第 3 章

CHAPTER 3

信道与信道容量

信道(Information Channel)是信息传输的通道。信道的作用是把携有信息的信号从它的输入端传递到输出端,它最重要的特征参数是信息传输能力,即信道容量问题。在高斯信道下,信道的信息传输能力与信道的频带宽度、信道的工作时间、信道的噪声功率密度有关。频带越宽,工作时间越长,信号、噪声功率比越大,信道的传输能力就越强,信道容量越大。本章主要讨论离散信道的统计特性和数学模型,定量地研究信道传输的平均互信息及其重要性质,导出信道容量的概念和几种比较典型的信道的信道容量计算方法。本章重点在于研究一对输入端和一对输出端的信道,即单用户信道,以无记忆、无反馈、固定参数的离散信道为重点内容进行讨论。

3.1 信道的基本概念

3.1.1 信道的定义及分类

1. 信道的定义及数学模型

信道是指信息传输的通道。

在通信中,可按不同标准将信道划分为不同类别。信号在这些信道中传输的过程遵循不同的物理规律,通信技术必须研究信号在这些信道中传输时的特性。信息论不研究信号在信道中传输的物理过程,而是用数学方法研究信息在信道中传输的规律。因而首先需要确定信道的数学模型。

设信道的

输入 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots),X_i\in A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

输出 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_j,\cdots),Y_j\in B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$

通常采用信道转移概率 $p(Y|X)$来描述输入和输出的统计依赖关系,反映信道统计关系。一般信道的模型如图 3.1 所示,它有一个输入以及一个与输入有关的输出,外加一个噪声干扰输入。通常,信道的输入、输出及干扰都是随机量,可用随机过程来描述。信道的特性完全由信道的输入输出统计关系确定。

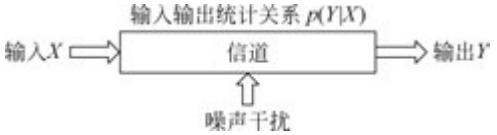

图 3.1 信道等效模型示意图

2. 信道的分类

在实际的通信系统中，信道的种类很多，所包含的设备也各不相同，因而可以从不同的角度进行分类。

1）根据信道输入输出信号划分

信道分为时间离散信道和时间连续信道。

（1）时间离散信道有两种情形。

① 时间离散、幅值离散信道，简称离散信道（Discrete Channel）或数字信道（Digital Channel）。

② 时间离散、幅值连续信道，简称连续信道（Continuous Channel）。

（2）时间连续信道也有两种情形。

① 时间连续、幅值离散信道。

② 时间连续、幅值连续信道，简称波形信道（Waveform Channel）或模拟信道（Analog Channel）。

2）根据信道的记忆特性划分

信道分为无记忆信道和有记忆信道。

（1）无记忆信道。信道当前的输出只与当前的输入有关。

（2）有记忆信道。信道当前的输出不但与当前的输入有关，还与当前时刻以前的输入有关。

3）根据信道的输入输出端关系划分

信道分为无反馈信道和反馈信道。

（1）无反馈信道。信道的输出端信号不反馈到输入端，即输出信号对输入信号没有影响。

（2）反馈信道。输出信号通过一定途径反馈到输入端，致使输入端的信号发生变化。

4）根据信道的物理组成划分

信道可分为很多类，较为常见的有有线信道、无线信道、光纤信道等。

5）根据信道的用户类型划分

信道可分为两端（单用户）信道和多端（多用户）信道。

（1）两端（单用户）信道。只有一个输入端和一个输出端的单向信道。

（2）多端（多用户）信道。有多个输入端和多个输出端的单向或双向信道。

6）根据信道的参数类型划分

信道可分为恒参信道（时不变信道）和变参信道（时变信道）。

（1）恒参信道（时不变信道）。信道的统计特性不随时间变化。

（2）变参信道（时变信道）。信道的统计特性随时间变化。

7）根据信道中所受噪声种类划分

信道可分为随机差错信道和突发差错信道。

（1）在随机差错信道中，噪声独立随机地影响每个传输码元，如以高斯白噪声为主体的信道。

（2）在突发差错信道中，噪声、干扰的影响则是前后相关的，差错成串出现，如实际的衰落信道、码间干扰信道，这些噪声可能是由大的脉冲干扰或闪电等引起。

3.1.2　信道参数

设信道的输入 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_i,\cdots)$，$X_i\in A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，输出 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_j,\cdots)$，$Y_j\in B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$，通常采用条件概率 $p(Y|X)$来描述信道输入和输出的统计依赖关系。在分析信道问题时，该条件概率通常被称为转移概率。根据信道是否存在干扰及有无记忆，可将信道分为以下三类。

1. 无干扰(无噪声)信道

信道的输出信号 Y 与输入信号 X 之间有确定关系 $Y=f(X)$，已知 X 后就确知 Y，所以转移概率为

$$p(Y\mid X)=\begin{cases}1, & Y=f(X)\\ 0, & Y\neq f(X)\end{cases}$$

2. 有干扰无记忆信道

信道的输出信号 Y 与输入信号 X 之间没有确定关系，但转移概率满足下列情况：$p(Y|X)=p(y_1|x_1)p(y_2|x_2)\cdots p(y_L|x_L)$，即每个输出信号只与当前输入信号之间有转移概率关系，而与其他非该时刻的输入信号、输出信号都无关，也就是无记忆，这种情况使问题得到简化，不需采用向量形式，只要分析单个符号的转移概率 $p(y_j|x_i)$即可。

根据输入输出信号的符号数目是等于 2、大于 2 还是趋于∞，又可进一步区分以下信道模型。

1) 二进制离散信道

当信道模型的输入和输出信号的符号数都是 2，即 $X\in A=\{0,1\}$，$Y\in B=\{0,1\}$，转移概率为

$$\begin{cases}p(Y=0\mid X=1)=p(Y=1\mid X=0)=p\\ p(Y=1\mid X=1)=p(Y=0\mid X=0)=1-p\end{cases}\tag{3-1}$$

其信道模型如图 3.2 所示。这是一种对称的二进制输入、二进制输出信道，所以叫作二进制对称信道(Binary Symmetric Channel，BSC)，由于这种信道的输出比特仅与对应时刻的一个输入比特有关，而与以前的输入无关，因此这种信道是无记忆的。BSC 信道是研究二元编解码最简单，也是最常用的信道模型。

2) 离散无记忆信道

当无记忆信道模型的输入和输出信号的符号数大于 2 但为有限值时，叫作离散无记忆信道(Discrete Memoryless Channel，DMC)，其信道模型如图 3.3 所示。

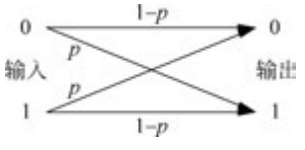

图 3.2　二进制对称信道

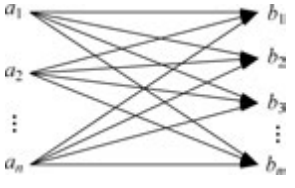

图 3.3　离散无记忆信道(DMC)

信道的输入是 n 元符号，即输入符号集由 n 个元素 $X\in A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$构成，而信道的输出是 m 元符号，即信道输出符号集由 m 个元素 $Y\in B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$构成，为了

表示该 nm 个转移概率，采用转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=[p(b_j|a_i)]=[p_{ij}]$ 表示，即

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1m} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nm} \end{bmatrix} \tag{3-2}$$

显然，输入 a_i 时各可能输出值 b_j 的概率之和必定等于 1，即

$$\sum_{j=1}^{m} p(b_j \mid a_i)=1 \quad i=1,2,\cdots,n \tag{3-3}$$

因此转移概率矩阵中各行元素之和为 1。因为 BSC 信道是 DMC 信道的特例，故 BSC 信道的转移概率矩阵可表示为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \tag{3-4}$$

3）离散输入连续输出信道

假设信道输入符号选自一个有限的、离散的输入符号集 $X\in\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，而信道的输出未经量化（$m\to\infty$），这时的信道输出可以是实轴上的任意值，即 $Y\in\{-\infty,\infty\}$。这样的信道模型称为离散时间无记忆信道。其特性由离散输入 X、连续输出 Y 以及一组条件概率密度函数 $p_Y(y|X=a_i)(i=1,2,\cdots,n)$ 决定。这类信道中最重要的一种信道是加性高斯白噪声（AWGN）信道，对它而言，有

$$Y=X+G \tag{3-5}$$

式中，G 为一个均值为零、方差为 σ^2 的高斯随机变量。当 $X=a_i$ 给定后，Y 是一个均值为 a_i、方差为 σ^2 的高斯随机变量，即

$$p_Y(y \mid a_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-(y-a_i)^2/2\sigma^2} \tag{3-6}$$

4）波形信道

当信道输入和输出都是随机过程$\{x(t)\}$和$\{y(t)\}$时，该信道称为波形信道。在实际模拟通信系统中，信道都是波形信道。在通信系统模型中，把来自各部分的噪声都集中在一起，认为都是通过信道接入的。

因为实际波形信道的频宽总是受限的，所以在有限观察时间 t_B 内，能满足限频 f_m、限时 t_B 的条件。按照第 2 章有记忆信源内容，可把波形信道的输入$\{x(t)\}$和输出$\{y(t)\}$的平稳随机过程信号离散化成 L 个（$L=2f_mt_B$）时间离散、取值连续的平稳随机序列 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_L\}$和 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_L\}$。这样波形信道就转换为多维连续信道，信道转移概率密度函数为

$$p_Y(y \mid x)=p_Y(y_1,y_2,\cdots,y_L \mid x_1,x_2,\cdots,x_L) \tag{3-7}$$

且满足

$$\iint_{RR}\cdots\int_{R} p_Y(y_1,y_2,\cdots,y_L \mid x_1,x_2,\cdots,x_L)\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_L=1$$

