式  $\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t = n\pi$  作为上升时间关系式。用 MATLAB 仿真程序对该系统进行仿真, 检验您所得到的解的准确度。

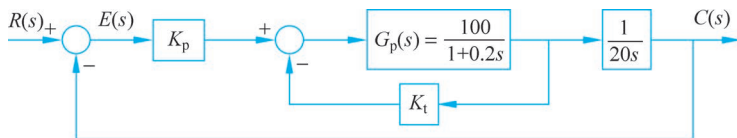


图 P3.3 题 3.5 图

3.6 图 P3.4 所示控制系统有(a)和(b)两种不同的结构方案, 其中  $T > 0$  不可变, 要求  
(1) 在这两种方案中, 应如何调整  $K_1$ 、 $K_2$  和  $K_3$ , 才能使系统获得较好的动态性能?  
(2) 比较说明两种结构方案的特点。

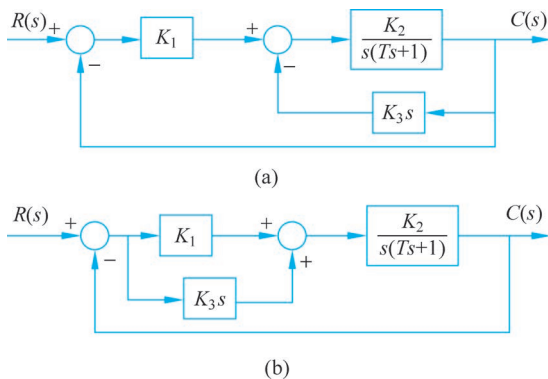


图 P3.4 题 3.6 图

3.7 试用劳斯稳定判据来判定下列具有如下特征方程的闭环系统的稳定性, 确定各系统在虚轴上和右半复平面的根的数目。

(1)  $s^3 + 25s^2 + 250s + 10 = 0$

(2)  $s^3 + 25s^2 + 10s + 50 = 0$

(3)  $3s^4 + 10s^3 + 5s^2 + s + 2 = 0$

$$(4) 2s^4 + 10s^3 + 5.5s^2 + 5.5s + 10 = 0$$

3.8 已知下列单位反馈控制系统的开环传递函数

$$(1) G(s) = \frac{K}{s(s+10)(s+20)}$$

$$(2) G(s) = \frac{K(s+10)(s+20)}{s^2(s+2)}$$

试用劳斯稳定判据判定以  $K$  为未知量的闭环系统的稳定性。求使系统等幅振荡的  $K$  值, 并计算振荡频率。

3.9 已知含转速计反馈的电动机控制系统的方框图如图 P3.5 所示, 求系统渐近稳定时转速计常数  $K_t$  的范围。

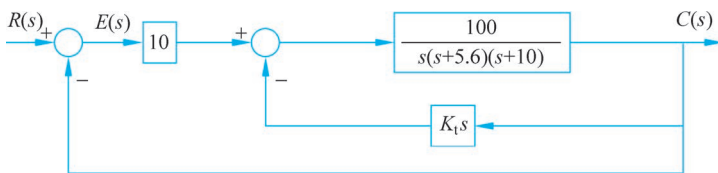


图 P3.5 题 3.9 图

3.10 已知系统的结构图如图 P3.6 所示, 试用劳斯稳定判据确定使系统稳定的反馈参数  $\tau$  的取值范围。

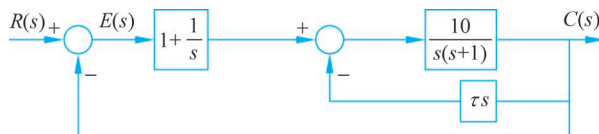


图 P3.6 题 3.10 图

3.11 已知单位反馈系统的开环传递函数为

$$G(s) = \frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

试求输入分别为  $r(t) = 2t$  和  $r(t) = 2 + 2t + t^2$  时, 系统的稳态误差。

3.12 求下列单位反馈系统的阶跃、斜坡和抛物线静态误差系数, 已知响应的前向通道传递函数为

$$(1) G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1+10s)}$$

$$(2) G(s) = \frac{100}{s(s^2+10s+100)}$$

$$(3) G(s) = \frac{1000}{s(s+10)(s+100)}$$

$$(4) G(s) = \frac{K(1+2s)(1+4s)}{s^2(s^2+s+1)}$$

3.13 已知控制系统的方块图如图 P3.7 所示。试求相应的阶跃、斜坡、抛物线静态误差系数。设误差信号为  $e(t)$ , 在下列输入信号下求关于  $K_p$  和  $K_t$  的稳态误差。假设系统稳定。

- (1)  $r(t) = 1(t)$       (2)  $r(t) = t1(t)$       (3)  $r(t) = (t^2/2)1(t)$

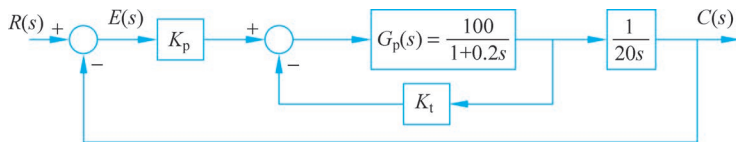


图 P3.7 题 3.13 图

3.14 已知线性控制系统的方块图如图 P3.8 所示,其中  $r(t)$  是参考输入信号,  $d(t)$  是干扰信号。

(1) 当  $d(t) = 0, r(t) = t1(t)$  时,求  $e(t)$  的稳态值。 $\alpha$  和  $K$  应满足什么条件才使得得到的解有意义?