式中，R 为实数域。

若多维连续信道的转移概率密度函数满足

$$p_Y(y \mid x)=\prod_{i=1}^{L} p_Y(y_i \mid x_i) \tag{3-8}$$

则称此信道为连续无记忆信道，即在任一时刻输出变量只与对应时刻的输入变量有关，与以前时刻的输入输出无关。

一般情况下，式(3-8)不能满足，也就是连续信道任一时刻的输出变量与以前时刻的输入输出都有关，此信道称为连续有记忆信道。

根据噪声对信道中信号的作用不同，可将噪声分为加性噪声和乘性噪声两类，即噪声与输入信号是相乘或相加。加性噪声信道分析较多、较方便。单符号信道可表示为

$$y(t)=x(t)+n(t) \tag{3-9}$$

式中，$n(t)$为加性噪声过程的一个样本函数。

在这种信道中，噪声与信号通常相互独立，所以有

$$p_{X,Y}(x,y)=p_{X,n}(x,n)=p_X(x)p_n(n)$$

则

$$p_Y(y \mid x)=\frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_X(x)}=\frac{p_{X,n}(x,n)}{p_X(x)}=p_n(n) \tag{3-10}$$

即信道的转移概率密度函数等于噪声的概率密度函数。进一步考虑条件熵

$$\begin{aligned}H_c(Y \mid X)&=-\iint_R p_{X,Y}(x,y)\log_2 p_Y(y \mid x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\int_R p_X(x)\mathrm{d}x\int_R p_Y(y \mid x)\log_2 p_Y(y \mid x)\mathrm{d}y\\&=-\int_R p_X(x)\mathrm{d}x\int_R p_n(n)\log_2 p_n(n)\mathrm{d}n\\&=-\int_R p_n(n)\log_2 p_n(n)\mathrm{d}n=H_c(n)\end{aligned} \tag{3-11}$$

该结论说明了条件熵 $H_c(Y|X)$是由噪声引起的，它等于噪声信源的熵 $H_c(n)$，所以称条件熵为噪声熵。

在加性多维连续信道中，输入向量 $\boldsymbol{x}$、输出向量 $\boldsymbol{y}$ 和噪声向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的关系是 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}$。同理可得

$$p_Y(y \mid x)=p_n(n),\quad H_c(Y \mid X)=H_c(n) \tag{3-12}$$

以后主要讨论加性噪声信道，噪声源主要是高斯白噪声。

3. 有干扰有记忆信道

这是最一般情况。例如，在实际的数字信道中，当信道特性不理想，存在码间干扰时，输出信号不但与当前的输入信号有关，还与以前的输入信号有关。处理这种情况比较困难，常用的方法有如下两种。

① 将记忆很强的 L 个符号当向量符号，各向量符号之间认为无记忆，但会引入误差，L 越大，误差越小。

② 将转移概率 $p(Y|X)$看成马尔可夫链的形式，记忆有限，信道的统计特性可用在已知现时刻输入信号和前时刻信道所处的状态的条件下，如 $p(y_n,s_n|x_n,s_{n-1})$，这种处理方法很复杂，取一阶时稍微简单一些。

在分析问题时选用以上何种信道模型完全取决于分析者的目的。如果对设计和分析离

散信道编码、解码器感兴趣，从工程角度出发，最常用的是 DMC 信道模型或其简化形式 BSC 信道模型；若分析性能的理论极限，则多选用离散输入、连续输出信道模型；如果想设计和分析数字调制器和解调器的性能，则可采用波形信道模型。本书后面主要讨论编码、解码，因此 DMC 信道模型使用最多。

3.1.3 信道容量的定义

在单符号离散信道中，平均每个符号传送的信息量定义为信道的信息传输率。从统计角度而言，信道的噪声总是有限的，总有部分信息能够准确传输，所以信道的信息传输率为

$$R = I(X;Y) = H(X) - H(X \mid Y)(\text{比特/符号})$$

若已知平均传输一个符号所需时间为 t（单位为 s），则信道在单位时间内平均传输的信息量定义为信息传输速率，即 $R_t = I(X;Y)/t$，单位为 b/s。

什么是信道容量？

互信息量 $I(X;Y)$ 是输入符号 X 概率分布的凸函数。对于一个给定的信道，总是存在某种概率分布 $p(x)$，使得传输每个符号平均获得的信息量最大，即对于每个固定的信道总是存在一个最大的信息传输速率，这个最大信息传输速率定义为信道容量（Channel Capacity）。

$$C = \max_{p(x)}\{I(X;Y)\} \tag{3-13}$$

先验概率分布应当满足下列条件，即

$$p(x = a_i) \geqslant 0 \quad i = 1,2,\cdots,r$$

$$\sum_{i=1}^{n} p(a_i) = 1 \tag{3-14}$$

对于给定信道，条件转移概率 $p(b_j \mid a_i)$ 是一定的，所以信道容量就是在信道的前向概率一定的情况下，寻找某种先验概率分布 $p(x)$，使得平均互信息量最大，这种先验分布概率为最佳分布。

如果信道输入满足最佳分布，信息传输率最大，即达到信道容量 C；如果信道输入的先验分布不是最佳分布，那么信息传输率不能够达到信道容量 C。信道传输的信息量 R 必须小于信道容量 C，否则传输过程中会造成信息损失，出现差错；反之，如果 $R < C$ 成立，可以通过信道编码方法保证信息能够几乎无失真地传送到接收端。

3.2 离散信道及其容量

3.2.1 无干扰离散信道

这类信道是理想信道。输入、输出符号之间是确定性关系，可以根据输入或者输出划分为互不相交的集合。这类信道在实际通信系统中较少，在数据压缩系统中，可以使用这类模型进行研究。根据信道输入符号 X 与信道输出符号 Y 之间的关系，可以分为以下几种信道。

1. 无噪无损信道

该信道的输入、输出集合符号数量相等，输入 X 与输出 Y 之间是一一对应的，如图 3.4

所示。对于给定 a_i，由于 $p(b_j|a_i)$只有一个为 1，其余都为 0，所以 $H(X|Y)=0$，则

$$I(X;Y)=H(X)-H(X\mid Y)=H(X)=H(Y)$$

根据信道容量的定义，信道容量就是平均互信息量的最大值，根据极大熵定理可知，当输入符号的先验概率为等概率分布时，$H(X)$取得最大值 $\log_2 n$，信道容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)=1}\{H(X)\}=\log_2 n \tag{3-15}$$

所以当输入信源满足等概率分布时，信息传输率最大，达到信道容量。这类信道的前向概率矩阵和后验概率矩阵是相等的，都是 $n\times n$ 单位矩阵，$\boldsymbol{P}(Y|X)=\boldsymbol{I}_{n\times n}$。

2. 无噪有损信道

信道输出符号 Y 集合的数量小于信道输入符号 X 集合的数量，即 $n>m$，形成多对一的映射，如图 3.5 所示。

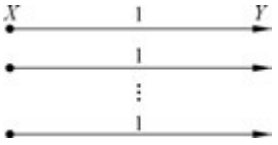

图 3.4　无噪无损信道模型

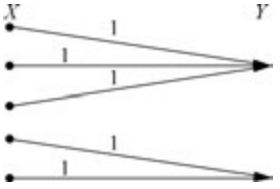

图 3.5　无噪有损信道模型

接收到符号 Y 后，不能确定信道输入 X，即不能完全消除 X 的不确定性，所以 $H(X|Y)>0$，且 $H(X)>H(Y)$，$I(X;Y)=H(Y)$。信道容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)=1}\{H(Y)\}=\log_2 m \tag{3-16}$$

这类信道的特点是信道转移概率矩阵中每行只有一个非零元素，即

$$\boldsymbol{P}(Y\mid X)=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

3. 有噪无损信道

信道输出符号 Y 集合的数量大于信道符号 X 集合的数量，即 $n<m$，形成一对多的映射关系，如图 3.6 所示。由于一对多的映射关系，不能由输入完全确定信道的输出，$H(X|Y)>0$，$H(X)<H(Y)$，$I(X;Y)=H(X)$。信道的容量为

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}=\max_{p(x)=1}\{H(X)\}=\log_2 n \tag{3-17}$$

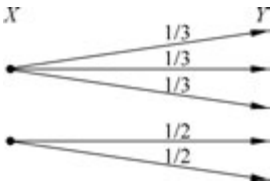

图 3.6　有噪无损信道模型

当信道输入为等概率输入时，$I(X;Y)=H(X)$才能取得最大值，所以先验概率的最佳分布就是使得 $p(a_j)=1/n$ 的分布。这类信道的特点是信道转移概率矩阵中每列只有一个非零元素。

4. 信道的疑义度和信道的散布度

1）信道的疑义度

观察 $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$，对于有噪信道，输入 X 的平均信息 $H(X)$不可能全部送达到输出，一部分信息在传输过程中损失了，损失的部分就是 $H(X|Y)$。

$H(X|Y)$既代表收到输出 Y 后对输入 X 还存在疑义，又代表信道在传输过程中的信息

损失，因此，$H(X|Y)$又称为信道的疑义度或损失熵。

损失熵为零的信道称为无损信道。

2）信道的散布度

观察 $I(X;Y)=H(X)-H(X|Y)$，可变换为 $H(Y)=I(X;Y)+H(Y|X)$，式中 $H(Y)$代表输出 Y 中含有的全部信息，其中既包含从输入端送来的有用信息 $I(X;Y)$，也包含由噪声引入的无用信息 $H(Y|X)$。

$H(Y|X)$叫作信道的散布度或噪声熵，表明信道因噪声干扰所呈现的无序性程度，噪声熵为零的信道称为确定信道。

3.2.2 对称离散信道的信道容量

对称离散无记忆(DMC)信道是最简单的信道之一。

1. 输入对称信道容量

如果信道转移概率矩阵中所有行向量都是第一行的某种置换，则称信道关于输入是对称的，这种信道称为输入对称离散信道。例如，信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.1\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

又比如信道转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$，根据定义可以得出信道具有下列性质，即

$$\begin{cases}H(Y\mid a_1)=H(Y\mid a_2)=\cdots=H(Y\mid a_n)=H(Y\mid a_i)=-\sum\limits_{j=1}^{m}p(b_j\mid a_i)\log_2 p(b_j\mid a_i)\\ H(Y\mid X)=H(Y\mid a_i)\end{cases} \tag{3-18}$$

即条件熵 $H(Y|X)$与信道输入的符号无关。

为了表示方便起见，假设信道转移概率矩阵首行元素为 $p_1,p_2,\cdots,p_m$，则有

$$H(Y\mid a_i)=H(p_1,p_2,\cdots,p_m)$$

$$I(X;Y)=H(Y)-H(Y\mid X)=H(Y)-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)$$

因此，输入对称信道的容量为

$$C=\max_{p(a_i)}I(X;Y)=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(p_1,p_2,\cdots,p_m) \tag{3-19}$$

所以输入对称信道的容量就是找到一种分布，使得信道输出的熵最大。

【例 3-1】 信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3 & 0.1\\ 0.3 & 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$$

求该信道的容量。

【解】 设信道输入的概率空间为

$$\begin{bmatrix}X\\ p(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ p & 1-p\end{bmatrix}$$

信道输出的概率分布为

$$p(b_1)=0.6p+0.3(1-p)=0.3+0.3p$$

$$p(b_2)=0.3p+0.6(1-p)=0.6-0.3p$$

$$p(b_3)=0.1p+0.1(1-p)=0.1$$

$$H(Y)=-\{p(b_1)\log_2 p(b_1)+p(b_2)\log_2 p(b_2)+p(b_3)\log_2 p(b_3)\}$$

$$=-\{(0.3+0.3p)\log_2(0.3+0.3p)+(0.6-0.3p)\log_2(0.6-0.3p)+0.1\log_2 0.1\}$$

取得极值的条件为$\dfrac{\mathrm{d}H(Y)}{\mathrm{d}p}=0$。

解上述方程可以得到取极值的条件为 $P=0.5$，即当信道输入为等概率分布时，$H(Y)$取得最大值，所以 $\max\{H(Y)\}=1.369$。

$$H(Y\mid X)=H(Y\mid a_1)=-\sum_{j=1}^{m}p(b_j\mid a_1)\log_2 p(b_j\mid a_1)$$

$$=-0.6\log_2 0.6-0.3\log_2 0.3-0.1\log_2 0.1$$

$$=1.296(\text{比特/符号})$$

该信道的容量为

$$C=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid X)=0.073$$

此时信道输出的概率分布为

$$p(b_1)=0.45\quad p(b_2)=0.45\quad p(b_3)=0.1$$

$$p(b_1)\neq\frac{1}{m}=\frac{1}{3}$$

所以，当信道只是输入对称时，信道容量不能简单地认为是

$$C=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid X)=\log_2 m-H(Y\mid X)$$

而应当首先假设信道输入分布，然后解决极值问题。

2. 输出对称信道容量

如果信道转移概率矩阵中所有列向量都是第一列的某种置换，则称信道是关于输出对称离散信道。例如，信道转移概率矩阵

$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0.5 & 0.5\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ 和 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\\ 0.1 & 0.7 & 0.2\end{bmatrix}$ 都是输出对称信道。

输出对称信道容量为

$$C=\max_{p(a_i)}I(X,Y)=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid X)$$

$$=\log_2 m-\min_{p(a_i)}H(Y\mid X)\tag{3-20}$$

若信道输出对称，则当信道输入符号等概率分布时，信道输出也是等概率分布的。此时$\sum p(b_j\mid a_i)$为常数，即

$$P(b_j)=\sum_{i=1}^{n}p(a_i)p(b_j\mid a_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}p(b_j\mid a_i)=\frac{1}{m}$$

信道输出符号的熵为 $H(Y)=\log_2 m$，得到式(3-20)。

由于信道转移概率矩阵是已知的，$H(Y|X)$可以使用下列公式，即

$$H(Y\mid X)=-\sum_{i=1}^{n}p(a_i)H(Y\mid a_i)\tag{3-21}$$

只要能够求出使得式(3-21)取得最小值的信道输入概率分布，即可求出信道容量。

3. 对称信道容量

若转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 每一行都是第一行的置换，称矩阵是输入对称。若每一列都是第一列的置换，称矩阵是输出对称。若输入输出都对称，称对称 DMC 信道。

如 $\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/6 & 1/3 & 1/3\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/6 & 1/2 & 1/3\\ 1/3 & 1/6 & 1/2\end{bmatrix}$ 是对称信道。

$[P]=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3 & 1/6 & 1/6\\ 1/6 & 1/3 & 1/6 & 1/3\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\ 0.2 & 0.1 & 0.7\end{bmatrix}$ 是不对称信道。

对称信道的容量：由于对称信道是关于输入对称，而输入对称信道的容量为

$$C=\max_{p(a_i)}I(X,Y)=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid X)=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid a_i) \tag{3-22}$$

且满足 $H(Y|X)=H(Y|a_i)$，$H(Y|X)$与信道输入的分布无关，只与条件概率分布有关。

为了讨论问题方便起见，假设信道转移概率矩阵第一行中，各元素对应的条件概率分别为$(p_1,p_2,\cdots,p_m)$，有

$$H(Y\mid X)=H(p_1,p_2,\cdots,p_m)$$

对称信道输出也是对称的，当信道输入是等概率分布时，信道输出也是等概率分布，取得最大值，即

$$\max_{p(a_i)}H(Y)=\log_2 m \tag{3-23}$$

则对称信道容量为

$$C=\max_{p(a_i)}I(X,Y)=\log_2 m-H(p_1,p_2,\cdots,p_m) \tag{3-24}$$

对称信道的信道容量只与信道转移概率矩阵中的行向量和输出符号集合的数量有关。如果希望信息传输率达到信道容量，信道输入应当满足等概率分布。

【例 3-2】 设某信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

求信道容量。

【解】 由信道转移概率矩阵可知，矩阵的第二行是第一行的置换，每一列都是第一列的置换，故信道是对称的，所以信道容量为

$$C=\log_2 m-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)=\log_2 4-H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)=0.082(\text{比特/符号})$$

【例 3-3】 假设信道的输入、输出符号数相等，都等于 r，且信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & \frac{p}{r-1} & \cdots & \frac{p}{r-1}\\ \frac{p}{r-1} & 1-p & \cdots & \frac{p}{r-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{p}{r-1} & \frac{p}{r-1} & \cdots & 1-p\end{bmatrix}$$

求信道容量。

【解】　显然该信道是对称的，信道容量为

$$C=\log_2 r-H\left(1-p,\frac{p}{r-1},\cdots,\frac{p}{r-1}\right)$$

$$=\log_2 r+(1-p)\log_2(1-p)+(r-1)\frac{p}{r-1}\log_2\frac{p}{r-1}$$

$$=\log_2 r-H(p)-p\log_2(r-1)$$

上述信道称为强对称信道或者是均匀信道，是对称信道的一个特例。一般信道转移概率矩阵中的各列元素之和并不等于1，而该信道转移概率矩阵中的各列元素之和都等于1。例如：

$$\begin{bmatrix}1/2 & 1/3 & 1/6\\ 1/6 & 1/2 & 1/3\\ 1/3 & 1/6 & 1/2\end{bmatrix}$$

当 $r=2$ 时，信道容量为

$$C=\log_2 r-H(p)-p\log_2(r-1)=1-H(p)$$

4. 准对称信道容量

如果信道转移概率矩阵按列可以划分为几个互不相交的子集，每个子矩阵满足下列性质。

(1) 每行都是第一行的某种置换。

(2) 每列都是第一列的某种置换。

称该信道为准对称信道。或者说：每一行都是第一行元素的不同排列，每一列并不都是第一列元素的不同排列，但可按照信道矩阵的列将信道矩阵划分成若干子矩阵，称这类信道为准对称信道。

例如，$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$ 是准对称矩阵，可划分成两个对称矩阵 $\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1\\ 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix}$。

准对称信道的容量——准对称信道是关于输入对称的，可以使用输入对称信道的方法直接求解。输入对称信道的容量为

$$C=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid X)=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(Y\mid a_i)$$

$$=\max_{p(a_i)}H(Y)-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)\tag{3-25}$$

由于信道输入不一定存在一种分布使得信道输出满足，所以准对称信道的信道容量满足下列关系，即

$$C\leqslant\log_2 m-H(Y\mid X)=\log_2 s-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)\tag{3-26}$$

可以证明，准对称信道输入的最佳分布是等概率分布，信道容量为

$$C=\log_2 n-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)-\sum_{k=1}^{r}N_k\log_2 M_k\tag{3-27}$$

式中，$p_1,p_2,\cdots,p_m$ 为准对称信道转移概率矩阵中的一行元素；r 为划分的子集数量；N_k

为第 k 个子矩阵的行元素之和；M_k 为第 k 个子矩阵的列元素之和。

式(3-27)为准对称信道容量计算公式，而到达信道容量的信道输入最佳概率分布由下列定理确定。

定理 3-1 准对称离散信道的信道容量是在信道输入为等概率分布时达到的。

【例 3-4】 设某信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p-q & q & p\\ p & q & 1-p-q\end{bmatrix}$$

求信道容量。

【解】 从该信道转移概率矩阵可以看出，该信道是一个准对称信道，可以分解为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}1-p-q & p\\ p & 1-p-q\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}q\\ q\end{bmatrix}$$

这是两个互不相交的子集，而每个子集都是对称信道形式，对应参数分别为

$$N_1=1-q,\quad N_2=q;\quad M_1=1-q,\quad M_2=2q$$

式中，N_1 为第一个子矩阵的行元素之和；N_2 为第二个子矩阵的行元素之和；M_1 为第一个子矩阵的列元素之和；M_2 为第二个子矩阵的列元素之和。

由准对称离散信道的信道容量计算公式，有

$$\begin{aligned}C&=\log_2 n-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)-\sum_{k=1}^{r}N_k\log_2 M_k\\&=\log_2 2-H(1-p-q,q,p)-(1-q)\log_2(1-q)-q\log_2 2q\\&=p\log_2 p+(1-p-q)\log_2(1-p-q)+(1-q)\log_2\frac{2}{1-q}\end{aligned}\tag{3-28}$$