(2) 当  $d(t) = 0, r(t) = 1(t)$  时,求  $c(t)$  的稳态值。

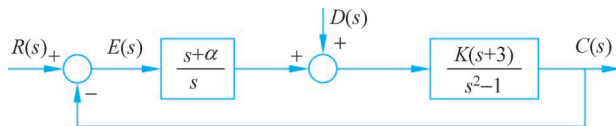


图 P3.8 题 3.14 图

3.15 设控制系统如图 P3.9 所示,其中,

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, \quad F(s) = \frac{1}{Js}$$

输入  $r(t)$  以及扰动  $d_1(t)$  和  $d_2(t)$  均为单位阶跃函数,试求

- (1) 在  $r(t)$  作用下系统的稳态误差;
- (2) 在  $d_1(t)$  作用下系统的稳态误差;
- (3) 在  $d_1(t)$  和  $d_2(t)$  同时作用下系统的稳态误差。

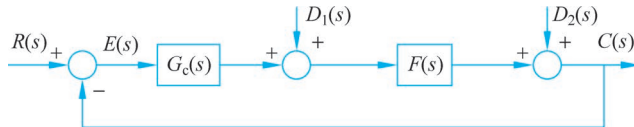


图 P3.9 题 3.15 图

3.16 设随动系统的微分方程为

$$T_1 \frac{d^2 c(t)}{dt^2} + \frac{dc(t)}{dt} = K_2 u(t)$$

$$u(t) = K_1 [r(t) - b(t)]$$

$$T_2 \frac{db(t)}{dt} + b(t) = c(t)$$

其中,  $T_1, T_2$  和  $K_2$  为正常数。若要求  $r(t) = 1 + t$  时,  $c(t)$  对  $r(t)$  的稳态误差不大于正常数  $\epsilon_0$ , 试问  $K_1$  应满足什么条件?

3.17 已知系统闭环传递函数为  $G(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$ , 用 MATLAB 求其单位阶跃响应、单位脉冲响应。

3.18 单位反馈系统的开环传递函数为

$$G_1(s) = \frac{0.485}{s^2 + 0.3s + 1}$$

$$G_2(s) = \frac{7(s+2)}{s(s^2 + 2s + 12)}$$

(1) 求系统的闭环极点,并且计算系统阻尼比。

(2) 求闭环系统的单位阶跃响应,计算  $\sigma\%$ 、 $t_r$  与  $t_s$ ,并对系统的暂态响应给予评价。

3.19 用计算机程序求解如下连续时间线性系统特征方程的根,并求出各自的稳定条件。

(1)  $s^3 + 3s^2 + 3s + 1 = 0$

(2)  $s^4 + 5s^3 + 2s^2 + 3s + 2 = 0$

(3)  $s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 = 0$

(4)  $s^5 + 125s^4 + 100s^3 + 100s^2 + 20s + 10 = 0$

3.20 闭环控制系统的结构见图 P3.10,分析增益  $K$  对系统性能的影响( $K=20$  和 100 时,参考输入信号和扰动信号都是单位阶跃信号)。(用 Simulink 解答)

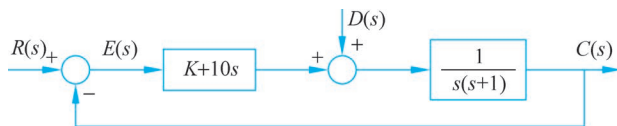


图 P3.10 题 3.20 图

3.21 已知一个单回路反馈控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s(s+2)(1+Ts)}$$

参数  $K$  和  $T$  构成以  $K$  为横轴  $T$  为纵轴的参数平面。试求出闭环系统渐近稳定时和不稳定时的  $T$ 、 $K$  的参数范围,指出系统临界稳定的边界。

3.22 已知一个被控过程由以下状态方程描述

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = x_1(t) - 2x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = 10x_1(t) + u(t)$$

由状态反馈可得控制输入  $u(t)$  为

$$u(t) = -k_1x_1(t) - k_2x_2(t)$$

其中,  $k_1, k_2$  是实常数。试求出  $k_1, k_2$  的参数区域,使得闭环系统渐近稳定。

3.23 图 P3.11 是某控制系统的方块图,求使系统渐近稳定的  $K$ - $\alpha$  平面的参数区域( $K$  为纵轴,  $\alpha$  为横轴)。