如果 $p=0$，则 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-q & q & 0\\ 0 & q & 1-q\end{bmatrix}$，称该信道为二元纯对称删除信道，如图 3.7 所示。其信道容量为

$$C=(1-q)\log_2(1-q)+(1-q)\log_2\frac{2}{1-q}=1-q\ (\text{比特/符号})$$

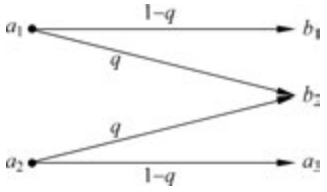

图 3.7 二元纯对称删除信道

【例 3-5】 信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

求信道容量。

【解】 该信道是准对称信道，可以分解为 3 个互不相交的子集，分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{6}\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\ \frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

对应的参数分别为

$$N_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\quad N_2=\frac{1}{3},\quad N_3=\frac{1}{6}$$

$$M_1=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2},\quad M_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{3},\quad M_3=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$$

信道容量为

$$\begin{aligned}C&=\log_2 n-H(p_1,p_2,\cdots,p_m)-\sum_{k=1}^{r}N_k\log_2 M_k\\&=\log_2 2-H\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)-\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\log_2\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\log_2\frac{1}{3}\\&=0.041(\text{比特/符号})\end{aligned}$$

3.2.3　一般离散信道的容量

从信道容量的定义可知，信道容量是在信道给定的情况下，即在信道转移概率矩阵一定的条件下，从信道所有可能输入概率分布中寻找一种最佳分布，使得信道输入、输出之间的平均互信息量最大，即使得信道的输入概率分布与信道匹配。

对于一般离散信道，首先假设信道的输入概率分布，根据信道容量的定义和输入概率分布的约束条件，直接求解极值，即可得到最佳分布；然后根据最佳分布计算信道输入、输出之间的平均互信息量，即得到信道容量。如果信道输入、输出符号数量较少，这种方法是可行的。但即使是简单的非对称二元信道，其最佳分布的求解也十分复杂，不借用计算机很难求出最佳分布，所以一般离散信道的信道容量的求解要通过计算机来进行。下面讨论一般离散信道的解法。

众所周知，平均互信息量 $I(X,Y)$ 是输入概率分布 $p(a_i)$ 的凸函数，所以极大值是一定存在的。假设信道输入的符号数量为 m，那么 $I(X,Y)$ 应当是 m 个随机变量 $(p_1,p_2,\cdots,p_m)$ 的函数，而且满足约束条件 $\sum_{i=1}^{m}p_i=1$，该多元函数的条件极值可以利用拉格朗日乘法求出。

(1) 首先引入函数 $\phi=I(X;Y)-\lambda\sum_{i=1}^{m}p(a_i)$，其中，$\lambda$ 为拉格朗日乘子。

(2) 对信道输入概率求导数，并令其为 0。

$$\frac{\partial\phi}{\partial p(a_i)}=\frac{\partial\left[I(X;Y)-\lambda\sum_{k=1}^{m}p(a_k)\right]}{\partial p(a_i)}=0$$

解方程组可以求出概率分布 $p'_1,p'_2,\cdots,p'_m$ 和 λ。

(3) 将最佳分布代入 $I(X;Y)$，即可求出信道容量 C。

按照前述步骤推导可得

$$I(a_i;Y)=\sum_{j=1}^{m}p(b_j\mid a_i)\log_2\frac{p(b_j\mid a_i)}{p(b_j)}=\lambda+\log_2 e \tag{3-29}$$

式中，$I(a_i,Y)$为输出端收到Y后获得关于a_i的信息量，即信源符号a_i对输出端平均提供的互信息。

可得

$$I(a_i;Y)=C$$

对于一般离散信道有下述定理。

定理 3-2 设有一般离散信道，它有r个输入符号，s个输出符号，其平均互信息$I(X,Y)$达到极大值（即等于信道容量）的充要条件是输入概率分布$p(a_i)$满足

$$\begin{cases}I(a_i;Y)=C & \text{对于所有 } p(a_i)\neq 0 \text{ 的 } a_i\\ I(a_i;Y)\leqslant C & \text{对于所有 } p(a_i)=0 \text{ 的 } a_i\end{cases} \tag{3-30}$$

其中，$i=1,2,\cdots,r$；常数C就是所求的信道容量。

该定理说明，当信道平均互信息达到信道容量时，输入符号概率集$\{p(a_i)\}$中每一个符号a_i对输出端Y提供相同的互信息，只是概率为0的符号除外。

上述定理只是给出了达到容量时，信道输入符号分布的充要条件，并不能给出信道的最佳概率分布，即没有给出信道容量的计算公式。另外，达到信道容量的最佳分布一般不是唯一的，只要输入分布满足概率的约束条件，并且使得$I(X,Y)$达到最大值即可。所以一般情况下，根据上述定理求解信道容量和信道输入的最佳概率分布还是十分复杂的。对于某些特殊信道，可以使用上述定理求解信道容量。

【例 3-6】 设某信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p(b_1\mid a_1) & p(b_2\mid a_1) & p(b_3\mid a_1)\\ p(b_1\mid a_2) & p(b_2\mid a_2) & p(b_3\mid a_2)\\ p(b_1\mid a_3) & p(b_2\mid a_3) & p(b_3\mid a_3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.9 & 0.1 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0.1 & 0.9\end{bmatrix}$$

求该信道容量和信道输入的最佳概率分布。

【解】 该信道不能直接使用对称信道计算其信道容量，若信道输入符号的概率$p(a_2)=0$，该信道就是一个二元纯对称删除信道。就可以假设$p(a_1)=p(a_3)=1/2$，然后检查是否满足定理3-2的条件，如果满足就可以计算出信道容量。

首先求出$p(b_j)$，即

$$p(b_1)=\sum_{i=1}^{3}p(a_i)p(b_1\mid a_i)=0.45$$

$$p(b_2)=\sum_{i=1}^{3}p(a_i)p(b_2\mid a_i)=0.1$$

$$p(b_3)=\sum_{i=1}^{3}p(a_i)p(b_3\mid a_i)=0.45$$

计算互信息量为

$$I(a_1;Y)=\sum_{j=1}^{3}p(b_j\mid a_1)\log_2\frac{p(b_j\mid a_1)}{p(b_j)}=0.9(\text{比特/符号})$$

$$I(a_2;Y)=\sum_{j=1}^{3}p(b_j\mid a_2)\log_2\frac{p(b_j\mid a_2)}{p(b_j)}=-0.29(\text{比特/符号})$$

$$I(a_3;Y)=\sum_{j=1}^{3}p(b_j\mid a_3)\log_2\frac{p(b_j\mid a_3)}{p(b_j)}=0.9(\text{比特/符号})$$

该输入概率分布满足定理 3-2 的条件，信道容量为 $C=0.9$，对应的信道输入最佳概率分布为(0.5,0,0.5)。

3.3　离散序列信道及容量

前面讨论了输入和输出都是单个随机变量的信道及其容量，分析了对称信道、准对称信道、一般离散信道的信道容量和信道最佳概率分布的计算方法。实际中，信道输入、输出常常是离散随机序列。离散序列信道的一般模型如图 3.8 所示。

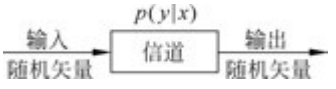

图 3.8　离散序列信道模型

对于无记忆离散序列信道，设序列长度为 N，则信道转移概率可以简化为

$$p(Y\mid X)=p(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N\mid X_1,X_2,\cdots,X_N)=\prod_{i=1}^{N}p(Y_i\mid X_i)\tag{3-31}$$

如果信道是平稳的，则信道转移概率可以进一步简化为

$$p(Y\mid X)=p^N(y\mid x)\tag{3-32}$$

讨论无记忆离散信道：设信道输入符号取自符号集$\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$，信道输出符号取自符号集$\{b_1,b_2,\cdots,b_s\}$，信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p(b_1\mid a_1) & p(b_2\mid a_1) & \cdots & p(b_s\mid a_1)\\ p(b_1\mid a_2) & p(b_2\mid a_2) & \cdots & p(b_s\mid a_2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p(b_1\mid a_r) & p(b_2\mid a_r) & \cdots & p(b_s\mid a_r)\end{bmatrix}$$

设序列长度为 N，信道输入序列记作 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{ir})(i=1,2,\cdots,r^N)$，信道输出序列记作 $\beta_j=(b_{j1},b_{j2},\cdots,b_{js})(j=1,2,\cdots,s^N)$，由于信道输入共有 r^N 种可能取值，信道输出有 s^N 种可能取值，所以 N 次扩展信道的转移概率矩阵为 $r^N\times s^N$ 的矩阵，可以表示为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s^N}\\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s^N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{r^N1} & q_{r^N2} & \cdots & q_{r^Ns^N}\end{bmatrix}$$

对于无记忆信道，上述的转移概率可以简化为

$$q_{nm}=p(\beta_n\mid\alpha_m)=p(b_{n1}b_{n2}\cdots b_{nN}\mid a_{m1}a_{m2}\cdots a_{mN})=\prod_{i=1}^{N}p(b_{ni}\mid a_{mi})\tag{3-33}$$

其中，$m=1,2,\cdots,r^N$；$n=1,2,\cdots,s^N$。

长度为 N 的离散序列平均互信息量为

$$I(X;Y)=H(X^N)-H(X^N\mid Y^N)=H(Y^N)-H(Y^N\mid X^N)$$

定理 3-3 设离散信道的输入序列为 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_N)$，信道输出序列为 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)$，信道的转移概率为 $p(y|x)$，有

(1) 如果信道是无记忆的，则 $I(X;Y)<\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$。

(2) 如果信道输入序列是无记忆的，几个分量相互独立，则 $I(X;Y)>\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$。

(3) 如果输入序列和信道都是无记忆的，则 $I(X;Y)=\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)$。

式中，X_i 和 Y_i 分别为随机序列 X 和 Y 中第 i 个随机变量。

该定理描述了离散信道中随机序列的平均互信息量 $I(X;Y)$ 与信道输入和输出中各个随机变量的平均互信息量之和之间的关系。特别是当信道输入序列和信道都是无记忆时，两者相等。

如果构成信道输入、输出随机序列的各个随机变量来自同一符号集，都服从同一分布，而且信道也是平稳的，则各互信息量满足下列关系，即

$$I(X;Y)=I(X_i,Y_i)\quad i=1,2,\cdots,N$$

于是可以得出结论

$$I(X;Y)=\sum_{i=1}^{N}I(X_i,Y_i)=NI(X,Y) \tag{3-34}$$

由于信道输入随机序列的各个变量都在同一信道中传输，所以有

$$C_i=C \tag{3-35}$$

其中，$i=1,2,\cdots,N$，具有相同的信道容量。于是，可以得到离散无记忆 N 次扩展信道的容量为

$$C_N=NC \tag{3-36}$$

式(3-36)表明，离散无记忆 N 次扩展信道的信道容量等于构成单个离散信道的信道容量的 N 倍，而信道输入序列的最佳分布是构成序列的每个随机变量都达到各自的最佳概率分布。

对于一般的离散无记忆信道的 N 次扩展信道，如果信道输入随机变量是无记忆的，且信道是非平稳的，则有

$$\begin{aligned}C_N&=\max_{p(x)}I(X;Y)=\max_{p(x)}\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)\\&=\sum_{i=1}^{N}\max_{p(x_i)}I(X_i;Y_i)=\sum_{i=1}^{N}C_i\end{aligned} \tag{3-37}$$

有记忆的离散序列信道的分析比无记忆的离散序列信道的分析要复杂得多，特殊情况下可以通过状态变量来分析，这里不进行讨论。

【例 3-7】 某二元离散无记忆信道的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}$$

对信道进行二次扩展，扩展后的信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}(1-p)^2 & p(1-p) & p(1-p) & p^2\\ p(1-p) & (1-p)^2 & p^2 & p(1-p)\\ p(1-p) & p^2 & (1-p)^2 & p(1-p)\\ p^2 & p(1-p) & p(1-p) & (1-p)^2\end{bmatrix}$$

求信道容量 C。

【解】 由扩展信道的转移概率矩阵知，二次扩展信道是对称信道，当输入序列等概率分布时可以达到信道容量 C_2，将扩展后的每种序列排列认为是一个符号，二次扩展信道就等价于四元信道，四元对称信道的信道容量为

$$\begin{aligned}C_2&=\log_2 4-H((1-p)^2,p(1-p),p(1-p),p^2)\\&=2-H((1-p)^2,p(1-p),p(1-p),p^2)(\text{比特/序列})\end{aligned}$$

在实际中经常有信道的并联和串联，下面简单介绍。

1. 串联信道

两个信道的串联形式如图 3.9 所示。

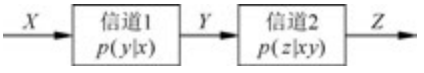

图 3.9　两个信道的串联形式

假设信道 1 的转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}_1$，信道 2 的转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}_2$，串联信道总的转移概率矩阵为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$。

平均互信息量满足

$$I(X;Z)\leqslant I(X;Y)$$
$$I(X;Z)\leqslant I(Y;Z)$$

总的信道容量不会大于各组成信道的信道容量，即

$$C\leqslant \min\{C_1,C_2\} \tag{3-38}$$

可以将该结论扩展到 m 级串联，得到总的转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\prod_{i=1}^{m}\boldsymbol{P}_i$$

根据总的转移概率矩阵即可求出串联信道的容量为

$$C=\max_{p(x)}I(X;Z) \tag{3-39}$$

式中，X 和 Z 分别为串联信道的输入和输出符号。而且满足

$$C\leqslant \min\{C_1,C_2,\cdots,C_m\} \tag{3-40}$$

2. 并联信道

将 m 个相互独立的信道并联，如图 3.10 所示。

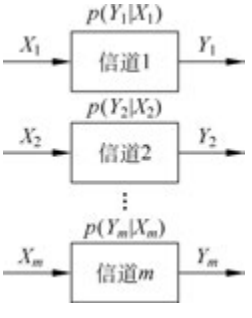

图 3.10　m 个相互独立的信道并联

每个信道输出 Y_i 只与本信道输入 X_i 有关（$i=1,2,\cdots,m$），假设各个信道的转移概率分别为 $p(Y_i\mid X_i)$，那么序列的转移概率为

$$p(Y_1,Y_2,\cdots,Y_m \mid X_1,X_2,\cdots,X_m)=\prod_{i=1}^{m}p(Y_i \mid X_i) \tag{3-41}$$

如果每个信道都是无记忆的，总的信道也是无记忆的，则满足

$$I(X;Y)\leqslant\sum_{i=1}^{m}I(X_i;Y_i) \tag{3-42}$$

独立并联信道的容量为

$$C=\max I(X;Y)\leqslant\sum_{i=1}^{m}C_i \tag{3-43}$$

当输入随机变量 X_i 相互独立，且有 $p(X_1,X_2,\cdots,X_m)$，达到最佳分布时容量最大（为各自信道容量之和）。

3.4 连续信道及其容量

对于连续信源，互信息量具有与离散信源相同的形式，即互信息量为信源的熵与条件熵之差，而连续信道的容量同样定义为互信息量的最大值，在形式上，连续信道的信道容量与离散信道的信道容量是相同的。离散信道的输入输出符号都是离散的，所以用转移概率矩阵加以描述；而连续信道的输入输出符号都是连续变量，所以使用条件概率密度函数描述信道输入、输出变量之间的关系。

3.4.1 连续单符号加性信道

连续单符号加性信道是最简单的单符号信道，信道的输入和输出都是连续随机变量，如图 3.11 所示。



图 3.11 连续单符号加性信道

首先假设信道引入的噪声是均值为 0、方差为 σ^2 的高斯白噪声，概率密度函数为 $p_n(n)=N(0,\sigma^2)$，该噪声的连续熵为

$$H_c(n)=\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma^2 \tag{3-44}$$

根据熵之间的关系可知，单符号连续信道的平均互信息量可以表示为

$$I(X;Y)=H_c(X)-H_c(X \mid Y)$$

$$I(X;Y)=H_c(Y)-H_c(Y \mid X)$$

信道容量定义为

$$C=\max_{p(x)}I(X;Y)=\max_{p(x)}\{H_c(Y)-H_c(Y \mid X)\} \tag{3-45}$$

对于加性噪声信道而言，条件熵 $H_c(Y|X)$ 为

$$H_c(Y \mid X)=H_c(n) \tag{3-46}$$

（证明略）

综合起来，连续单符号加性噪声信道的信道容量为

$$C=\max_{p(x)}I(X;Y)=\max_{p(x)}H_c(Y)-H_c(n) \tag{3-47}$$

如果噪声为高斯白噪声，则有

$$C=\max_{p(x)}H_c(Y)-H_c(n)=\max_{p(x)}H_c(Y)-\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma^2 \tag{3-48}$$

根据限平均功率最大熵定理，只有当信道输出 Y 为高斯分布时，$H_c(Y)$取得最大值，其概率密度函数 $p_y(y)=N(0,P)$，其中，P 表示 Y 的平均功率限制值。信道输入 X 与信道的噪声之间相互独立，且 $y=x+n$，所以其功率可以相加，即 $P=S+\sigma^2$，S 为信道输入 X 的平均功率值。

因为 $p_y(y)=N(0,P)$，$p_n(n)=N(0,\sigma^2)$，$y=x+n$，所以 $p_x(y)=N(0,S)$，即当信道输入 X 是均值为 0、方差为 S 的高斯分布随机变量时，信息速率达到最大值

$$C=\frac{1}{2}\log_2 2\pi eP-\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\sigma^2=\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\frac{P}{\sigma^2}=\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\left(1+\frac{S}{\sigma^2}\right) \tag{3-49}$$

式中，S/σ^2 为信噪比，用 SNR 表示。

需要注意的是，这里研究的信道只存在加性噪声，而对输入功率没有损耗。但在实际通信系统中，几乎都存在大小不等的功率损耗，故输入功率 S 应是经过信道衰减后的功率。例如，信道损耗为$|H(e^{j\omega})|^2$，输入功率 S 在式(3-49)中应修改为 $S|H(e^{j\omega})|^2$。

实际中，信道的噪声不一定服从高斯分布，根据上文讨论可知，只要噪声是加性的，就可以进行计算，下面不加证明地给出均值为 0、方差为 σ^2 的加性非高斯噪声信道容量的上下界，即

$$\frac{1}{2}\log_2 2\pi e\left(1+\frac{S}{\sigma^2}\right)\leqslant C\leqslant\frac{1}{2}\log_2 2\pi eP-H_c(n) \tag{3-50}$$

式(3-50)的意义在于：对于给定的加性噪声信道，如果信道的输入能够使得信道输出为高斯分布，则信道容量到达上限$\frac{1}{2}\log_2 2\pi e(\sigma^2+S)-H_c(n)$，而一般情况下，信道容量是小于该上限的。高斯信道是所有加性信道中最差的信道，任何其他类型加性噪声信道的容量都大于其信道容量。

所以实际中，在平均功率受限的条件下，经常假设噪声服从高斯分布，除了高斯噪声的分析比较方便外，还因为高斯信道的信道容量是最小的，对信道的干扰最大。

3.4.2　多维无记忆加性连续信道

设信道输入的随机序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_N)$，信道输出的随机序列 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_N)$，由于高斯噪声具有代表性，这里只讨论高斯信道。设 $n=(n_1,n_2,\cdots,n_N)$是均值为 0 的高斯噪声序列，由于信道无记忆，则有

$$p(y\mid x)=\prod_{i=1}^{N}p(y_i\mid x_i) \tag{3-51}$$

又因是加性信道，所以得

$$p(n)=p(y\mid x)=\prod_{i=1}^{N}p(y_i\mid x_i)=\prod_{i=1}^{N}p(n_i) \tag{3-52}$$

即噪声序列中各分量是统计独立的。噪声 n 是高斯噪声，又各分量统计独立，所以各分量是均值为 0、方差为 $\sigma_i^2=P_{n_i}$ 的高斯变量。这样，多维无记忆高斯加性信道可等价成 N 个独立的并联高斯加性信道。

由于

$$I(X;Y)\leqslant\sum_{i=1}^{N}I(X_i;Y_i)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log_2\left(1+\frac{P_{s_i}}{P_{n_i}}\right)$$

则有

$$C=\max_{p(x)}I(X;Y)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log_2\left(1+\frac{P_{s_i}}{P_{n_i}}\right)\quad\text{（比特/}N\text{ 维自由度）}\tag{3-53}$$