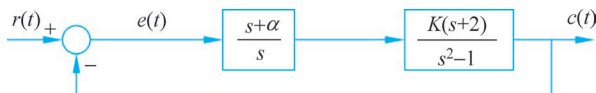


图 P3.11 题 3.23 图

3.24 航天飞机定向控制系统的有效载荷用纯质量  $M$  来模拟。磁性轴承将载荷悬挂起来使得控制过程中没有摩擦力。 $y$  方向的载荷姿态由基座上的磁性传动器控制。磁传动

器产生的总推力为  $f(t)$ 。其他角度动作的控制相互间独立,这里不予考虑。因为在载荷上做实验,功率通过电缆送到载荷处。用弹簧弹性系数为  $K_s$  的线性弹簧来模拟电缆装置。控制  $y$  轴方向运动的动态系统模型如图 P3.12 所示。已知  $y$  方向的运动推力方程为

$$f(t) = K_s y(t) + M \frac{d^2 y(t)}{dt^2}$$

其中,  $K_s = 0.5 \text{ N} \cdot \text{m/m}$ ,  $M = 500 \text{ kg}$ 。磁性传动器由状态反馈控制,则

$$f(t) = -K_p y(t) - K_d \frac{dy(t)}{dt}$$

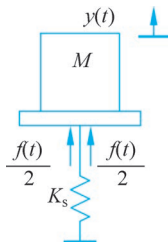


图 P3.12 题 3.24 图

- (1) 试画出系统的功能方框图。
- (2) 写出闭环系统的特征方程。
- (3) 求使系统渐近稳定的  $K_d$ - $K_p$  平面区域。

3.25 已知反馈控制系统的方块图如图 P3.13 所示,误差信号为  $e(t)$ 。

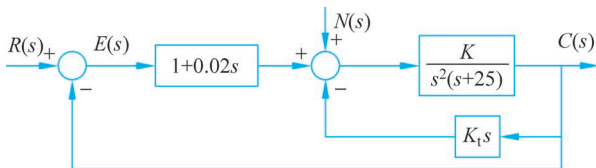


图 P3.13 题 3.25 图

(1) 在单位斜坡输入下求系统关于  $K$  和  $K_t$  的稳态误差。要使得到的答案有意义,  $K$  和  $K_t$  要满足什么约束条件? 这里令  $n(t)=0$ 。

(2) 当  $n(t)$  是单位阶跃函数时,试求  $c(t)$  的稳态值。令  $r(t)=0$ , 假设系统稳定。

3.26 已知导弹姿态控制系统的方块图如图 P3.14 所示。令输入为  $r(t)$ ,  $d(t)$  是扰动输入。讨论控制器  $G_c(s)$  对系统稳态和暂态响应的影响。

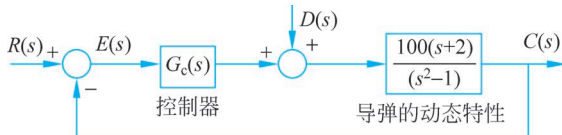


图 P3.14 题 3.26 图

- (1) 令  $G_c(s)=1$ 。当  $r(t)$  为单位阶跃输入时求系统的稳态误差, 令  $d(t)=0$ 。
- (2) 令  $G_c(s)=(s+\alpha)/s$ 。求  $r(t)$  为单位阶跃输入时的稳态误差。
- (3) 求出  $0 \leq t \leq 0.5 \text{ s}$  的系统单位阶跃响应。此时,  $G_c(s)$  同 (2),  $\alpha=5, 50, 500$ , 假定初始条件为 0, 记录不同  $\alpha$  值时输出  $c(t)$  的最大超调。可以使用计算机程序仿真, 试解释控制器的  $\alpha$  值变化对暂态响应的影响。
- (4) 令  $r(t)=0$ ,  $G_c(s)=1$ 。当  $d(t)=1(t)$  时求  $c(t)$  的稳态值。
- (5) 令  $G_c(s)=(s+\alpha)/s$ 。当  $d(t)=1(t)$  时求  $c(t)$  的稳态值。
- (6) 求出  $0 \leq t \leq 0.5 \text{ s}$  的系统单位阶跃响应。此时,  $G_c(s)$  同 (5),  $r(t)=0$ ,  $d(t)=1(t)$ ,  $\alpha=5, 50, 500$ , 初始条件为 0。
- (7) 说明控制器  $\alpha$  值的变化对  $c(t)$  和  $d(t)$  的暂态响应的影响。

3.27 已知单位反馈控制系统的前向通道传递函数为

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2(1+T_p s)}$$

当  $T_p = 0, 0.5, 0.707$  时, 计算并画出闭环系统的单位阶跃响应。假设初始条件为 0, 可以使用计算机仿真程序, 求出闭环系统临界稳定时  $T_p$  的临界值, 说明  $G(s)$  的极点  $s = -1/T_p$  的作用。