式(3-53)既是多维无记忆高斯加性连续信道的信道容量，也是 N 个独立并联高斯加性信道的信道容量。

讨论：

(1) 如果各个时刻($i=1,2,\cdots,N$)上的噪声都是均值为0、方差为 P_n 的高斯噪声，则信道容量为

$$C=\frac{N}{2}\log_2\left(1+\frac{P_s}{P_n}\right)\quad\text{（比特/}N\text{ 维自由度）}\tag{3-54}$$

当且仅当输入信号 X 的各分量统计独立，并且都是均值为0、方差为 P_s 的高斯变量时，信息传输概率达到最大值。

(2) 如果各个时刻($i=1,2,\cdots,N$)上的噪声都是均值为0、方差为 P_{n_i} 的高斯噪声，但输入信号的总平均功率受限，则该约束条件为

$$E\left[\sum_{i=1}^{N}X_i^2\right]=P\tag{3-55}$$

那么，此时各时刻的信号平均功率 P_{s_i} 应如何分配？其信道容量应等于多少？

由于

$$I(X;Y)=I(X_1,X_2,\cdots,X_N;Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)\leqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log_2\left(1+\frac{P_{s_i}}{P_{n_i}}\right)$$

其中，$P_{s_i}=E[X_i^2]$，所以约束条件为 $\sum_{i=1}^{N}P_{s_i}=P$。只有当式中各分量是均值为0、方差为 P_{s_i} 的统计独立的高斯变量时，上式的等式才成立。

极限问题 $C=\max_{p(x)\sum_{i=1}^{N}P_{s_i}=P}I(X;Y)$，就是计算在约束条件 $\sum_{i=1}^{N}P_{s_i}=P$ 的情况下，使 $I(X;Y)$达到最大。这是一个标准的求极大值的问题，可以用拉格朗日乘法来计算。

构造辅助函数为

$$F(P_{s_1},P_{s_2},\cdots,P_{s_N})=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{P_{s_i}}{P_{n_i}}\right)+\lambda\sum_{i=1}^{N}P_{s_i}$$

对变量求偏导数，并令其为0，即

$$\frac{\partial F(P_{s_1},P_{s_2},\cdots,P_{s_N})}{\partial P_{s_i}}=0\quad i=1,2,\cdots,N$$

整理后可以得到下列方程，即

$$\frac{1}{2}\frac{1}{P_{s_i}+P_{n_i}}+\lambda=0\quad i=1,2,\cdots,N$$

$$P_{s_i}+P_{n_i}=-\frac{1}{2\lambda}=\gamma(\text{常数})\quad i=1,2,\cdots,N$$

$$P_{s_i}=\gamma-P_{n_i}$$

上式计算得到的 P_{s_i} 可能会出现负数，这表明独立并联信道中，某一信道的噪声平均功率大于该信道分配得到的信号平均功率，所以该信道就无法利用。因此，选取 $P_{s_i}=(\gamma-P_{n_i})^+$，其中$(x)^+$符号表示正数，即

$$(x)^+=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

而常数 γ 的选择由约束条件求得

$$\sum_{i=1}^{N}(\gamma-P_{n_i})^+=P$$

于是，可得信道容量

$$C=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}\log_2\left(1+\frac{(\gamma-P_{n_i})^+}{P_{n_i}}\right)\tag{3-56}$$

上述结论说明，在 N 个独立信道并联构成的高斯加性通道中，当各分信道的噪声平均功率不相等(或多维无记忆高斯加性信道，各时刻噪声分量的平均功率不相等)时，为达到最大的信息传输率，要对输入信号的总能量进行适当的分配，其分配按式(3-57)进行，即

$$\sum_{i=1}^{N}(\gamma-P_{n_i})^+=P\tag{3-57}$$

即当常数 $\gamma<P_{n_i}$ 时，此信道(或此时刻信号分量)不分配能量，不传输任何信息；当 $\gamma>P_{n_i}$ 时，在这些信道(或此时刻信号分量)中分配能量，并使 P_{s_i} 加上 P_{n_i} 等于常数 γ。这样得到的信道容量最大，即在噪声大的信道少传输甚至不传输信息，而在噪声小的信道多传输信息，从而有利于信息传输。

3.4.3　加性高斯白噪声波形信道

上面讨论的连续信道中，信道的输入、输出变量的幅度取值是连续变化的，而在时间上是离散的。而实际中的物理信道都是波形信道，信道的输入和输出在幅度上都是连续变化的。对于这样的信道，应当使用随机过程对其进行研究，首先对加性高斯白噪声波形信道进行介绍。

假设信道的输入、输出都是平稳随机过程，在限频 F、限时 T 条件下将波形信道转换为多维连续信道进行分析。设在时间 T 内，将信道输入、输出随机过程在时间上离散为维数为 N 的随机序列 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_N)$和 $Y=(Y_1,Y_2,\cdots,Y_N)$，从而可以得到波形信道的平均互信息为

$$\begin{aligned}I[x(t);y(t)]&=\lim_{N\to\infty}I(X;Y)\\&=\lim_{N\to\infty}[H_c(X)-H_c(X\mid Y)]\\&=\lim_{N\to\infty}[H_c(Y)-H_c(Y\mid X)]\end{aligned}$$

对于波形信道而言，一般讨论单位时间内的信息传输速率 R_t，R_t 定义为

$$R_t = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} I(X;Y)(\text{b/s})$$

信道容量 C_t 定义为

$$C_t = \max_{p(x)} \left[\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} I(X;Y) \right] \tag{3-58}$$

通常情况下，假设波形信道中的噪声是均值为 0、双边功率谱密度为 $n_0/2$ 的高斯白噪声随机过程。同样可以将波形信道中的噪声在时间上离散化，在时间 T 内使用 N 维随机序列表示，由于信道带宽总是受限的，设带宽为 W，在时间 T 内，随机序列长度取为

$$N = 2WT$$

这样就将波形信道变换为多维无记忆高斯加性信道，所以得出下列结论，即

$$C = \max_{p(x)} I(X;Y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{P_{s_i}}{P_{n_i}} \right) \tag{3-59}$$

式中，P_{n_i} 为每个噪声分量的功率 $P_{n_i} = n_0/2$，即双边功率谱密度；P_{s_i} 为每个信号样本值的平均功率，当信号受限于功率 P_s 时，满足

$$P_{s_i} = \frac{P_s}{2W} \tag{3-60}$$

式中，W 为信号带宽，于是得到信道容量为

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \log_2 \left(1 + \frac{P_{s_i}}{P_{n_i}} \right) = \frac{N}{2} \log_2 \left(1 + N \frac{P_s/2W}{n_0/2} \right)$$

$$= WT \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{n_0 W} \right) \tag{3-61}$$

所以波形信道的信道容量为

$$C_t = \lim_{T\to\infty} \frac{C}{T} = W \log_2 \left(1 + \frac{P_s}{n_0 W} \right) \tag{3-62}$$

式中，P_s 为信号的平均功率；$n_0 W$ 为高斯白噪声在带宽为 W 内的平均功率。

信道的容量是带宽和信噪功率比的函数。这就是著名的香农公式。当信道输入是平均功率受限的高斯白噪声信号时，信息传输率才能达到该信道容量。

然而，实际中信道一般为非高斯噪声波形信道，由于噪声熵小于高斯噪声的噪声熵，所以信道容量以高斯加性信道的信道容量为下限。

根据香农公式，可以得出下列结论：

（1）当带宽 W 一定时，信噪比 SNR 与信道容量 C_t 成对数关系。若 SNR 增大，C_t 就增大，但增大到一定程度后就趋于缓慢。这说明增加输入信号功率有助于容量的增大，但该方法是有限的。另外，降低噪声功率也是有用的，当 n_0 趋向于 0 时，C_t 趋向于无穷大，即无噪声信道的容量为无穷大。

（2）当输入信号功率 P_s 一定时，增加信道带宽，容量可以增加，但到一定阶段后增加变得缓慢。因为当噪声为加性高斯白噪声时，随着 W 的增加，噪声功率 $n_0 W$ 也随之增加，当 W 趋向于 0 时，C_t 趋向于 C_∞，利用关系式 $\ln(1+x) \approx x$（x 很小时）可求出 C_∞ 值，即当带宽不受限制时，传送 1b 信息，信噪比最低只需约 -1.6dB，这就是香农限，是加性高斯噪声信道信息传输率的极限值，是一切编码方式所能达到的理论极限。能获得可靠的通信，实际

值往往都比这个值大得多。

(3) C_t 一定时，带宽 W 增大，信噪比 SNR 可降低，即两者是可以互换的。若有较大的传输宽带，则在保持信号功率不变的情况下，可允许较大的噪声，即系统的抗噪声能力提高。无线通信中扩频系统就是利用了这个原理，将所需传送的信号扩频，使之远远大于原始信号宽带，以增强抗干扰的能力。

最后，给出连续信道编码定理。

定理 3-4　对于限带高斯白噪声加性信道，噪声功率为 P_n，带宽为 W，信号平均功率受限于 P_s，有

(1) 当信道的信息传输率 $R \leqslant C = W\log_2(1+P_s/P_n)$ 时，总是可以找到一种信道编码在信道中以 R 传输信息，而差错概率为任意小。

(2) 当 $R > C$ 时，不存在一种信道编码使得以 R 传输信息，而差错概率为任意小。

3.5　信源与信道的匹配

实际通信中，经常使用离散信道分析信息传输问题。对于给定离散信道，其容量是存在的，而且是一个确定量，只有信源输入满足最佳分布时，信息的传输才能够达到信道容量，即只有特殊分布的信源才能够使信息传输率最大。

一般信源与信道连接时，信道的信息传输率 R 等于信源与信宿之间的平均互信息量 $R = I(X,Y)$。信源的分布并不总是满足信道输入的最佳概率分布，所以信息传输率总是小于信道容量的。当信道的信息传输率达到信道容量时，称为信源与信道达到匹配；否则信道有冗余。

定义：设信道的信息传输率 $R = I(X,Y)$，信道容量为 C，信道的冗余度定义为

$$\text{信道冗余度} = C - I(X,Y) \tag{3-63}$$

相对冗余度定义为

$$\frac{C - I(X;Y)}{C} = 1 - \frac{I(X;Y)}{C} \tag{3-64}$$

一般情况下，信源输出符号之间总是存在较强的相关性，而且信源的分布与信道难以匹配。当离散信道是对称的或者接近对称时，为了实现有效的信息传输，要求信源输出符号分布尽可能接近信道要求的等概率分布，为此可以采用信源编码技术去除信源符号之间的相关性，并且经过适当的变换后，信源编码输出符号分布尽可能接近等概率分布，就可使信道的信息传输率 R 达到或者接近信道容量，实现信源与信道的匹配。

如果信道的信息传输率 R 小于信道容量 C，可以对信源输出进行适当的信道编码，实现无误差的信息传输；如果信道的信息传输率 R 大于信道容量 C，则实现无差错信息传输是不可能的。

3.6　MATLAB 仿真实验

3.6.1　任意离散无记忆信道容量的计算实验

1. 实验目的

(1) 理解信道容量的基本概念以及数学表达式。

（2）掌握信道容量极值的函数关系。

（3）理解离散无记忆信道(DMC)容量的迭代算法。

（4）掌握 DMC 容量的 MATLAB 实现方法。

2. 实验要求

已知输入的任一信道的条件转移概率矩阵，编程求出该信道的信道容量以及与之对应的最佳输入分布和输出分布。要求：

（1）检查所输入信道的条件转移概率矩阵的正确性。

（2）求出最佳输入、输出分布。

（3）求出迭代算法中的迭代次数。

（4）记录实验结果。

3. 实验原理与程序代码

（1）实验原理。

信道容量指信道的最大信息传输速率，即

$$C=\max_{p(x)}\{I(X;Y)\}$$

在条件转移概率 $p(b_j|a_i)$已知的情况下，平均互信息 $I(X;Y)$是信源输入概率分布 $p(a_i)$上的凸函数，存在唯一极大值。也就是说可以找到某种概率分布 $p(a_i)$，使 $I(X;Y)$达到最大。公式如下：

$$I(X;Y)=H(X)-H(X\mid Y)=H(X)=H(Y)$$

（2）程序代码。

```
%离散无记忆信道容量计算
clear;
format short;

%输入信道转移矩阵
P = input('please input channel transfer matrix P: ');
[n, m] = size(P);

%输入迭代精度
e = input('please input iteration accuracy e = ');

%检验转移矩阵行和是否为1(概率归一性)
for i = 1:n
    if abs(sum(P(i,:)) - 1) > 1e-8
        error('P is error, sum of each row vector is not 1!');
    end
end

%检验矩阵所有元素是否在[0,1]区间内
for i = 1:n
    for j = 1:m
        if P(i,j) < 0 || P(i,j) > 1
            error('P is error, element value is out of [0,1]!');
        end
    end
```

```
end

% 初始化:输入概率设为等概率分布
Pa = ones(1, n) / n;
Paa = Pa;                    % 迭代过程中的输入分布
count = 0;                   % 迭代次数计数

while 1
    Pb = Paa * P;            % 计算输出概率分布

    % 计算每个输入符号的指数项
    s1 = zeros(1, n);
    for i = 1:n
        a = 0;
        for j = 1:m
            if P(i,j) ~= 0
                a = a + P(i,j) * log(P(i,j) / Pb(j));
            end
        end
        s1(i) = exp(a);
    end

    s2 = Paa * s1.';         % 计算加权和 Σ p_i * s1(i)
    C1 = log(s2);            % 容量下界(自然对数单位)
    C2 = log(max(s1));       % 容量上界(自然对数单位)
    count = count + 1;

    % 判断是否收敛
    if abs(C1 - C2) < e
        C = C1 / log(2);     % 自然对数转换为比特单位,1/log(2)≈1.4427
        break;
    else
        Paa = (Paa .* s1) / s2; % 更新输入概率分布
    end
end

% 输出结果
disp('input channel transfer matrix: ');
disp(P);
disp('initial equal input probability distribution: ');
disp(Pa);
disp('best input probability distribution: ');
disp(Paa);
disp('channel capacity (bit/symbol): ');
disp(C);
disp('output probability distribution: ');
disp(Pb);
disp('number of iterations: ');
disp(count);
```

(3) 结果记录：将实验结果记录在表 3.1 中。

表 3.1 信道容量计算结果

信道矩阵	$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.2 & 0.1\\0.2 & 0.1 & 0.7\\0.1 & 0.7 & 0.2\end{bmatrix}$	$P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.1 & 0.8\end{bmatrix}$	$P=\begin{bmatrix}0.6 & 0.3 & 0.1\\0.3 & 0.6 & 0.1\end{bmatrix}$
迭代精度	0.01	0.01	0.01
信道容量（比特/符号）			
初始输入分布			
最佳输入分布			
输出分布			
迭代次数			
迭代时间			

4. 实验思考与改进

（1）调整误差精度，记录实验结果并进行对比分析，说明精度对哪些参数有影响，并解释缘由。

（2）改变信道转移矩阵，记录信道容量、分布与迭代次数的变化；总结数据规律并在此基础上对信道容量作理论估计，与实际计算值进行对比。

（3）保持矩阵维度不变，修改矩阵内元素的值，观察信道容量、分布与迭代次数的变化，并分析原因。

（4）在同一信道下修改精度要求，对比程序运行时间的差异；在同一精度下更换信道矩阵，再次对比运行时间。基于测试结果优化程序代码，以最短运行时间完成迭代计算。

（5）信道转移矩阵的合法性检测是高频复用功能，请将矩阵检测程序封装为独立函数，实现模块化，便于后续实验调用。

（6）试设计穷举（遍历搜索）法程序计算信道容量，分析该方法是否可行、存在哪些缺点。

（7）探索基于贪婪法（贪心算法）的信道容量求解思路，并与迭代法对比，分析其在时间效率上是否具有优势。

3.6.2 加性高斯白噪声波形信道容量的计算实验

1. 实验目的

（1）理解波形信道的基本概念。

（2）掌握信道容量与信号功率、噪声功率的关系。

（3）掌握信道容量计算的各种极限情况。

（4）掌握高斯白噪声（AWGN）波形信道容量的 MATLAB 实现方法。

2. 实验要求

已知 AWGN 波形信道的带宽 W 与信噪比 SNR，计算其信道容量。要求：

（1）由给定的 W 与 SNR 计算信道容量 C。

（2）当 SNR 固定不变时，绘制 C 与 W 之间的函数曲线。

（3）当 W 固定不变时，绘制 C 与 SNR 之间的函数曲线。

（4）当 SNR 与 W 均不固定时，绘制 C 与它们的函数曲线。

（5）记录实验结果。

3. 实验原理与程序代码

1）由给定的 W 与 SNR 计算信道容量 C（以 $W=3000\text{Hz}$，SNR＝20dB 为例）

（1）实验原理。

AWGN 波形信道单位时间的信道容量计算公式为

$$C=W\log_2(1+\text{SNR})$$

（2）程序代码。

```
% 清除工作空间中的变量
clear;
% 设置输出显示格式为短格式
format short;
% 固定带宽 W = 3 kHz
W = 3000; % 单位:赫兹 (Hz)
% 固定信噪比 SNR = 20 dB
SNR_dB = 20;
% 将信噪比从 dB 形式转换为线性形式
SNR = 10^(SNR_dB / 10);
% 计算信道容量 C
C = W * log2(1 + SNR);
% 显示信道容量
disp('AWGN continuous channel capacity: (bit/s)');
disp(C);
```

（3）可更换不同信噪比与信道带宽，计算并记录对应实验结果。

2）当 SNR 固定不变时，绘制 C 与 W 之间的函数曲线（以 W 取值为 0～5000，PN0_db＝10dB 为例）

（1）实验原理。

由于信噪功率比 $\text{SNR}=\dfrac{P_s}{n_0W}$ 与带宽 W 有关，因此只能固定 $\dfrac{P_s}{n_0}$。此时信道容量是带宽的函数：

$$C=W\log_2\left(1+\frac{P_s}{n_0W}\right)$$

当 W 趋近于零时，信道容量 C 也趋近于零；但是当 W 趋近于无限大时，信道容量 C 不一定趋于无穷大。

（2）程序代码。

```
% 清除工作空间中的变量
clear;
% 设置输出显示格式为短格式
format short;
% 定义带宽范围 W (0～5000 Hz)
W = linspace(0.1, 5000, 5000); % 从 0.1 Hz 到 5000 Hz,共 5000 个点
% 固定信噪比 PNO_dB = 10 dB
PNO_dB = 10;
% 将信噪比从 dB 形式转换为线性形式
PNO = 10^(PNO_dB / 10);
% 计算信道容量 C
```

```
C = W .* log2(1 + PNO ./ W);
%绘制信道容量与带宽的关系曲线
plot(W, C);
title('Capacity vs Bandwidth in an AWGN Channel');
xlabel('W (Hz)');
ylabel('C (bit/s)');
grid on;
%在带宽为 0 时,信道容量为 0
C(W == 0) = 0;
%重新绘制,包括 W = 0 的情况
plot(W, C);
title('Capacity vs Bandwidth in an AWGN Channel');
xlabel('W (Hz)');
ylabel('C (bit/s)');
grid on;
```

（3）记录实验结果。

3）当 W 固定不变时，绘制 $C=f(\mathrm{SNR})$ 函数曲线（以 $W=3000\mathrm{Hz}$，PN0_dB 范围为 $-20\sim50\mathrm{dB}$ 为例）

（1）实验原理。

当带宽 W 固定时，信道容量是信噪比的单调递增函数。当信噪比趋于零时，信道容量趋于零；当信噪比趋于无限大时，信道容量趋于无穷大。

（2）程序代码。

```
clear;
%设置输出显示格式为短格式
format short;
%固定带宽 W = 3000 Hz
W = 3000;
%定义 PNO_dB 的范围从 - 20dB 到 50dB
PNO_dB = -20:1:50;
%将 PNO_dB 转换为线性形式的信噪比 SNR
PNO = 10.^(PNO_dB / 10);
%计算信道容量 C
C = W .* log2(1 + PNO);
%绘制信道容量 C 随 PNO_dB 变化的曲线
plot(PNO_dB, C);
title('Capacity vs SNR in an AWGN Channel');
xlabel('PNO_dB (dB)');
ylabel('C (bit/s)');
grid on;
```

（3）记录实验结果。

4）当 W、SNR 均不固定时，绘制 $C=f(W,\mathrm{SNR})$ 的函数曲线

（1）实验原理。

由 AWGN 波形信道容量公式 $C=W\log_2(1+\mathrm{SNR})$ 知，改变 SNR 与 W 均可影响信道容量，可通过三维曲面直观展示两者对信道容量的联合作用。

（2）程序代码。

```
%%定义参数范围
%带宽 W 的范围:1 Hz 到 100 Hz,均匀取 100 个点
```

```
W = linspace(1, 100, 100);
% 信噪比 SNR 的范围: -10 dB 到 30 dB,均匀取 100 个点
SNR_dB = linspace(-10, 30, 100);
% % 生成网格坐标矩阵
% 使用 meshgrid 生成 W 和 SNR_dB 的二维网格矩阵
% W_grid: 100x100 矩阵,每行重复 W 的取值
% SNR_dB_grid: 100x100 矩阵,每列重复 SNR_dB 的取值
[W_grid, SNR_dB_grid] = meshgrid(W, SNR_dB);
% % 将 SNR 从分贝(dB)转换为线性值
% 公式: SNR_linear = 10^(SNR_dB/10)
SNR_linear_grid = 10.^(SNR_dB_grid / 10);
% % 计算信道容量 C = W * log2(1 + SNR)
% 逐元素计算容量(注意使用.* 进行矩阵元素乘法)
C = W_grid .* log2(1 + SNR_linear_grid);
% % 绘制三维曲面图
figure;
surf(W_grid, SNR_dB_grid, C);                    % 绘制曲面
shading interp;                                  % 平滑着色
colormap('jet');                                 % 设置颜色映射
colorbar;                                        % 显示颜色条
% % 添加标签和标题
xlabel('Bandwidth W (Hz)', 'FontSize', 12);
ylabel('SNR (dB)', 'FontSize', 12);
zlabel('Capacity C (bps)', 'FontSize', 12);
title('AWGN Channel Capacity: C = W log2(1 + SNR)', 'FontSize', 14);
% % 调整视角和坐标轴
view(45, 30);                                    % 设置视角(方位角 45°,俯仰角 30°)
grid on;                                         % 显示网格
```

(3) 记录实验结果。

本章小结

本章围绕信道与信道容量核心主题,系统构建了信道建模与容量分析的完整知识体系,为理解通信系统的传输极限提供了理论支撑。

本章首先阐释了信道的基本概念,包括信道的定义与分类方式、核心信道参数,明确了信道容量的物理意义与数学定义,搭建了全章的理论分析框架。在此基础上,按信道类型逐层展开容量计算方法:针对离散信道,分别讲解了无干扰离散信道、对称离散信道的信道容量求解方法,并延伸至一般离散信道的容量计算思路;进一步拓展到离散序列信道,分析了多符号序列传输下的信道容量特性。针对连续信道,依次介绍了连续单符号加性信道、多维无记忆加性连续信道的容量规律,重点讲解了加性高斯白噪声波形信道的容量公式,揭示了带宽、信噪比与信道容量之间的核心关系。此外,本章还阐述了信源与信道的匹配原理,说明了通过优化信源输出适配信道特性、实现信息高效传输的思路。

为强化理论与实践的结合,本章配套了两项 MATLAB 仿真实验,分别实现任意离散无记忆信道容量、加性高斯白噪声波形信道容量的编程计算。通过本章的学习,读者可掌握不同类型信道的建模方法与容量分析方法,理解信道容量对通信系统传输能力的边界约束,为后续信源编码、信道编码等章节的学习奠定坚实的理论与实践基础。

本章习题

3-1 填空题。

（1）有记忆信道的当前输出不仅与_____输入有关，还与_____输入有关。

（2）如果信道给定，那么 $I(P_X, P_{Y/X})$ 输入概率 P_X 的_____凸函数；如果信源给定，那么 $I(P_X, P_{Y/X})$ 是转移概率 $P_{Y/X}$ 的_____凸函数。

（3）$H(Y|X)$ 叫作信道的_____或_____，表明信道因噪声干扰所呈现的无序性程度，噪声熵为零的信道称为确定信道。

（4）衡量一个信息传递系统的好坏，有两个主要指标：其一，_____；其二，_____。

（5）使得给定信道_____的输入分布，称为最佳输入（概率）分布，记为 P_X^*。

3-2 判断题。

（1）信道容量 C 不仅与信道转移概率有关，也与信道的输入分布有关。（　　）

（2）噪声熵为 0 的信道称为确定信道。（　　）

（3）离散对称信道输入等概率分布时，输出未必也等概率分布。（　　）

（4）一般 DMC 达到信道容量的充要条件为各信源符号的偏互信息均等于信道容量。（　　）

（5）信道是 DMC 的充要条件是输入输出序列之间的转移概率等于各个时刻单个符号对转移概率之连乘。（　　）

3-3 选择题。

（1）若信道和信源均无记忆，以下结论不成立的是（　　）。

A. $I(\overline{X};\overline{Y}) = \sum_{k=1}^{N} (X_k;Y_k)$　　B. $I(\overline{X};\overline{Y}) = NI(X;Y)$

C. $I(\overline{X};\overline{Y}) < \sum_{k=1}^{N} (X_k;Y_k)$　　D. $C^N = NC$

（2）关于两个独立信道 Q_1、Q_2 串联（图 3.12），下列说法不正确的是（　　）。

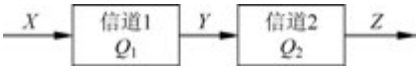

图 3.12　串联信道

A. 串联信道的信道容量与组成串联信道的各分信道的信道容量存在精确的定量关系

B. 数据处理过程中，随着数据的不断处理，从处理后的数据中所得的原始信息不会增加

C. 串联信道的转移概率矩阵是各单元信道的转移概率矩阵之积

D. XYZ 组成一个马尔可夫链

（3）信源的输出与信道的输入匹配的目的不包括（　　）。

A. 符号匹配　　B. 概率匹配

C. 功率匹配　　D. 降低信道冗余度

(4) 下列关于连续信道的说法中，不正确的是(　　)。

A. 连续信道是时间离散、幅值连续的信道

B. 连续信道的统计特性由转移概率分布函数描述

C. 加性噪声信道的转移概率密度函数等于噪声的概率密度函数

D. 对于无记忆加性噪声信道，若输入信号服从高斯分布，且噪声的平均功率受限，则服从高斯分布的噪声使信道平均互信息量达到最小

(5) 已知香农公式 $C=B\log_2\left(1+\frac{P_s}{n_0B}\right)$，不能得出的结论是(　　)。

A. 在信噪比不变的前提下，增大频带，可增大信道容量

B. 频带不变时，增大信噪比，即可增大信道容量 C

C. 在 P_s 增大很多之后，继续增大信号功率来实现信道容量的增大是一个有效途径

D. 用扩频方法来增大信道容量，其作用是有限的

3-4　设二进制对称信道的转移概率矩阵为 $\begin{bmatrix}2/3 & 1/3\\ 1/3 & 2/3\end{bmatrix}$。

(1) 若 $p(x_0)=3/4$，$p(x_1)=1/4$，求 $H(X)$、$H(X|Y)$、$H(Y|X)$和 $I(X;Y)$。

(2) 求该信道的信道容量及其达到信道容量时的概率分布。

3-5　某信源发送端有两个符号：$x_i(i=1,2)$、$p(x_i)=a$，每秒发出一个符号。接收端有 3 种符号 $y_j(j=1,2,3)$，信道转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 1/2 & 1/4 & 1/4\end{bmatrix}$。

(1) 计算接收端的平均不确定度。

(2) 计算由于噪声产生的不确定度 $H(Y|X)$。

(3) 计算信道容量。

3-6　在干扰离散信道上传输符号 1 和 0，在传输过程中每 100 个符号发生一个错传的符号，已知 $p(0)=1/2$，$p(1)=1/2$，信道每秒内允许传输 1000 个符号，求此信道的信道容量。

3-7　发送端有 3 种等概率符号(x_1，x_2，x_3)，$p(x_i)=1/3$，接收端收到 3 种符号(y_1，y_2，y_3)，信道转移概率矩阵为

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.3 & 0.2\\ 0.4 & 0.3 & 0.3\\ 0.1 & 0.9 & 0\end{bmatrix}$$

(1) 求接收端收到一个符号后得到的信息量 $H(Y)$。

(2) 计算噪声熵 $H(Y|X)$。

(3) 计算接收端收到一个符号 y_2 的差错概率。

(4) 计算从接收端看的平均差错概率。

(5) 计算从发送端看的平均差错概率。

(6) 从转移概率矩阵中能看出该信道的好坏吗？

(7) 计算发送端的 $H(X)$和 $H(X|Y)$。

3-8　一个平均功率受限制的连续信道，其通频带为 1MHz，信道上存在白色高斯噪声。

（1）已知信道上的信号与噪声的平均功率比值为10，求该信道的信道容量。

（2）信道上的信号与噪声的平均功率比值降至5，要达到相同的信道容量，信道通频带应为多大？

（3）若信道通频带减小为0.5MHz时，要保持相同的信道容量，信道上的信号与噪声的平均功率比值应为多大？

3-9　若有一信源，每秒发出2.55个信源符号。将此信源的输出符号送入某个二元信道中进行传输（假设信道是无噪无损的），而信道每秒只传递两个二元符号。

（1）试问信源不通过编码能否与信道连接？

（2）若通过适当编码能否在此信道中进行无失真传输？

3-10　一家快餐店提供汉堡包和牛排，当顾客进店以后只需向厨房喊一声“B”或“Z”就表示他点的是汉堡包或牛排，不过通常8%的概率厨师都可能会听错。一般进店的顾客90%会点汉堡包，10%会点牛排。问：

（1）这个信道的信道容量是多少？

（2）每次顾客点菜时提供的信息是什么？

（3）这个信道可不可以正确地传递顾客点菜的信息？